Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física

Exame de Seleção para Ingresso no 1º. Semestre de 2011

<u>Disciplina: Mecânica Clássica</u>

1. Encontre a força para um campo de força central que permite uma partícula mover-se numa órbita espiral dada por $r = k\theta^2$, onde k é uma constante e (r, θ), são as coordenadas polares.

2. A figura abaixo é uma vista aérea de um aro circular liso que é forçado a girar a uma velocidade angular fixa ω em torno de um eixo vertical que passa pelo ponto A. Uma conta de massa m é enfiada no aro e está livre para mover-se sobre ele, com sua posição especificada pelo ângulo ϕ conforme mostra a figura.

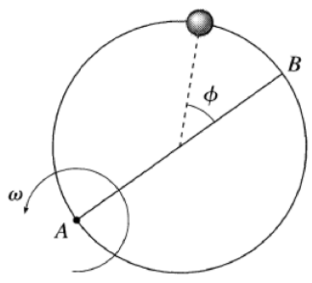
a) Mostre que a lagrangeana L que descreve o sistema é dada por:

$$L = \frac{mR^2}{2}\left[\omega^2 + \left(\dot{\phi} + \omega\right)^2 + 2\omega\left(\dot{\phi} + \omega\right)cos\phi\right]$$

onde R é o raio do aro.

b) Use a equação de movimento de Lagrange para mostrar que a conta oscila em torno do ponto B exatamente como um pêndulo simples.

c) Qual a frequência dessas oscilações se a amplitude é pequena?



3. Uma partícula de massa m tem seu movimento descrito pela lagrangeana

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + a\rho^2\dot{\varphi}^2,$$

onde (ρ, φ, z) são coordenadas cilíndricas e a é uma constante.

a) Determine o hamiltoniano H.

b) Identifique três constantes de movimento.

c) Mostre que a solução da equação radial pode ser reduzida a uma quadratura onde o tempo t é da forma

$$t = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\alpha - (\beta - a\rho^2)^2/m^2\rho^2}}$$

sendo α e β constantes.

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física

Exame de Seleção para Ingresso no 1º. Semestre de 2011

Disciplina: Mecânica Quântica

1) Considere um sistema quântico descrito pela função de onda $\psi(x) = a\phi_1(x) + b\phi_2(x) + c\phi_3(x) + d\phi_4(x)$, onde ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e ϕ_4 são funções ortonormais e, a, b, c e d, são coeficientes complexos. As funções ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e ϕ_4 são autofunções de energia, ou seja, $H\phi_i = E_i\phi_i$.

a) Qual a relação de normalização da função $\psi(x)$ em termos dos coeficientes?

b) Qual a energia média deste sistema em termos dos coeficientes?

c) Qual a probabilidade de se obter o autovalor E_4 ao se fazer uma medida do operador hamiltoniano sobre o estado descrito pela função de onda $\psi(x)$? Qual o estado do sistema após esta medida? Explique sua resposta.

2) Numa dada base de kets ortonormais $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$, um certo operador B é escrito na forma:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix},$$

sendo b um número real.

a) Este operador é um observável? Explique.

b) Determine os autovalores e autovetores.

3. Considere o oscilador harmônico quântico, cujo Hamiltoniano vale: $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$.

a) Escreva o operador H em função do operador número $N = a^\dagger a$ onde $a = \sqrt{m\omega/2\hbar}(x + ip/m\omega)$ e $a^\dagger = \sqrt{m\omega/2\hbar}(x - ip/m\omega)$.

b) Seja $|\phi_n\rangle$ um autoket do operador N, tal que $N|\phi_n\rangle = n|\phi_n\rangle$. Quais os autovalores de H?

c) Calcule as relações de comutação $[N, a^\dagger]$, $[N, a]$.

d) Mostre que $N[a^\dagger|\phi_n\rangle] = (n+1)a^\dagger|\phi_n\rangle$, $N[a|\phi_n\rangle] = (n-1)a|\phi_n\rangle$.

e) Baseado no resultado do item anterior, qual interpretação pode ser dada aos operadores $a^\dagger$ e a?

f) Mostre que $a|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle$ e $a^\dagger|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle$.

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física

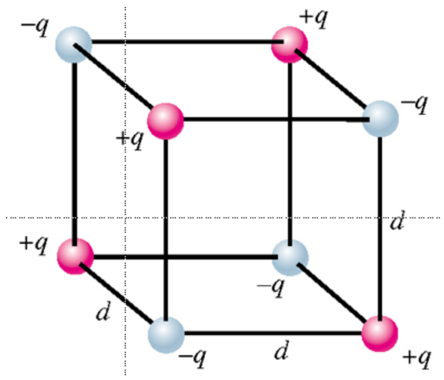
Exame de Seleção para Ingresso no 1º. Semestre de 2011

Disciplina: Eletromagnetismo

1. A figura abaixo mostra oito cargas pontuais distribuídas nos vértices de um cubo cuja aresta é igual a d. Os valores das cargas são $+q$ e $-q$. Trata-se do modelo da célula unitária de um cristal iônico cúbico. Por exemplo, no cloreto de sódio NaCl (sal de cozinha), as cargas positivas são íons Na^+; as negativas são íons Cl^-.

a) Calcule a energia potencial U desse arranjo. Considere zero o potencial quando a distância mútua entre as oito cargas for infinita.

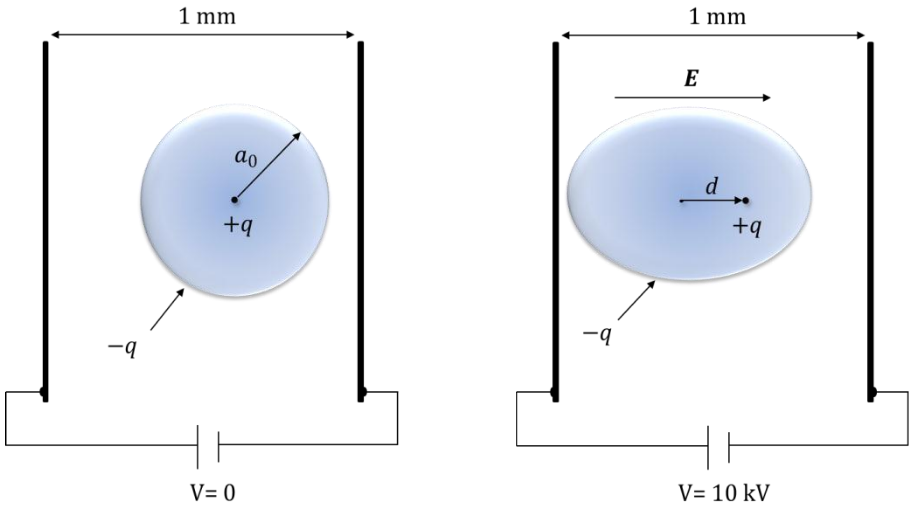
b) No resultado anterior provavelmente você encontrou $U < 0$. Explique a relação entre esse resultado e a observação desses cristais na natureza.



2. Um átomo de hidrogênio é colocado dentro de um capacitor de placas paralelas cuja distância é de 1 mm, conforme ilustram as figuras abaixo, onde a_0 é o raio de Bohr. Inicialmente não há diferença de potencial entre as placas, de modo que os centros geométricos das cargas positiva e negativa coincidem (figura à esquerda). Se aplicarmos uma diferença de potencial de 10 kV (figura à direita), as cargas sofrerão deslocamento relativo d e o átomo ficará ligeiramente polarizado.

a) Que fração do raio atômico (d/a_0) o próton $(+q)$ e o elétron $(-q)$ ficam separados?

b) Estime a voltagem necessária para ionizar o átomo de hidrogênio. Dado: $\frac{\alpha}{4\pi\varepsilon_0} = 0{,}66 \times 10^{-30}\ m^3$.



3. Considere que, inicialmente, uma densidade de carga volumétrica ρ esteja uniformemente distribuída em um condutor finito de condutividade uniforme g. Descreva em detalhes a evolução temporal desse sistema nos casos em que:

a) o condutor é uma esfera.

b) o condutor não é uma esfera.

Sugestão: Você vai essencialmente mostrar, a partir da análise dos seus resultados, que as cargas em um condutor em equilíbrio eletrostático se encontram apenas na superfície após um tempo longo. Consequentemente, o campo elétrico, a densidade de cargas no volume e a corrente elétrica dentro do material são todos nulos.

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física

Exame de Seleção para Ingresso no 1º. Semestre de 2011

Disciplina: Física Estatística

1. Uma formiga anda em um caminho aproximadamente linear sendo observada por um cientista, o qual tira fotos a cada segundo. Ele percebe que formiga se move aleatoriamente dando um passo a cada segundo. O cientista também observa que a probabilidade da formiga avançar (passo à direita) 1 mm é 0,3; a de avançar 2 mm é de 0,2; a de retroceder (passo à esquerda) 1 mm é de 0,2, assim como a de retroceder 2 mm. Considerando que cada passo é independente um do outro, calcule:

a) Supondo que além dos passos acima, a única atitude da formiga é ficar parada, qual é a probabilidade que isso aconteça?

b) O cientista observa a molécula por exatamente uma hora. Após esse tempo, supondo que o ponto onde o cientista começou a observar a formiga é a origem do movimento, qual a posição média da formiga?

2. A menos do termo constante $\left(\frac{1}{2}\hbar\omega\right)$, a energia de um oscilador harmônico é dada por $E_n = n\hbar\omega$, onde n é um inteiro positivo e ω é sua frequência de oscilação. Considere então N osciladores a uma temperatura T. Calcule:

a) A função de partição que descreve o sistema.

b) A energia média do sistema.

c) O calor específico do sistema.

d) A entropia do sistema.

3. Discuta o paradoxo de Gibbs considerando a distinguibilidade das partículas. Discuta a distinguibilidade no tocante aos gases ideais quânticos.