UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
FUNDAÇÃO Instituída nos termos da Lei nº 5.152, de 21/10/1996 – São Luís – Maranhão
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Exame de Seleção

Mestrado e Doutorado em Física

2º Semestre de 2012

1ª Prova – 22/08/2012

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

Candidato

Av. dos Portugueses, S/N – Campus Universitário do Bacanga – São Luís – MA – 65.080-040
Fone: (098) 3301-8204 – Fax: (098) 3301-8204

Candidato	

Q1 – Baseado nos conceitos da Mecânica Clássica, responda os itens abaixo:

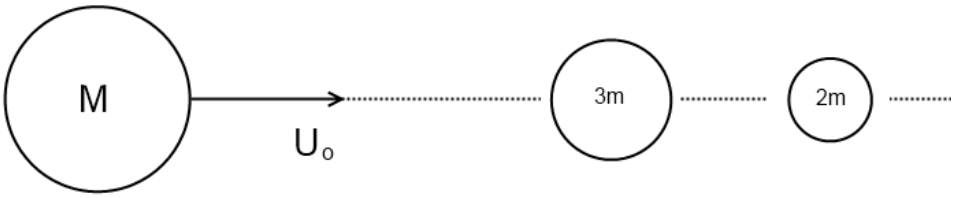
a) Existem colisões em que não se conserva momento linear? Quais os princípios de conservação que regem a colisão (não relativística) entre duas esferas maciças?

b) Considere a colisão elástica unidimensional de duas esferas de massas m_1 e m_2, em que v_{1i}, v_{2i}, são as velocidades dos corpos antes da colisão, e v_{1f}, v_{2f} são as velocidades dos corpos depois da colisão. Escreva as equações que levam à solução deste fenômeno. Não precisa resolvê-las.

c) A solução exata das equações do item (b) leva aos seguintes resultados:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}, \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}.$$

A Figura abaixo ilustra três esferas maciças de massas iguais a $M = 4m,\ 3m,\ 2m$, respectivamente, e dispostas ao longo do eixo **x**. A esfera de massa M aproxima-se da segunda esfera com velocidade U_0. A segunda e a terceira esfera estão inicialmente paradas. Os choques são todos elásticos. Quantas colisões ocorrem neste caso? Descreve-as em detalhes e com ilustrações. Calcule as velocidades finais de cada esfera neste caso.



Q2 – Dois corpos em interação mútua possuem massa m_1 e m_2, com coordenadas $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ no referencial do Laboratório, sendo $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ a distância relativa. No referencial do CM, vale: $m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0$.

a) Sendo a interação potencial entre os corpos dada por $U = U(r)$, com $r = |\vec{r}|$, podemos afirmar que a força entre os mesmos é central? Explique.

b) Usando o conceito de centro de massa, determine a posição do CM do sistema, $\vec{R}$, em função de $m_1, m_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2$.

c) Localize o referencial do CM em um diagrama de vetores, e encontre as posições $\vec{r}_1'$ e $\vec{r}_2'$ das partículas no referencial do CM em função de $m_1, m_2, \vec{r}$. Determine as velocidades das partículas no CM ($\vec{v}_1', \vec{v}_2'$) em função de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{V}_{CM} = d\vec{R}/dt$.

d) Seja $L = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^2 - U(r)$ a lagrangiana do sistema (no referencial do Lab). Escreva esta lagrangiana em função de $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$ e $\vec{V}_{CM}$. Identifique as partes desta lagrangiana associada com a translação e com o movimento relativo.

e) Escreva a parte do resultado (d) associada ao movimento relativo em termos de $\dot{\vec{r}}$ e da massa reduzida, μ. Discuta o resultado obtido. Qual a vantagem de escrever esta lagrangiana no referencial do CM?

Q3 – Sabemos que a lagrangeana para dois corpos de massa m_1 e m_2 em interação, no referencial do CM, é dada por $L_{CM} = \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{r}}|^2 - U(r)$, sendo $\dot{\vec{r}} = d\vec{r}/dt$, e μ a massa reduzida.

a) Escreva o vetor velocidade, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, em coordenadas polares. Escreva L_{CM} em função das coordenadas polares r, θ. Dados: $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$.

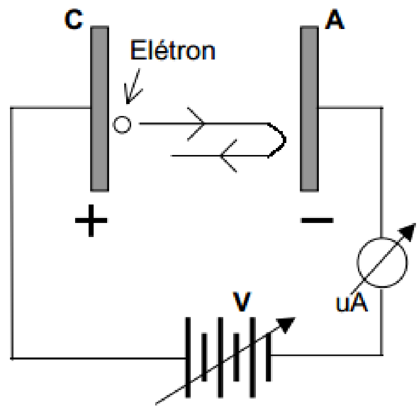
b) Estas duas coordenadas são cíclicas? Por quê? Determine os momentos conjugados a r, θ. São constantes? É possível relacionar estes momentos conjugados com o momento angular?

c) Escreva o Hamiltoniano deste sistema em função de $\mu, \dot{r}, r, l, U(r)$, onde $l = |\vec{L}|$, sendo $\vec{L}$ o momento angular. Identifique o potencial efetivo.

Q4 – A emissão de elétrons por metais iluminados com luz de determinada frequência foi observada no final do século XIX por Hertz e Hallwachs. O fenômeno, que foi explicado mais tarde por Einstein e lhe rendeu o Nobel de Física de 1921, pelo qual são liberados elétrons de um pela ação da radiação se denomina efeito fotoelétrico ou emissão fotoelétrica.

a) Discuta as duas principais características desse fenômeno, relacionados á frequência de radiação eletromagnética incidente e à emissão eletrônica (números de elétrons emitidos)

b) A Figura a seguir mostra o experimento básico para observação do efeito fotoelétrico. Neste experimento, radiação é incidida sobre a superfície metálica C, provocando emissão de elétrons da placa. Se alguns desses elétrons atingirem a placa A, haverá corrente no circuito. Note que, se a placa C está sob potencial positivo, o campo elétrico na região entre as placas será tal que o elétron será desacelerado, perdendo energia cinética ao longo do percurso entre as placas. Esboce um gráfico da corrente medida, a qual é chamada de corrente fotoelétrica, no amperímetro (uA) em função da diferença de potencial (quando o comprimento de onda da radiação é mantido fixo). Discuta os principais pontos desse gráfico.



c) No experimento anterior, existe um potencial, chamado de potencial de frenagem Vo, para o qual nenhum elétron chega à placa. Esboce o gráfico desse potencial em termos da frequência da radiação incidida na placa metálica. Qual a relação deste gráfico com a solução proposta por Einstein e a constante de Planck?

Q5 – A descrição do elétron no átomo de hidrogênio é o único problema atômico analítico (sem inserção de spin) que pode ser resolvido pela teoria de Schrödinger. No átomo de hidrogênio é elétron é submetido a um potencial Coulombiano devido ao núcleo. A forma direta de resolver o problema é escrever a equação em coordenadas esféricas e achar a solução por separação de variáveis. A solução (autovalores) é da forma

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_n(r)Y_{lm}(\theta,\phi)e^{-\left(\frac{i}{\hbar}\right)Et}$$

Com autovalor de energia dado por

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}$$

a) Discuta os valores para os possíveis números quânticos e, para um dado nível eletrônico, sua degenerescência, incluindo o spin.

b) Suponha que um átomo de hidrogênio esteja em seu nível fundamental e seja dada energia a este átomo com radiação cujo comprimento de onda é $\lambda = 102{,}73$nm. Qual o nível eletrônico que o átomo assumirá?

c) O que acontece com os níveis quando $n \to \infty$? Qual é a energia de dissociação? Explique sua resposta.

d) Qual o papel das correções relativísticas e do acoplamento spin-órbita sobre o espectro descrito acima? Como o efeito destas correções é calculado?

Q6 – A respeito do operador de momento angular:

a) Se um operador qualquer comuta com duas componentes do momento angular, então ele comutará também com a terceira componente.

b) Mostre que se um sistema está em um autoestado de J_z, então o valor médio de J_x e J_y neste estado se anulam.

c) Calcule o valor médio da componente do momento angular ao longo da direção **z'**, que faz um angulo θ com o eixo **z**, se o sistema é descrito pelo autoestado de J_z.

d) Mostre que em qualquer representação na qual J_x e J_z são matrizes reais, J_y é da forma iM, onde i é o imaginário puro e M é uma matriz real antisimétrica.

Dado: $[J_a, J_b] = i\hbar\epsilon_{abc}J_c$