



# UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

FUNDAÇÃO Instituída nos termos da Lei nº 5.152, de 21/10/1996 – São Luís – Maranhão

## CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

---

### Exame de Seleção

### Mestrado e Doutorado em Física

2º Semestre de 2014

1ª Prova – 10/06/2014

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

---

#### Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

Candidato

<b>Candidato</b>	
------------------	--

**Q1** - Uma massa  $m$  esta ligada a um extremo de uma mola de constante  $k$  (ver Figura 1) em repouso. No instante  $t = 0$ , o extremo livre da mola experimenta uma aceleração constante  $a$  na direção oposta à massa  $m$ .

- a) Calcule a posição  $x$  da massa  $m$  como uma função do tempo  $t$ . (1.2 pts)
- b) Calcule a forma da função  $x(t)$  quando  $t \rightarrow 0$ . (1.0 pts)

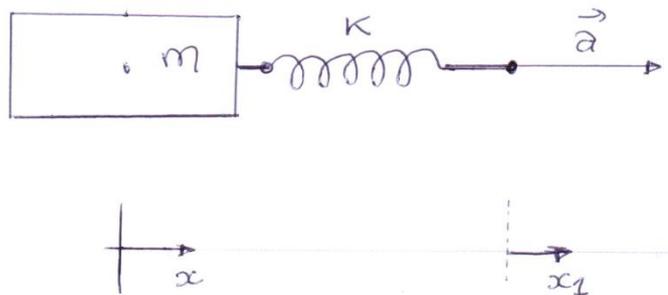


Figura 1

$x = x(t)$ : representa o deslocamento da massa  $m$  em relação à posição inicial.

$x_1 = x_1(t)$ : representa o deslocamento do extremo livre da mola.

**Q2** - Uma partícula de massa  $m$  se move num círculo de raio  $R$  sob a influência de uma força central atrativa,

$$F = -\frac{K}{r^2} e^{-r/a}.$$

- a) Determinar para que valores da constante  $a$ , o movimento circular é estável. (1.3 pts)
- b) Calcular a frequência das pequenas oscilações radiais em torno do movimento circular. (1.5 pts)

**Q3** - Considere o pêndulo duplo mostrado na Figura 2:

- a) Escreva a Lagrangeana completa do sistema. (1.5 pts)
- b) Escreva a Lagrangeana do sistema para  $\theta_1, \theta_2 \ll 1$ . (1.5 pts)
- c) Calcular as frequências fundamentais do sistema. (2.0 pts)

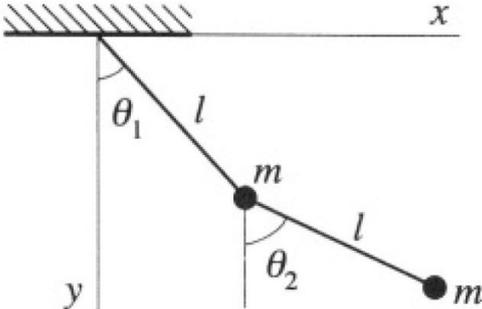


Figura 2

**Q4** - Sendo  $A$  um observável,  $H$  o Hamiltoniano, partindo da equação de Schrödinger ou da formulação de Dirac, demonstre:

- $\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, A] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$ , onde  $\langle A \rangle$  representa o valor esperado de  $A$ .
- Use a expressão acima para calcular  $\frac{d}{dt}\langle x \rangle$  e  $\frac{d}{dt}\langle p \rangle$ . Comente o significado físico dos seus resultados. Existe relação destes com o teorema de Ehrenfest? Qual conteúdo deste teorema? Explique em detalhes.
- Use a expressão do item (a) para calcular  $\frac{d}{dt}\langle xp \rangle$ . Para um estado estacionário  $\frac{d}{dt}\langle xp \rangle = 0$ . Obtenha então o teorema do virial, relacionando  $\langle K \rangle$  e  $\langle V \rangle$ , sendo  $K$  a energia cinética e  $V$  o potencial.
- Para  $V = ax^n$ , encontre a relação entre  $\langle K \rangle$  e  $\langle V \rangle$ . Para o oscilador harmônico, demonstre que vale  $\langle K \rangle = \langle V \rangle$ .

**Q5** - Considere uma base ortonormal constituída pelos autoestados do operador  $S_z$ ,  $|+\rangle, |-\rangle$ , tradicionalmente usada para representar um sistema de dois níveis (sistema de spin). Considere o Hamiltoniano de interação,  $H = \lambda \vec{S} \cdot \vec{B}$ , com campo magnético  $\vec{B} = B_0 \hat{x}$ . Suponha que o sistema encontra-se inicialmente no estado  $|\phi(0)\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ , sendo  $a, b$  números reais.

- Realizando-se uma medida de  $S_x$  sobre o sistema em  $t=0$ , determine que valores podem ser encontrados, com as respectivas probabilidades.
- O ket  $|\phi(0)\rangle$  é autoestado de energia? Explique. Em caso positivo, determine os autovalores de energia do sistema.
- Determine o estado do sistema num tempo  $t$  futuro,  $|\phi(t)\rangle$ . Escreva tal estado na base  $|+\rangle, |-\rangle$ .
- Escreva a probabilidade deste sistema ser encontrado no estado  $|S_{y+}\rangle$  e a probabilidade de ser encontrado no estado  $|-\rangle$ , no tempo  $t$ .
- Calcule os valores esperados do operador  $S_x$  sobre o estado  $|\phi(t)\rangle$ .
- Para  $a=b$ , calcule o valor esperado de  $S_z$ . Especifique o valor esperado de  $S_x$  neste caso. Qual conclusão pode-se tirar a respeito da disposição espacial do vetor  $S$  (spin) nesta situação? Justifique sua resposta.

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.2

Dados :  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$  , onde  $\vec{\sigma}$  designa as matrizes de Pauli:  $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$S_x = (\hbar/2)[|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|], \quad S_y = (-i\hbar/2)[|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|], \quad S_z = (\hbar/2)[|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|].$$

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots, \quad \sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$$

$$|S_{y\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle \pm i|-\rangle], \quad |S_{x\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle \pm |-\rangle].$$

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.2

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q1</b>
------------------	--	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.2

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q2</b>
------------------	--	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.2

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q3</b>
------------------	--	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.2

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q4</b>
------------------	--	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.2

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q5</b>
------------------	--	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2014.2

<b>Candidato</b>		<b>Questão</b>	<b>Q5</b>
------------------	--	----------------	-----------