Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física

Exame de Seleção para Ingresso no 2º. Semestre de 2010

Disciplina: Mecânica Quântica

1.Um exemplo interessante da relação de incerteza energia-tempo $\Delta E \Delta t = \hbar/2$ é descrita por Lev Vaidman, em *Am. J. Phys.*, 60, 182 (1992). Neste caso, $\Delta t = \tau/\pi$, onde τ é o tempo gasto para o estado $\psi(x,t)$ evoluir para um estado ortogonal a $\psi(x,0)$. Faça um teste desta hipótese usando um estado que é uma mistura igual de estados estacionários ortogonais $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$, ou seja, $\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right)$.

2. Quando resolvemos o problema do oscilador harmônico quântico, verificamos que o espectro de energia é dado por $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, onde $n = 0, 1, 2, 3, 4 \cdots$. O potencial tem a forma $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, com $-\infty < x < \infty$. Faça uma breve discussão sobre as modificações nas autofunções e no espectro de energia para o caso em que a partícula se encontre limitada à região positiva do espaço, ou seja, $V(x) = \infty$ para $x < 0$ e $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ para $x > 0$. Nota: Uma inspeção cuidadosa o levará à solução do problema sem executar praticamente nenhum cálculo.

3. Um dos pontos importantes no estudo da teoria quântica é a determinação de uma base de vetores sobre a qual podemos projetar um operador vetorial que representa um observável físico. Para verificar se um conjunto de vetores forma uma base apropriada, duas perguntas devem ser respondidas:

i) Os vetores satisfazem à relação de completeza $\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = 1$?

ii) Eles são ortonormais?

Como aplicação, encontre os autovalores e autovetores $|u_1\rangle$ e $|u_2\rangle$ para o operador de spin representado pela matriz de Pauli $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Mostre que os autoestados $|u_1\rangle$ e $|u_2\rangle$ satisfazem aos dois requisitos anteriores.

4. Os estados estacionários do átomo de hidrogênio são identificados por três números quânticos: n, l e m. O número quântico principal n determina a energia do estado, enquanto l e m estão relacionados como o momento angular orbital. Em problemas clássicos que envolvem forças centrais, a energia e o momento angular são quantidades conservadas fundamentais. Em Mecânica Quântica, sempre buscamos uma forma de descrever os operadores observáveis em uma base de vetores de estado. Quando isto é feito de forma apropriada, a matriz que representa o operador aparece diretamente diagonalizada, sendo que suas colunas representam os autovetores e os elementos da diagonal principal os autovalores. Entretanto, nem sempre isto ocorre. Como exemplo, considere o caso de uma partícula com momento angular j=1. A matriz que representa a componente J_x do momento angular é escrita na forma:

$$J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que a matriz J_x acima está representada em uma base que pertence a outro operador (componente z de J), ou seja, a base $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\} \in J_z$. Por este motivo a matriz não é diagonal. Encontre a matriz U que diagonaliza J_x e mostre que $J_x' = U^\dagger J_x U$ está na forma diagonalizada, ou seja,

$$J_x' = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$