



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Fundação Instituída nos termos da Lei 5.152 de 21/10/1966 - São Luís - MA

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Armando Defesa Brilhante

Sobre o Método dos Horizontes Móveis Aplicado ao Desenvolvimento de Defensivos Auto-replicantes

São Luís - MA
2024

Armando Defesa Brilhante 

Sobre o Método dos Horizontes Móveis Aplicado ao Desenvolvimento de Defensivos Auto-replicantes

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso)
apresentada à Coordenadoria dos cursos de
Matemática, da Universidade Federal do Ma-
ranhão, como requisito parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Matemática.

Curso de Matemática – Licenciatura Plena

Universidade Federal do Maranhão

Orientador: Prof. Me. Paredro Rocha Essencial

São Luís - MA

2024

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Diretoria Integrada de Bibliotecas/UFMA

Brilhante, Armando Defesa.

Sobre o Método dos Horizontes Móveis Aplicado ao
Desenvolvimento de Defensivos Auto-replicantes/
Armando Defesa Brilhante.

- 2024.
25 p.

Orientador(a): Paredro Rocha Essencial.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática,
Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2024.

1. Método dos Horizontes Móveis. 2. Defensivos
Auto-Replicantes. 3. Utopia I. Essencial, Paredro Rocha.
II. Título.

Sobre o Método dos Horizontes Móveis Aplicado ao Desenvolvimento de Defensivos Auto-replicantes

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) apresentada à Coordenadoria dos cursos de Matemática, da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho **APROVADO**. São Luís - MA, 30/02/2024

Prof. Me. Paredro Rocha Essencial
DEMAT/UFMA
Orientador

Prof.^a Dr.^a Regedora Prudente Sublime
DEMAT/UFMA
Primeira Examinadora

Prof. Dr. Zelador Ponderado Distinto
DEMAT/UFMA
Segundo Examinador

Às minhas sementes. Germinem!

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Paredro Rocha Essencial que com seu grande conhecimento, capacidade crítica e paciência, orientou-me com maestria, aos meus amados pais Passos Dias Brilhante (*in memoriam*) e Graça Defesa Plena pela educação que me deram e pelo incentivo dado até hoje, à minha esposa Ternura Sempiterna Brilhante e aos meus amados filhos (Rolando, Firmando, e Primavera) pelos incentivos e carinhos transmitidos na labuta do dia a dia, aos meus irmãos e amigos que me deram apoio nessa jornada de tantos obstáculos e conquistas.

“Cada fracasso nos ensina algo que necessitávamos aprender.”

Charles Dickens (1812 – 1870)

Resumo

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Palavras-chave: Método dos Horizontes Móveis, Defensivos Auto-replicantes, Utopia

Abstract

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Keywords: moving horizon method, self replicant pesticide, extinction

Sumário

	INTRODUÇÃO	9
	Capítulos e seções sem numeração	9
1	DESENVOLVIMENTOS PRELIMINARES	11
1.1	Exemplo de seção secundária	11
1.1.1	Exemplo de seção terciária	11
1.2	Outra seção secundária	11
1.2.1	Outro exemplo de seção terciária	11
1.2.1.1	Um exemplo de seção quaternária	11
1.2.1.1.1	Um exemplo de seção quinária	12
1.3	Alíneas, subalíneas e incisos	12
2	UM POUCO DE MATEMÁTICA	14
2.1	Ambientes para Enunciados	14
2.1.1	O ambiente theorem	14
2.1.2	O ambiente corollary	15
2.1.3	O ambiente lemma e outros	16
2.1.4	Demonstrações e Soluções	16
2.2	Ilustrações	20
2.3	Tabelas	21
3	GERENCIADOR DE REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	22
3.1	Monografias	23
	REFERÊNCIAS	25

Introdução

Como todos sabem, o Método dos Horizontes Móveis não existe de fato, sendo apenas um recurso criativo, fruto da lavra de uma mente delirante, para escrever as linhas deste modelo de monografia. O nome do método é um referência à citação bem conhecida do cineasta argentino Fernando Birri (muitas vezes erroneamente creditada ao escritor uruguaio Eduardo Galeano) sobre a utopia

A utopia está lá no horizonte. Me aproximo dois passos, ela se afasta dois passos. Caminho dez passos e o horizonte corre dez passos. Por mais que eu caminhe, jamais alcançarei. Para que serve a utopia? Serve para isso: para que eu não deixe de caminhar.

Talvez o motivo da confusão entre os autores seja que o segundo cita o primeiro em sua obra *Las Palabras Andantes*, publicada em 1994. Abaixo, tem-se um trecho da entrevista, de 23 de maio de 2011, no programa *Singulares* da emissora espanhola TV3

<https://www.youtube.com/watch?v=Z3A9NyYZj8>

em que Eduardo Galeano conta a história da citação de Fernando Birri. Segue-se declamando o poema *El Derecho ao Delirio*.

Capítulos e seções sem numeração

No início do código deste capítulo observe o bloco

```
\chapter*{Introdu\c{c}\~{a}o}
\addcontentsline{toc}{chapter}{INTRODU\c{C}\~{A}O}
\pagestyle{empty}
```

O comando `\chapter` aparece acompanhado de um asterisco. Isso significa que este capítulo não será enumerado, e, de acordo com o padrão estabelecido pela NBR 14.724:2011, seção 5.2.4, o título aparecerá centralizado. Na linha seguinte aparece o comando

```
\addcontentsline{toc}{chapter}{INTRODU\c{C}\~{A}O}
```

que tem por efeito adicionar uma linha ao Sumário (TOC – Table Of Contents), com a hierarquia de um capítulo ¹, o conteúdo `INTRODU\c{C}\~{A}O` (maiúsculas). Já o comando `\pagestyle{abntchapfirst}` deixa no cabeçalho apenas o número da página.

Mais adiante no código, ao definir a presente seção, encontra-se o bloco

```
\def \intrsecao {Capítulos e seções sem numeração}
\section*{\intrsecao}
\addcontentsline{toc}{section}{\quad\quad\,}\intrsecao}
```

Observe-se que não é necessário definir uma variável (`\intrsecao`) com o nome da seção. Aqui o fizemos apenas para que a última linha não ficasse demasiadamente longa, e atrapalhasse esta apresentação. O comando `\section*{\intrsecao}` significa que a seção não será numerada, e isso implica também que não aparecerá no Sumário. Se fosse usada a versão sem asterisco, no texto e no sumário, a seção seria referenciada com a numeração **0.1**, que não é desejável. A linha seguinte

```
\addcontentsline{toc}{section}{\quad\quad\,}\intrsecao}
```

adiciona uma linha ao Sumário com a hierarquia de uma seção, e com o conteúdo `\quad\quad\,}\intrsecao`. Observe-se que o conteúdo `\quad\quad\,` cria um espaçamento necessário para alinhar os conteúdos no Sumário.

É isso que se espera, do ponto de vista do estilo tipográfico, de um capítulo de introdução.

A mesma técnica descrita acima pode ser empregada para qualquer capítulo não numerado. Por exemplo, utilizou-se neste modelo para os **Anexos**.

¹ Na terminologia da ABNT (ver NBR 6024:2012) os capítulos são seções primárias.

1 Desenvolvimentos Preliminares

Ao criar ou editar arquivos para a sua monografia certifique-se que cada arquivo seja salvo sob a codificação UTF8.

A norma NBR 6027 : 2012, a qual trata especificamente do Sumário, não obriga que os títulos dos capítulos estejam em caixa alta.

As regras para as divisões textuais de um documento estão na NBR 6024 : 2012, e em sua seção 4.1 alínea *j*) sugere-se o uso dos “recursos gráficos de maiúscula, negrito, itálico ou sublinhado” para os títulos dessas divisões. Neste modelo atende-se à sugestão. Observe.

1.1 Exemplo de seção secundária

Esta é uma seção. Para criar uma seção secundária use `\section{Título da seção secundária}`.

1.1.1 Exemplo de seção terciária

Esta é uma seção terciária. Use `\subsection{Título da seção terciária}` para criar uma seção terciária.

1.2 Outra seção secundária

Outra seção secundária.

1.2.1 Outro exemplo de seção terciária

Outra seção terciária.

1.2.1.1 Um exemplo de seção quaternária

Verifique se esta seção quaternária aparece no sumário. De fato, aparece. Para criar uma seção quaternária use `\subsubsection{Título da seção quaternária}`.

1.2.1.1.1 Um exemplo de seção quinária

Verifique se esta seção quinária aparece no sumário. De fato, também aparece. Observe a alteração no uso da fonte no sumário ao mudar a profundidade. Para criar uma seção quinária use `\subsubsubsection{Título da seção quinária}`.

1.3 Alíneas, subalíneas e incisos

Conforme a NBR 6.024 : 2012, seção 4.2, alíneas são subdivisões não numeradas, de uma seção.

Exemplo com o ambiente `alíneas`. Observe que as alíneas ou subalíneas, independente da forma usada para criá-las não aparecem no sumário. O texto que antecede as alíneas deve terminar em dois pontos :

- a) subalínea criada com o ambiente `alíneas`:
 - subalínea 1;
 - subalínea 2;
- b) subalínea criada com o ambiente `subalíneas`:
 - subalínea 1;
 - subalínea 2;
- c) subalínea criada com o ambiente `incisos`:
 - subalínea 1;
 - subalínea 2;
- d) alíneas sem subalíneas devem terminar com ponto e vírgula;
- e) último item da alínea termina com ponto final.

Observe cada uso no código abaixo que replica o exemplo acima

```
\begin{alíneas}
```

```
\item subalínea criada com o ambiente \texttt{alíneas}:
```

```
\begin{alíneas}
```

```
\item subalínea 1;
```

```
\item subalínea 2;
```

```
\end{alíneas}
```

```
\item subalínea criada com o ambiente \texttt{subalíneas}:
```

```
\begin{subalíneas}
```

```
\item subalinea 1;  
\item subalinea 2;  
\end{subalineas}
```

```
\item subalínea criada com o ambiente \texttt{incisos}:  
\begin{incisos}  
  \item subalinea 1;  
  \item subalinea 2;  
\end{incisos}
```

```
\item alíneas sem subalíneas devem terminar com ponto e vírgula;
```

```
\item último item da alínea termina com ponto f\mbox{}inal.
```

```
\end{alineas}
```

2 Um pouco de Matemática

Ao longo deste capítulo comenta-se alguns recursos úteis para escrever Matemática usando L^AT_EX.

Cuidado incautos: o texto está escrito em três níveis diferentes simultaneamente

- a) Absoluto iniciante;
- b) Usuário intermediário;
- c) Personalizador avançado

logo não sinta-se sob obrigação de entender tudo na primeira leitura.

2.1 Ambientes para Enunciados

Os ambientes descritos aqui podem ter nomes diferentes para atender necessidades específicas. Os nomes foram adotados a fim de manter compatibilidade com o *software* Scientific WorkPlace e seus amigos.

2.1.1 O ambiente `theorem`

O ambiente `theorem`, como o nome sugere, deve ser usado para os enunciados de teoremas.

Teorema 2.1 (Lei dos Cossenos). *Dado um triângulo ΔABC então*

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\hat{A}) \quad (2.1)$$

O teorema acima é produzido pelo código abaixo. Observe

```
\begin{theorem}[Lei dos Cossenos]
\label{leicossenos}
Dado um triângulo  $\Delta ABC$  então
\begin{equation}
\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot
\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\left(\widehat{A}\right)
\label{leicossenoseq}
\end{equation}
\end{theorem}
```


Após `\begin{theorem}` aparece delimitado por colchetes o nome do teorema (`[Lei dos Cossenos]`). É opcional e pode estar ausente. A linha seguinte, `\label{leicossenos}`, atribui ao teorema a chave `leicossenos`, a qual será usada para fazer referências a esse teorema por meio de `\ref{}`. Por outro lado, dentro do ambiente `equation`, há outra linha semelhante `\label{leicossenoseq}`. Esta tem por atribui a chave `leicossenoseq` à equação, a qual também será referenciada por meio de `\ref{}`. Em ambas situações é opcional declarar uma chave por meio de `\label{}`, mas recomenda-se sempre fazê-lo.

2.1.2 O ambiente `corollary`

Do Teorema 2.1 (usou-se `\ref{leicossenos}` para referenciar) segue-se o corolário

Corolário 2.2. *Dado um triângulo $\triangle ABC$ então*

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\hat{A}) \quad (2.2a)$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\hat{B}) \quad (2.2b)$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\hat{C}) \quad (2.2c)$$

O Corolário 2.2 foi produzido pelo código abaixo

```
\begin{corollary}
\label{leicossenos2}
Dado um triângulo  $\triangle ABC$  então
\begin{subequations}
\begin{align}
\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\widehat{A}) \label{leicossenoseq1} \\
\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\widehat{B}) \label{leicossenoseq2} \\
\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\widehat{C}) \label{leicossenoseq3}
\end{align}
\end{subequations}
\label{leicossenoseqs}
```

```
\end{subequations}
\end{corollary}
```

Aqui introduz-se três ambientes. O primeiro, `corollary`, tem o mesmo comportamento do ambiente `theorem`. Os outros dois aparecem aninhados: `subequations` e `align`. O ambiente `align` permite escrever expressões matemáticas que ocupem várias linhas. Possui um ponto de alinhamento, denotado por `&`. Para cada linha foi definida uma chave própria (`leicossenoseq1`, `leicossenoseq2`, `leicossenoseq3`), e ao fim daquelas (excentuando-a a última linha) encontra-se duas barras invertidas (`\\`) para indicar a quebra da linha. Após o fim do ambiente `align` mas ainda no ambiente `subequations` define-se uma chave para o conjunto das expressões (`leicossenoseqs`).

Pode-se referenciar cada uma das expressões em separado, *e.g.*, (2.2a) usando (`\ref{leicossenoseq1}`), (2.2b) usando (`\ref{leicossenoseq2}`) ou ainda (2.2c) usando (`\ref{leicossenoseq3}`), ou, pode-se referenciar o bloco de expressões, (2.2) por meio de (`\ref{leicossenoseqs}`).

2.1.3 O ambiente `lemma` e outros

Lema 2.3. *Todo número primo $p > 3$ é da forma $6k \pm 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.*

O lema acima foi gerado pelo código abaixo.

```
\begin{lemma}
\label{seiskpm1}
Todo número primo  $p > 3$  é da forma  $6k \pm 1$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ .
\end{lemma}
```

O ambiente `lemma` possui o mesmo comportamento de `theorem`.

Além do ambiente `lemma`, estão prontos para uso os ambientes `proposition` para proposições, `example` para exemplos, `exercise` para exercícios, `problem` para problemas, `remark` para observações, `notation` para notações, e alguns outros que podem ser consultados no arquivo `preambulo.tex`. Ao longo do texto, pretende-se usar alguns desses outros tipos de ambientes. Mantenha-se em alerta, e use-os com prudência.

2.1.4 Demonstrações e Soluções

As demonstrações são escritas usando o ambiente `proof`.

Proposição 2.4. *Dado $n \in \mathbb{N}$, então $n^3 - n$ é um múltiplo de 6.*

Demonstração: Observe-se que $n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$. Note que $n - 1$, n e $n + 1$ são três inteiros consecutivos, logo dentre esses números um é múltiplo de 3. Além disso, pelo menos um destes será par (múltiplo de 2). Assim, sendo $n^3 - n$ múltiplo de 2 e de 3, segue-se que $n^3 - n$ é múltiplo de 6. ■

A Proposição 2.4 e sua demonstração foram geradas pelo código abaixo.

```
\begin{proposition}
\label{seisk}
Dado  $n \in \mathbb{N}$ , então  $n^3 - n$  é um múltiplo de 6.
\end{proposition}

\begin{proof}
Observe-se que  $n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) =$ 
 $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ .
Note que  $n - 1$ ,  $n$  e  $n + 1$  são três inteiros consecutivos, logo
dentre esses números um é múltiplo de 3.
Além disso, pelo menos um destes será par (múltiplo de 2).
Assim, sendo  $n^3 - n$  múltiplo de 2 e de 3, segue-se que  $n^3 - n$  é
múltiplo de 6.
\end{proof}
```

O ambiente `proof` é definido pelo pacote `amsthm`, e foi cuidadosamente configurado no arquivo `preambulo.tex`, distribuído junto com o presente modelo. Note-se que ao fim da demonstração aparece um símbolo denotando seu término (■) colocado lá automaticamente.

A demonstração do Lema 2.3 segue-se abaixo.

Demonstração do Lema 2.3: Os números primos maiores do que 3 são todos ímpares. Os números ímpares são da forma $6k + 1$, $6k + 3$ ou $6k + 5$, para k inteiro não negativo. Mas os números do tipo $6k + 3 = 3 \cdot (2k + 1)$ são compostos. Os números do tipo $6k + 5 = 6(k + 1) - 1 = 6\tilde{k} - 1$, com $\tilde{k} \in \mathbb{N}$. Assim

$$p \in \{6k + 1 ; k \in \mathbb{N}\} \cup \{6k - 1 ; k \in \mathbb{N}\}$$

Portanto, p é da forma $6k \pm 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. ■

A demonstração acima foi gerada pelo código abaixo.

```

\begin{proof}[\bfseries{\color{nicered}Demonstra\c{c}\~{a}o do Lema
\ref{seiskpm1}:}]
Os números primos maiores do que  $3$  são todos ímpares.
Os números ímpares são da forma  $6k + 1$ ,  $6k + 3$  ou  $6k + 5$ , para  $k$ 
inteiro não negativo.
Mas os números do tipo  $6k + 3 = 3 \cdot (2k + 1)$  são
compostos.
Os números do tipo  $6k + 5 = 6(k + 1) - 1 = 6\tilde{k} - 1$ ,
com  $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ .
Assim
\begin{equation*}
p \in \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup
\{6k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}
\end{equation*}
Portanto,  $p$  é da forma  $6k \pm 1$ .
\end{proof}

```

Observe-se que a alteração do título da demonstração foi feita à semelhança daquilo feito no ambiente `theorem` (compare com o código para o Teorema 2.1). O ambiente `equation*` é a versão sem numeração do ambiente `equation`. Use-o para expressões que não serão referenciadas, o que implica na desnecessidade de definir uma chave.

O símbolo \uplus apareceu na Demonstração do Lema 2.3 e não deve ser do conhecimento de todos. Neste caso é conveniente usar o ambiente `notation` para introduzir ou explicar o uso de algum símbolo ou conjunto destes. Segue-se um exemplo acompanhado de seu código.

Notação. Usa-se $A \uplus B$ para denotar que a união entre A e B é disjunta, ou seja, $A \cap B = \emptyset$.

```

\begin{notation}
Usa-se  $A \uplus B$  para denotar que a união entre  $A$  e  $B$  é disjunta,
ou seja,  $A \cap B = \varnothing$ .
\end{notation}

```

Observe que o ambiente `notation` não está numerado. Em `preambulo.tex` nota-se o asterisco em sua definição:

```

\newtheorem*{notation}{Nota\c{c}\~{a}o}.

```

Na sequência introduz-se os ambientes `exercise` e `solution`.

Exercício 2.5. Dado $n \in \mathbb{N}$, mostre que $n^7 - n$ é divisível por 42.

Solução: Observe que

$$n^7 - n = n \cdot (n^6 - 1) = n \cdot (n^3 - 1) (n^3 + 1) = n \cdot (n - 1) (n^2 + n + 1) \cdot (n + 1) (n^2 - n + 1)$$

Observe a presença dos fatores $n - 1$, n e $n + 1$, três números consecutivos, logo pelo menos um é múltiplo de 3, e pelo menos um é múltiplo de 2. Então o produto $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ é múltiplo de 6, logo $n^7 - n$ também o é.

Resta verificar que $n^7 - n$ é múltiplo de 7. De fato, se n for da forma $7k$ ou $7k \pm 1$, segue-se que $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ é múltiplo de 7, logo $n^7 - n$ também o é. Se $n = 7k \pm 2$, então

$$\begin{aligned} (n^2 + n + 1) (n^2 - n + 1) &= \\ &= (7^2 k^2 \pm 4 \cdot 7k + 4 + 7k \pm 2 + 1) (7^2 k^2 \pm 4 \cdot 7k + 4 - 7k \mp 2 + 1) \\ &= [7 \cdot (7k^2 + k \pm 4k) + (5 \pm 2)] [7 \cdot (7k^2 - k \pm 4k) + (5 \mp 2)] \\ &= [7 \cdot (7k^2 + k \pm 4k + 1) - 2 \cdot (1 \mp 1)] [7 \cdot (7k^2 - k \pm 4k + 1) - 2 \cdot (1 \pm 1)] \end{aligned}$$

é múltiplo de 7 seja qual for a escolha do sinal. Se $n = 7k \pm 3$, então

$$\begin{aligned} (n^2 + n + 1) (n^2 - n + 1) &= \\ &= (7^2 k^2 \pm 6 \cdot 7k + 9 + 7k \pm 3 + 1) (7^2 k^2 \pm 6 \cdot 7k + 9 - 7k \mp 3 + 1) \\ &= [7 \cdot (7k^2 + k \pm 6k) + (10 \pm 3)] [7 \cdot (7k^2 - k \pm 6k) + (10 \mp 3)] \\ &= [7 \cdot (7k^2 + k \pm 6k + 1) + 3 \cdot (1 \pm 1)] [7 \cdot (7k^2 - k \pm 6k + 1) + 3 \cdot (1 \mp 1)] \end{aligned}$$

é múltiplo de 7 seja qual for a escolha do sinal.

Assim

$$n^7 - n = \underbrace{(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)}_{\text{múltiplo de 6}} \cdot \underbrace{(n^2 + n + 1) \cdot (n^2 - n + 1)}_{\text{múltiplo de 7}} = 6m_1 \cdot 7m_2 = 42 \cdot m_1 m_2$$

é um múltiplo de 42. ■

O ambiente `solution` tem comportamento semelhante ao ambiente `proof`. As expressões que ocupam várias linhas foram produzidas usando o ambiente `align*`, com alinhamento à esquerda, e o espaçamento entre as linhas foi aumentado acrescentando, após cada `\\`,

[8pt]. As chaves horizontais na última expressão foram produzidas usando o comando `\underbrace{ }_{}_` em que no primeiro argumento põe-se o objeto da linha e no segundo argumento põe-se aquilo que aparecerá abaixo da chave, no campo inferior.

O ambiente `solution` também permite personalização do título.

Solução Alternativa do Exercício 2.5: Como 7 é primo, pelo Teorema de Fermat, $n^7 \equiv n \pmod{7}$, logo $n^7 - n$ é divisível por 7. E como $n^7 - n$ é divisível por $n^3 - n$, e $n^3 - n$ é divisível por 6, segue-se que $n^7 - n$ é divisível por 6. Assim, como $\text{mdc}(6, 7) = 1$, $n^7 - n$ é divisível por $6 \cdot 7 = 42$. ■

Observe-se o código que produziu a solução acima

```
\begin{solution}[\textbf{\color{niceblue}Solução Alternativa do Exercício
\ref{exer1}}]
Como $7$ é primo, pelo Teorema de Fermat, $n^7 \equiv n \pmod{7}$,
logo $n^7 - n$ é divisível por $7$.
E como $n^7 - n$ é divisível por $n^3 - n$, e $n^3 - n$ é divisível por $6$,
segue-se que $n^7 - n$ é divisível por $6$.
Assim, como $\operatorname{mdc}(6, 7) = 1$, $n^7 - n$ é
divisível por $6 \cdot 7 = 42$.
\end{solution}
```

Convém notar o uso do comando `\operatorname{ }` para gerar o mdc. Usa-se o mesmo comando para mmc, sen, arc cos¹, supess, por exemplo. A cor `niceblue` está definida no arquivo `preambulo.tex`.

Observação 2.6. *É possível obter mais uma solução para o Exercício 2.5 usando o Princípio de Indução Finita.*

2.2 Ilustrações

A norma NBR 14.724 : 2011, em sua seção 5.8, estabelece que na parte superior das ilustrações deve vir sua identificação, e a fonte (elemento obrigatório) deve figurar na parte inferior da ilustração. São ilustrações gráficos, figuras, desenhos, esquemas, fluxogramas,

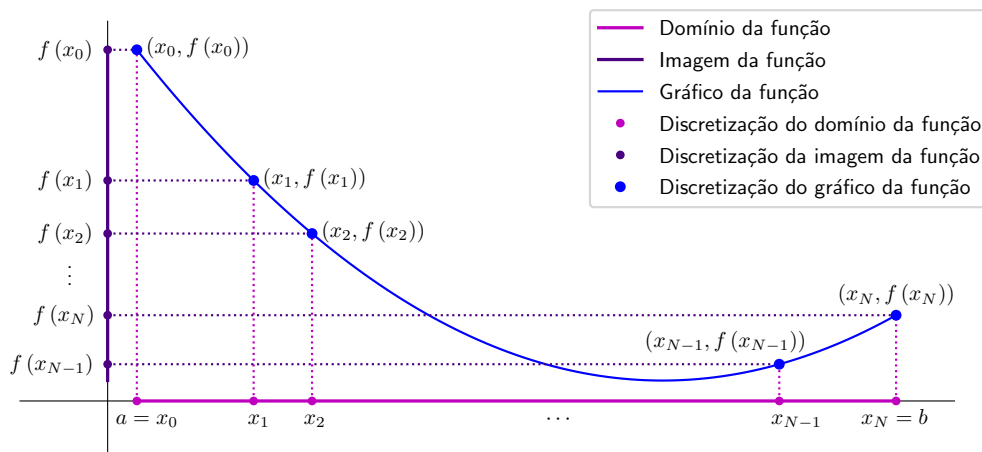
¹ Compare a saída de `\arccos` (arccos) com a saída produzida por `\operatorname{arc\,cos}` (arc cos)

imagens, fotografias, retratos, mapas, organogramas, quadros, plantas, entre outros (tabelas não!).

Um exemplo de código para inserir ilustrações segue-se abaixo. A ordem das linhas no mesmo é essencial para o pleno funcionamento e atendimento à ABNT.

```
\begin{figure}[h]
\begin{center}
\caption{Representa\c{c}\~{o}es gr\'{a}f\mbox{}icas}
\includegraphics[width=0.85\textwidth]{cap2_def_grafico.pdf}
\legend{\footnotesize Fonte: \cite{Cavalcanti}}
\label{CN1_fig2}
\end{center}
\end{figure}
```

Figura 2.1 – Representações gráficas



Fonte: (CAVALCANTI, 2022)

A opção `font=footnotesize` carregada para o pacote `caption` (ver arquivo `preambolo.tex`) permitiu reduzir o tamanho da fonte em toda a linha da identificação da Figura 2.1.

2.3 Tabelas

As normas para formulação de tabelas reconhecidas pela ABNT são as Normas de Apresentação Tabular, produzidas pelo IBGE (ver ANEXO S)

3 Gerenciador de referências bibliográficas

Este modelo utiliza o sistema BIBTEX como gerenciador de referências bibliográficas. O arquivo `dema0301_variaveis.tex` traz a variável `\basebib` em que deve ser colocada a base de referências bibliográficas do documento. No presente caso, a variável está como sendo o arquivo `bibliografia.bib`.

Observe o conteúdo desse arquivo

```
@book{Cavalcanti,
  title={M\'}{e} todos Num\'}{e}ricos 2},
  subtitle={os m\'}{e} todos para o {C}\'}{a}lculo e suas
aplica\c{c}\~{o}es},
  author={Cleber Cavalcanti},
  year={2022},
  publisher={UFMA}
}
```

A obra em tela é um livro (`@book`). A chave da obra é `Cavalcanti`. Essa chave será usada em referências futuras usando `\cite{}` para citar a obra (e.g. ¹ ([CAVALCANTI, 2022](#))), ou usando `\citeauthor{}` para citar os autores da mesma obra (e.g. [CAVALCANTI](#)), ou ainda, usando `\citeyear{}` para citar o ano de publicação da obra referenciada (e.g. [2022](#)). Os campos `title`, `author`, `year` e `publisher` são reservados, respectivamente, para o título da obra, nome dos autores da obra, o ano de publicação e a editora. O campo `subtitle` destina-se ao subtítulo da obra, se houver. Na ausência de subtítulo, omita o campo `subtitle`. Pode-se ainda colocar um campo para o ISBN (*International Standard Book Number*) do livro (se houver) por meio de `ISBN={}`.

Também de uso frequente em trabalhos acadêmicos é a citação de artigos em periódicos especializados. Neste caso usa-se o tipo `@article`. Segue-se um exemplo

```
@article{AlmeidaCavalcanti,
  title={Curvas de {B}\'}{e}zier e {A}lgumas {A}plica\c{c}\~{o}es},
  author={Adriano Pinho Almeida and Cleber Cavalcanti},
  year={2020},
  journal={Revista Multidebates},
  ISSN={2594-4568},
  volume={4},
```

¹ e.g. é uma abreviação da locução latina *Exempli Gratia* que significa *graças ao exemplo*, ou *em virtude do exemplo*, ou simplesmente *por exemplo*.


```

    number={5},
    pages={55--64}
}

```

Como pode-se ver, `\cite{AlmeidaCavalcanti}` produz a citação da obra (ALMEIDA; CAVALCANTI, 2020) com *hyperlink* para as **Referências** bibliográficas. Os campos `journal`, `ISSN`, `volume`, `number`, `pages` são reservados, respectivamente, para o nome do periódico, o ISSN (*Internacional Standard Serial Number*) do mesmo, o volume, o número (na ausência, não ponha esse campo), e o intervalo das páginas do artigo.

Além dos artigos em periódicos há as publicações não periódicas. Dois tipos importantes devem ser considerados: `@proceedings` e `conference` (equivalente a `@inproceedings`).

3.1 Monografias

Por definição, segundo a norma NBR [...], da ABNT, monografia é qualquer publicação [...]. Assim, são monografias as teses de doutorado, as dissertações de mestrado e as monografias de trabalho de conclusão de curso.

Não raro será necessário fazer referência a uma tese de doutorado. Neste caso usa-se o tipo `@phdthesis`. Considere-se o exemplo a seguir

```

@phdthesis{RaposoJ,
  title={Sobre Normas de Formas Unimodulares em Espaços de
Sequências},
  author={Anselmo Baganha {RAPOSO JÚNIOR}},
  year={2022},
  school={Universidade Federal da Paraíba},
  address={João Pessoa -- PB}
}

```

Usando `\cite{RaposoJ}` produz-se a citação da obra (RAPOSO JÚNIOR, 2022). O campo `school` é destinado ao nome da instituição que outorgou o título de doutor. O campo `address` é destinado ao endereço físico da instituição.

As dissertações de mestrado também são fontes de pesquisa utilizadas na produção de trabalhos de conclusão de curso sob a forma de monografias. Para tais referências, use-se o tipo `@mastersthesis`, que tem comportamento muito semelhante ao tipo `@phdthesis`. Segue-se um exemplo

```

@mastersthesis{Cavalcanti2003,
  title={Sobre as Equações de Benjamin-Bona-Mahony e

```

```

Burgers com Viscosidade},
  author={Cleber Cavalcanti},
  year={2003},
  type={Mestrado em Matem\`{a}tica},
  school={Universidade Federal do Rio de Janeiro},
  address={Rio de Janeiro -- RJ}
}

```

Usando-se `\cite{Cavalcanti2003}` é produzida a citação da obra (CAVALCANTI, 2003).

Por fim, mas não menos importante, para citações de trabalhos de conclusão de curso sob a forma de monografias a classe `abnTeX2` criou o tipo `@monography`. Seu comportamento também é muito semelhante ao tipo `@phdthesis`. Segue-se um exemplo

```

@monography{RaposoJ2007,
  title={Uma Apresenta\c{c}\~{a}o Elementar da Teoria das
Distribui\c{c}\~{o}es},
  author={Anselmo Baganha {RAPOSO J\`{U}NIOR}},
  year={2007},
  type={Curso de Matem\`{a}tica -- Bacharelado},
  school={Universidade Federal do Maranh\~{a}o},
  address={S\~{a}o Lu\`{i}s -- MA}
}

```

Escrevendo `\cite{RaposoJ2007}` produz a citação da obra (RAPOSO JÚNIOR, 2007). Como o tipo `@monography` só existe na classe `abnTeX2`, do ponto de vista estético do seu editor `LATEX`, comportamentos inesperados podem acontecer. Por exemplo, usuários do `TeXnicCenter` podem ver `@monography` (em vermelho) e achar que tem algo errado.

De modo genérico, pode-se usar ainda o tipo `@thesis` que pode ser usado [...]

Por fim, observe-se que no arquivo `bibliografia.bib` há outras referências que não aparecem nas **Referências** do presente texto. Só figuram nas **Referências** obras citadas no texto.

Referências

ALMEIDA, A. P.; CAVALCANTI, C. Curvas de Bézier e Algumas Aplicações. **Revista Multidebates**, v. 4, n. 5, p. 55–64, 2020. ISSN 2594-4568. Citado na página 23.

CAVALCANTI, C. **Sobre as Equações de Benjamin-Bona-Mahony e Burgers com Viscosidade**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro – RJ, 2003. Citado na página 24.

CAVALCANTI, C. **Métodos Numéricos 2**: os métodos para o Cálculo e suas aplicações. [S.l.]: UFMA, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

RAPOSO JÚNIOR, A. B. **Uma Apresentação Elementar da Teoria das Distribuições**. Monografia (Curso de Matemática – Bacharelado) — Universidade Federal do Maranhão, São Luís – MA, 2007. Citado na página 24.

RAPOSO JÚNIOR, A. B. **Sobre Normas de Formas Unimodulares em Espaços de Sequências**. Tese (Doutorado em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa – PB, 2022. Citado na página 23.