Exame de Seleção

Doutorado em Física

2º Semestre de 2018

1ª Prova – 12/06/2018

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

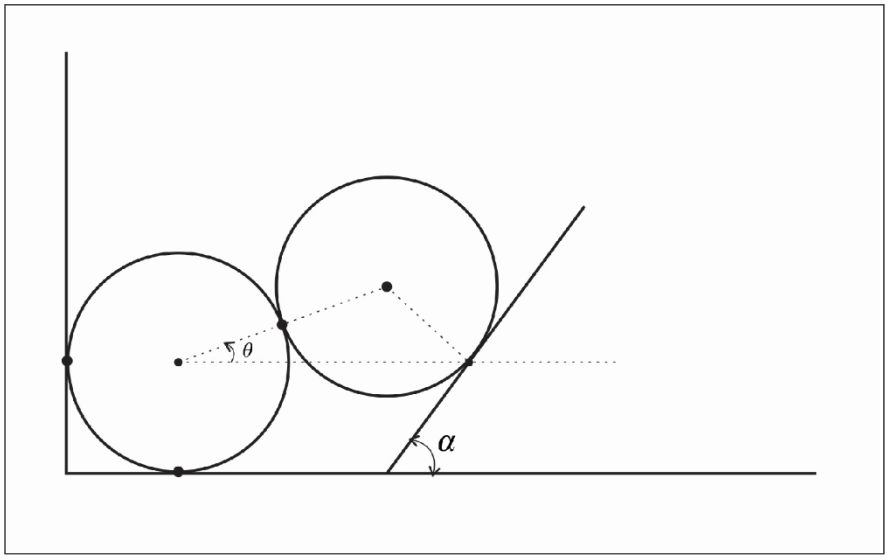
Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

Candidato | **D10**

Candidato	D10

Q1 - (2.5 pontos) Duas esferas idênticas, cada uma com massa *m*, são colocadas no sistema mostrado na figura. Calcule as reações das superfícies sobre as esferas em função de m, α, θ. Considere a situação de equilíbrio para cada esfera separadamente.



Q2 - Dois osciladores acoplados são descritos pela Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}(\dot{x}_2)^2 + \frac{m}{M}\dot{x}_1\dot{x}_2 - \frac{1}{2}(\omega_0)^2(x_1)^2 - \frac{1}{2}(\omega_0)^2(x_2)^2$$

a) **(0.5 pontos)** Obtenha as equações de movimento para x_1 e x_2 .

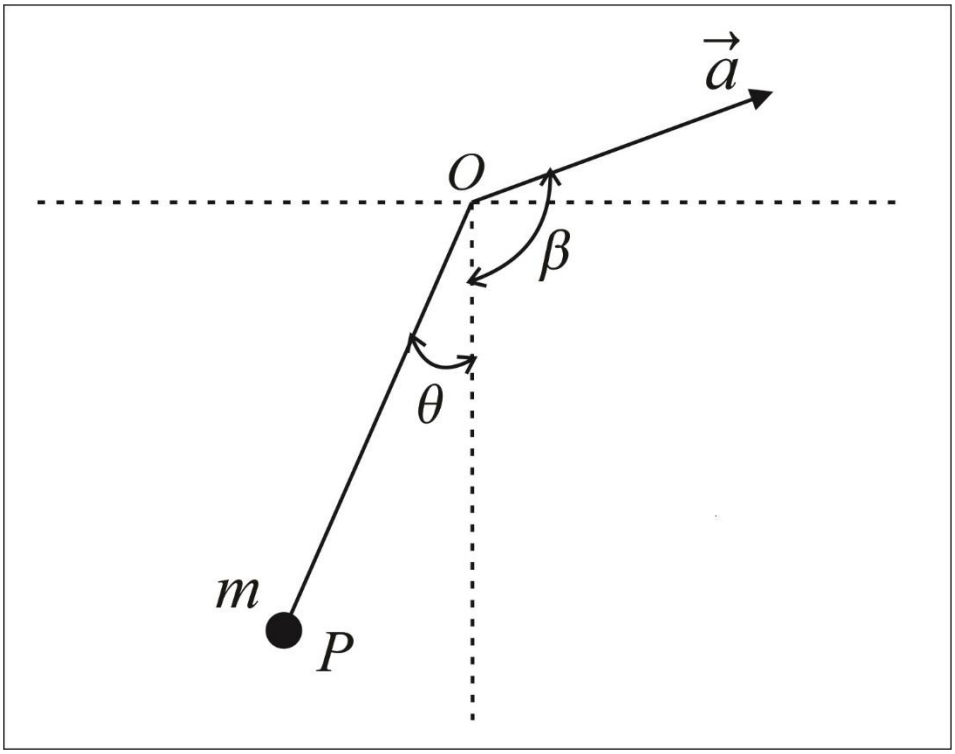
b) **(2.0 pontos)** Resolva as equações de movimento e obtenha as frequências dos modos normais do sistema.

Q3 - Considere um pêndulo simples com uma massa *m* suspensa por um fio de comprimento ℓ . O ponto de suspensão O se move com relação à superfície da Terra com uma aceleração constante $\vec{a}$ que forma um ângulo β em relação à vertical, conforme a figura.

a) **(1.0 ponto)** Escolhendo um sistema de coordenadas cartesianas fixas em um referencial inercial, determine as coordenadas *x,y* e respectivas velocidades $\dot{x}, \dot{y}$ do objeto suspenso de massa *m*. Encontre a Lagrangeana *L* do sistema.

b) **(2.0 pontos)** Obtenha a equação de movimento para o ângulo de deslocamento θ. Interprete a equação de movimento nos limites i) $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{a} \neq 0$ e ii) $\vec{a} = 0$.

c) (2.0 pontos) Para o caso particular $\beta = \pi/2$, $\vec{a} \neq 0$, encontre o ângulo θ de equilíbrio e a frequência de pequenas oscilações.



Q4 - O vetor de estado em $t = 0$ para uma partícula no potencial de um oscilador harmônico é dado por

$$|\Psi(x,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle,$$

onde $|n\rangle$ são os autovetores do Hamiltoniano e do operador número.

a) **(1.0 ponto)** Encontre o vetor de estado $|\Psi(x,t)\rangle$ como função do tempo.

b) **(1.5 pontos)** Encontre o valor esperado da energia como função do tempo. A resposta concorda com a prevista pelo teorema de Ehrenfest?

c) **(1.5 pontos)** Encontre o valor esperado da posição como função do tempo usando operadores escada. Calcule esse valor esperado usando o teorema de Ehrenfest e compare os resultados.

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right), \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right),$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Q5 - Uma partícula livre de massa m em uma dimensão está, em $t=0$, no estado $|A,0\rangle$ representado pela função de onda

$$\psi_A(x,0) = e^{-\frac{x^2}{4a^2}} e^{ikx}.$$

a) **(1.0 ponto)** Encontre a condição que a deve cumprir para que $\bar{p} \gg \Delta p$. Se a partícula é um nêutron (massa $m = 1.7\times10^{-24} g$) com energia cinética média $\bar{E} = 1,0\, MeV$, encontre o valor numérico de a no caso $\bar{p} = 10^6 \Delta p$.

b) **(1.5 pontos)** Escreva as equações de Heisenberg para os operadores $p(t)$ e $q(t)$ e integre elas com a condições iniciais que derivam da escolha $U(t=0)=1$, onde $U(t)$ é o operador de evolução temporal.

c) **(1.5 pontos)** Calcule a largura $\Delta q(t)$ do pacote de ondas em um tempo t.

d) **(1.0 ponto)** Encontre a distância d que o nêutron deve atingir, partindo do instante $t=0$, de modo que a largura Δq seja dobrada. Qual é a largura do pacote de onda após o nêutron ter percorrido uma distância $L = 1m$?

Para encontrar a função de onda em um instante de tempo t, quando $\bar{p} \gg \Delta p$, podemos usar a identidade (que corresponde formalmente à expansão de p^2 em torno de $\bar{p}$):

$$H = \frac{p^2}{2m} = \frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{\bar{p}}{m}(p-\bar{p}) + \frac{1}{2m}(p-\bar{p})^2 = -\frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{\bar{p}p}{m} + \frac{1}{2m}(p-\bar{p})^2$$

e negligenciar o último termo.

e) **(1.0 ponto)** Se $\psi(x,0)$ é a função de onda em $t=0$, encontre, na aproximação mencionada acima, a função de onda no tempo no istante $t=0$. Qual é a diferença entre a função de onda obtida e a solução exata $\psi(x,t)$ da equação de Schrödinger?

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2018.2

Candidato	**DMЛ**	**Questão**	**Q1**

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2018.2

Candidato	**DMЛ**	**Questão**	**Q2**

Candidato	**DMЛ**	**Questão**	**Q3**

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2018.2

Candidato	**DMЛ**	**Questão**	**Q4**

Candidato	**DMЛ**	**Questão**	**Q5**