Exame de Seleção

Mestrado e Doutorado em Física

1º Semestre de 2015

1ª Prova – 20/01/2015

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

Candidato | **D1**

Candidato	D1

Q1 - Uma partícula de massa *m*, com posição $\vec{r}_1$, move-se sob a ação de uma força central, interagindo com uma partícula de massa M, com posição $\vec{r}_2$. A lagrangeana deste sistema é $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_2^2 - U(r)$, sendo $U(r)$ o potencial.

a) Faça um diagrama deste sistema, localize o centro de massa do sistema, escrevendo as coordenadas em termos da coordenada relativa $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, e fazendo $\vec{r}_{CM} = 0$. Qual o significado da massa reduzida? (1,0)

b) Escreva esta lagrangeana e hamiltoniano do sistema em termos da massa reduzida e da coordenada relativa. Partindo do hamiltoniano do item (a), escreva a energia da partícula em coordenadas polares, e em função do momento angular (L). Identifique o potencial efetivo. (1,5)

c) Suponha que a força central atrativa é dada por $\vec{F} = -\frac{K}{r^2}e^{-br}\hat{r}$, sendo K, b constantes positivas e reais. Para ter órbitas estáveis e circulares o potencial efetivo deve ser mínimo. Determine tais condições para uma órbita de raio R. (1,5)

d) Calcule a frequência das pequenas oscilações radiais em torno do movimento circular. (1.5 pts)

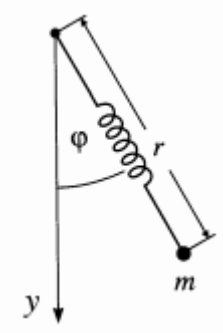
Q2 - Uma massa m está suspensa por uma mola de constante k e comprimento r_0 (sem a ação da massa m) em um campo gravitacional. Além da vibração longitudinal devido a mola, a massa também desenvolve um movimento de pêndulo no plano.

a) Encontre a Lagrangiana deste sistema. (1,5)

b) Encontre as equações do movimento. (1,0)

c) Identifique os termos das equações do movimento. (1,0)

d) Calcular a frequência das pequenas oscilações. (1,0)



Q3 A função de onda de uma partícula em um sistema unidimensional é dada por $\psi(x) = N\dfrac{\exp(ibx/\hbar)}{\sqrt{x^2+a^2}}$, onde a,b são números reais positivos.

a) Determine a constante de normalização N. (1,0)

b) Qual a probabilidade de encontrar a partícula entre os pontos $x = 1/\sqrt{3}$ e $x = -1/\sqrt{3}$? Se 60 medidas de posição forem realizadas neste sistema, quantas estarão fora deste intervalo? (1,0)

c) Usando a função de onda dada, determine o momento médio da partícula. A constante b desempenha papel de qual grandeza física? OBS. Fique atento à paridade do integrando. (1,0)

d) Determinar a posição média desta partícula e a variância da posição, $\Delta x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$. A função considerada representa um bom pacote de onda? Discuta seus resultados. (1,0)

e) Considere agora a função de onda normalizada $\phi(x) = \dfrac{2a^3}{\pi}\dfrac{\exp(ibx/\hbar)}{(x^2+a^2)}$. Determine a posição média e a variância da posição neste caso. Esta função representa um bom pacote de onda? Qual a incerteza na posição? (1,0)

Dados: $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$, $\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$, $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+a^2)}$

$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)}dx = x - a\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$, $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{2a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x}{2(x^2+a^2)}$

Q4 - Considere uma base ortonormal constituída pelos autoestados do operador S_z, $|+\rangle, |-\rangle$, tradicionalmente usada para representar um sistema de dois níveis (sistema de spin). Considere o Hamiltoniano de interação, $H = \lambda \vec{S}\cdot\vec{B}$, com campo magnético $\vec{B} = B_0\hat{x}$. Suponha que o sistema encontra-se inicialmente no estado $|\phi(0)\rangle = |-\rangle$.

(a) Realizando-se uma medida de S_y sobre o sistema em $t = 0$, determine que valores podem ser encontrados, com as respectivas probabilidades. (1,0)

(b) Determine o estado do sistema num tempo t futuro, $|\phi(t)\rangle$. Escreva tal estado na base $|+\rangle, |-\rangle$. (1,0)

(c) Escreva a probabilidade deste sistema ser encontrado no estado $|S_{x+}\rangle$ no tempo t. (1,0)

(d) Calcule os valores esperados do operador S_x e S_y sobre o estado $|\phi(t)\rangle$. (1,0)

(e) Calcule o valor esperado de S_z. Qual conclusão pode-se tirar a respeito da disposição espacial do vetor S (spin) nesta situação? Justifique sua resposta. (1,0)

Dados : $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, onde $\vec{\sigma}$ designa as matrizes de Pauli: $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$S_x = (\hbar/2)\left[|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right],\ S_y = (-i\hbar/2)\left[|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|\right],\ S_z = (\hbar/2)\left[|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\right].$$

$$\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! + \ldots,\ \sin x = x - x^3/3! + x^5/5! + \ldots$$

$$|S_{y\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle \pm i|-\rangle\right],\ |S_{x\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle \pm |-\rangle\right].$$

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2015.1

Candidato	**D1**	**Questão**	**Q1**

Candidato	**D1**	**Questão**	**Q2**

Candidato	**D1**	**Questão**	**Q3**

Candidato	**D1**	**Questão**	**Q4**