

## Prova de Mecânica Quântica

### Seleção Pós-Física 2010 I

1. Sejam os operadores  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  tais que atuam sobre o conjunto de autofunções  $\psi_{lm}$  (de momento angular) segundo

$$\mathbb{A}\psi_{lm} = l(l+1)\hbar^2\psi_{lm} \quad , \quad \mathbb{B}\psi_{lm} = m\hbar\psi_{lm} \quad . \quad (1)$$

com  $l = 0, 1, 2, \dots$  e  $m = -l, -l+1, \dots, 0, 1, \dots, l$ . Considerando o seguinte hamiltoniano

$$\mathbb{H} = a\mathbb{A} + b\mathbb{B}^2 \quad (2)$$

responda as seguintes questões:

- (a) Os operadores  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  comutam? Prove sua resposta.
  - (b) As funções  $\psi_{lm}$  são autofunções de energia? Quais são os valores das autoenergias?
  - (c) É possível a existência de alguma degenerescência nos níveis de energia? Qual degenerescência? Explique-a, exibindo os estados degenerados, caso existam.
  - (d) Suponha que se tenha um estado dado por  $\Psi = \sum_m a_m \psi_{lm}$ , onde  $a_m$  são números. Admita que  $l = 2$ . Após uma medida do operador  $\mathbb{B}$ , quais valores podem ser obtidos, e com qual probabilidade?
  - (e) Suponha que ao se medir  $\mathbb{B}$  na questão anterior, obtém-se  $\hbar$ . Qual o estado do sistema após esta medida? Explique sua resposta.
2. Seja os harmônicos esféricos  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ , auto-estados do operador  $\mathbb{L}_z$ :

$$\mathbb{L}_z Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3)$$

com  $l = 0, 1, 2, \dots$  e  $m = -l, -l+1, \dots, 0, 1, \dots, l$ . Considere o estado normalizado  $\psi$  dado pela seguinte combinação linear

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) [\alpha Y_{1,-1}(\theta, \phi) + \beta Y_{10}(\theta, \phi) + \gamma Y_{11}(\theta, \phi)] \quad , \quad (4)$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ,  $R(r)$  é uma função que só depende da coordenada radial  $r$ .

- (a) Qual é a condição de normalização de  $\psi(r, \theta, \phi)$ ? Encontre a condição de normalização para  $R(r)$  sabendo que a condição de normalização sobre os harmônicos esféricos é dada por  $\int Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ .
- (b) Quais são os possíveis resultados numa medição de  $L_z$ ? Dar as probabilidades correspondentes.
- (c) Em uma medição do operador  $L_z$  é obtido o valor  $-\hbar$ , qual o estado do sistema após tal medida? Explique.