Exame de Seleção

Doutorado em Física

2º Semestre de 2019

1ª Prova – 04/06/2019

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

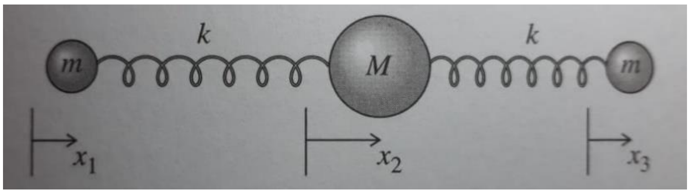
Candidato **D1**

Candidato	D1

Q1 - Resolva as questões abaixo

Considere um modelo mecânico para uma molécula triatômica linear. Dois átomos idênticos de massa m são conectados por duas molas idênticas a um único átomo de massa M, conforme mostra a figura. Assuma que o sistema está compelido a mover-se em apenas uma dimensão.

a) Obtenha a Lagrangeana do sistema. **(1.5)**
b) Encontre a equação de movimento para as variáveis x_1, x_2, x_3, que correspondem aos deslocamentos dos átomos em relação à suas posições de equilíbrio. **(1.5)**
c) Determine as frequências dos modos normais de vibração. **(1.5)**
d) Determine os modos normais que descrevem a amplitude e fase do movimento de cada átomo. Descreva o movimento do sistema para cada um dos casos. **(1.5)**



Q2 - A energia potencial de uma massa m a uma distância r da origem é dada por

$$U = U_0\left(\frac{r}{R} + \lambda^2\frac{R}{r}\right)$$

para $0 < r < \infty$, com U_0, R e λ constantes positivas.

a) Determine a posição de equilíbrio r_0. **(1.0)**
b) Expandindo a expressão da energia potencial em série de Taylor, mostre que, para $r = r_0 + x$, com x pequeno, a energia potencial tem a forma $U = constante + \frac{1}{2}kx^2$. **(1.5)**
c) Encontre a frequência angular para pequenas oscilações em termos de U_0, R, m e λ. **(1.5)**

Q3 - A representação matricial para os operadores de spin 1 na base dos autoestados do spin ao longo do eixo z (os estados $|1\rangle_z$, $|0\rangle_z$ e $|-1\rangle_z$) é dada pelas matrizes

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Mostre que os estados seguintes são autoestados do operador de spin $\hat{S}_x$: **(1.0)**

$$|1\rangle'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |0\rangle'_x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |-1\rangle'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quais são os autovalores associados?

b) Obtenha os autoestados normalizados $|1\rangle_x$, $|0\rangle_x$ $|-1\rangle_x$. **(0.5)**

c) Calcule a probabilidade de observar o spin num autoestado $|1\rangle_z$ quando está num autoestado $|0\rangle_x$. **(1.0)**

d) O spin está no seguinte estado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_x + \mathrm{i}|-1\rangle_x)\,.$$

Calcule as propabilidades de observar os autoestados $|1\rangle_z$, $|0\rangle_z$ e $|-1\rangle_z$. Qual é a soma de todas as probabilidades? **(1.0)**

e) Considere um raio de partículas do spin 1 no estado $|\psi\rangle$ da parte (d) e movendo ao longo do eixo z positivo. Uma taxa de $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ destas partículas é totalmente absorvida por um disco circular suspendido por um fio. Calcule o torque $\mathrm{d}\langle S_z\rangle/\mathrm{d}t$ no disco que é gerado pela absorção das partículas. Explique o significado físico do seu resultado. **(1.5)**

Q4 - Considere o elétron ligado do átomo hidrogênio. As funções de onda associados com os dois estados de menor energia são dadas por

$$\psi_{n,l,m}(\vec{r}) = R_{n,l}(r)Y_l^m(\theta,\phi)\,,$$

$$R_{1,0}(r) = \frac{2}{r_0^{3/2}}\exp\left(-\frac{r}{r_0}\right),$$

$$R_{2,1}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}r_0^{5/2}}\,r\exp\left(-\frac{r}{2r_0}\right),$$

onde r_0 é o raio de Bohr, com as partes radiais $R_{n,l}(r)$ e os harmônicos esféricos $Y_l^m(\theta,\phi)$. Os últimos satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int \mathrm{d}\Omega\,(Y_l^m)^*(\theta,\phi)Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}\,, \quad \mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\,.$$

Os autovalores de energia do átomo hidrogênio são dados por

$$E_n = -\frac{e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2},$$

com a carga elementar e, a massa m do elétron (o núcleo é assumido ter uma massa infinita) e a permitividade do vácuo ϵ_0. Dica: A integral seguinte pode ser útil:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n \exp(-x) = n!\,.$$

a) Mostre que as funções de onda $\psi_{1,0,0}$ e $\psi_{2,1,0}$ são normalizadas, ou seja, que a probabilidade de achar o elétron no espaço inteiro é igual a 1. **(1.0)**

b) Considere o elétron no estado descrito pela função de onda $\psi_{2,1,0}$. Mostre que a posição radial mais provável do elétron é dada por $r = 4r_0$. Explique porque deve ser um máximo (não é necessário avaliar a segunda derivada). **(0.5)**

c) Calcule os valores esperados

$$\langle \hat{\vec{L}}^2 \rangle = \int \mathrm{d}^3r\, \psi_{n,l,m}^*(\vec{r})\, \hat{\vec{L}}^2 \psi_{n,l,m}(\vec{r})\,,$$

do operador de momento angular quadrado para $\psi_{1,0,0}$ e $\psi_{2,1,0}$. Lembre-se que

$$\hat{\vec{L}}^2 Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta,\phi)\,, \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

(1.0)

d) Calcule o valor esperado da energia potencial e da energia cinética para um elétron no estado fundamental:

$$\langle E_{\mathrm{pot}} \rangle = \int \mathrm{d}^3r\, \psi_{1,0,0}^*(\vec{r}) \hat{V}(r) \psi_{1,0,0}(\vec{r})\,,$$

$$\langle E_{\mathrm{cin}} \rangle = \int \mathrm{d}^3r\, \psi_{1,0,0}^*(\vec{r}) \hat{H}_{\mathrm{cin}}(\vec{r}) \psi_{1,0,0}(\vec{r})\,,$$

$$\hat{V}(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\,, \qquad \hat{H}_{\mathrm{cin}}(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\hat{\vec{L}}^2}{\hbar^2 r^2}\right).$$

(1.0)

e) Mostre que

$$\langle E_{\mathrm{pot}} \rangle + \langle E_{\mathrm{cin}} \rangle = E_1\,,$$

com o autovalor de energia do átomo hidrogênio para $n = 1$. Utilize que o raio de Bohr é dado por

$$r_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m e^2}.$$

(1.0)

Candidato	**D1**	**Questão**	**Q1**

Candidato	**D1**	**Questão**	**Q2**

Candidato	D1	Questão	Q3

Candidato	**D1**	**Questão**	**Q4**