Exame de Seleção

Mestrado em Física

1º Semestre de 2019

1ª Prova – 04/12/2018

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

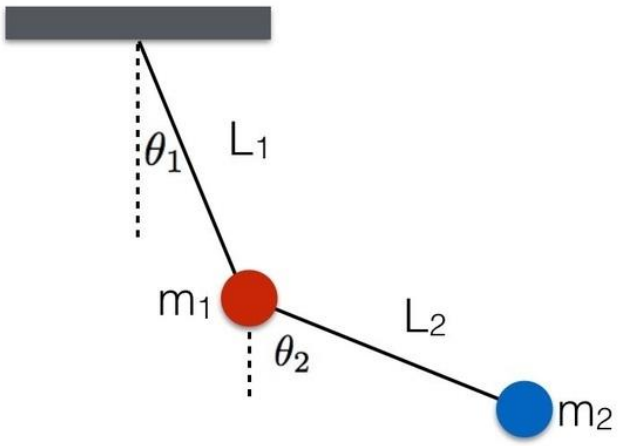
Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

Candidato | **M3**

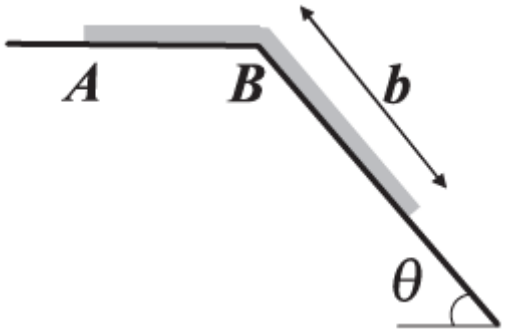
Candidato	M3

Q1 - Considere um pêndulo duplo que consiste de duas hastes de massa desprezível de comprimentos L_1 e L_2com massas m_1e m_2 ligadas a suas extremidades. O primeiro pêndulo está ligado a um ponto fixo e pode girar livremente em torno dele. O segundo pêndulo está ligado à extremidade do primeiro e pode oscilar livremente também. O movimento dos dois pêndulos está confinado a um plano, de modo que pode ser descrito em termos de seus ângulos com relação à vertical, θ_1e θ_2.

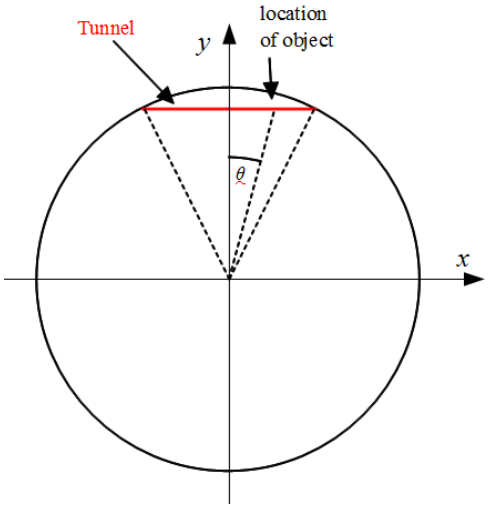


a) **(1.5)** Obtenha a Lagrangeana do pêndulo duplo.
b) **(1.5)** Obtenha as equações de movimento para o pêndulo duplo
c) **(1.0)** Considerando pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio do pêndulo duplo, simplifique as equações de movimento para o caso particular $L_1 = L_2 = L$.
d) **(2.0)** E encontre as frequências dos modos normais, considerando $L_1 = L_2 = L$ e $m_1 = m_2$.

Q2 - (2.0) Uma corrente flexível de comprimento L e distribuição uniforme de massa é deslocada inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito. Inicialmente, a distância de A a B é $L - b$ e a outra parte da corda encontra-se sobre um plano com inclinação θ. Encontre a velocidade da corrente quando a extremidade da corda atinge o ponto B.



Q3 - (2.0) Suponha que fosse aberto um canal que atravessasse a Terra ao longo de uma corda. Considerando a densidade da Terra uniforme, mostre que o movimento seria harmônico simples. Determine o período.



Q4 - A equação de Schrödinger é dada por $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\Psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$, sendo $\Psi(x,t)$ a função de onda que descreve o sistema.

a) O que são sistemas estacionários? Para descrevê-los, propomos $\Psi(x,t)=\psi(x)\varphi(t)$. Mostre que a equação de Schrödinger conduz a $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x)+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$. Encontre o $\varphi(t)$ e $\Psi(x,t)$ correspondentes. O que representa $\psi(x)$? **(1,0 pt)**

b) Partindo da equação de Schrödinger, é possível obter a equação de continuidade $\partial_t\rho(x,t)+\partial_x j(x,t)=0$? O que representa $\rho(x,t)$, $j(x,t)$? Qual o significado físico desta equação? (OBS.: Você pode responder sem deduzir a equação de continuidade) **(1,0 pt)**

c) Considere agora que a solução geral do sistema é dada pela função de onda total $\Psi_T(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\psi_i(x,t)$, onde a_i são números complexos e $\{\psi_i(x)\}=\{\psi_1(x),\psi_2(x),\psi_3(x),\psi_4(x),...\}$, constitui um conjunto completo de

autofunções. Usando a relação de ortonormalidade, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^*(x)\psi_i(x)\,dx = \delta_{ij}$,

encontre a relação de normalização para Ψ_T em termos dos coeficientes a_i . **(1,0 pt)**

d) Determine a energia média da energia do sistema descrito por Ψ_T em termos dos coeficientes a_i e das auto-energias E_i , sabendo-se que $\overline{H} = \int \Psi_T^*(x,t) H \Psi_T(x,t) dx$ e $H\psi_i(x,t) = E_i\psi_i(x,t)$. **(1,0 pt)**

e) Uma medida de energia é realizada sobre o estado estacionário $\Theta(x) = \sum_{i=1}^{6} \beta_i \psi_i(x)$, sendo β_i números complexos. Determine a probabilidade de medir o valor E_4 e a energia média associada a este estado. **(1,0 pt)**

Q5 - Partículas de spin-1/2 podem ser descritas em termos de uma base de estados $\{|-\rangle, |+\rangle\}$, autokets do operador S_z , $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$, onde $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ é o operador de spin. Definimos os operadores S_+ e S_-, que satisfazem: $S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle$ e $S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle$, e $S_\pm = S_x \pm iS_y$.

a) Considerando que os kets $|-\rangle, |+\rangle$ podem ser escritos como matrizes, $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, escreva os operadores S_-, S_+, S_x, S_y, S_z na base $\{|-\rangle, |+\rangle\}$ - na forma matricial. **(1,0 pt)**

b) Determine os autokets dos operadores S_x e S_y em termos dos kets $|-\rangle, |+\rangle$. Quais os autovalores correspondentes? **(1,0 pt)**

c) Seria possível escrever os operadores S_+ e S_- como $S_+ = \hbar|-\rangle\langle+|$ e $S_- = \hbar|-\rangle\langle-|$?? Apresente a forma correta destes operadores, caso a aqui proposta esteja incorreta. Justifique sua resposta. **(1,0 pt)**

d) No instante $t = 0$, o sistema encontra-se no estado $|\phi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, onde a, b são números reais. Se o operador S_y é medido em $t = 0$, quais resultados podem ser obtidos e com quais probabilidades? **(2,0 pts)**

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2019.1

Candidato	**M3**	**Questão**	**Q1**

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2019.1

Candidato	**M3**	**Questão**	**Q2**

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2019.1

Candidato	**M3**	**Questão**	**Q3**

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2019.1

Candidato	**M3**	**Questão**	**Q4**

Candidato	**M3**	**Questão**	**Q5**