UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
FUNDAÇÃO Instituída nos termos da Lei nº 5.152, de 21/10/1996 – São Luís – Maranhão
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Exame de Seleção

Mestrado e Doutorado em Física

1º Semestre de 2013

1ª Prova – 26/02/2013

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

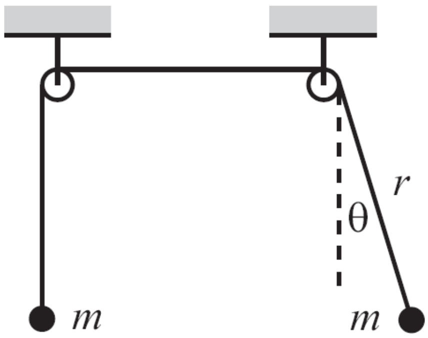
Candidato

Av. dos Portugueses, S/N – Campus Universitário do Bacanga – São Luís – MA – 65.080-040
Fone: (098) 3272-8204

Candidato	

Q1 - Considere uma molécula diatômica cujos núcleos possuem massas iguais a m_1 e m_2. Em uma aproximação harmônica a ligação química entre elas pode ser modelada por uma mola de constante de força k. (a) Escreva a lagrangeana do sistema. Determine (b) as frequências de oscilação do sistema e analise as coordenadas atômicas para os casos onde (c) as massas são iguais e (d) uma massa é muito maior que a outra, supondo soluções gerais para as coordenadas atômicas do tipo $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$.

Q2 - Duas massas iguais m, ligadas por uma corda sem massa, passa sobre duas polias (de tamanho insignificante), como mostrado na Figura abaixo. A da esquerda se move na vertical, mas a da direita é livre para balançar para a direita e para a esquerda no plano das massas e polias. (a) Monte a Lagrangeana do sistema. (b) Mostre que as equações de movimento para *r* e θ são

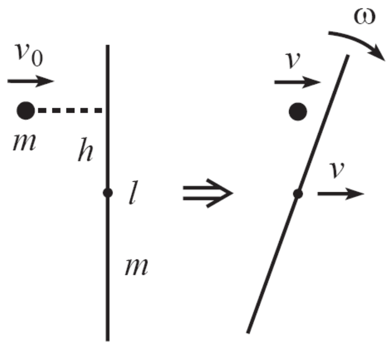


$$\ddot{r} = \frac{r\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{2}(1 - \cos\theta),$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \frac{g\sin\theta}{r}.$$

(c) Suponha que a massa da esquerda esteja inicialmente no repouso, e a massa da direita sofre pequenas oscilações com amplitude angular Φ (com Φ <<< 1). (d) Qual é a aceleração média inicial da massa da esquerda? Em que direção ele se move?

Q3 - Como mostrado na figura abaixo, uma bola de massa m inicialmente com velocidade v_0 colide perpendicularmente com a uma haste de massa m e comprimento l incialmente em repouso (momento de inércia $\frac{ml^2}{12}$ em torno de seu centro de massa). Em que local (*h*) a massa deve colidir elaticamente com a haste para que a massa e o centro de massa da haste se mova com velocidades iguais após a colisão?



Q4 - Considere a função de onda

$$\psi(r) = Ae^{-\alpha x^2/2},$$

onde *A* e *α* são constantes.

(a) Normalize $\psi(x)$.

(b) Calcule o $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$. Qual significado físico da quantidade $\langle x \rangle$?

(c) Calcule $\langle p \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$. Qual significado físico da quantidade $\langle p \rangle$?

(d) Usando os resultados dos itens (a) e (b), calcule $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$, $\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$. Explique fisicamente o significado da quantidade $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$.

(e) Mostre que $\Delta p \Delta x \geq \hbar / 2$. Comente o significado físico desse resultado.

Q5 - Um elétron está em repouso em um campo magnético oscilante, $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\hat{k}$, onde B_0 e ω são constantes.

(a) Construa a matriz do Hamiltoniano, $H = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}$, para esse sistema.

(b) Em *t* =0, o elétron está no estado de spin-up com respeito ao eixo-*x*, isto é, $\chi(0) = \chi_+^{(x)}$. Determine o estado de spin $\chi(t)$ em um tempo *t* qualquer.

(c) Se S_x é medido sobre $\chi(t)$, qual a probabilidade de obter $-\hbar / 2$?

(d) Qual é o valor mínimo de B_0 necessário para forçar um "flip"completo do autovalor de S_x? Comente o resultado encontrado.

Q6 - Uma partícula não relativística de massa *m* move-se em um potencial central tridimensional, $V(r)$, o qual se anula quando $r \to \infty$. A partícula está em um auto-estado dado por $\psi(r) = Cr^{\sqrt{3}}e^{-\alpha r}\cos\theta$, sendo (r,θ,ϕ) coordenadas esféricas, e C,α são constantes.

(a) Qual é o momento angular desse estado?

(b) Qual é a energia deste estado?

(c) Qual a expressão para $V(r)$?

Dados que podem ser úteis:

$$L_x = -ih\left[-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right], L_y = -ih\left[-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right], L_x = -ih\left[\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial^2\phi} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right],$$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},\ Y_1^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\cos\theta,\ Y_1^{\pm1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp(\pm i\phi),$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right),\ Y_2^{\pm1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\exp(\pm i\phi),\ Y_2^{\pm2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\exp(\pm 2i\phi)$$