



# UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

FUNDAÇÃO Instituída nos termos da Lei nº 5.152, de 21/10/1996 – São Luís – Maranhão

## CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

---

### Exame de Seleção

### Mestrado e Doutorado em Física

1º Semestre de 2014

1ª Prova – 04/02/2014

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

---

#### Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

Candidato

<b>Candidato</b>	
------------------	--

**Q1** - Um carrinho de massa  $m$  está montado sobre um trilho dentro de um carro grande, conforme ilustra a **Figura 1**. Os dois estão conectados por uma mola de constante de força  $k$  de tal forma que o carrinho está em equilíbrio no centro do carro maior. A distância do carrinho a partir de sua posição de equilíbrio é denotada por  $x$  e a do carro maior a partir de um ponto fixo no solo é  $X$ . O carro é agora forçado a oscilar tal que  $X = A \cos(\omega t)$ , com  $A$  e  $\omega$  fixos.

(a) Escreva a Lagrangiana para o movimento do carrinho e mostre que a equação de Lagrange tem a forma,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A\omega^2 \cos(\omega t),$$

onde  $\omega_0$  é a frequência natural  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Esta é a forma assumida para oscilações forçadas (exceto pelo fato de que estamos ignorando o amortecimento). Poderíamos encher o carro grande com melaço para torná-lo amortecido. [Valor: 1,0 pt]

(b) Determine a hamiltoniana e as equações de Hamilton e compare os dois métodos. A Hamiltoniana do carrinho é conservada? Explique. Caso contrário encontre  $dH/dt$ . [Valor: 1,0 pt]

(c) Supondo que a equação de Lagrange possua soluções do tipo  $x(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi) + C \cos(\omega t)$ , ache uma expressão para a amplitude  $C$  em função de  $A$ . [Valor: 1,0 pt]

**Q2** - (a) Escreva a expressão da energia total  $E$  das duas massas da máquina de Atwood da **Figura 2** em termos das coordenadas  $x$  e  $\dot{x}$ . [Valor: 1,0 pt]

(b) Mostre que você pode obter a equação do movimento para a coordenada  $x$  derivando a equação  $E = \text{const.}$  Verifique que a equação do movimento é a mesma que você obteria aplicando a segunda lei de Newton para cada massa e eliminando as trações desconhecidas das duas equações resultantes. Suponha agora que a roldana tenha um raio  $R$  e momento de inércia  $I$ . [Valor: 1,0 pt]

(c) Escreva a expressão da energia total das duas massas e da roldana em termos das coordenadas  $x$  e  $\dot{x}$ . [Valor: 1,0 pt]

(d) Mostre que você pode obter a equação do movimento para a coordenada  $x$  derivando a equação  $E = \text{const.}$  Verifique que a equação do movimento é a mesma que seria obtida aplicando-se a segunda lei de Newton separadamente para as duas massas e para a roldana e, em seguida e eliminando as duas trações desconhecidas das três equações resultantes. [Valor: 1,0 pt]

Q3 - Uma partícula se move sujeita ao seguinte potencial  $V(r) = -V_0 e^{-\lambda^2 r^2}$ .

- (a) Dado o momento angular  $L$ , encontre o raio da órbita circular estável. [Valor: 1,0 pt]
- (b) Dado o momento angular  $L$ , encontre o valor máximo do potencial efetivo. [Valor: 1,0 pt]
- (c) Acontece que, se  $L$  é muito grande, então não existe nenhuma órbita circular. Qual é o maior valor de  $L$  para que uma órbita circular de fato exista? [Valor: 1,0 pt]

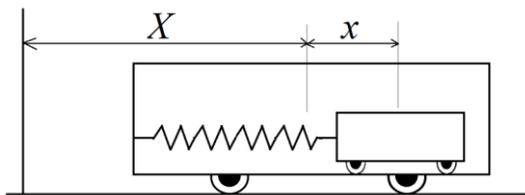


Figura 1

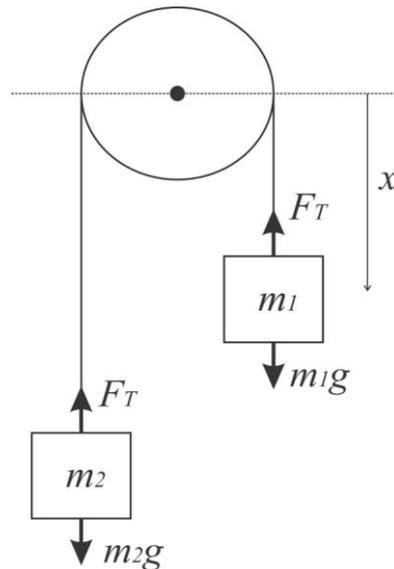


Figura 2

**Formulário:**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}; \quad \mathcal{H} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}; \quad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t};$$

$$R = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad r = y_1 - y_2$$

**Q4** - Considere o seguinte Hamiltoniano,  $H = H_{11}|a\rangle\langle a| + H_{22}|b\rangle\langle b| + H_{12}[|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|]$ , onde  $H_{11}$ ,  $H_{22}$ ,  $H_{12}$  são números reais, e  $|a\rangle, |b\rangle$  são autokets de um dado observável A, tal que  $A|a\rangle = \lambda_1|a\rangle, A|b\rangle = \lambda_2|b\rangle$ , com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

- Se o hamiltoniano fosse dado na forma  $H' = H_{11}|a\rangle\langle a| + H_{22}|b\rangle\langle b| + H_{12}|a\rangle\langle b|$ , seria também fisicamente aceitável? Explique sua resposta. [Valor: 0,6 pt]
- É possível afirmar que o observável A comuta com H? Explique. [Valor: 0,6 pt]
- É possível supor que  $|a\rangle, |b\rangle$  são autokets ortogonais? Explique. [Valor: 0,6 pt]
- Escreva a matriz do Hamiltoniano H. Determine autovalores e autokets de H. [Valor: 1,0 pt]
- Suponha que o sistema está no estado  $|a\rangle$ , e uma medida sobre o observável H é realizada. Quais valores podem ser obtidos, e com quais probabilidade? [Valor: 1,2 pt]

**Q5** - Um elétron está submetido a um campo magnético constante,  $\vec{B} = (B_0, 0, B_0)$

- Sabendo que  $H = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}$ , construa a matriz do Hamiltoniano para esse sistema na base de autoestados de  $S_z$ ,  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ . [Valor: 0,6 pt]
- Encontre os autovalores e autovetores de H, em função de  $\gamma$ . [Valor: 1,0 pt]
- Sabendo que o sistema está inicialmente (t=0) no estado  $|+\rangle$ , determine o estado do sistema em  $t > 0$ . [Valor: 1,2 pt]

**Q6** - Sejam  $A_x, A_y, A_z$  as componentes de um operador A, hermitiano, e considere os operadores  $A_{\pm} = A_x \pm iA_y$ , que satisfazem:  $A^2 \psi_{rs} = r^2 \hbar^2 \psi_{rs}$ ,  $A_z \psi_{rs} = s \hbar \psi_{rs}$ ,  $[A^i, A^j] = i \hbar \epsilon_{ijk} A^k$ , com  $i, j, k = 1, 2, 3$ , sendo  $\epsilon_{ijk}$  o símbolo de Levi-Civita, e  $\psi_{rs}$  uma função de onda rotulada através de dois números quânticos.

- Mostre que:  $A_+ A_- = A^2 - A_z^2 + \hbar A_z$ ,  $A_- A_+ = A^2 - A_z^2 - \hbar A_z$ . [Valor: 0,8 pt]
- Mostre que  $A^2 (A_{\pm} \psi_{rs}) = r^2 \hbar^2 (A_{\pm} \psi_{rs})$  e  $A_z (A_{\pm} \psi_{rs}) = \hbar (s \pm 1) (A_{\pm} \psi_{rs})$ . Qual o significado destas expressões? O que se pode concluir sobre o papel dos operadores  $A_{\pm}$ ? Explique em detalhes. [Valor: 1,2 pt]
- Há sentido em propor  $A_+ \psi_{rs} = C_{rs} \psi_{r, s+1}$ ,  $A_- \psi_{rs} = D_{rs} \psi_{r, s-1}$ ? Em caso afirmativo, justifique sua resposta. Sabendo que  $C_{rs}, D_{rs}$  são coeficientes que dependem de  $r, s$ , descreva como determiná-los, e determine-os. [Valor: 1,2 pt]

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.1

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q1</b>
------------------	--	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.1

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q2</b>
------------------	--	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.1

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q3</b>
------------------	--	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.1

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q4</b>
------------------	--	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.1

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q5</b>
------------------	--	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.1

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q6</b>
------------------	--	----------------	-----------