UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
FUNDAÇÃO Instituída nos termos da Lei nº 5.152, de 21/10/1996 – São Luís – Maranhão
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Exame de Seleção

Mestrado e Doutorado em Física

1º Semestre de 2012

1ª Prova – 14/02/2012

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

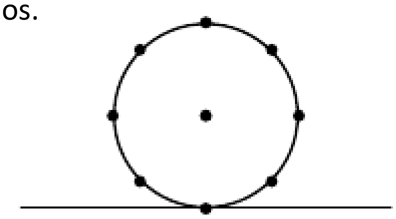
Candidato

Av. dos Portugueses, S/N – Campus Universitário do Bacanga – São Luís – MA – 65.080-040
Fone: (098) 3301-8204 – Fax: (098) 3301-8204

Candidato	

(40%) Q1 – Baseado nos conceitos da Mecânica Clássica, responda os itens abaixo:

a) Defina colisão elástica, inelástica e perfeitamente inelástica.
b) Quais condições devem ser obedecidas para que um corpo rígido permaneça em equilíbrio estático?
c) Liste algumas vantagens que o formalismo lagrangeano possui comparado ao formalismo newtoniano.
d) O que você entende por forças de vínculo?
e) Defina momento de inércia e produto de inércia.
f) Faça uma comparação entre as formulações lagrangeana e hamiltoniana.
g) Imagine um aro que rola para a direita sem deslizar. A figura abaixo mostra o esquema de um “instantâneo”' desse movimento. Desenhe os vetores velocidade instantânea sobre os pontos nove indicados na figura abaixo, tomando cuidado com a orientação e magnitude dos mesmos.



(25%) Q2 – Imagine que a interação eletromagnética deixasse de existir. Nesse cenário, determine o raio do átomo de hidrogênio no estado fundamental devido apenas à atração gravitacional entre próton e elétron. Sugestão: assuma a condição de quantização de Bohr: $L = \hbar$, onde L é o módulo do momento angular e $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π (considere que a órbita é circular). Compare seu resultado com o raio do universo conhecido: $R \sim 46$ bilhões de anos-luz (um ano-luz = 9,46 $\times 10^{15}$m).

(35%) Q3 – Considere duas funções quaisquer das coordenadas generalizadas e momentos conjugados $F(q,p)$ e $G(q,p)$, onde (q,p) é o conjunto de coordenadas q_k e momentos p_k. O *parênteses de Poisson*, também conhecido como *bracket de Poisson*, é definido por

$$[F, G] \equiv \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k} \right)$$

Se $[F, G] = 0$, é dito que F e G *comutam*. Se $[F, G] = 1$, é dito que F e G são *canonicamente conjugados*. Demonstre as seguintes afirmações ou equações utilizando o formalismo do parênteses de Poisson, onde H é o hamiltoniano:

a) $\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}$

b) $\dot{q}_i = [q_i, H]$

c) $\dot{p}_i = [p_i, H]$

d) Coordenadas generalizadas comutam entre si.

e) Momentos conjugados comutam entre si.

(33,33%) Q4 – Sabemos que o ket $|\phi\rangle$ está associado o bra $\langle\phi|$ no espaço dual. Sendo B um observável, a sua ação sobre $|\phi\rangle$ gera um novo ket, $B|\phi\rangle$. (a) Qual o correspondente deste ket no espaço dual? Baseado na sua resposta, mostre que $\langle\phi|B^{\dagger}|\psi\rangle = \langle\psi|B|\phi\rangle^{*}$. (b) Mostre que os autovalores de um operador hermitiano são reais. (c) Dado que $B|\phi_1\rangle = \lambda_1|\phi_1\rangle$, $B|\phi_2\rangle = \lambda_2|\phi_2\rangle$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostre que $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ são ortogonais.

Dica inicial: Lembre-se que $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^{*}$.

(33,33%) Q5 – Considere a base de autofunções $\phi_i(x)$ do operador A, satisfazendo as seguintes relações de autovalores: $A\phi_j^i = a_j\phi_j^i$, sendo i um índice de degenerescência. Uma função arbitrária, $\psi(x)$, é escrita nesta base de funções como: $\psi(x) = \sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{g_j} c_j^i \phi_j^i(x)$, onde c_j^i são coeficientes da expansão. (a) Qual o significado do fator g_j? O que designa? (b) Ao se fazer a medida do operador A sobre a função ψ, qual a probabilidade de medir o autovalor a_3, sendo $g_3 = 1$? Qual o estado do sistema após esta medida? (c) Ao se fazer a medida do operador A sobre a função ψ, qual a probabilidade de medir o autovalor a_4, sabendo-se que $g_4 = 2$? (d) Qual o estado do sistema após esta medida? Explique suas respostas.

(33,33%) Q6 – Considere uma base ortonormal constituída pelos autoestados do operador S_z, $|+\rangle$, $|-\rangle$, tradicionalmente usada para representar um sistema de dois níveis (sistema de spin). Considere um vetor unitário $\vec{u} = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$, que define uma direção arbitrária no espaço. Seja $S_u = \vec{S}\cdot\vec{u}$ a projeção do operador de spin, $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, na direção demarcada por $\vec{u}$. (a) Escreva o operador $S_u = \vec{S}\cdot\vec{u}$ na forma matricial, escrevendo o produto escalar em componentes e usando as matrizes de Pauli. (b) Determine os autovalores e autovetores deste operador na base $|+\rangle, |-\rangle$. (c) Suponha que o estado do sistema é $|\phi_0\rangle = \sin(\theta/2)|+\rangle + \cos(\theta/2)|-\rangle$. Fazendo a medida do operador $S_u = \vec{S}\cdot\vec{u}$ sobre este estado, quais valores podem ser obtidos? Determine a probabilidade de encontrar cada um destes. Note que $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ representa as matrizes de Pauli.

Dados : $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, onde $\vec{\sigma}$ designa as matrizes de Pauli, $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Candidato		**Questão**	**Q1**

Candidato		**Questão**	**Q2**

Candidato		**Questão**	**Q3**

Candidato		**Questão**	**Q4**

Candidato		**Questão**	**Q5**

Candidato		**Questão**	**Q6**