



# UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

FUNDAÇÃO Instituída nos termos da Lei nº 5.152, de 21/10/1996 – São Luís – Maranhão

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

---

Exame de Seleção

Doutorado em Física

2º Semestre de 2016

1ª Prova – 12/07/2016

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

---

## Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

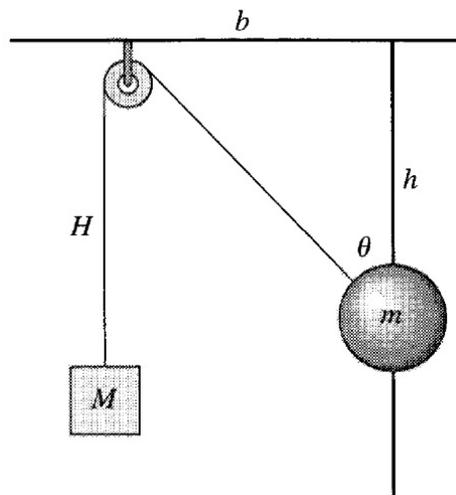
Candidato

**D1**

Candidato	<b>D1</b>
-----------	-----------

**Q1** - Uma esfera de metal de massa  $m$  com um furo através dela está compelida a mover-se verticalmente em uma haste sem atrito. Um fio de massa desprezível de comprimento  $\ell$  é preso à esfera e passa sobre uma roldana de massa desprezível e sem atrito, suportando um bloco de massa  $M$ , como ilustrado na figura 1. Assuma que a roldana e a esfera têm tamanhos desprezíveis. As posições das duas massas podem ser especificadas pelo ângulo  $\theta$ .

- (a) (1,0 pontos) A energia potencial pode ser facilmente obtida em termos de  $h$  e  $H$ . Elimine essas variáveis e obtenha a energia potencial  $U$  em termos de  $\theta$ ,  $b$  e  $\ell$ .
- (b) (1,0 pontos) A partir de  $U(\theta)$  determine se o sistema tem uma posição de equilíbrio e para quais valores de  $m$  e  $M$  o equilíbrio pode ocorrer.
- (c) (1,0 pontos) Discuta a estabilidade dos pontos de equilíbrio.



**Figura 1**

**Q2** - A figura 2 mostra um pêndulo simples de massa  $m$  e comprimento  $\ell$  cujo ponto de suporte  $P$  está preso à borda de uma roda (de centro  $O$  e raio  $R$ ) que está forçada a girar com uma velocidade angular  $\omega$  constante. Em  $t = 0$ , o ponto  $P$  é nivelado na horizontal com o ponto  $O$ , situando-se à direita de  $O$ .

- (a) (1,0 pontos) Obtenha o vetor posição da bola de massa  $m$  em função do tempo. Utilize um sistema cartesiano de coordenadas centrado no ponto  $O$ .
- (b) (1,0 pontos) Obtenha a velocidade da bola de massa  $m$  em função do tempo.
- (c) (1,0 pontos) Escreva a Lagrangeana do sistema.
- (d) (1,0 pontos) Determine equação de movimento para o ângulo  $\phi$ .

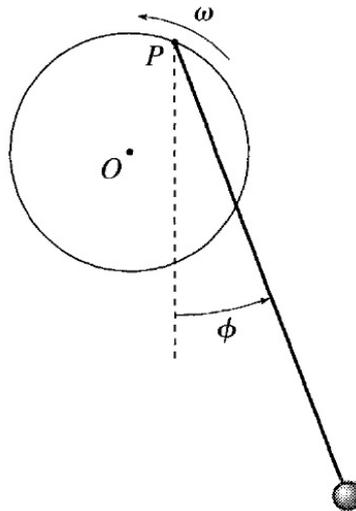


Figura 2

**Q3** - (3.0 pontos) Uma esfera uniforme de peso  $P$  está em repouso apoiada em dois planos inclinados com ângulos de inclinação  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , como mostra a figura 3. Suponha que não exista atrito e determine as forças (direções, sentidos e intensidades) que os planos exercem sobre a esfera.

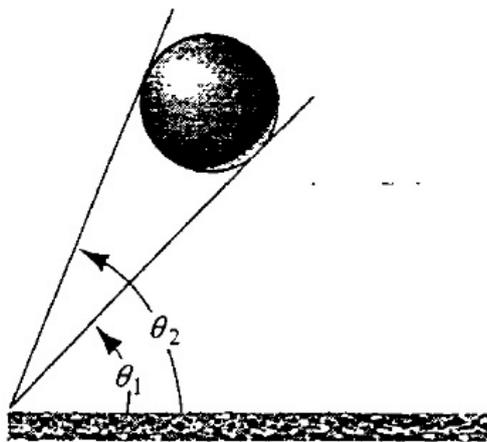


Figura 3

**Q4** - A equação de Schrödinger para uma partícula de massa  $m$ , movendo-se em uma dimensão é

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi(x) = 0.$$

Sabemos que as funções de onda dessa equação correspondem a estados ligados ou não-ligados dependendo se elas se anulam ou são meramente limitadas no infinito. Assumindo que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = V_{\pm}$  existe e que  $V_+ < V_-$ , determine se um estado de energia  $E$  é ligado ou não e também comente sobre a degenerescência do espectro de energia para os seguintes casos:

- (a) (1,0 pontos) Se  $E > V_-$ ;
- (b) (1,0 pontos) Se  $V_- > E > V_+$ ;
- (c) (1,0 pontos) Se  $V_+ > E$ .

**Q5** - O Hamiltoniano de um oscilador harmônico em uma dimensão é

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Definindo os operadores

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-a + a^\dagger),$$

Onde  $a$  e  $a^\dagger$  são operadores, mostre que:

(a) (1,0 pontos) O operador Hamiltoniano pode ser escrito como

$$H = \frac{1}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger)\hbar\omega$$

(b) (1,0 pontos) Os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  satisfazem a regra de comutação  $[a, a^\dagger] = 1$ .

(c) (1,0 pontos)  $[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$ ,  $[H, a] = -\hbar\omega a$ .

(d) (1,0 pontos) O autovalor de mínima energia do oscilador é  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ .

Ainda com relação ao oscilador harmônico, temos as seguintes relações

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$\langle n'|a|n\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1}, \quad \langle n'|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}$$

$$\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1})$$

$$\langle n'|p|n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1})$$

Usando essas relações, calcular:

(e) (2,0 pontos)  $\langle x \rangle$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle p^2 \rangle$ ,

(f) (1,0 pontos) verifique que

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2016.2

<b>Candidato</b>	<b>D1</b>	<b>Questão</b>	<b>Q1</b>
------------------	-----------	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2016.2

<b>Candidato</b>	<b>D1</b>	<b>Questão</b>	<b>Q2</b>
------------------	-----------	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2016.2

<b>Candidato</b>	<b>D1</b>	<b>Questão</b>	<b>Q3</b>
------------------	-----------	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2016.2

<b>Candidato</b>	<b>D1</b>	<b>Questão</b>	<b>Q4</b>
------------------	-----------	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-graduação em Física – 2016.2

<b>Candidato</b>	<b>D1</b>	<b>Questão</b>	<b>Q5</b>
------------------	-----------	----------------	-----------