PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

José Santana Campos Costa

Transitividade e classes homoclínicas

São Luís - MA

2012

José Santana Campos Costa

Transitividade e classes homoclínicas

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Nivaldo Costa Muniz**.

São Luís - MA

2012

José Santana Campos Costa

Transitividade e classes homoclínicas

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Nivaldo Costa Muniz**.

Dissertação aprovada em 04 de abril de 2012, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(ORIENTADOR) Dr. Nivaldo Costa Muniz (UFMA)

Dr. Fabiano Borges da Silva (UFMA)

Dra. Vanderlei Minori Horita (UNESP/SJRP)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família. Aos meus pais, Marcial S. Costa e Elza C.C. Costa e ao meus irmãos Denuilce C. Costa, Paulo C.C. Costa e Maycon C. Costa.

AGRADECIMENTOS

A Deus.

A Todos os professores do curso que contribuíram para minha formação, em especial ao professor Maxwell por sempre ter me incentivado.

Ao Prof. Nivaldo, pela paciência, ensinamentos, conselhos e orientação.

Aos amigos Marcos, Marlor e todos os amigos da sala de estudos do mestrado pela amizade e companheirismo.

Aos meus pais e irmão pelo apoio e encorajamento.

A minha namorada, Ana Beatriz, pelo apoio e compreensão.

RESUMO

Estudaremos uma conjectura da dinâmica C^1 genérica: Se o conjunto não errante de um difeomorfismo genérico tem interior não vazio, então esse difeomorfismo é transitivo. Analisaremos alguns casos onde esta conjectura é válida.

Palavras-chave: Dinâmica genérica, Transitividade, Classes homoclínicas, Decomposição dominada.

ABSTRACT

We will study a conjecture about generic dynamical systems: If the non-wandering set of a generic diffeomorphism has nonempty interior, then this diffeomorphism is transitive. We will discuss some cases where this conjecture is valid.

Keywords: Generic dynamics, Transitivity, Homoclinic classes , Dominated splittings.

SUMÁRIO

Page

Capítulo 1
INTRODUÇÃO

Sistemas que evoluem com o tempo. Esta é a celebre frase para tentar descrever sistemas que podem ter uma aparência muito simples, a ponto de nossa intuição nos levar a pensar que não haja nenhuma complicação em seu comportamento, entretanto esses sistemas causaram espanto em muitos cientistas.

O pioneiro no estudo desses sistemas foi um jovem professor de matemática de Paris, Julles Henri Poincaré, ele foi um dos primeiros a notar que sistemas de aparência muito simples podem ter comportamento muito complicado. Em seus trabalhos surge pela primeira vez o termo "sensibilidade das condições iniciais".

Iniciou-se um novo ramo da matemática: Sistemas Dinâmicos. Desde sempre procurou-se descrever o comportamento desses sistemas, mas olhando para um único sistema, ou uma família. Um objetivo mais ousado é tentar descrever as características de quase todos os difeomorfismos de classe C^1, este ramo é chamado de dinâmica genérica.

Nas últimas décadas muitos esforços tem sido feito para este objetivo. Destaque-se o *closing lemma* de Pugh e os lemas de conexões demonstrados por Mañe e Hayashi. Recentemente Bonatti e Crovisier ([4]) estenderam o lema de conexão para pseudo-órbitas.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma conjectura no mundo dos difeomorfismos C^1, formulada por Abdenur,Bonatti,Díaz: genericamente, se um difeomorfismo tem o conjunto não errante com interior não vazio, então esse difeomorfismo é transitivo.

Vamos descrever brevemente o que estudaremos ao longo deste trabalho:

No capítulo 2 exporemos as noções fundamentais da dinâmica genérica: elementos de topologia: uma discussão sobre os conjuntos residual e magro, a topologia C^r no mundo dos difeomorfismos e a topologia de Hausdorff; ainda veremos algumas noções sobre os sistemas hiperbólicos e definições mais fracas como a decomposição dominada; a definição de sistemas transitivos e o conceito de folheação em variedades.

No capítulo 3 começaremos a estudar a dinâmica genérica: olharemos algumas características sobre o conjunto $\mathrm{Diff}^1(M)$; os famosos lemas de pertubações e suas consequências e apresentaremos a conjectura.

No resto do trabalho definiremos o conceito de classe homoclínica e os difeomorfismos que quem finitas (TAME) e infinitas (WILD) classes homoclínicas e mostraremos os casos onde a conjectura é válida: o folclórico caso hiperbólico, o caso em superfícies, o caso parcialmente hiperbólico, o caso tame e por fim o caso de uma classe homoclínica com interior não vazio.

No apêndice apresentamos uma breve explanação sobre os difeomorfismos de Anosov.

Capítulo 2

NOÇÕES PRELIMINARES

2.1 Noções de Topologia

Nesta seção definiremos os conjuntos residual e magro, e tentaremos deixar claro a importância de se trabalhar com conjuntos residuais.

2.1.1 Conjuntos residual e magro

Assumimos aqui que são conhecidos os conceitos de conjunto aberto, fechado e denso.

Nesta subseção iremos considerar que X é um espaço topológico.

Definição 2.1.1. Um subconjunto $Y \subset X$ é chamado de *denso em lugar nenhum* se o seu fecho $\overline{Y}$ não tem ponto interior.

Definição 2.1.2. Um subconjunto $S \subset X$ é chamado de *magro* se é a união enumerável de subconjuntos densos em lugar nenhum.

Definição 2.1.3. Dizemos que um subconjunto $R \subset X$ é *residual* se contém uma interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos de X.

Por definição vemos que o complementar de um conjunto magro é um conjunto residual e o complementar de um residual é um magro.

Um teorema de René Baire nos diz que: em um espaço métrico completo, todo residual é denso.

Teorema 2.1.4 (Baire)**.** *Em uma espaço métrico completo, as famílias enumeráveis de abertos densos tem interseção densa.*

Dizemos que um espaço métrico completo X é um *espaço de Baire* se a interseção enumerável de abertos e densos é densa. Trabalharemos apenas com espaços de Baire, ou seja, nossos residuais são densos.

Definição 2.1.5. Dizemos que uma propriedade p é *genérica* em um espaço topológico X, se existe um conjunto residual $R \subset X$ tal que todo ponto de R tem a propriedade p.

Algumas questões surgem naturalmente:

• Qual é a importância de trabalharmos com conjuntos residuais?

O interesse em trabalhar com residuais se deve ao fato que se tivermos os conjuntos residuais A_1, A_2, $A_3 \subset X$ com as propriedades P_1, P_2 e P_3, respectivamente, o conjunto $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ é um conjunto denso em X e ainda com as propriedades P_1, P_2 e P_3, pois A é residual, de fato, como A_1, A_2 e A_3 contém uma interseção enumerável de abertos denso, assim acontece com $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Queremos que fique claro que a interseção de dois ou mais residuais ainda é um conjunto residual, e portanto denso. Usaremos isto várias vezes ao longo do trabalho, e algumas vezes não vamos mencionar isso; o leitor deve ficar atento para perceber quando esse fato for usado.

• O que os conjuntos residuais diferem dos densos?

A propriedade dos residuais que vimos acima, não acontece em conjuntos que são apenas densos, por exemplo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são conjuntos densos em $\mathbb{R}$, mas $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

• Um conjunto magro pode ser denso?

A resposta é sim. Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é um conjunto magro, de fato seja uma enumeração $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, ...\}$, então é uma união de densos em lugar nenhum $\mathbb{Q} = \{q_1\} \cup \{q_2\} \cup \ldots$

.

• Um conjunto residual é sempre “muito grande”?

Para responder e entender esta pergunta, seja $\varepsilon > 0$ e $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, ...\}$ e $B_n = B(q_n, \frac{\varepsilon}{2^n})$. O conjunto $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ é um conjunto aberto e denso, ou seja, residual. Entretanto veja que $|A| = |\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon$. O “tamanho” de A, que é residual, é muito pequeno se comparado com o seu complementar, que é magro, $|A^c| = |\mathbb{R}| - |A| = \infty - 2\varepsilon = \infty$.

Isto mostra que um residual mesmo sendo um conjunto grande do ponto de vista topológico, pode ser muito pequeno do ponto de vista probabilístico.

2.1.2 *A topologia C^r em $Diff^r(M)$*

Denotaremos por M uma variedade compacta sem bordo e $\mathrm{Diff}^r(M)$ o conjunto de todos os difeomorfismos $f : M \to M$ de classe C^r.

Definição 2.1.6. Chamaremos de *métrica C^r* a métrica definida no conjunto $\mathrm{Diff}^r(M)$

dado por: para $f, g \in \text{Diff}^r(M)$

$$d_r(f,g) = \max\{\sup_{x\in M}\{d(f(x),g(x))\}, \sup_{x\in M}\{||Df_x - Dg_x||\}, ..., \sup_{x\in M}\{||D^r f_x - D^r g_x||\}\}.$$

Ao longo do deste texto trabalharemos mais com o conjunto $\text{Diff}^1(M)$ e métrica C^1.

$$d_r(f,g) = \max\{\sup_{x\in M}\{d(f(x),g(x))\}, \sup_{x\in M}\{||Df_x - Dg_x||\}\}$$

Estaremos sempre nos referindo a esta métrica quando aparecerem as expressões: C^1-vizinhança, C^1-aproximado, C^1-arbitrariamente próximo, C^1-genérico e C^1-pertubação.

Teorema 2.1.7. *O conjunto* $\text{Diff}^1(M)$ *com a métrica* C^1 *é um espaço de Baire.*

Para a demonstração e outros conceitos de dinâmica genérica veja [12].

2.1.3 *Topologia de Hausdorff*

Definição 2.1.8. Seja X um espaço métrico com uma métrica d. A distância de um ponto $x \in X$ a um subconjunto $A \subset X$ e dada por

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a);\ a \in A\}.$$

Indicaremos com $F(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos compactos e não-vazios $A \subset X$.

Definição 2.1.9. Para $A, B \in F(X)$, a *métrica de Hausdorff* $\rho(A,B)$ é definida por:

$$\rho(A,B) = \max\{\sup\{d(a,B);\ a \in A\}, \sup\{d(b,A)\ b \in B\}\}.$$

Note que a métrica de Hausdorff é uma distância entre conjuntos e que $\rho(A,B) = 0$ se, somente se, os conjuntos forem iguais. O que não acontece com a distância usual[1] entre conjuntos, pois basta que os subconjuntos tenham interseção não vazia para que $d(A,B) = 0$. Se pensarmos em uma sequência de conjuntos $A_n \to B$ na métrica de Hausdorff, significa que A_n se torna igual a B quando $n \to \infty$.

[1] A distância usual entre dois subconjuntos não vazios $A, B \subset X$ é dada por $d(A,B) = \inf\{d(a,b);\ a \in A,\ b \in B\}$.

2.2 Dinâmica hiperbólica

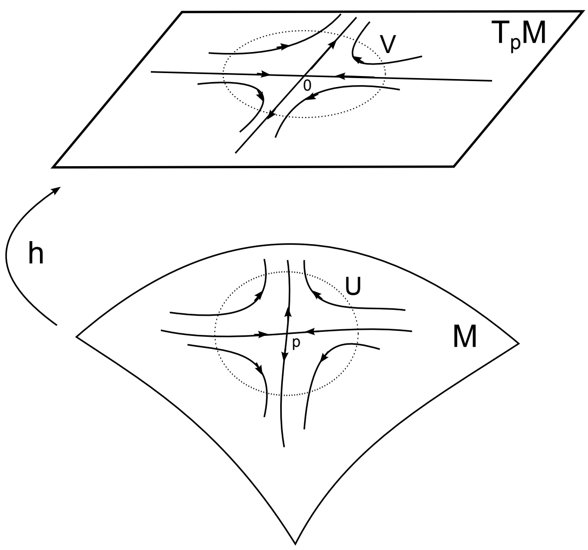
O estudo dos sistemas dinâmicos tem como um de seus objetivos o de descrever o comportamento (assintótico) de grandes grupos de sistemas. Historicamente o conceito de **hiperbolicidade** despontou como uma característica importante de muitos sistemas. Dinâmicas puramente hiperbólicas são hoje bastante bem compreendidas e formam um capítulo muito especial em toda a teoria.

Definição 2.2.1. Seja o difeomorfismo $f : M \to M$ e p um ponto fixo de f. Dizemos que p é *hiperbólico* se a matriz da diferencial $Df_p : T_pM \to T_pM$ não tem autovalores com módulo igual a 1. Um ponto periódico de período k é chamado de *periódico hiperbólico* se é um ponto fixo hiperbólico para f^k.

O espaço tangente de um ponto periódico hiperbólico decompõe-se em subespaços que contraem e expandem uniformemente pela ação da diferencial, e isto é uma aproximação linear do que acontece na variedade como mostra o teorema abaixo.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Hartman)**.** *Seja o difeomorfismo $f : M \to M$ e p um ponto fixo hiperbólico de f, então f e Df_p são localmente conjugadas. Mas precisamente, existe um vizinhança U_p de p em M e uma vizinhança V de 0 em T_pM e um homeomorfismo $h : U \to V$ tal que*

$$h \circ f = Df_p \circ h.$$



Grosseiramente falando, um conjunto é hiperbólico quando todos os seus pontos se comportam, na descrição acima, como pontos fixos hiperbólicos. Ese é o teor da próxima definição:

Definição 2.2.3. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo. Um conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ é *hiperbólico* se para todo $x \in \Lambda$ existem subespaços $E^s(x) \subset T_xM$ e $E^u(x) \subset T_xM$ satisfazendo:

(1) $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$

(2) $Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ e $Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$

(3) Existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tal que

(a) $||DF_x^n v|| \leq C\lambda^n ||v|| \ \forall \ v \in E^s(x)$ para todo $n \geq 0$.

(b) $||DF_x^{-n} v|| \leq C\lambda^n ||v|| \ \forall \ v \in E^u(x)$ para todo $n \geq 0$.

Exemplo 2.2.4. Seja x um ponto fixo hiperbólico de $f : M \to M$. Então o conjunto $\{x\}$ é hiperbólico. Mais geralmente, a órbita de um ponto periódico hiperbólico é um exemplo simples de conjunto hiperbólico.

Exemplo 2.2.5 (Automorfismos do Toro)**.** Podemos parametrizar o círculo unitário S^1 dos seguintes modos:
$\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ onde $0 \leq t \leq 1$

Se identificarmos o ponto 0 com o ponto 1 podemos ver o círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$ como sendo o intervalo $[0,1]$, ou melhor identificar com o conjunto quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Podemos ver o toro como sendo $T^2 = S^1 \times S^1 = [0,1] \times [0,1]$. Portanto podemos identificar o toro T^2 como sendo o quadrado de lado 1. Vamos construir uma transformação de $T^2 \to T^2$. Primeiro olharemos para a transformação $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$L(x,y) = (2x+y, x+y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

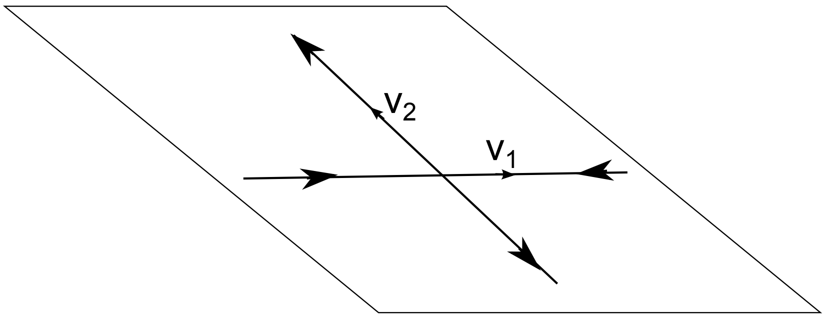
Vamos restringir essa aplicação a T^2 definindo então $F_L : T^2 \to T^2$ por

$$F_L(x,y) = (2x+y, x+y)(\text{mod } 1)$$

Como essa matriz é simétrica, possui uma base de autovetores ortogonais v_1, v_2 com autovalores[2] $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ e $\lambda_2 = \lambda_1^{-1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$. Dessa forma, vemos que T^2 é um

[2] Encontrados resolvendo a equação $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

conjunto hiperbólico, pois em todo ponto existe uma decomposição $E^c \oplus E^u$ onde E^u é o subespaço gerado pelo vetor v_2 com taxa de expansão λ_2 e E^c é o subespaço gerado pelo vetor v_1 com taxa de contração λ_1.



Exemplo 2.2.6 (Ferradura de Smale)**.** A ferradura de Smale é uma construção topológica de um sistema dinâmico hiperbólico e também é um famoso exemplo de sistema caótico. Em [8] é feita a construção da ferradura, com mais detalhes, e lá também se mostra que a ferradura é um sistema caótico. Para ver o histórico desse exemplo veja [17].

A ferradura pode ser vista como uma construção geométrica. Primeiro imaginamos um quadrado que é esticado na vertical formando um retângulo e, em seguida, esse retângulo é dobrado,formando uma figura semelhante a uma ferradura. Continuamos fazendo esse processo de esticar e dobrar, infinitas vezes. Para ser mais precisos, seja $Q = [0,1] \times [0,1]$ o quadrado unitário, A o semicírculo de raio 1 em baixo de Q, B o semicírculo acima de Q, e seja $N = Q \cup A \cup B$, vamos olhar para as faixas verticais G, H_0, H_1, H_2 e H_3 como na figura(2.1). Vamos esticar esta figura na vertical e dobrar.

Continuamos esse o processo como mostra a figura2.2.

Note que f é uma contração em A e então tem um único ponto fixo a, e pelo teorema do ponto fixo[3] $f^n(x) \to a$ para todo $x \in A$, note também que $f(B) \subset A$, ou seja, $f^n(x) \to a$ para todo $x \in B$. Então vemos que se $q \in Q$, mas $f^k(q) \notin Q$, para algum $k \in \mathbb{N}$ então $f^k \in A \cup B$ e portanto tende para a. Podemos então analisar somente os pontos que ficam em Q.

$$\Lambda_+ = \{x \in Q; f^n(x) \in Q,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}_+\}$$

De forma análoga podemos construir o conjunto Λ_- para f^{-1}

[3] Sendo $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e $f : X \to X$ uma λ-contração ($||f(x) - f(y)|| < \lambda||x - y||$ para todo $x, y \in X$). Então f tem um único ponto fixo, x_0, e $||f^n(x) - x_0|| < \lambda^n||x - x_0||$ para todo $x \in X$

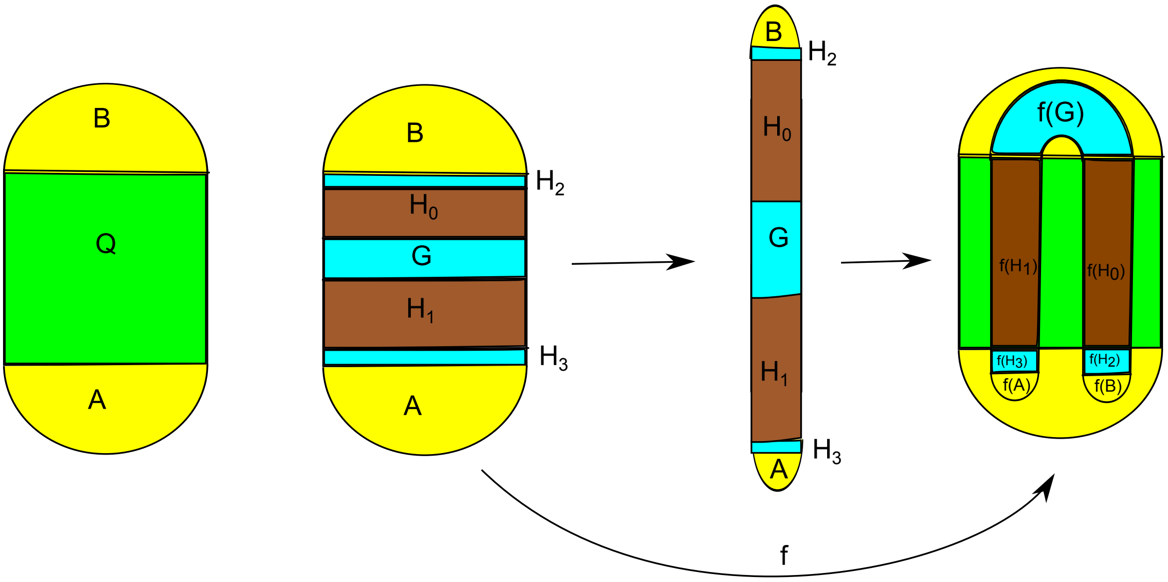


Figure 2.1:

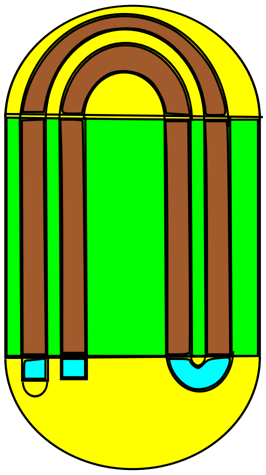


Figure 2.2:

$$\Lambda_- = \{x \in Q; f^n(x) \in Q,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}_-\}$$

E consideramos a interseção desses dois:

$$\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_- = \{x \in Q; f^n(x) \in Q,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}_-\}$$

É possível mostrar que o conjunto Λ é um conjunto de Cantor, invariante por f e hiperbólico.

Observando a a figura(2.4), os pontos fixos da ferradura são a, p, s são fixos e r é

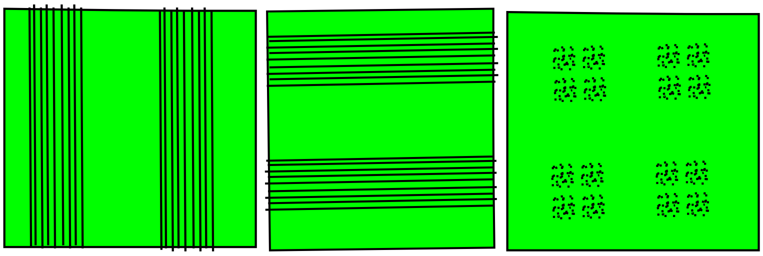


Figure 2.3: Λ_+, Λ_- e $\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$, respectivamente

um ponto homoclínico[4] (veja definição(3.1.4)), a é um atrator e p, s são pontos de sela, pois os pontos que estão na sua horizontal são atraídos e os que estão na vertical são repelidos.

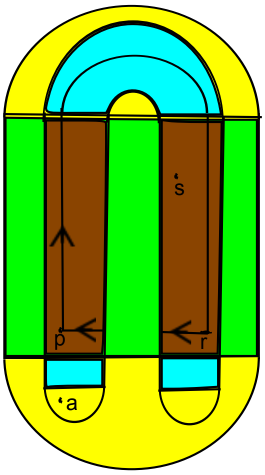


Figure 2.4:

Constinuamos agora a nossa visita à definição de hiperbilicidade, apresentando resultados clássicos e muito úteis no contexto.

Proposição 2.2.7. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo $f : M \to M$. Então, os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam continuamente com x.*

Proof. Dada uma sequência $x_n \in \Lambda$ tal que $x_n \to x$, devemos mostrar que $E^s(x_n) \to E^s(x)$ e $E^u(x_n) \to E^u(x)$. Seja então x_{n_k} uma subsequência tal que $\dim(E^s(x_{n_k})) = j$, para algum $j \in \{0, .., n\}$, e $\{v_k^1, ..., v_k^j\}$ uma base ortonormal de $E^s(x_{n_k})$ e $\{v_k^{j+1}, ..., v_k^n\}$

[4]Todo sistema que tem um ponto homoclínico transversal tem uma ferradura de Smale, e como sabemos a ferradura é um conjunto hiperbólico e caótico, ou seja, todo sistema que tem ponto homoclínico é caótico.

uma base ortonormal de $E^u(x_{n_k})$. Podemos supor, tomando uma subsequência se necessário, que $v_k^i \to v^i$ (pois, estes vetores estão na esfera, que é compacta, então tem subsequência convergente) e portanto $\{v^1, ..., v^j\}$ e $\{v^{j+1}, ..., v^n\}$ são conjuntos ortogonais[5] de $T_x M$. Seja os os subespaços gerados $E = \langle v^1, .., v^j \rangle$ e $F = \langle v^{j+1}, .., v^n \rangle$ Seja $v \in E$ com $||v|| = 1$, então $||Df_x^m v|| \leq C\lambda^m$ para $m \geq 0$. De fato, podemos escolher $v_k \in E^s(x_{n_k})$, com $||v_k|| = 1$ (tem subsequência convergente se necessário) tal que $v_k \to v$. Logo, fixando m temos

$$||Df_x^m v|| = \lim_{k\to\infty} ||Df^m_{x_{n_k}}|| \leq C\lambda^m$$

Isso mostra que $E \subset E^u(x)$, analogamente $F \subset E^n(x)$, em particular $E \cap F = \{0\}$ e como $E \oplus F = T_x M$, logo $E = E^s(x)$ e $F = E^u(x)$. $\square$

Abaixo temos uma consequência imediata e importante.

Corolário 2.2.8. *Se Λ é um conjunto hiperbólico. Então a dimensão dos subespaços é localmente constante.*

Outra característica importante dos conjuntos hiperbólicos é a existência dos tamanhos uniformes das subvariedades, que dado pelo teorema abaixo.

Teorema 2.2.9 (Teorema da variedade estável)**.** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda$ se verifica:*

(1) $W^s_\varepsilon(x)$ é uma subvariedade C^r tal que $T_x W^s_\varepsilon = E^s(x)$.

(2) $W^s_\varepsilon(x) \subset W^s(x)$

(3) $W^s(x) = \cup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(x)))$ é uma subvariedade imersa de classe C^r e varia continuamente com x.

Existe um resultado análogo para W^u já que $W^u(x, f) = W^s(x, f^{-1})$.

---

[5]Note que o ângulo é constante $\angle(v_k^i, v_k^j) = 90^o$ para $i \neq j$, assim $\angle(v^i, v^j) = 90^o$

2.2.1 *Formas fracas de Hiperbolicidade*

Os sistemas hiperbólicos apareceram desde Poincaré, com a descoberta do ponto homoclínico. Mas foi na década de 60 que realmente se descobriu a rica dinâmica desses sistemas com o estudo da estabilidade estrutural de M. Peixoto e os trabalhos de S. Smale, Anosov, etc.

Às vezes, pedir que um difeomorfismo seja hiperbólico é exigir muito, pois foi mostrado que existem conjuntos abertos de sistemas dinâmicos que não são hiperbólicos e também, como o nosso mundo é, do ponto de vista físico, conservativo, existem muitos fenômenos dinâmicos vindos de aplicações que não podem ser descritos no quadro de hiperbolicidade. Estes fatos importantes levaram ao estudo de formas mais fracas de hiperbolicidade. Nesta seção nós veremos formas mais relaxadas de hiperbolicidade sendo que as duas principais são a **hiperbolicidade parcial**, que além dos subfibrados hiperbólicos E^u e E^s também pode admitir um fibrado central e a **decomposição dominada**, que inclui a hiperbolicidade parcial.

Definição 2.2.10. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e $K \subset M$ um conjunto invariante. Dizemos que K é *parcialmente hiperbólico* se existe uma decomposição $T_K M = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$, onde pelo menos um dos subfibrados E_1 ou E_k é hiperbólico, isto é E_1 é uniformemente contrativo ou/e E_k é uniformemente expansor.

Podemos escrever também como uma decomposição em três distribuições $T_K M = E^u \oplus E^c \oplus E^s$, onde a diferencial $Df(x)$ contrai uniformemente na direção estável E^s, expande uniformemente na direção instável E^u e pode contrair ou expandir na direção central E^c, mas com taxas sensivelmente menores.

Definição 2.2.11. Dizemos também que K é *parcialmente hiperbólico forte* se na decomposição $T_K M = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$,os subfibrados E_1 e E_k são não triviais.

Definição 2.2.12. Dizemos que a decomposição $T_k M = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ é *volume hiperbólica* em K se existe $n > 1$ tal que o Jacobiano[6] de $Df^n|_{E_1}$ é estritamente menor que 1 e o Jacobiano de $Df^n|_{E_k}$ é estritamente maior 1.

Nesta definição a diferencial de f^n contrai uniformemente o Volume em E_1 e expande uniformemente o volume em E_k.

[6] Estamos pensando em jacobiano como sendo o módulo do determinante da diferencial.

A noção de **volume hiperbólico** é uma mais fraca que a hiperbolicidade parcial. Para simplificar, vamos olhar apenas para o subfibrado E_1, supondo que este tem dimensão 3. Lembre que para a hiperbolicidade parcial E_1 é contrativo hiperbólico, isto é, todas as direções são contraidas pela ação da derivada (veja a figura2.5). Já para o volume hiperbólico, dizer que o jacobiano de $Df|_{E_1}$ é estritamente menor que 1 é equivalente a dizer que a média das direções de E_1 é contraida, ou seja, seu volume é contraido, entretanto, diferentimente da hiperbolicidade parcial, uma das direções pode expandir. Por exemplo, na figura(2.5) a direção v_1 expandiu mas as outras direções contrairam tanto a ponto de compensar essa direção que expandiu, diminuindo o volume.

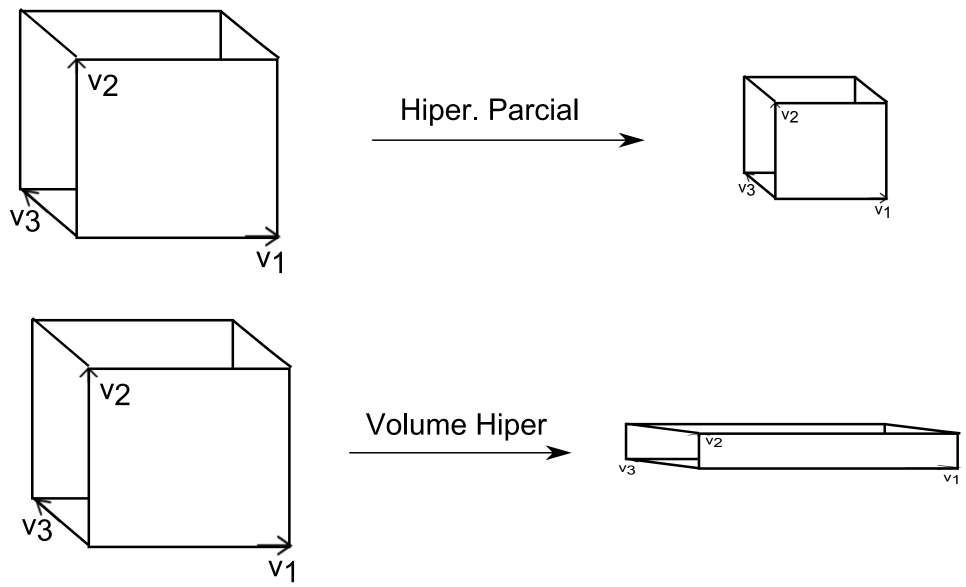


Figure 2.5:

Definição 2.2.13. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e $K \subset M$ um conjunto invariante. Dizemos que K admite *decomposição dominada* se existe uma decomposição $T_K M = E \oplus F$ e existe $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tal que

$$||Df^n|_{E(x)}||||Df^{-n}|_{F(x)}|| \leq C\lambda^n, \ \forall \ x \in \Lambda, \ n \geq 0.$$

Em palavras, para n grande, a "maior expansão" de Df^n sobre E é menor que a "maior contração" de Df^n sobre F e de fato se torna exponencialmente menor com n. A hiperbolicidade parcial é uma decomposição dominada da forma $E = E^s \oplus E^c$ e $F = E^u$ ou $E = E^s$ e $F = E^c \oplus E^u$.

A decomposição dominada é de *índice k* se $\dim(E) = k$ e λ é a *constante de dominação*.

Note que, diferentemente da hiperbolicidade pura, no contexto de hiperbolicidade parcial não podemos garantir que na decomposição dominada existe algum subfibrado que contrai ou expande uniformemente a menos de um constante C, os subfibrados dependem de n,

$$||Df^n|_E|| \leq ||Df^n|_F||C\lambda^n = C(n)\lambda^n$$

a decomposição dominada nos dá apenas um controle(dominação) entre os subfibrados.

As vezes vamos considerar a decomposição dominada com mais de dois fibrados $T_K M = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$, esta decomposição é dominada se cada decomposição $E_i \oplus E_j$ é dominada para todo $i < j$, ou também se para todo $i = 1, ..., (k-1)$ a decomposição $T_K M = (\oplus_{j=1}^{i} E_j) \oplus (\oplus_{j=i+1}^{k} E_j)$ é dominada.

Isto motiva a nós definir uma decomposição $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$, em que E_i não admite decomposição dominada. Chamaremos esta de *melhor decomposição dominada* isso é assegurado pela seguinte proposição:

Proposição 2.2.14. *Seja K um conjunto f-invariante admitindo uma decomposição dominada. Então existe uma única* melhor decomposição dominada $T_K M = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ *sobre K tal que E_i não admite decomposição dominada. Qualquer outra decomposição invariante é obtida considerando uma partição de 1,...,k em subintervalos.*

Listaremos agora outras propriedades da decomposição dominada.

Proposição 2.2.15 (Unicidade)**.** *Seja o difeomorfismo $f : M \to M$, com $\dim(M) = d$ e K um conjunto compacto invariante. Se $d = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, então existe no máximo uma decomposição dominada $T_K M = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$ em K com $\dim(E_i) = n_i$ para todo i.*

Proposição 2.2.16 (Transversalidade)**.** *Seja o difeomorfismo $f : M \to M$ e K um conjunto compacto invariante com decomposição dominada $T_K M = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$ então*

$$\measuredangle(\oplus_{j=1}^{i} E_j, \oplus_{j=i+1}^{k} E_j) < \gamma < 0 \quad \text{para } i = 1, ..., (k-1).$$

Reciprocamente, a transversalidade é uma condição suficiente para que haja decomposição dominada.

Proposição 2.2.17. *Se existir uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f tal que*

$$\measuredangle(E^s(p,g), E^u(p,g)) > \gamma > 0$$

para toda $g \in \mathcal{U}$ e $p \in \mathrm{Per}(g)$ de índice i. Então existe uma decomposição dominada de índice i sobre $\mathrm{Per}(f)$ de índice i.

Proposição 2.2.18 (Continuidade). *Seja o difeomorfismo $f : M \to M$ e K um conjunto compacto invariante com decomposição dominada $T_K M = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$, então os fibrados $E_i(x)$ variam continuamente com x.*

Proposição 2.2.19 (Extensão para o fecho). *Seja K um conjunto f-invariante admitindo decomposição dominada de índice i. Então $\overline{K}$ tem um decomposição dominada de índice i com a mesma constante de dominação.*

Proposição 2.2.20 (Extensão para uma vizinhança). *Seja K um conjunto f-invariante com uma decomposição dominada. Então podemos estender esta decomposição de forma dominada para o conjunto maximal invariante de f em uma vizinhança de K.*

Proposição 2.2.21 (Robustez). *Seja o difeomorfismo $f : M \to M$ e Λ um conjunto compacto invariante admitindo uma decomposição dominada $T_\Lambda = E \oplus F$. Então existe uma vizinhança U de Λ e uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}$ de f tal que para todo $g \in \mathcal{U}$ existe uma decomposição dominada sobre qualquer compacto g-invariante $\Lambda_g \subset U$. Além disso a constante de dominação pode ser escolhida de forma uniforme. O conjunto U é dito uma vizinhança admissível de Λ.*

Proposição 2.2.22 (Agrupamento). *Seja K um conjunto f-invariante, $T_K M = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ uma decomposição dominada e $1 \leq i < j \leq k$, com $i > 1$ ou $j < k$. Então*

$$T_K M = E_1 \oplus \cdots \oplus E_{i-1} \oplus F \oplus E_{j+i} \oplus \cdots \oplus E_k,$$

onde $F = E_i \oplus \cdots \oplus E_j$, é uma decomposição dominada.

Proposição 2.2.23 (sub-decomposição). *Suponha que K é um conjunto f-invariante, $T_K M = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ uma decomposição dominada e que $E_j = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$ é uma decomposição dominada então*

$$T_K M = E_1 \oplus \cdots \oplus E_{j-1} \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_m \oplus E_{j+1} \oplus \cdots \oplus E_k$$

também é uma decomposição dominada.

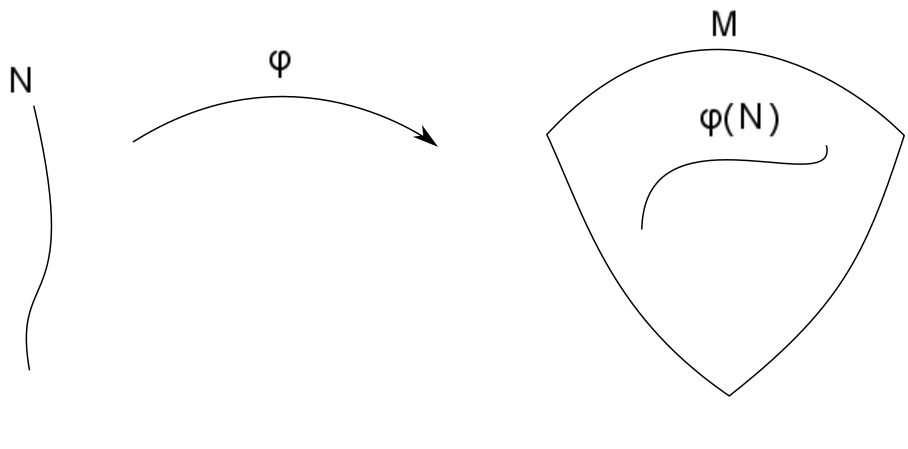
As demonstrações dessas propriedades estão no Apêndice B de [5].

Diferente do que vimos para conjuntos hiperbólicos. Nestas formas mais fracas nem sempre podemos garantir que exista na variedade uma folheação(veja definição(2.4.1)) para os subfibrados. O Teorema (esta versão do teorema está em [5]) abaixo mostra um caso em que isso é possível.

Teorema 2.2.24 (Brin, Pesin; Hirsch, Pugh, Shub)**.** *Seja f um C^r difeomorfismo de uma variedade compacta M admitindo uma decomposição dominada $TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s$ onde Df é uniformemente expansor em E^u e uniformemente contrativo em E^s, isto é, f é parcialmente hiperbólico. Assumindo que* $\dim(E^u) > 0$*, existe uma unique família $\mathcal{F}^u$ de subvariedades injetivas imersas $\{\mathcal{F}^u(x) : x \in M\}$ tal que $x \in \mathcal{F}^u(x)$ e $\mathcal{F}^u(x)$ é tangente a E^u_x para todo $x \in M$. Esta familia é invariante, $f(\mathcal{F}^u(x)) = \mathcal{F}^u(f(x))$ para todo $x \in M$, e as folhas $\mathcal{F}^u(x)$ são uniformemente contrativo para alguma iterada negativa de f. Além disso, $\mathcal{F}^u$ é uma laminação contínua de M, entende-se que todo ponto tem uma carta local contínua que trivializa as folhas e é uniforme ao longo de cada folha.*

Nosso conhecimento para o fibrado central E^c é bastante diferente. Muitas questões básicas não são conhecidas como a existência de uma folheação tangente em geral. Quando o fibrado central tem dimensão 1, existe sempre curvas tangentes a E^c passando através de cada ponto. Isto é porque um campo vetorial sempre tem solução. Mas estas curvas não são necessariamente únicas, por que o fibrado central não é geralmente Lipschitz contínuo.

Definição 2.2.25. Seja N e M variedades diferenciais. Uma aplicação diferenciável $\varphi : N \to M$ é uma *imersão* se $d\varphi_p : T_pN \to T_pM$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M)$ onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um *mergulho*.



Como podemos ver o mergulho é mais forte que a imersão, pois o mergulho além se ser uma imersão, como é homeomorfismo, preserva as propriedades topológicas.

Exemplo 2.2.26. A figura(2.6) ilustra várias imersões de $N = \mathbb{R}$ e $M = \mathbb{R}^2$. Observe que $(\mathbb{R}, \varphi_1)$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^2$, enquanto que $(\mathbb{R}, \varphi_2)$ e $(\mathbb{R}, \varphi_3)$ são apenas subvariedades imersas em $\mathbb{R}^2$, pois contem pontos que estão muito distante em $\mathbb{R}$, mas estão muito próximos ou até são iguais em $\varphi_2(\mathbb{R})$ e $\varphi_1(\mathbb{R})$. Já $(\mathbb{R}, \varphi_4)$ não é nem imersão, pois $d\varphi$ não é injetiva.

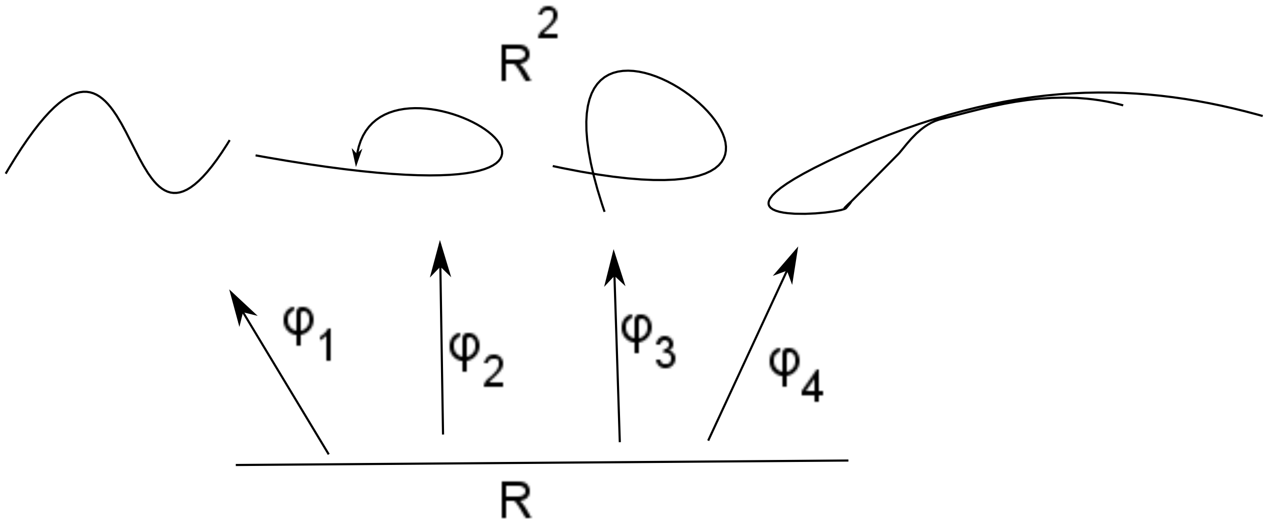


Figure 2.6:

O teorema é devido a [10]. A versão que escrevemos se encontra em [16].

Teorema 2.2.27 (Hirsch, Pugh, Shub). *Seja Λ um conjunto compacto f invariante admitindo uma decomposição dominada de codimensão 1, $T_\Lambda M = E \oplus F$, então existem duas aplicações contínuas φ^{cs} e φ^{cu} que associa cada $x \in \Lambda$ a uma subvariedade mergulhada $W^{cs}_\varepsilon(x)$ e $W^{cs}_\varepsilon(x)$, respectivamente, tal que:*

(1) $T_x W^{cs}_\varepsilon(x) = E$ *e* $T_x W^{cu}_\varepsilon(x) = F$,

(2) Para todo $0 < \varepsilon < 1$ *existe* ε_2 *tal que*

$$f(W^{cs}_{\varepsilon_2}) \subset W^{cs}_{\varepsilon_1}(f(x))$$

(3) Para todo $0 < \varepsilon < 1$ *existe* ε_2 *tal que*

$$f^{-1}(W^{cu}_{\varepsilon_2}) \subset W^{cu}_{\varepsilon_1}(f^{-1}(x))$$

Em particular, existem $\delta = \delta(\varepsilon_1)$ tal que se $y \in W^{cu}_{\varepsilon}(x)$ e $d(f^{-j}(y), f^{-j}(x)) < \delta$ para $0 \leq j \leq n$ então $f^{-j}(y) \in W^{cu}_{\varepsilon_1}(f^{-j}(x))$ com $0 \leq j \leq n$.

Proposição 2.2.28. *Seja Λ um conjunto compacto f-invarinte com uma decomposição $T_\Lambda M = E \oplus F$, tal que o ângulo $\angle(E, F) < \gamma < 0$ e existem as variedades locais de E e F com tamanho uniforme, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$ então $W^{cs}_{\varepsilon}(x)$ intersecta transversalmente $W^{cu}_{\varepsilon}(y)$.*

Proof. Vamos fixar $x \in \Lambda$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $W^{cu}_{\varepsilon}(x)$ e $W^{cs}_{\varepsilon}(x)$ se intersectam apenas em x porque $E(x) \cap F(x) = \{0\}$. Pela continuidade das variedades existe uma vizinhança U de x tal que todo ponto $y \in U$ tem a mesma propriedade, isto é, o único ponto de interseção das variedades é y. Tomando uma cobertura finita dessas vizinhanças seja ε o menor em todas elas, logo a interseção transversal $W^{cs}_{\varepsilon}(x) \pitchfork W^{cu}_{\varepsilon}(x) = \{x\}$ para todo $x \in \Lambda$. Como a transversalidade é uma propriedade aberta para todo $x \in \Lambda$ existe uma vizinhança V de x tal que para todo $z, y \in V$, $W^{cs}_{\varepsilon}(z)$ se parece muito com $W^{cs}_{\varepsilon}(x)$ e $W^{us}_{\varepsilon}(y)$ se parece muito com $W^{cu}_{\varepsilon}(x)$, portando a interseção transversal $W^{cs}_{\varepsilon}(z) \cap W^{cu}_{\varepsilon}(y) \neq \emptyset$. □

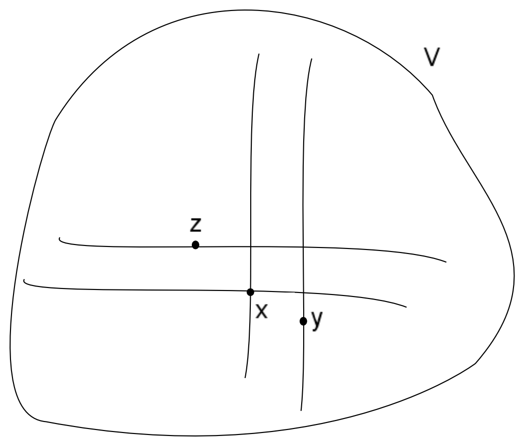


Figure 2.7:

2.3 Transitividade

Transitividade topológica é uma característica global de um sistema dinâmico. Intuitivamente uma aplicação é transitiva se em qualquer vizinhança arbitrariamente pequena tem pontos que caem em qualquer outra vizinhança arbitrariamente pequena,

isto é, o sistema todo está interligado. Consequentemente o sistema não pode ser dividido em dois outros com dinâmicas independentes.
Daremos duas definições de transitividade e veremos que com alguns requisitos elas são equivalentes.

Definição 2.3.1. Seja X um espaço métrico compacto. O sistema $f : X \to X$ é *topologicamente transitivo* se para todo par U, V de subconjuntos abertos não vazios de X existe um inteiro $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definição 2.3.2. Seja X um espaço métrico compacto. O sistema $f : X \to X$ é *topologicamente transitivo* se existe um ponto $x_0 \in X$ com órbita densa, isto é $\omega(x_0) = X$.

Estas definições não são imediatamente equivalentes, como mostra os exemplos abaixo.

Exemplo 2.3.3. Seja $X = \{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ dotado da métrica usual e $f : X \to X$ definida por $f(0) = 0$ e $f(1/n) = 1/(n+1),\ n = 1, 2, ...$ Claramente f é contínua. O ponto $x = 1$ tem órbita densa, mas f não satisfaz a definição(2.3.1). Isso mostra que a definição(2.3.2) não implica na definição(2.3.1).

Exemplo 2.3.4. Seja a função $f : [0,1] \to [0,1]$ definida por $f(x) = 1 - |2x - 1|$, esta é a, conhecida, aplicação tenda. Se $J \subset [0,1]$ e um intervalo fechado que não contém o ponto $\frac{1}{2}$ então o comprimento de $f(J)$ é o dobro do comprimento de J. Se $f^k(J)$ contém $\frac{1}{2}$ para algum k, então $f^{k+2}(J)$ é um intervalo fechado contendo o 0, que é um ponto fixo, e repetindo o argumento que dobra o comprimento do intervalo temos que $f^n(J) = I$ para algum n, logo nota-se que f satisfaz a definição(2.3.1). Note também que se A é denso em J então $f^n(A)$ é denso em $[0,1]$ para algum n. Agora seja X o conjunto dos pontos periódicos de f, X é denso em [0,1] como é conhecido, então a função $g = f|_X$ também satisfaz a definição(2.3.1) entretanto não satisfaz a definição(2.3.2), pois todas as órbitas são finitas.

Vamos observar que quando X é uma espaço métrico compacto então a definição(2.3.2) implica na definição(2.3.1), mas a recíproca não é verdadeira, e definição(2.3.1) implica na definição(2.3.2) se X não tem pontos isolados, a recíproca também não é verdadeira.

Teorema 2.3.5. *Se X é um espaço métrico compacto sem pontos isolados, então as definições (2.3.1) e (2.3.2) são equivalentes.*

Para mais detalhes sobre transitividade olhe [11].

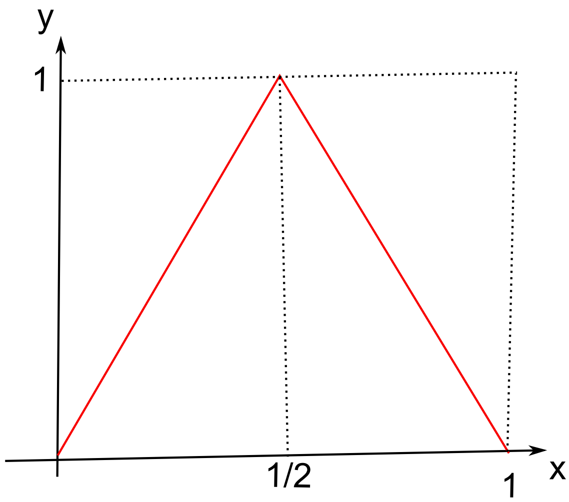


Figure 2.8: Aplicação Tenda

2.4 Folheações

Podemos pensar em uma folheação como uma superfície totalmente coberta por curvas ou em um livro que aparentemente é um bloco de dimensão 3, mas é constituído totalmente de folhas de "dimensão 2", provavelmente de onde tenha vindo o nome.

Vamos dar exemplos concretos. Nossa variedade é o quadrado $A = [0,1] \times [0,1]$ e o conjunto formados por todas as linhas verticais contidas em A, $\mathcal{F} = \{\gamma(y) = (c,y);\ c,y \in [0,1]\}$, é uma folheação de A. De forma mais geral seja $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{m-l}$, e sua folheação $\mathcal{F} = \{\mathbb{R} \times \{c\};\ c \in [0,1]\}$.

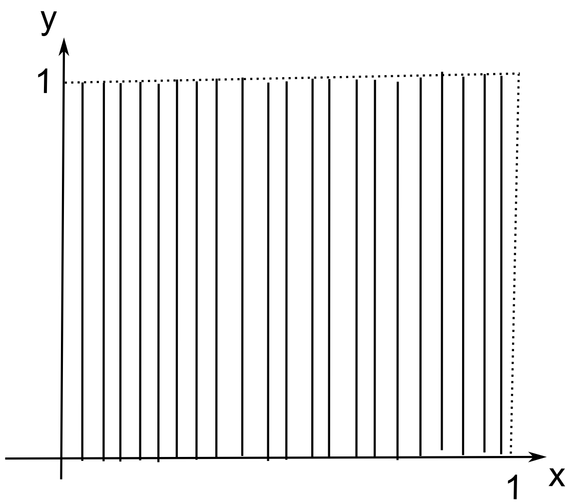


Figure 2.9:

Este objeto é simples de entender, mas é um pouco difícil de dar uma definição precisa. Para mais detalhes veja [13].

Começaremos considerando a união disjunta de todas as subvariedades em questão. Isto é, o conjunto de todas as subvariedades de uma variedade M, que denotaremos por $\mathcal{F}$. Podemos tomar a topologia natural das subvariedades l-dimensionais. Note que a aplicação natural (identidade) $\mathcal{F} \to M$ é bijetiva.

Assumimos que $l < m$, pois o caso $l = m$ não é interessante. Segue que a variedade $\mathcal{F}$ deve ser o "enorme objeto": que pode nuca ter uma base enumerável, pois normalmente terá uma quantidade de componentes não-enumerável.

Definição 2.4.1. Uma *folheação* de uma variedade topológica M é uma partição $\mathcal{F}$ em subvariedades de dimensão menor, junto com uma aplicação contínua

$$f : \mathcal{F} \to M$$

que satisfaz as seguintes condições locais. Todo ponto de M possui uma vizinhança U tal que:

(1) U é homeomorfa a um subconjunto aberto convexo do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$, através de um homeomorfismo h;

(2) A aplicação f leva cada componente de $f^{-1}(U)$ homeomorficamente a uma subvariedade de U;

(3) Esta família de subvariedades corresponde, através de h, precisamente a uma família de l-planos paralelos no espaço euclidiano, intersectados com o conjunto aberto $h(U)$.

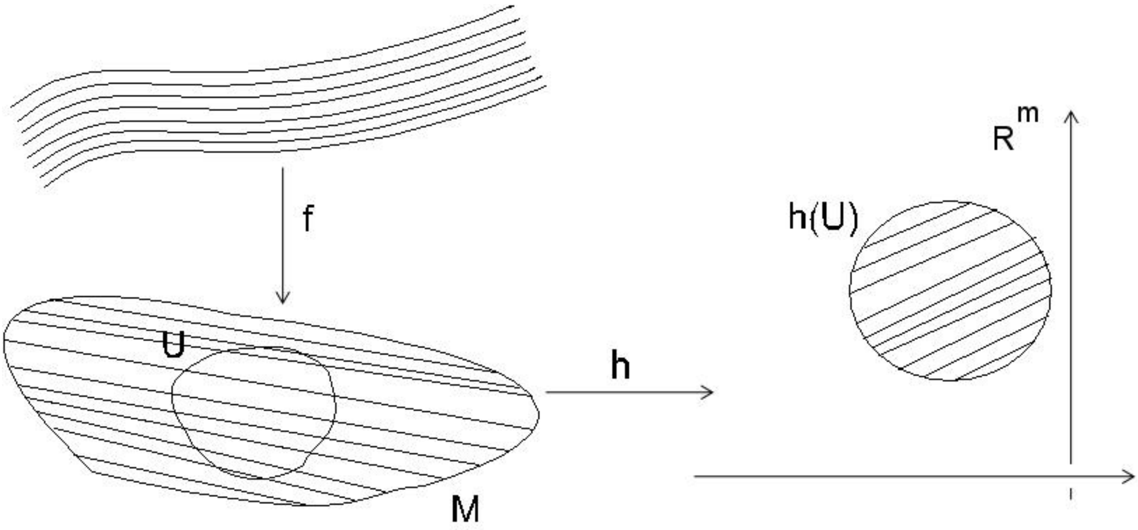
Toda componente de $\mathcal{F}$ é chamada de *folha* e também chamamos a folheação $\mathcal{F}$ de *variedade folheada*.

Um fibrado ou subfibrado E de M também chamaremos de *distribuição*.

Definição 2.4.2. Uma distribuição k-dimensional E de M é chamada de:

(1) *intergrável* se existe uma folheação cujo fibrado tangente é E

(2) *unicamente integrável* se existe uma folheação $\mathcal{F}$ com folhas k-dimensionais tal que toda curva C^1 $\gamma : \mathbb{R} \to M$ satisfazendo $\gamma'(t) \in E(\gamma(t))$ para todo t, está contida em $\mathcal{F}(\gamma(0))$ (em particular, $T_x\mathcal{F}(x) = E(x)$ para todo $x \in M$)



4.jpg

Figure 2.10:

2.5 Conjunto cadeia recorrente

Vamos supor que são conhecidas as noções de ponto recorrente e não-errante. Definiremos o conjunto dos pontos cadeia recorrente.

Definição 2.5.1. Seja o sistema dinâmico (X, f) onde X é um espaço métrico com função distancia $d(x, y)$. Dizemos que a sequência $x = x_0, x_1, ..., x_n = y$ é uma *ε-cadeia* ou uma *ε-pseudo-órbita* de x para y se

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \text{ para } 0 \leq i \leq n.$$

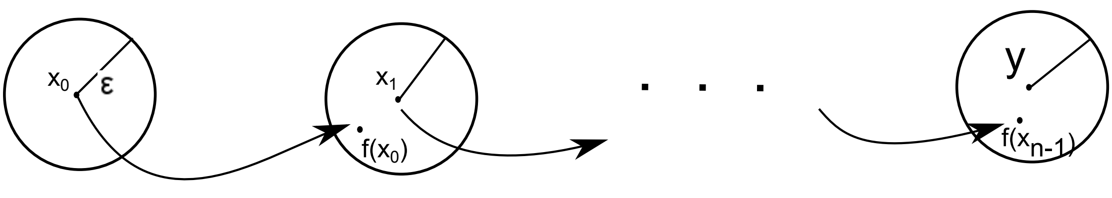


Figure 2.11:

Definição 2.5.2. Dizemos que $x \in X$ é *ponto cadeia recorrente* se existe uma ε-cadeia de x para x para todo $\varepsilon > 0$.

Notação: vamos denotar por $CR(f)$ o conjunto de todos os pontos cadeia recorrente e por $R(f)$ o conjunto dos pontos recorrentes

É fácil ver que:

$$R(f) \subset \Omega(f) \subset CR(f)$$

Entretanto nenhuma destas inclusões é inversível. Por exemplo na doubling map $1/2$ é não errante, mas não é recorrente. E na aplicação $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ onde $f(\tau) = \tau + \sin^2(\pi\tau)/10$ o zero é ponto fixo é todos os outros pontos são errantes, pois $\omega(x) = \{0\}$, $\forall x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Embora todo ponto seja cadeia recorrente, pois dado uma ε-vizinhança de um ponto x, mesmo que $x \to 0$, mas existe um ponto na direita da bola cento zero, que está na órbita da ε-vizinhança, que cai novamente próximo de x a uma distancia $\leq \varepsilon$.

Proposição 2.5.3. *O conjunto $CR(f)$ é fechado.*

Proof. Seja $y \in \overline{CR(f)}$. Vamos mostrar $y \in CR(f)$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe uma ε-cadeia recorrente de y. Como $y \in \overline{CR(f)}$ existe uma sequência x_k de elementos de $CR(f)$ tal que $x_k \to y$. Então tomemos um ponto x_{k_0} desta sequência dentro da δ-vizinhança de y (com $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$) e que $d(f(y), f(x_{k_0})) < \frac{\varepsilon}{2}$, isto vale pela continuidade da f. Como $x_{k_0} \in CR(f)$, existe uma $\frac{\varepsilon}{2}$-cadeia recorrente de x_{k_0}, seja esta $\{x_{k_0}, x_1, x_2, ..., x_n = x_{k_0}\}$. Então escolhemos a ε-cadeia de y como sendo $\{y, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\}$. Logo $y \in CR(f)$. $\square$

Capítulo 3
DINÂMICA GENÉRICA

O objetivo do estudo de um(ou uma familia) sistema dinâmico é estudar o comportamento assintótico de toda, ou quase toda, órbita. A dinâmica genérica tem o objetivo de descrever a característica de todos, ou pelo menos em um residual de um conjunto em $\text{Diff}^r(M)$ e o principal conjunto estudado é o $\text{Diff}^1(M)$, pois neste vale muitas propriedades de pertubação como o closing lema e Puhg e varias outras técnicas que foram desenvolvidas durante décadas nesta topologia, que chamamos de topologia C^1 . Já no conjunto Diff^r com $r > 1$, existem pouquíssimas técnicas disponíveis, em particular o C^r-clossing lema não vale.

Com o grande sucesso nos estudos dos sistemas hiperbólicos na década de 60, S. Smale conjecturou que os difeomorfismos chamados Axioma A(difeomorfismos essencialmente hiperbólicos) eram densos no conjunto dos difeomorfismo, mas rapidamente foi negada em dimensão maior igual que 3 na topologia C^r e Newhouse negou em dimensão 2, na topologia na topologia C^r, $(r \geq 2)$, e ainda é um problema em aberto na topologia C^1, em [2] é mostrado as dificuldades de resolver este problema. Motivado por essas idéias Jacob Palis montou um programa para o estudo global dos difeomorfismos, seu objetivo era particionar esse mundo em difeomorfismos que são hiperbólicos e difeomorfismo que não podem ser hiperbólicos.

3.1 Divisões no mundo $\text{Diff}^1(M)$

Veremos agora como está dividido o conjunto $\text{Diff}^1(M)$ com propriedades dinâmicas relevantes, começaremos definindo os difeomorfismos com tais propriedades.

Definição 3.1.1. Dizemos que um difeomorfismo f é *Morse-Smale* se:

(1) O conjunto $\Omega(f) = \text{Per}(f)$ é finito e todos os pontos são hiperbólicos;

(2) Para quaisquer $p, q \in \text{Per}(f)$ tem-se que $W^s(p)$ e $W^u(q)$ se intersectam transversalmente.

Em sua tese Jacob Palis mostrou que esses difeomorfismos são robustos.Isto é, dizemos que um difeomorfismo f tem uma **propriedade rosbusta** se existe uma vizinhança de f em que todo difeomorfismo g dessa vizinhança tem essa propriedade.

Teorema 3.1.2 (Palis). *O conjunto dos sistemas Morse-Smale é aberto no conjunto* $\mathrm{Diff}^1(M)$.

Esses sistemas tem uma dinâmica totalmente previsível dito pelo teorema abaixo.

Teorema 3.1.3. *Se f é Morse-Smale, então toda órbita de f ou é periódica ou converge no futuro e no passando para órbitas periódicas distintas.*

Vamos ver outro conjunto se sistemas.

Definição 3.1.4. Seja p um ponto periódico de um difeomorfismo f. Dizemos que x é uma *ponto homoclínico* se está na interseção transversal das variedades $W^s(p)$ e $W^u(p)$.

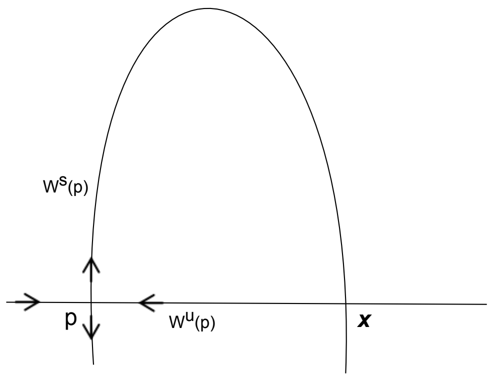


Figure 3.1:

Denotaremos por $\mathcal{HTR}$ o conjuntos dos difeomorfismos que possuem ponto homoclínico transversal.

A transversalidade é uma propriedade robusta.

Teorema 3.1.5. *O conjunto $\mathcal{HTR}$ é aberto.*

Diferente dos Morse-Smale, esses difeomorfismos tem uma uma dinâmica complicada.

Teorema 3.1.6 (Birkhoff-Smale). *Se $f \in \mathcal{HTR}$, então f tem pontos periódicos de período arbitrariamente grande e uma ferradura de Smale.*

Conjectura fraca de Pallis: O espaço $\text{Diff}^r = (M)$ de C^r-difeomorfismos $(r \geq 1)$ contem um conjunto aberto e denso que decompõe como a união disjunta de dois conjuntos abertos $\mathcal{MS} \cup \mathcal{HTR}$.

Uma outra forma de escrever a conjectura, qualquer C^r-difeomorfismo, pode ser aproximados por difeomorfismos $\mathcal{MS}$ ou $\mathcal{HTR}$, ou também todo difeomorfismo longe de ponto homoclínico transversal são Morse-Smale.

Esta conjectura foi resolvida recentemente em [7] por Sylvain Crovisier.

Temos uma informação importante: os difeomorfismos de forma residual são totalmente previsíveis ou caóticos. Mas, por enquanto, não nos diz nada a respeito da hiperbolicidade, pois tanto os $\mathcal{MS}$ quanto os $\mathcal{HTR}$ tem aparência de hiperbolicidade, e já sabemos que isso não é verdade em dimensão ≥ 3.

Vamos ver uma divisão que separa de forma densa os hiperbólicos dos não hiperbólicos.

Definição 3.1.7. Dizemos que um difeomorfismo $f : M \to M$ é *Axioma A* se:

- $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$;
- $\Omega(f)$ é hiperbólico.

Claramente todo difeomorfismo Morse-Smale é Axioma A.

Definiremos os principais fenômenos que obstruem a hiperbolicidades.

Definição 3.1.8. Uma *tangencia homoclínica* é uma interseção tangente entre as variedades $W^s(p)$ e $W^u(p)$, onde p é um ponto periódico de um difeomorfismo f.

Denotaremos por $\mathcal{TANH}$ o conjunto dos difeomorfismo que apresentam tangencia homoclínica.

É fácil ver que com uma pequena pertubação em uma tangencia conseguimos um ponto homoclínico transversal, por isso $\mathcal{TANH} \subset \overline{\mathcal{HTR}}$.

Definição 3.1.9. Um difeomorfismo f tem um *ciclo heterodimensional* se existem selas com índices diferentes tal que a variedade estável de p intersecta transversalmente a instável de q e vice versa.

As tangencias homoclínicas é os ciclos heterodimensionais, são os dois principais fenômenos que obstruem hiperpolicidades. O primeiro quebra a propriedade de transvesalidade dos hiperbólicos e o segundo a dimensão constante, em [1] é mostrado que, residualmente, em uma classe homoclínica(veja definição5.0.7) que possui diferentes índices, existem conjuntos densos com todos os outros índices intermediários. Pela conjectura abaixo, espera-se que estes sejam os únicos fenômenos que obstruem a hiperbolicidade.

Conjectura forte de Pallis: Todo C^r-difeomorfismo $(r \geq 1)$ de uma variedade compacta pode ser aproximado por difeomorfismos que são ou hiperbólicos, ou tem uma tangencia homoclínica ou tem um ciclo heterodimensional.

Esta segunda conjectura implica a primeira

Esta conjectura é valida em dimensão 1, pois neste caso Maurício Peixoto mostrou que os difeomorfismos Morse-Smale são densos em $\text{Diff}^r(M)$ para todo $r \geq 1$.

Os ciclos heterodimensionais só existem em variedades com dimensão maior ou igual a três, portanto não temos esse fenômeno em superfície. Henrique Pujals e Martin Sambarino, mostraram essa conjectura para os difeomorfismos C^1 em superfícies:

Teorema 3.1.10 (Pujals, Sambarino)**.** *Seja M uma superfície compacta e $f \in \text{Diff}^1(M)$. Então f pode ser C^1-aproximado por um difeomorfismo exibindo uma tangencia homoclínica ou por um difeomorfismo Axioma A.*

3.2 Os lemas de pertubação

Uma das ferramentas mais importantes na dinâmica genérica são os lemas de pertubações. O primeiro e certamente o mais famoso é o closing lema de Pugh, diz que a órbita de um ponto não errante pode ser fechada por pequenas pertubações na topologia C^1.

Teorema 3.2.1 (Closin Lemma, Pugh)**.** *Seja f um difeomorfismo de uma variedade compacta M e seja $x \in M$ um ponto não errante de f. Então toda C^1-vizinhança $\mathcal{U}$ de f contem um difeomorfismo g tal que x é um ponto periódico de g.*

Teorema 3.2.2 (Connecting lemma, Hayashi)**.** *Seja p e q dois pontos hiperbólicos de sela. Assumindo que existe um ponto x na variedade estável de p e uma sequência $i_n > 0$ tal que $f^{i_n}(x_n)$ converge para um ponto y na variedade estável de q. Então existem difeomorfismos g_n convergindo para f, na topologia C^1, e números $j_n > 0$ tal que $g_n^{j_n}(x) = y$.*

Em [4] é mostrado o connecting lema para pseudo-órbitas, que é uma generalização do connecting lema de Hayashi.

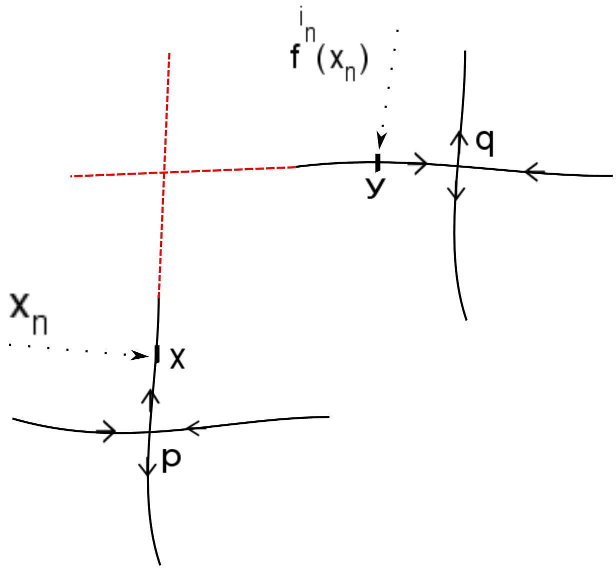


Figure 3.2:

Teorema 3.2.3 (connecting lema para pseudo-órbitas, Bonattti, Crovisier)**.** *Seja f um difeomorfismo sujas órbitas periódicas são todas hiperbólicas. Considere os pontos x, y tal que existe uma ε-pseudo-órbita de x para y para todo $\varepsilon > 0$. Então existe uma pertubação g C^1-arbitrariamente próxima de f tal que y pertence a órbita positiva de x.*

3.2.1 Consequências dos lemas de pertubação

Igualdade das recorrencias

Nesta seção apresentamos alguns resultados da dinâmica genérica. Nós dizemos que uma propriedade é *genérica* se esta vale em um subconjunto residual $\mathrm{Diff}^1(M)$. E dizemos também que uma propriedade é *localmente genérica* se vale em residual interseção com algum aberto não vazio de $\mathrm{Diff}^1(M)$.

Vamos começar com um resultado genérico que relacionam os pontos que estão associados a alguma forma de recorrência que são: Os periódicos, os recorrentes, não-errantes e os cadeia recorrentes, esses se relacionam da seguinte forma

$$\overline{\mathrm{Per}(f)} \subset R(f) \subset \Omega(f) \subset CR(f) \tag{3.1}$$

O teorema da densidade de Pugh, que é uma consequência do famoso Closing Lemma, mostra que existe um conjunto residual que torna quase todas as inclusões (3.1) em igualdade.

Teorema 3.2.4 (Puhg). *Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset \text{Diff}^1(f)$ tal que de $f \in \mathcal{R}$*

$$\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f).$$

Teorema 3.2.5 (Bonatti-Crovisier). *Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset \text{Diff}^1(f)$ tal que se $f \in \mathcal{R}$*

$$\overline{\text{Per}(f)} = CR(f).$$

Esse resultado nos diz que, genericamente, temos a seguinte igualdade:

$$\overline{\text{Per}(f)} = R(f) = \Omega(f) = CR(f)$$

Generalização de teorema da decomposição Espectral

Definição 3.2.6. Um *peça básica* de um difeomorfismo $f : M \to M$ é um conjunto $\Lambda \subset M$ compacto,invariante e transitivo.

Teorema 3.2.7 (Teorema da decomposição espectral). *Seja f um difeomorfismo Axioma A, então podemos decompor o conjunto não errante de f um finitas peças básicas, $\Omega(f) = \Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_k$.*

Definição 3.2.8. Um conjunto compacto f-invariante Λ é *fracamente transitivo* se para todo $x, y \in \Lambda$ e qualquer vizinhança U de x e V de y(não necessariamente $U, V \subset \Lambda$) existe n tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Essa definição não é intrínseca, pode envolver órbitas do espaço ambiente.

Se Λ é transitivo qualquer subconjunto não-vazio é fracamente transitivo. Utilizando o lema de Zorn, com a ordenação de inclusão, obtemos que todo conjunto fracamente transitivo em uma variedade compacta está contido em um conjunto fracamente transitivo maximal.

Definição 3.2.9. Seja o difeomorfismo $f : M \to M$. Uma *vizinhança filtrada* de um conjunto compacto f-invariante é uma vizinhança compacta $U = M_1 \backslash \text{Int}(M_2)$, em que M_1 e M_2 são subvariedades compactas com bordo, de mesma dimensão de M e $f(M_i)$ está contida no interior de M_i.

Temos alguns resultados:

1. Se U é uma vizinhança filtrada de algum conjunto compacto f invariante, então a classe de cadeia recorrente de cada ponto de $CR(f) \cap U$ está contida em U.

2. Toda classe de cadeia recorrente admite em "base de vizinhança filtrada", e cada classe de cadeia recorrente isolada é um maximal invariante de alguma vizinhança filtrada destas.

3. Um conjunto fracamente transitivo admite uma base de vizinhança filtrada se, e somente se, é uma classe de cadeia recorrente, neste caso ele é um fracamente transitivo maximal.

Motivados por estes resultados temos a seguinte definição.

Definição 3.2.10. Um conjunto compacto f-invariante Λ é uma *peça elementar* de um difeomorfismo f se é simultaneamente fracamente transitivo e classe de cadeia recorrente.

Note que as classes de cadeia recorrente particionam o conjunto $CR(f)$, então podemos particiona-lo por filtração.

Vamos reescrever o teorema(3.2.5), o teorema da decomposição dinâmica: difeomorfismos C^1-genéricos tem uma decomposição em peças elementares(não necessariamente finitas).

Teorema 3.2.11 (Bonatti-Crovisier)**.** *Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(f)$ tal que se $f \in \mathcal{R}$, então $\overline{\mathrm{Per}(f)} = CR(f)$, as classes de cadeia recorrente são conjuntos maximais transitivos e f tem uma decomposição em peças dinâmicas elementares.*

Quando são finita, as peças elementares coincidem com as peças básicas do teorema da decomposição espectral.

Veja mais detalhes no capítulo 10 de [5].

3.3 A conjectura

A parte mais interessante de um sistema dinâmico sempre está associado a pontos que de alguma forma são recorrentes, pois em uma vizinhança de um órbita errante o difeomorfismo é sempre conjugado a uma simples translação no espaço euclidiano. Uma das formas mais conhecidas de recorrência são os pontos não errantes, quando o conjunto destes pontos é finito o sistema tem um comportamento muito simples, como veremos abaixo no exemplo dos sistemas Morse-Smale em que o dos pontos não errantes $\Omega(f)$ é finito.

Neste trabalho iremos estudar difeomorfismos cujo conjunto não-errante é infinito, particularmente interior não vazio. Uma pergunta imediata é se esses difeomorfismos são residuais? ou se é uma propriedade rubusta? a resposta a primeira pergunta é não, pelo exemplo dos Morse-Smales que são abertos. A resposta da segunda é sim veja teorema(5.0.18) ítem (7). E como consequência dessa nossa hipótese teremos a transitividade. Isso foi conjecturado em [3].

Conjectura: Existe um subconjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ tal que se $f \in \mathcal{R}$ e o interior de $\Omega(f)$ é não vazio, então f é transitiva.

Este problema já era bastante conhecido no caso hiperbólico (teorema(4.1.1)) e consequêntemente difeomorfismos Axioma A. Relacionado com este assunto, em [9] é discutido conjuntos hiperbólicos com interior não vazio.

Além do resultado já mencionado, em [3] tem algumas motivações da validade da conjectura, mencionaremos uma delas. De acordo com [3] devem existir difeomorfismos em que o interior do não errantes é não vazio, mas não são transitivos, entretanto esses sistemas tem uma estrutura extremamente patológica. O teorema(5.0.18) itens (10) e (11) implicam juntos que o conjunto não-errante de tal difeomorfismo deve conter um aberto cujo fecho Y é simultaneamente transitivo e Lyapunov estável para f e f^{-1} , e pelo teorema 5 de [3], o conjunto Y deve ser acumulado por infinitas classes homoclínicas distintas, isto é Y, isto é deve exibir dinâmica wild, mas todos os exemplos conhecidos de dinâmica C^1-wild o conjunto "wild" não somente é aculado por infinitas classes homoclínicas, mas certamente está contido no fecho destas classes. A ultima condição implica que o implica que o interior de todos os "conjunto wild" já conhecidos é vazio. Por analogia parece que o mesmo vale para Y.

Capítulo 4
CASOS PARCIAIS

Apresentaremos nesta seção alguns casos em que a conjectura foi resolvida. O folclórico caso hiperbólico, o caso parcialmente hiperbólico forte feito em [3] e uma idéia do caso em superfície feito em [2].

4.1 *Caso hiperbólico*

Afirmação: Seja $f : M \to M$ em difeomorfismo, $\Lambda \subset M$ um subconjunto invariante e $U = \text{int}(\Lambda)$, então $\overline{U}$ é invariante.

Proof. Seja $x \in U$, sendo x um ponto interior existe uma bola $B_r(x) \subset U$, como f é contínua $f(B_r(x))$ é um conjunto aberto, usando a invariância de Λ temos $f(B_r(x)) \subset U$ e $f(x) \in U$, da mesma forma mostra-se para f^{-1}. Já provamos que $f(U) = U$. Agora, seja $y \in \partial U$. E então existe uma sequência $x_n \in U$ convergindo para y e como U é invariante $f(x_n) \in U$. E por continuidade da f temos que $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(y) \in \overline{U}$. □

Teorema 4.1.1. *Seja $f \in \text{Diff}^1(M)$ e $\Lambda \subset \Omega(f)$ um conjunto hiperbólico com interior não vazio, então $\Lambda = M$ e f é Anosov.*

Proof. Denotaremos por $D^u_\varepsilon(x)$, o disco de raio ε da variedade instável de x, centrado em x.
Seja um aberto $U \subset \Lambda$ e $x \in U$. Fixemos $\eta > 0$ tal que $B_\eta(x) \subset U$. Como $U \subset \Omega(f)$, existe uma sequência x_n convergindo para x e uma sequência $i_n \to \infty$ tal que $f^{i_n}(x_n) \to x$. Para n grande, o disco de raio $\eta/2$ centrado em x_n da variedade instável de x_n está contido em U. Usando a expansão uniforme da variedade instável, o comprimento de $f^{i_n}(D^u_\varepsilon(y_n))$ cresce infinitamente e pela distribuição contínua a folheação instável $f^{i_n}(D^u_\varepsilon(y_n)) \to W^u(x)$[1] e portanto $W^u(x) \subset \overline{U}$ para todo $x \in U$, analogamente usando

[1] Seja $z \in W^u(x)$ com $d(x,z) = k$, esta é a distância intrínseca em W^u, existem discos da variedade instável de $f^{i_n}(y_n)$ de de raio $2k$ convergindo para o disco da variedade instável de x de raio $2k$, $D^u_{2k}(f^{i_n}(y_n)) \to W^u_{2k}(x)$ e $z \in W^u_{2k}(x)$ logo $f^{i_n}(D^u_\varepsilon(x_n)) \to W^u(x)$

f^{-1} mostra-se que $W^s(x) \subset \overline{U}$ Afirmamos que $U = \Lambda = M$, caso contrário suponha que exista $y \in \partial U$, pela continuidade das distribuições $W^u(y) \subset \overline{U}$ e $W^s(y) \subset \overline{U}$. Entretanto existe uma bola $B_r(y) \subset \bigcup_{x \in W^u(y)} W^s(x)$, uma contradição logo $\Lambda = M$ e f é Anosov. □

Esta conjectura também é verdadeira para os difeomorfismos Axioma A.

Corolário 4.1.2. *Seja f um difeomorfismo Axioma A com interior dos não errante diferente de vazio, então f é transitiva.*

Proof. Como f é axioma A, $\Omega(f)$ é hiperbólico, e por hipótese tem interior não vazio, logo pelo teorema acima f é transitiva. □

4.2 O caso em superfície

Nesta seção vamos apresentar um resultado de [2] que mostra que a conjectura vale para superfícies.

Definição 4.2.1. Uma *filtração* para um difeomorfismo $f : M \to M$ é uma família finita $M_1, M_2, ..., M_k$ de subvariedades com bordo e com a mesma dimensão de M, tal que

- $M_1 = M$ e M_{i+1} está contido no interior de M_i para todo $1 < i < k$
- $f(M_i)$ está contido no interior de M_i para todo $1 < i < k$

Os conjuntos abertos $L_i = \text{int}(M_i \backslash M_{i+1})$ são os *níveis de filtração* (aqui $M_{k+1} = \emptyset$).

Vemos facilmente que dois pontos da mesma cadeia recorrente não podem ser separados por uma filtração, pois suponha que $p_1 \in L_1 = M_1 \backslash M_2$ e $p_2 \in L_2 = M_2 \backslash M_3$, onde M_1 e M_2 subvariedades da filtração (olhe a figura 4.1), como $f(M_2)$ está contido no interior de M_2, então $f^n(L_2) \cap L_1 = \emptyset$ para todo $n \geq 0$, logo p_1 e p_2 não podem está na mesma classe de cadeia recorrente, ou seja, uma classe de cadeia recorente sempre pertence a um mesmo nível de filtração. Conley provou que a recíproca também é verdadeira: pontos de classes de cadeias recorrentes distintas podem ser separados por uma filtração.

Teorema 4.2.2 (Conley)**.** *Seja f um homeomorfismo de um espaço métrico compacto X. Então existe uma aplicação contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

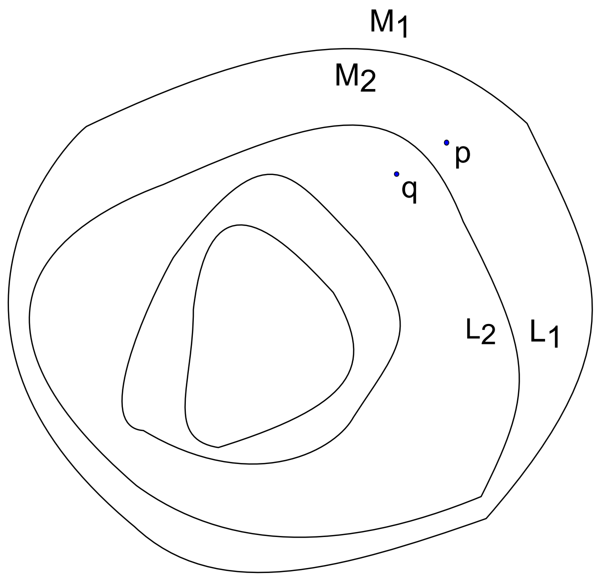


Figure 4.1:

(1) *φ é não decrescente ao longo das órbitas de f, isto é, $\varphi(f(x)) \neq f(x)$ para todo $x \in X$, e $\varphi(f(x)) = f(x)$ se, e somente se, $x \in CR(f)$;*

(2) *para todo par (x,y) de pontos cadeia recorrente, $\varphi(x)$ é igual a $\varphi(y)$ se, e somente se, x e y pertencem a mesma classe de cadeia recorrente;*

(3) *o conjunto $\varphi(CR(f))$ tem interior vazio em $\mathbb{R}$, e assim é um subconjunto compacto totalmente desconexo da reta.*

Vamos mostrar que vale o caso em superfície, e para isso precisaremos de alguns resultados que são encontrados em [2].

Teorema 4.2.3. *Seja S uma superfície compacta. Existe um subconjunto residual $\mathcal{G}_0 \subset \mathrm{Diff}^1(S)$ tal que, para todo $f \in \mathcal{G}_0$ e toda classe de cadeia recorrente E de f, temos a seguinte dicotomia:*

(1) *ou E é isolada no conjunto cadeia recorrente $CR(f)$ de f; neste caso E é uma classe homoclínica hiperbólica (olhe definição5.0.7).*

(2) *ou E não é isolada, neste caso:*

  (a) *E não admit qualquer decomposição dominada;*

  (b) *E está contida no fecho do conjunto de poços e fontes de f;*

(c) *para toda vizinhança U de E, existe uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}$ de f e um subconjunto $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$ denso em $\mathcal{U}$ tal que toda $g \in \mathcal{D}$ tem um ponto periódico hiperbólico p_g cuja classe homoclínica está contida em U e apresenta tangencia homoclínica.*

Definição 4.2.4. Um espaço topológico M é *localmente conexo* se tem uma base de conjuntos (abertos) conexos.

Um resultado em topologia nos diz que M é localmente conexo se, e somente se, a componente conexa de todo conjunto abeto é um conjunto aberto.

Proposição 4.2.5. *Seja f um homeomorfismo de uma variedade compacta M e seu conjunto cadeia recorrente $CR(f)$ tem interior não vazio. Então existe um classe de cadeia recorrente com interior não vazio.*

Proof. Considere uma componente conexa C no interior de $CR(f)$ e como a variedade é localmente conexa[2] C é aberto. Consideremos também uma função φ dada pelo teorema(4.2.2). Como φ é contínua $\varphi(C)$ é conexo e está contido em $\varphi(CR(f))$, que é totalmente desconexo, logo $\varphi(C)$ é apenas um ponto, pelo teorema(4.2.2) C está contido em uma classe de cadeia recorrente E, então E tem interior não vazio. □

Agora nós provaremos a conjectura em superfícies.

Teorema 4.2.6. *Seja S uma superfície compacta conexa. Existe um subconjunto residual $\mathcal{G}_0 \subset$ tal que para $f \in \mathcal{G}_0$ e com $\mathrm{int}(\Omega(f)) \neq \emptyset$, então S é o toro $\mathbb{T}^2$ e f é Anosov, em particular transitiva.*

Proof. Seja $f \in \mathcal{G}_0$ em que $CR(f)$ tem interior não vazio. Pela proposição(4.2.5) existe uma classe de cadeia recorrente E de f com interior não vazio. Como este interior não pode conter qualquer poço ou fonte[3], assim E não está contido no fecho dos poços nem fonte. Pelo teorema(4.2.3) implica que E é um conjunto básico hiperbólico com interior não vazio. Pelo teorema(4.1.1) S é Anosov e pelo teorema(A.0.22) S é um toro. □

[2]As variedades que trabalhamos são localmente igual ao R^n, herdam então suas propriedades topológicas

[3]Não pode conter poço nem fonte porque, genericamente se essa cadeia recorrente tiver um ponto periódico então é uma classe homoclínica e sendo esse ponto um atrator ou um repulsor a classe homoclínica é trivial, sem interior, um absurdo.

4.3 Caso parcialmente hiperbólico forte

Denotaremos por $\mathcal{SPH}(M)$ O conjunto dos difeomorfismos parcialmente hiperbólico forte.

Definição 4.3.1. Um subconjunto $\Sigma \subset M$ é chamado *saturado* por uma folheação $\mathcal{F}$ se contém toda folha que passa por seus pontos

Definição 4.3.2. Seja $f \in \mathcal{SPH}(M)$ e $p \in M$ a *classe de acessibilidade* de p é o menor conjunto saturado por ambas as folheações $\mathcal{F}_f^u$ e $\mathcal{F}_f^s$ contendo p.

Outra definição equivalente é o conjunto dos pontos q que podem se ligado a p por uma quantidade finita de segmentos contidos nas folhas de $\mathcal{F}_f^u$ ou $\mathcal{F}_f^s$.

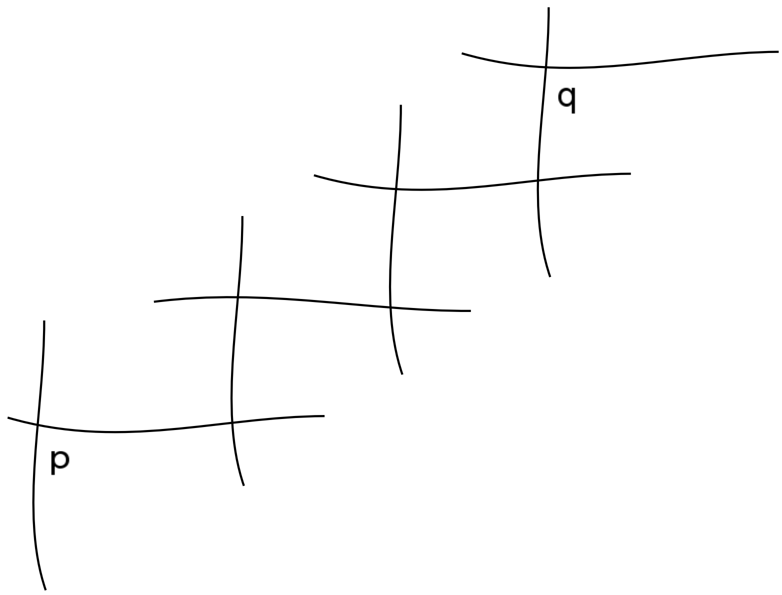


Figure 4.2:

Definição 4.3.3. Dizemos que o difeomorfismo $f : M \to M$ é *acessível* se existe apenas uma classe de acessibilidade, que é necessariamente igual a M.

Essa propriedade é residual no conjunto dos difeomorfismo parcialmente hiperbólico forte, como mostra o teorema abaixo.

Teorema 4.3.4 (Dolgopyat, Wilkinson). *Existe um conjunto aberto e denso $\mathcal{A} \subset \mathcal{SPH}(M)$ tal que todo $f \in \mathcal{A}$ é acessível.*

O Teorema apresentado nesta seção e uma generalização de um resultado de Brin.

Teorema 4.3.5 (Brin). *Se $f \in \mathcal{A}$ e $\Omega(f) = M$, então f é transitivo.*

Teorema 4.3.6. *Se $f \in \mathcal{A}$ e $\Omega(f)$ tem interior não vazio, então f é transitivo.*

Proof. Lembre primeiro que $\Omega(f)$ é compacto e para todo $x \in \Omega(f)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que o disco de raio ε da variedade instável centrado em x está contido no não errante, $D^u_\varepsilon(x) \subset \Omega(f)$.
Seja um aberto $U \subset \Omega(f)$ e um ponto qualquer $x \in U$. Como x é não errante, existe uma sequência y_n convergindo para x e uma sequência $i_n \to \infty$ tal que $f^{i_n}(y_n) \to x$. Pela expansão uniforme da variedade instável, o comprimento de $f^{i_n}(D^u_\varepsilon(y_n))$ cresce infinitamente e pela distribuição contínua a folheação instável $f^{i_n}(D^u_\varepsilon(y_n)) \to W^u(x)$ e portanto $W^u(x) \subset U$ para todo $x \in U$, e como f é acessível $U = \Omega(f) = M$ e pelo teorema de Brin f e transitiva. $\square$

Capítulo 5

CLASSES HOMOCLÍNICAS

Denotaremos

$W^s(p) \pitchfork W^u(q)$ ={pontos que pertencem a interseção transversal das variedades $W^s(p)$ e $W^u(q)$}.

Definição 5.0.7. Seja p um ponto periódico de f. A *classe homoclínica* de p é o conjunto $H(p,f) = \overline{W^s(p) \pitchfork W^u(p)}$.

Vamos mostrar uma outra definição de classe homoclínica dada por S. Smale, para isso seja $p, q \in \mathrm{Per}(f)$ e definimos a relação $p \sim q$ se $W^s(p) \pitchfork W^u(q) \neq \emptyset$ e $W^s(q) \pitchfork W^u(p) \neq \emptyset$. Claramente esta relação e reflexiva e simétrica e pelo λ-lema é transitiva.

Definição 5.0.8. Se $p \sim q$, dizemos que p e q estão *homoclinicamente relacionado* com q. Chamamos de *classe homoclínica*, $H(p,f)$, o fecho da classe de equivalência de p.

Exemplo 5.0.9. Uma órbita periódica é uma classe homoclínicas, chamada de classe homoclínica trivial. As classes homoclínicas não triviais são aquela que possuem ponto homoclínico, há quem considere que classe homoclínica sempre tem ponto homoclínico,isto é, consideram apenas as não triviais. O exemplo mais famoso de sistema com um ponto homoclínico é a ferradura Smale. A ferradura é uma classe homoclínica.

Proposição 5.0.10. *O conjunto $H(p,f)$ é fechado, invariante e topologicamente transitivo.*

Para a demonstração e mais exemplos de classes homoclínicas veja [14].

Proposição 5.0.11. *$H(p,f) \subset \Omega(f)$.*

Proof. Como sabemos a classe homoclínica $H(p,f)$ é o fecho de um conjunto de pontos periódicos que estão homoclinicamente relacionados e o fecho dos periódicos está contido no não-errante, logo

$$H(p,f) \subset \overline{\mathrm{Per}(f)} \subset \Omega(f) \quad \Rightarrow \quad H(p,f) \subset \Omega(f).$$

□

Observação: Classes homoclínicas matem-se por continuação analítica? A resposta, em geral, é não. Vamos ver alguns conceitos semelhantes. Seja p um ponto periódico hiperbólico de um difeomorfismo f, g um difeomorfismo suficientemente próximo de f e $H(p,f)$ a classe homoclínica de p e a continuação analítica $p \rightsquigarrow p_g$, que ainda é um ponto periódico hiperbólico. Podemos então definir a classe homoclínica $H(p_g,g)$. Mas note essa nova classe pode ser bem diferente da anterior, no sentido que podemos ter um ponto periódico $q \in H(p,f)$ tal que $H(p_g,g) \neq H(q_g,g)$. Seja agora $H(p,f) = H(q,f)$ uma classe homoclínica onde $p \sim q$ e $\mathcal{U}_p$ uma vizinhança de f onde p tem uma continuação analítica e da mesma forma $\mathcal{U}_q$, então existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q$, tal que, se $g \in \mathcal{U}$ então $H(p_g,g) = H(q_g,g)$, pois as interseção transversal das variedades de p e q permanecem por pequenas perturbações.

Teorema 5.0.12 (Bonatti, Crovisier). *Genericamente toda classe homoclínica é uma classe de cadeia recorrente . Reciprocamente, para um difeomorfismo genérico, toda classe de cadeia recorrente contendo um ponto periódico p é a classe homoclínica de p.*

Teorema 5.0.13 (Arnaud). *Para um difeomorfismo genérico, todo conjunto transitivo contendo uma órbita periódica de um ponto p está contido na classe homoclínica de p.*

Definição 5.0.14. Dizemos que um conjunto transitivo é *saturado* se cotem todos os conjuntos transitivos que o intersecta.

Teorema 5.0.15 (Carballo, Morales, Pacifico). *Genericamente no espaço* $\mathrm{Diff}^1(M)$, *toda classe homoclínica é um conjunto transitivo saturado. Em particular, duas classes ou coincidem ou são disjuntas.*

Definição 5.0.16. Dizemos que uma classe homoclínica $H(p,f)$ é *isolada* se existe uma vizinhança U de $H(p,f)$, tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U) = H(p,f)$. Isto é, é o maximal invariante em uma vizinhança.

A definição é a mesma para classe de cadeia recorrente isolada.

Definição 5.0.17. Seja um difeomorfismos $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ e Λ um subconjunto compacto f-invariante de M, dizemos que Λ é *Lyapunov estável* para f se para toda vizinhança aberta U de Λ existe uma vizinhança $V \subset U$ de Λ tal que $f^k(V) \subset U$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Além dos resultados já mencionados, abaixo tem vários resultados sobre classes homoclínicas que valem genericamente.

Teorema 5.0.18. *Existe um conjunto residual de difeomorfismo $\mathcal{R} \in \text{Diff}^1(M)$ tal que para toda $f \in \mathcal{R}$:*

(1) toda classe de cadeia recorrente isolada é uma classe homoclínica;

(2) toda classe de cadeia recorrente com interior não vazio é uma classe homoclínica;

(3) Quando elas são finitas, as classes de cadeia recorrente coincidem com as classes homoclínicas;

(4) O conjunto de classes de cadeia recorrente é infinito se, e somente se, o conjunto das classes homoclínicas também é infinito;

(5) O conjunto dos pontos periódicos de f são densos no conjunto cadeia recorrente de f. Além disso, as classes homoclínicas coincidem com as classes de cadeia recorrente contendo pontos periódicos;

(6) Classes homoclínicas variam continuamente com a distancia de Hausdorff com respeito a f. Isto é, dado $p \in H$ um ponto periódico e $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{U}$ uma vizinhança de f tal que para toda $g \in \mathcal{U}$, a classe homoclínica da continuação de p encontra-se distante menos que ε de H na distância de Hausdorff;

(7) Dada um classe homoclínica H de um ponto periódico p, se U é um conjunto aberto tal que $\overline{U} \subset \text{int}(H)$ então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f tal que para toda $g \in \mathcal{U} \cap \mathcal{R}$, então $U \subset H(p_g, g)$, onde p_g é a continuação de p para g;

(8) Para um ponto periódico p de f, $H(p, f) = \overline{W^s(p)} \cap \overline{W^u(p)}$;

(9) Duas selas estão no mesmo conjunto transitivo se, somente se, suas classes homoclínicas são iguais;

(10) Toda componente conexa de $\Omega(f)$ com um interior não vazio é periódico e sua órbita é uma classe homoclínica;

(11) Toda classe homoclínica com interior não vazio de f tem estabilidade Lyapunov em f e f^{-1}. Isto implica que os conjuntos estáveis e instáveis de qualquer ponto da classe está contido na classe.

Para uma explanação melhor sobre esse assunto assim como o da seção abaixo veja o capítulo 10 de [5].

5.1 TAME $\times$ WILD

Consideremos um conjunto residual $\mathcal{R} \subset \text{Diff}^1(M)$ com as seguintes características:

(a) Toda classe homoclínica depende continuamente de $f \in \mathcal{R}$;

(b) Duas classes homoclínicas ou coincides ou são disjuntas

(c) O número de classes homoclínicas $\sharp(f) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ é localmente constante.

o item (a) é assegurado pelo teorema(5.0.15), o item (b) em [6] e o item (c) pelo teorema abaixo.

Teorema 5.1.1 (Abdenur). *Existe um subconjunto residual $\mathcal{R} \subset \text{Diff}^1(M)$ tal que a função $\sharp(\cdot)$ está bem definida e é localmente constante.*

Isso nos motiva a considerarmos dois subconjuntos:

- *Tame Difeomorfismo:* Os difeomorfismos $f \in \mathcal{R}$ que tem finitas classes homoclínicas e para cada difeomorfismos próximo tenha exatamente o mesmo número de classes. Denotaremos este conjunto por $\mathcal{T}$.

- *Wild Difeomorfismo:* São os difeomorfismos $f \in \mathcal{R}$ que tem infinitas classes homoclínicas e o mesmo vale para toda $g \in \mathcal{R}$ próxima de f . E este conjunto será denotado por $\mathcal{W}$.

Temos então que $\mathcal{R} = \mathcal{T} \cup \mathcal{W}$

Definição 5.1.2. Seja $H_1, \cdots, H_m$ uma família de diferentes classes homoclínicas de um difeomorfismo f. Estas classes formam um *ciclo* se $W^u(H_i) \cap W^s(H_{i+1}) \neq \emptyset$ para todo $i = 1, ..., (m-1)$ e $W^u(H_m) \cap W^s(H_1) \neq \emptyset$.

Teorema 5.1.3. *Existe um subconjunto residual $\mathcal{R} \in \text{Diff}^1(M)$ e uma partição em subconjuntos abertos dijuntos $\mathcal{T}$ e $\mathcal{W}$, tal que*

(1) O número de classes homoclínicas é localmente constante em $\mathcal{R}$;

(2) *Se $f \in \mathcal{W}$ então o f tem infinitas classes homoclínicas;*

(3) *Se $f \in \mathcal{T}$ então o conjunto cadeia recorrente é a união de finitas classes homoclínicas duas a duas dijuntas, e existe uma filtração tal que:*

(a) *Toda classe homoclínica é um conjunto genericamente transitivo em um nível de filtração,*

(b) *Toda classe homoclínica é volume hiperbólico,*

(c) *Não existem ciclos entre as classes homoclínicas.*

5.2 Caso TAME

Definição 5.2.1. Nós dizemos que um classe homoclínica $H(p, f)$ é um *atrator* se existe uma vizinhança U de $H(p, f)$ tal que $f(\overline{U}) \subset U$ e $\cap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U) = H(p, f)$. De forma análoga defini-se *repulsor*.

Teorema 5.2.2 (Carballo, Morales). *Para todo tame difeomorfismo, a união da bacia de atração é um conjunto aberto e denso em toda a variedade.*

Note que o teorema afirma que a bacia de atração de f^{-1} é um conjunto aberto e denso na variedade, logo a bacia de repulsão de f é aberto e denso. Logo, tanto a bacia de atração quanto a bacia de repulsão são conjuntos abertos e denso.

Teorema 5.2.3. *Seja $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ um tame difeomorfismo genérico em que o conjunto não errante é diferente de vazio. Então, existe uma classe homoclínica de f com interior não vazio, além disso, é a variedade toda, neste caso f é transitivo.*

Proof. Como $\Omega(f)$ tem interior não vazio então, pelo teorema(6.0.5), existe uma classe homoclínica $H(p, f)$ com interior não vazio. O teorema(5.2.2) implica que $H(p, f)$ é simultaneamente um atrator e um repulsor. De fato, Seja um aberto $A \subset H(p, f)$, pelo teorema(5.2.2) A contém um ponto x de uma classe homoclínica atratora $H(q, f)$ e um ponto y de uma classe homoclínica repulsora $H(r, f)$. Se $H(p, f) \neq H(q, f) \neq H(r, f)$ então $f^n(x) \to \bar{x} \in H(q, f)$ e $f^{-n}(y) \to \bar{y} \in H(r, f)$. Mas $H(p, f)$ é invariante e isolada, então $H(p, f) = H(q, f) = H(r, f)$.
Afirmamos que $H(p, f) = M$ o que implica que f é transitiva, caso contrario existem vizinhanças U e V de $H(p, f)$ contidas na bacia de atração e de repulsão de f. Tal que

$\overline{V} \subset U$ agora seja $z \in U \setminus V$, como z pertence a bacia de atração de $H(p, f)$, existe $n > 0$ tal que $f^n(z) \in V$, isso contradiz a afirmação que $f^{-n}(V) \subset V$. $\square$

Capítulo 6

CLASSES HOMOCLÍNICAS COM INTERIOR NÃO VAZIO

Em [3] além de mostrar alguns casos em que a conjectura é válida, vistos acima, também da suporte para a solução da conjectura, como por exemplo os dois resultados abaixo. Rafael Potrie e Martin Sambarino, a luz desses dois resultados, resolvem um caso da conjectura em [15]: Se os extremos da melhor decomposição dominada, dado pelo teorema(6.0.5), tem dimensão 1, então é parcialmente hiperbólico e usando o corolário(6.0.4) f é transitiva.

Corolário 6.0.4 ([3]). *Existe um subconjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ tal que se $f \in \mathcal{R}$ e $H(p, f)$ é uma classe homoclínica de f tal que:*

- *$H(p, f)$ tem interior não vazio e*
- *$H(p, f)$ é parcialmente hiperbólico forte,*

então a classe homoclínica $H(p, f)$ é toda a variedade, $H(p, f) = M$. Em particular, o difeomorfismo f é transitivo.

Teorema 6.0.5 ([3]). *Existe um subconjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ tal que para todo $f \in \mathcal{R}$ e todo conjunto não vazio, aberto e conexo U cujo fecho $\overline{U}$ está contido no interior de $\Omega(f)$ então existe um ponto periódico p de f tal que a classe homoclínica $H(p, f)$ contém $\overline{U}$ e admite uma decomposição dominada.*

Teorema 6.0.6 ([1]). *Existe um subconjunto residual $\mathcal{R}$ de $\mathit{Diff}^1(M)$ tal que, para todo $f \in \mathcal{R}$, toda classe homoclínica $H(p, f)$ contendo selas hiperbólicas de índices α e β contém um subconjunto densos de selas de índices τ para todo $\tau \in [\alpha, \beta] \cap \mathbb{N}$.*

Corolário 6.0.7 ([1]). *Seja $\mathcal{R}$ o subconjunto residual de $\mathit{Diff}^1(M)$ do teorema acima e $f \in \mathcal{R}$ com uma classe homoclínica $H(p, f)$ que contém selas de índice α e β. Então apenas uma das duas seguintes possibilidades vale:*

(1) Para toda vizinhança U de $H(p_f, f)$ e toda C^1-vizinhança $\mathcal{U}$ de f existe um difeomorfismos $g \in \mathcal{U}$ com uma tangencia homoclínica associada a uma órbita periódica contida em U.

(2) Existe uma decomposição dominada

$$T_{H(p_f,f)}M = E \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_{\beta-\alpha} \oplus G,$$

com $dim(E) = \alpha$ e $dim(F_i) = 1$ para todo i.

O nosso objetivo até o final do texto sera apresentar um caso da conjectura feito em [15] o teorema abaixo, mas primeiro iremos apenas enuciá-lo e dar os corolários (que enceram o nosso objetivo) que decorrem imediatamente. Após isso começaremos a construção de sua demonstração.

Teorema 6.0.8. *Seja H uma classe homoclínica de um difeomorfismos genérico f com interior não vazio admitindo uma decomposição dominada de codimensão um $T_HM = E \oplus F$ $dim(F) = 1$. então F é uniformemente expansivo.*

Corolário 6.0.9. *Seja H uma classe homoclínica com interior não vazio de um difeomorfismo genérico f tal que $T_HM = E^1 \oplus E^2 \oplus E^3$ é uma decomposição dominada de f e $dim(E^1) = dim(E^3) = 1$. Então, H é parcialmente hiperbólico forte e $H = M$.*

Proof. Pelo teorema 6.0.8 E^3 é uniformemente expansivo e E^1 é uniformemente expansivo para f^{-1}, ou seja, E^1 é uniformemente contrativo para f, logo f é parcialmente hiperbólico forte. E pelo corolário(6.0.4) implica que $H = M$. $\square$

Corolário 6.0.10. *Seja H uma classe homoclínica de um difeomorfismo genérico f afastada de tangencias de índice 1 e $n-1$ e tem pontos periódicos de índice 1 e $n-1$, então $H = M$.*

Proof. Como a classe está afastada de tangencias e para difeomorfismo genérico ou coincidem ou são dijuntas (olhe teorema(5.0.15)), temos que a classe admiti decomposição dominada com os fibrados extremos de dimensão um, então usando o corolário(6.0.7) obtemos que $H = M$. $\square$

Corolário 6.0.11. *Seja f um difeomorfismo de superfície com uma classe homoclínica de interior não vazio. Então f é conjugada a um difeomorfismo linear de Anosov em $\mathbb{T}^2$.*

Proof. Pelo teorema(6.0.5) a classe homoclínica admite decomposição dominada. Como os dois subfibrados tem dimensão um pelo corolário(6.0.9) é parcialmente hiperbólica forte, mas como não tem variedade central é hiperbólica e como a conjectura vale para classes homoclínicas hiperbólicas então f e Anosov pelos teoremas (A.0.21) e (A.0.22). □

Preparando a demonstração do Teorema(6.0.8)

Denotaremos $m(A) = ||A^{-1}||^{-1}$, onde a A é um isomorfismo linear.

Definição 6.0.12. Seja Λ um conjunto compacto invariante de f e $T_\Lambda M = E \oplus F$ uma decomposição Df-invariante. Seja $0 < \lambda < 1$. Um segmento de órbita $\{x, .., f^n(x)\}$ de f em Λ é chamado *λ-quase-hiperbólico* com respeito a $E \oplus F$ se

$$\prod_{i=0}^{k-1} ||Df|_{E(f^i(x))}|| \leq \lambda^k$$

e

$$\prod_{i=k-1}^{n-1} m(Df|_{F(f^i(x))}) \geq \lambda^{-(n-k+1)}$$

para todo $k = 1, ...n$, e se

$$\frac{||Df|_{E(f^i(x))}||}{m(Df|_{F(f^i(x))})} \leq \lambda^2$$

para todo $i = 0, ..., n-1$.

O teorema abaixo, devido a Liao, nos diz que podemos sombrear um segmento de órbita quase-hiperbólico por um ponto periódico se os extremos estiverem bem próximos.

Teorema 6.0.13 (Liao)**.** *Seja Λ um conjunto compacto invariante de f e $T_\Lambda M = E \oplus F$ uma decomposição Df-invariante. Para todo $0 < \lambda < 1$ e todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo segmento de órbita λ-quase-hiperbólico $\{(x, ..., f^n(x)\}$ de f em Λ com respeito a $E \oplus F$, se $d(f^n(x), x) \leq \varepsilon$, então existe um ponto periódico $p \in M$ de f de período n tal que $d(f^i(p), f^i(x)) \leq \delta$ para todo $0 \leq i \leq n-1$.*

Lema 6.0.14 (Lema de Frank)**.** *Seja $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ e dado uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}$ de f, então existe $\mathcal{U}_0(f)$ e $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se $g \in \mathcal{U}_0$, $S = \{x_1, ..., x_m\}$ e*

$$L : \bigoplus_{x_i \in S} T_{x_i}M \to \bigoplus_{x_i \in S} T_{g(x_i)}M \text{ tal que } ||L - Dg|_{\oplus T_{x_i}M}|| < \varepsilon$$

são dados, então existe $\tilde{g} \in \mathcal{U}$ tal que $D\tilde{g}_{x_i}M$. Além disso se U é uma vizinhança de S podemos tomar $\tilde{g}$ tal que $\tilde{g}(x) = g(x)$ para todo $x \in S \cup (M \backslash U)$.

O lema está escrito de forma bem geral, mas podemos pensar em um caso particular, como normalmente o lema é usado, como $g \in \mathcal{U}$ podemos fazer $g = f$, então o lema significa que: Dado $\mathcal{U}$ de f existe $\varepsilon > 0$ tal que podemos encontrar uma $g \in \mathcal{U}$ perturbando apenas a derivada, em uma quantidade finita de pontos, até a magnitude ε.

Lema 6.0.15. *Seja H uma classe homoclínica de um difeomorfismos genérico f com interior não vazio admitindo uma decomposição dominada de codimensão um $T_H M = E \oplus F$ e $dim(F) = 1$. Então existe $\mu < 1$ tal que para todo $p \in \mathrm{Per}(f|_H)$ vale o seguinte*

$$||Df^{-\pi(p)}|_{F(p)}|| \leq \mu^{\pi(p)}.$$

Proof. Suponha por absurdo que o lema não seja verdadeiro, isto é, para cada $0 < \mu < 1$ existe $p \in H$ tal que $||Df^{-\pi(p)}|_{F(p)}|| > \mu^{-\pi(p)}$, ou equivalentemente $||Df^{\pi(p)}|_{F(p)}|| > \mu^{-\pi(p)}$, pois F é unidimensional.

Seja U um conjunto aberto tal que $\overline{U} \subset \mathrm{Int}(H)$. Como f é genérico, pelo teorema(5.0.18) ítem 7, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f tal que para cada g em um subconjunto residual de $\mathcal{U}$, temos $U \subset H_g$.

Pelo lema de Frank implica que existe $\varepsilon > 0$ tal que se fixarmos um conjunto de pontos finitos arbitrário, podemos perturbar o difeomorfismo com derivada arbitrária ε-próxima dos originais, neste ponto o difeomorfismo estará dentro de $\mathcal{U}$.

Vamos escolher $1 < \mu < 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ e seja $p \in Per(f|_H)$ tal que $||Df^{\pi(p)}|_{F(p)}|| > \mu^{-\pi(p)}$. Como f é genérico, os pontos periódicos de mesmo índice de p são densos em H (por definição de classe homoclínica), então podemos escolher $q \in U \cap \mathrm{Per}(f)$ homoclinicamente relacionado com p.

Seja $x \in W^s(p) \cap W^u$ e $y \in W^s(q) \cap W^u(p)$, o conjunto $\Lambda = \cup \mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q) \cup \mathcal{O}(x) \cup \mathcal{O}(y)$ é hiperbólico. Considere a seguinte pseudo órbita periódica contida em Λ,

$$\mathcal{P}^N = \{..., p, f(p), f^{N\pi(p)-1}(p), f^{-n_0}(y), ..., f^{n_0}(y), f^{-n_0}(x), ..., f^{n_0}(x), p, ...\}$$

Claramente dado $\beta > 0$ existe n_0 tal que $\mathcal{P}^N$ é uma β-pseudo órbita. Ao mesmo tempo, se escolhermos N suficientemente grande nós obtemos uma pseudo órbita periódica que permanece próxima de p, mas do que de q, e então herda o comportamento da derivada de p em vez da de q.

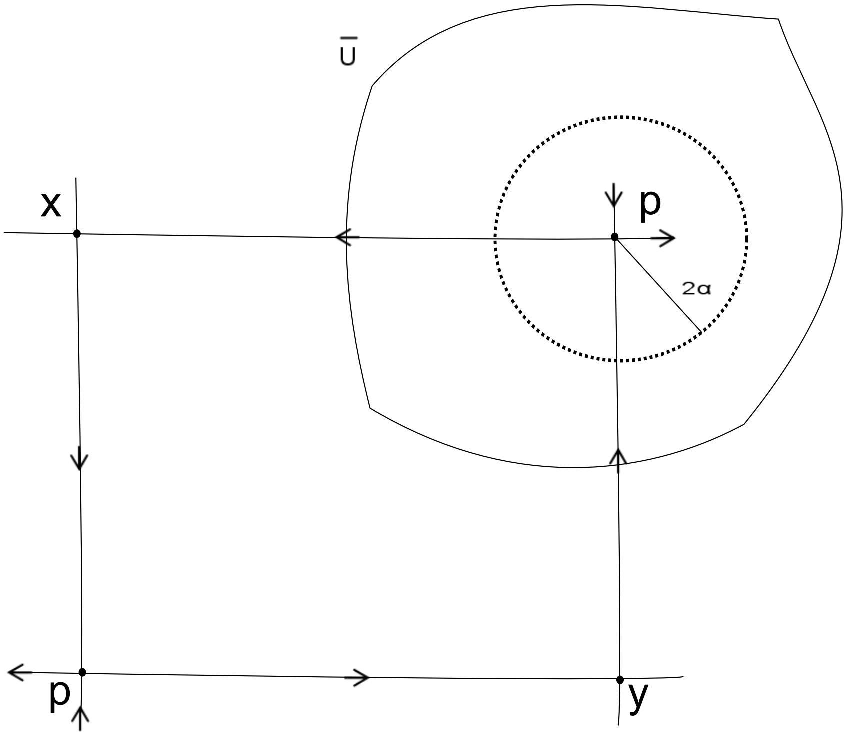


Figure 6.1:

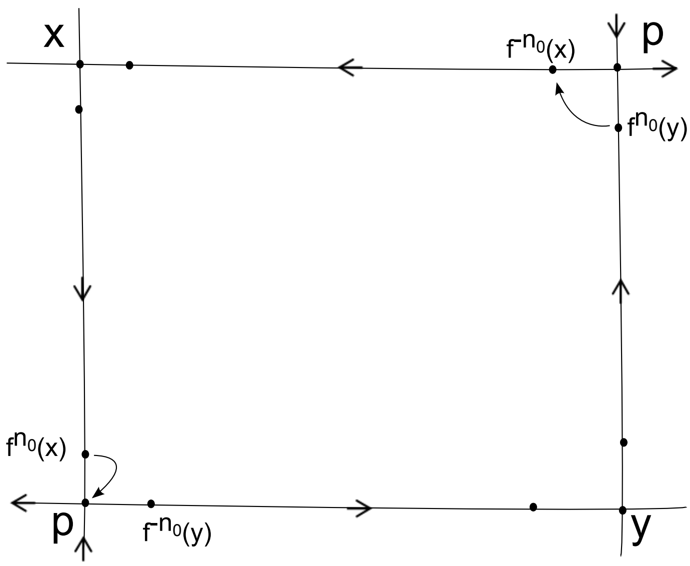


Figure 6.2:

O lema do sombreamento para conjuntos hiperbólicos implica que para cada $\alpha > 0$ existe β tal que toda β-pseudo órbita periódica é α-sombreada por um ponto periódico. Assim, vamos escolher α satisfazendo as condições:

(a) $B_{2\alpha}(q) \subset (U)$.

(b) Se $d(z,w) < \alpha$ e x, y estão na vizinhança adaptada de H então,

$$\frac{||Df|_{F(z)}||}{||Df|_{F(w)}||} < 1 + c$$

onde c verifica $(1+c)(1-\frac{\varepsilon}{2})^{-1} < 1+\varepsilon$.

Seja $\beta < \alpha$ dado pelo lema do sombreamento para α e seja n_0 tal que $\mathcal{P}^N$ é uma β-pseudo órbita. Além disso, existe uma órbita periódica r de período $\pi(r) = N\pi(p) + 4n_0$ que α-sombrea $\mathcal{P}^N$. Sendo $k = \sup\limits_{x \in M} ||Df_x||$, temos

$$\begin{aligned}
||Df^{\pi(r)}|_{F(r)}|| = ||Df^{N\pi(p)+4n_0}|_{F(r)}|| &= ||Df^{4n_0}|_{F(r)}(Df^{\pi(p)}|_{F(r)})^N|| \\
&= k^{4n_0}||Df^{\pi(p)}|_{F(r)}||^N \\
&= k^{4n_0}((1+c)^{\pi(p)}||Df^{\pi(p)}|_{F(p)}||)^N \\
&= k^{4n_0}((1+c)(1-\frac{\varepsilon}{2})^{-1})^{N\pi(p)} \\
&< k^{4n_0}(1+\varepsilon)^{N\pi(p)} < (1+\varepsilon)^{N\pi(p)+4n_0} = (1+\varepsilon)^{\pi(r)}.
\end{aligned}$$

Onde a inequação anterior vale para N suficientemente grande. Note que a órbita de r passa através de U. Por outro lado, por dominação, temos que

$$||Df^{\pi(r)}|_{E(r)}|| < ||Df^{\pi(r)}|_{F(r)}|| < (1+\varepsilon)^{\pi(r)}$$

Agora, compondo as derivadas da órbita de r com homotetias $H(x) = x(1+\varepsilon)^{-1}$ nós obtemos, pelo lema de Frank[1], um difeomorfismo g tal que todo auto-valor associado a órbita r são menores que 1, isto é r é um atrator periódico (poço).

Isto contradiz a suposição genérica do teorema(5.0.18) ítem 7, pois um poço é persistente, assim todo residual $\mathcal{R}$ de $\mathcal{U}$ tem um difeomorfismo com um poço proximo de r, então contido em U, contradizendo que o interior é persistente. □

Lema 6.0.16 (Liao). *Seja Λ um conjunto compacto invariante de f com decomposição dominada $T_H M = E \oplus F$ tal que $||Df|_{E(x)}||||Df^{-1}|_{F(x)}|| < \gamma$ $\forall x \in \Lambda$ e $\dim(F) = 1$. Assumindo ainda que*

(1) Existe um ponto $b \in \Lambda$ tal que $||Df^{-n}|_{F(b)}|| \geq 1$ $\forall n \geq 0$.

[1]Podemos usar Frank, pois $||Df_r - H(Df_r)|| < ||(1+\varepsilon) - (1+\varepsilon)(1+\varepsilon)^{-1}|| = ||1+\varepsilon-1|| = \varepsilon$

(2) Existe $\gamma < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$ *tal que dado* $x \in \Lambda$ *satisfazendo*

$$||Df^{-n}|_{F(x)}|| \geq \gamma_2^n \ \ \forall n \geq 0$$

temos que existe $y \in \omega(x)$ *satisfazendo*

$$||Df^{-n}|_{F(y)}|| \leq \gamma_1^n \ \ \forall n \geq 0.$$

Então, para todo $\gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4 < 1$ *e toda vizinhança* U *de* Λ *existe um ponto periódico* p *de* f *cuja órbita está dentro de* U*, do mesmo índice da decomposição dominada e satisfaz* $||Df^{-n}|_{F(p)}|| < \gamma_4^n$ $\forall n \geq 0$ *e* $||Df^{-n}|_{F(p)}|| \geq \gamma_3^n$ $\forall n \geq 0$*.*

Para mais detalhes do lema de Liao e os outros conceitos acima veja [18].

Teorema 6.0.17. *Seja* H *uma classe homoclínica de um difeomorfismos genérico* f *com interior não vazio admitindo uma decomposição dominada de codimensão um* $T_HM = E \oplus F$ *e* $dim(F) = 1$*. então* F *é uniformemente expansivo.*

Proof. Para simplificar usaremos a norma adaptada, isto é

$$||Df|_{E(x)}||||Df^{-1}|_{F(x)}|| < \gamma. \tag{6.1}$$

Suponhamos que o teorema não é verdadeiro, ou seja, para todo $0 < \nu < 1$ existe $x \in H$ tal que $||Df^{-n}|_{F(x)}|| \geq \nu$, $\forall\ n \geq 0$ (caso contrário para cada $x \in H$ existiria um $n_0(x)$ tal que $||Df^{n_0}|_{F(x)}|| < \nu$ e por compacidade teríamos um n uniforme para todo x e F seria hiperbólico, de fato como Df é contínua se y está bem próximo de x então $||Df^{-n_0}|_{F(y)}|| < \nu$, então existe uma vizinhança V_x onde podemos usa o mesmo n_0, podemos então cobrir todo H com essas vizinhanças, como H é compacto existe uma subcobertura finita. Logo podemos escolher n como sendo o máximo dos $n_0(x)$ tal que para todo $x \in H$ $||Df^{-n}|_{F(x)}|| < \nu$). Seja x_m uma sequência de pontos tal que $||Df^{-n}|_{F(x)}|| \geq 1 - 1/m$ $\forall\ n \geq 0$, logo um ponto limite x satisfaz $||Df^{-n}|_{F(x)}|| \geq 1$ $\forall n \geq 0$. Agora dividiremos a prova em dois casos:

1ª caso (Não vale o lema de Liao): Já temos todas as hipótese do lema de Liao exceto o item 2), se não podemos usar o lema esse item é falso, isto é, $\forall\ \gamma < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$ existe $x \in H$ tal que

$$||Df^{-n}|_{F(x)}|| \geq \gamma_2^n \qquad \forall\ n \geq 0$$

Mas, $\forall\, y \in \omega(x)$ nós temos que

$$||Df^{-n}|_{F(x)}|| \geq \gamma_1^n \qquad \forall\, n \geq 0 \tag{6.2}$$

Assim se trabalharmos com o $\omega(x)$ que é fechado e invariante, temos que o subfibrado E é hiperbólico, pois para cada $z \in \omega(x)$

$$||Df|_{E(z)}|| < \frac{\gamma}{||Df^{-1}|_{F(z)}||} < \frac{\gamma}{\gamma_1} < 1. \tag{6.3}$$

Agora tomaremos $y \in \omega(x)$ um ponto recorrente (genericamente $R(f) = \Omega \supset \omega(x)$), para todo $\varepsilon > 0$ podemos considerar n suficientemente grande tal que $d(f^n(y), y) < \varepsilon$. Vamos mostrar que $\{y, ..., f^n(y)\}$ é um segmento de órbita quase-hiperbólico e usa o teorema(6.0.13) para encontrar um ponto periódico sombreando este segmento. Para este fim, vamos escolher $\lambda = \gamma_1 = \sqrt[4]{\gamma}$ e usando a equação(6.3) temos que

$$\prod_{i=0}^{k-1} ||Df|_{E(f^i(y))}|| \leq \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^k = \left(\frac{\gamma}{\sqrt[4]{\gamma}}\right)^k < (\sqrt[4]{\gamma})^k = \lambda^k \tag{6.4}$$

usamos na equação acima que $\gamma < \sqrt[2]{\gamma}$. Agora , como F é unidimensional $m(Df|_{F(y)}) = ||Df|_{F(y)}||$ e

$$||Df^{n-k+1}|_{F(f^{k-1}(y))}|| = \prod_{i=k-1}^{n-1} ||Df|_{F(f^i(y))}|| = \prod_{i=k-1}^{n-1} m(Df|_{F(f^i(y))})$$

pela equação(6.2) nós temos que

$$||Df^{n-k+1}|_{F(f^{k-1}(y))}|| = \prod_{i=k-1}^{n-1} m(Df|_{F(f^i(y))}) \geq \gamma_1^{-(n-k+1)} = \lambda^{-(n-k+1)} \tag{6.5}$$

e usando a equação(6.1)

$$\frac{||Df|_{E(f^i(y))}||}{||Df|_{F(f^i(y))}||} \leq \gamma < \sqrt{\gamma} = \lambda^2 \tag{6.6}$$

As equações (6.4), (6.5) e (6.6) nos mostram que $\{y, ..., f^n(y)\}$ é um segmento de órbita quase-hiperbólico, portanto o teorema(6.0.13) nos dar um ponto periódico p de f que tem período n e permanece δ-próximo das n-primeiras iteradas de y, este ponto tem índice 1 e sua variedade estável intersecta a instável de y. De fato, como H tem decomposição dominada existe uma vizinhança U de H tal que o maximal invariante tem decomposição dominada e para δ suficientemente pequeno $p \in U$ e está no maximal invariante, então p tem decomposição dominada de índice 1 e pelo teorema(2.2.27) as subvariedades estáveis tem tamanho uniforme, e usando a proposição(2.2.28) elas se cortam transversalmente. Assim $p \in \overline{W^u(y)}$ e usando a estabilidade Lyapunov de H, a teorema(5.0.18) item 11, nos dar que $\overline{W^u(y)} \subset H$ então $p \in H$.

Vamos escolher[2] $\gamma_1 > \mu$ (do lema 6.0.15) e δ suficientemente pequeno tal que $||Df^{-n}|_{F(p)}|| > \mu^n$ (que é válido continuidade, pois as n-primeiras iteradas de p e de y estão próximas e $||Df^{-n}|_{F(y)}|| > \gamma_1^n > \mu^n$) contradizendo o lema(6.0.15).

2ª caso (Podemos aplicar o lema de Liao): usando o lema de Liao temos que para todo $\gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4 < 1$ e toda vizinhança U de Λ existe um ponto periódico p de f cuja órbita está dentro de U, tendo decomposição dominada em p (pois novamente podemos pegar o maximal invariante) de índice 1 e satisfaz $||Df^{-n}|_{F(p)}|| > \gamma_3^n$. Podemos pegar $\gamma_3 > \mu$ (como antes) e U suficientemente pequeno para garantir que a variedade estável do ponto periódico p intersecte a instável de algum ponto $\tilde{y}$ de H, nós chegaremos a mesma contradição de antes, isto é, $p \in \overline{W^u(\tilde{y})}$ e usando a estabilidade Lyapunov de H nós temos $p \in \overline{W^u(\tilde{y})} \subset H$ e $||Df^{-n}|_{F(p)}|| > \gamma_3^n > \mu^n$.

$\square$

[2]lembre que já escolhemos o valor γ_1, caso o valor anterior não sirva, se for maior $\sqrt[n]{\gamma}$ $n > 4$, como é o caso, não afetará a construção anterior.

REFERÊNCIAS

[1] Abdenur, F., Bonatti, C., Crovisier, S., Díaz, L., Wen, L., et al. Periodic points and homoclinic classes. *Ergodic Theory and Dynamical Systems 27*, 1 (2007), 1–22.

[2] Abdenur, F., Bonatti, C., Crovisier, S., and Díaz, L. J. Generic diffeomorphisms on compact surfaces. *Fund. Math. 187*, 2 (2005), 127–159.

[3] Abdenur, F., Bonatti, C., and Díaz, L. Non-wandering sets with non-empty interiors. *Nonlinearity 17* (2004), 175.

[4] Bonatti, C., and Crovisier, S. Recurrence et genericite. *Inventiones Math*, 158 (2004), 33–104.

[5] Bonatti, C., Díaz, L. J., and Viana, M. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, vol. 102 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. A global geometric and probabilistic perspective, Mathematical Physics, III.

[6] Carballo, C. M., Morales, C. A., and Pacifico, M. J. Homoclinic classes for generic C^1 vector fields. *Ergodic Theory Dynam. Systems 23*, 2 (2003), 403–415.

[7] Crovisier, S. Annals of. *Annals of mathematics 172* (2010), 1641–1677.

[8] Ferreira, F. Dinâmica simbólica e ferradura de smale, 2007.

[9] Fisher, T. Hyperbolic sets with nonempty interior. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS 15*, 2 (2006), 433.

[10] Hirsch, M., Pugh, C., and Shub, M. *Invariant manifolds*, vol. 583 of *Lect. Notes in Math.* Springer Verlag, 1977.

[11] Kolyada, S., and Snoha, L. Some aspects of topological transitivity–a survey. *Grazer Math. Ber 334* (1997), 3–35.

[12] Lessa, P. Dinámica genérica en superficies. *Monografıa de Licenciatura CMAT* (2006).

[13] Milnor, J. *Foliations and foliated vector bundles*. 1970.

[14] Newhouse, S. Lectures on dynamical systems. *Dynamical systems* (2011), 209–312.

[15] Potrie, R., and Sambarino, M. Codimension one generic homoclinic classes with interior. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society 41*, 1 (2010), 125–138.

[16] PUJALS*, E., AND SAMBARINO, M. Integrability on codimension one dominated splitting. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society 38*, 1 (2007), 1–19.

[17] SMALE, S. Uma ferradura nas praias do rio de janeiro. *Ciência Hoje* (1999), 34–41.

[18] WEN, L. The selecting lemma of Liao. *Discrete Contin. Dyn. Syst. 20*, 1 (2008), 159–175.

Apêndice A

DIFEOMORFISMOS LINEARES DE ANOSOV

Um difeomorfismos $f : M \to M$ é dito Anosov quando a variedade toda é hiperbólica, mais precisamente:

Definição A.0.18. Seja M uma variedade fechada. Dizemos que um difeomorfismos $f : M \to M$ é de *Anosov* se existem constantes $K > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tal que para todo $x \in M$ temos uma decomposição $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$ satisfazendo:
(1) $D_xf(E^s_x) = E^s_{f(x)}$ e $D_xf(E^u_x) = E^u_{f(x)}$ (invariantes)
(2) $||D_xf^n|_{E^s_x}|| \leq ||K\lambda^n||$ e $||D_xf^{-n}|_{E^u_x}|| \leq ||K\lambda^n||$ (hiperbólicos)

Aqui estudaremos um caso particular de difeomorfismos de Anosov que são os Anosov do toro, ou seja quando $M = \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ e veremos que estes são conjugados aos difeomorfismos lineares.

Definição A.0.19. Uma transformação linear invertível $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é *hiperbólica* se todos os seus autovalores tem modulo diferente de 1.

Definimos $SL(n, \mathbb{Z}) = \{$Matrizes com entradas inteiras e determinante $\pm 1\}$

Definição A.0.20. Seja $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ hiperbólica. Um *difeomorfismo de Anosov linear* $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é definido por

$$f \circ \Pi = \Pi \circ A$$

onde $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ é a projeção canônica.

Teorema A.0.21 (Franks, Manning)**.** *Todo difeomorfismos de Anosov de um toro é topologicamente equivalente a um Anosov Linear.*

Teorema A.0.22 (Franks, Newhouse)**.** *Uma variedade que admite um difeomorfismo de Anosov de codimensão 1 é homeomorfa a um toro.*

Os difeomorfismos de Anosov lineares tem uma dinâmica muito rica, como mostrado abaixo.

Teorema A.0.23. *Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um difeomorfismo de Anosov linear, então:*
(1) $\overline{Per(f)} = \Omega(f) = \mathbb{T}^n$.
(2) f é transitiva e topologicamente mixing.
(3) f é expansiva
(4) Para qualquer $z \in \mathbb{T}^n$, as variedades $W^s(z)$ e $W^u(z)$ são densas em $\mathbb{T}$

Esta dinâmica é robusta, isto é, se preserva por pequenas pertubações.

Teorema A.0.24. *Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um difeomorfismo de Anosov linear. Existe ε tal que se g é um difeomorfismo ε-C^1-proximo de f, então f e g são conjugadas.*