PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Marlon Cesar Santos Oliveira

Expansividade e Hiperbolicidade

São Luís - MA

2012

Marlon Cesar Santos Oliveira

Expansividade e Hiperbolicidade

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Nivaldo Costa Muniz**.

São Luís - MA

2012

Marlon Cesar Santos Oliveira

Expansividade e Hiperbolicidade

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Nivaldo Costa Muniz**.

Dissertação aprovada em , pela **BANCA EXAMINADORA**:

(Orientador) Dr. Nivaldo Costa Muniz (UFMA)

Dr. Fabiano Borges da Silva (UFMA)

Dr. Krerley Oliveira (UFAL)

AGRADECIMENTOS

Agradeço

• Primeiramente à Deus

• Ao Professor Doutor Nivaldo Muniz pela orientação e formação, pela confiança, paciência e aprendizado e aos outros professores do PPGMAT.

• Aos meus dois irmãos que de alguma forma contribuíram, à minha mãe, dona Domingas, responsável pela minha formação como pessoa, parcialmente a meu pai e à Natalia pelos incentivos e compreenção.

• Aos meus amigos de curso Marcos, Ronaldo, Santana, Ermerson, Calado e outros.

• A todos que de alguma maneira contribuíram direta ou indiretamente para que este sonho fosse realizado.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar que as classes Homoclínicas com expansividade C^1-robusta são genericamente hiperbólicas. Este é um resultado devido a M. Sambarino e J. Vieitez em [16], para mostrar este resultado utilizamos algumas técnicas introduzidas por Mañé e alguns outros resultados dos mesmos autores encontrados em [15].

Palavras-chave: Hiperbolicidade, Expansividade, Classe Homoclínica

ABSTRACT

The objective of this work is to show that the homoclinic classes with expansiveness C^1-robust are generically hyperbolic. This is a result due to M. Sambarino and J. Vieitez in [16] to show this result we used some techniques introduced by Mañé and some other results of the same authors found in [15].

Keywords: Hyperbolicity, Expansivity, Homoclinic class.

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A teoria dos sistemas dinâmicos surge da necessidade de construir um modelo que relacione o estado presente com o estado inicial. O objetivo central da teoria dos sistemas dinâmicos é entender a estrutura de órbitas, tanto no sentido topológico como no estatístico da maioria dos sistemas dinâmicos. Além disso é de interesse determinar quando e em que sentido certas propriedades são persistentes a pequenas perturbações. Com base nos objetivos citados acima, uma classe de sistemas dinâmicos que inicialmente achava-se que constituiria a maioria foi a classe dos sistemas dinâmicos estruturamente estáveis, composta pelos sistemas que possuem estrutura topológica das órbitas inalteradas por pequenas perturbações. Para garantir que esses estivessem em maioria seria importante caracterizá-los, logo surge a noção central do trabalho que é a de hiperbolicidade, e foi no trabalho de Smale [18] com os sistemas chamados Axioma A onde foi provado que hiperbolicidade implica estabilidade. A recíproca deste resultado ficou conhecida como Conjectura da Estabilidade teve uma resposta positiva devido a Mañé [9] no final dos anos 80. Com isso se teve o conhecimento da estrutura da órbita dos sistemas estruturamente estáveis, mas esse resultado mostrou também que esses não são maioria, uma vez que já se conhecia exemplos de conjuntos abertos inteiramente formados por sistemas dinâmicos não hiperbólicos. A hiperbolicidade é o paradígma dos sistemas caóticos, embora desses se tenha uma descrição da lei que o determina. Uma propriedade dos conjuntos hiperbólicos é a expansividade, que nos diz que a dinâmica é previsível no sentido de que é impossível prever o comportamento de uma órbita quando se comete um erro, ainda que pequeno , na determinação da condição inicial. Embora a hiperbolicidade implique em expansividade a recíproca não é necessariamente verdadeira , ou seja, a expansividade de sistema dinâmico sobre um conjunto não garante que o conjunto é hiperbólico. Em [11] prova-se que em uma variedade tridimensional M, para $f \in Diff^r(M)$ genericamente classes homoclínicas com expansividade uniformemente C^1-robusta são hiperbólicas. Já em [10] é mostrado que se M é uma variedade de dimensão qualquer e $f \in Diff^r(M)$ se a classe homoclínica tem expansividade uniformemente C^1-robusta então são hiperbólicas, mas sobre a classe se faz uma hipótese adicional que é de ter codimensão 1. Uma das referências principais deste trabalho é [15] que não faz restrição sobre a dimensão da variedade M nem pede que a classe homoclínica tenha codimensão 1 e não pede a uniformidade da expansividade C^1-robusta da classe homoclínica. Mas admite como hipótese que o $H(p)$-germe seja expansivo por f, com isso conclui que a classe homoclínica $H(p)$ é hiperbólica . Este artigo serve como base para [16] cujo resultado principal é o nosso objetivo.

Teorema 1.0.1. *Existe um conjunto residual $\mathcal{R}$ em $Diff^1(M)$ tal que se $f \in \mathcal{R}$ tem um ponto periódico hiperbólico com classe homoclínica $H(p)$ com expansividade C^1-robusta, então $H(p)$ é um conjunto hiperbólico.*

Para isso nos organizamos da seguinte forma: No segundo capítulo apresentamos algumas definições e resultados importantes para a teoria e entre esses alguns que serão utilizados diretamente. No terceiro capítulo encontram-se os resultados básicos para a demonstração do teorema principal, nesses podemos ver os argumentos genéricos que são satisfeitos por todos os difeomorfismos de um residual, na seção seguinte mostramos que a classe homoclínica com expansividade C^1-robusta admite decomposição dominada e na prova disso usamos uma técnica introduzida por Mañé de controle de ângulos, neste mesmo capítulo provamos dois resultados que serão utilizados diretamente na demonstração do teorema principal que é o da contração por blocos e a propriedade de sombreamento na classe homoclínica que é uma consequência não tão direta do fato da classe ter estrutura de produto local, mas ambos resultados são obtidos depois de termos garantido que os pontos da classes admitem variedade centro estáveis e instáveis (cuja existência parte da classe ter decomposição dominada) localmente com propriedades de verdadeiras estáveis e instáveis. No quarto capítulo demonstramos o teorema principal e no quinto mostramos em comparação com [15] como retirar os argumentos genéricos com o acréscimo de uma hipótese adicional sobre a classe homoclínica e também como o teorema principal é resolvido facilmente se tomarmos M como uma superfície utilizando a partir do resultado de Pujals e Sambarino [14]

Capítulo 2
DINÂMICA HIPERBÓLICA

2.1 Hiperbolicidade Local

Definição 2.1.1. Uma transformação linear $A : \mathbb{R}^d \to R^d$ é dita ser *hiperbólica* se todos os seus autovalores tem módulo diferente de um.

Note que se o módulo de todos os autovalores é menor do que 1 (se todos tiverem módulo maior do que 1 e A for invertível), temos que $||A^n|| \to 0$ ($||A^{-n}v|| \to 0$) para todo $v \in \mathbb{R}^d$. Além do mais podemos provar que essa convergência é exponencial, ou seja, que existe $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que $||A^n|| \leq C\lambda^n||v||$ $(||A^{-n}|| \leq C\lambda^n||v||)$, para $n \geq 0$. Cada autovalor com módulo menor do que 1 gera um subespaço, a soma desses subespaços definimos como E^s o subespaço estável e da mesma forma para os autovalores com módulo maior do que um definimos E^u. Podemos mostrar que $\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$ e $A(E^s) = E^s$ da mesma forma $A(E^u) = E^u$. A constante C indica que a contração (expansão) não é imediata, tal problema pode ser solucionado através de uma mudança de norma, para se ter contração passo a passo. Dada a decomposição $\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$, existe uma norma também, chamada norma adaptada $||\ .\ ||_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e $0 < \theta < 1$ tal que

$$||A_{|_{E^s}}||_1 < \theta \quad \text{e} \quad ||A^{-1}_{|_{E^u}}||_1 < \theta$$

Considere M uma variedade riemanniana compacta conexa e sem bordo

Definição 2.1.2. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e p um ponto fixo de f. Dizemos que p é um *ponto hiperbólico* se $Df_p : T_pM \to T_pM$ é uma transformação linear hiperbólica. Se p é um ponto periódico de período n é um ponto hiperbólico se é um ponto fixo hiperbólico de f^n.

A definição nos diz que a derivada num ponto fixo hiperbólico tem um comportamento previsível, ou seja, de contração no subespaço estável e expansão no instável pela sua inversa. A derivada é a ação linear do difeomorfismo e é de se esperar que ela nos dê informações significativas sobre o mesmo pelo menos topologicamente em alguma vizinhança de p. O Teorema de Hartman-Grobman diz que se p é um ponto fixo hiperbólico então f e sua dirivada Df_p tem a mesma dinâmica local. Para enunciarmos corretamente precisamos de algumas definições.

Definição 2.1.3. Seja $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ sistemas dinâmicos topológicos onde X, Y são espaços topológicos e f, g no mínimo contínuas, dizemos que são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo $h : X \to Y$, tal que $g \circ h = h \circ f$. O homeomorfismo h é chamado conjugação topológica de f e g.

Agora podemos enunciar o teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [7]

Teorema 2.1.4. *(Teorema de Hartman-Grobman) Seja $f \in Diff(M)$ e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico. Então para $A = Df_p : T_pM \to T_pM$ então existem vizinhanças $V_p \subset M$ de p, $U_0 \subset T_pM$ de 0 e um homemorfismo $h : U_o \to V_p$ tal que*

$$h \circ A = f \circ h$$

Uma consequência do Teorema de Hartman-Grobman é que podemos descrever pelo menos topologicamente os conjuntos estáveis e instáveis locais dos pontos fixos hiperbólicos.

Definição 2.1.5. Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo e $x \in M$ definimos o conjunto estável de x como

$$W^s(x) = \{y \in M | \ d(f^n(x), f^n(y)) \to 0, \text{ quando } n \to +\infty\}$$

e o instável como

$$W^u(x) = \{y \in M | \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0, \text{ quando } n \to +\infty\}.$$

Para $\epsilon > 0$ definimos o conjunto estável e instável local de tamanho ϵ como

$$W^s_\epsilon(x) = \{y \in M | \ d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon, \forall n \geq 0\}$$

$$W^u_\epsilon(x) = \{y \in M | \ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \epsilon, \forall n \geq 0\}.$$

Corolário 2.1.6. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico. Então existe $\epsilon > 0$ tal que*

1. *$W^s_\epsilon(p) \subset W^s(p)$ e $W^u_\epsilon(p) \subset W^u(p)$.*

2. *$W^s_\epsilon(p)$ é uma subvariedade topológica e com a mesma dimensão do subespaço estável. Igualmente para a $W^u_\epsilon(p)$.*

3. *$W^s(p) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon)$ e $W^u(p) = \bigcup_{n\geq 0} f^{n}(W^u_\epsilon)$ e são subvariedades topológicas imersas em M.*

A compreensão global desses conjuntos é essencial para o estudo da dinâmica. O caso dos pontos periódicos hiperbólicos se tem a descrição bastante completa, pelo seguinte resultado que não demonstraremos mas pode ser encontrado em [7].

Teorema 2.1.7. *(Teorema da Variedade Estável) Seja $f \in Diff^r(M)$ e $x \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f e E^s o subespaço estável de $A = Df_x$, então temos*

1. *$W^s(p)$ é uma variedade de classe C^r imersa em M e o espaço tangente de $W^s(p)$ é E^s.*

2. *Seja $D \subset W^s(p)$ um disco mergulhado contendo o ponto p. Considere uma vizinhança $\mathcal{N} \subset Diff^r(M)$ tal que cada $g \in \mathcal{N}$ tenha um único ponto fixo hiperbólico p_g, contido em uma vizinhança U de p. Então dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $\widetilde{\mathcal{N}}$ tal que, para todo $g \in \widetilde{\mathcal{N}}$, existe um disco $D_g \subset W^s(p_g)$ que está ϵ C^r-próximo de D.*

Um outro teorema clássico e que será utilizado posteriormente é o λ-Lema (ou Lema da Inclinação), que permite compreender o comportamento local dos pontos fixos hiperbólicos a partir de suas variedades invariante. Diz que se tomarmos um disco D transversal à variedade estável, com mesma dimensão que a variedade instável, então os iterados por f desse disco são subvariedades que convergem na topologia C^1 para $W^u_\epsilon(p)$.

Teorema 2.1.8. *(λ-lema) Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e p um ponto fixo hiperbólico para f. Considere D um disco mergulhado de mesma dimensão que $W^u(p)$, que intersecta tranversalmente $W^s(p)$. Então para todo $\delta > 0$ existe um n_0 tal que se $n \geq n_0$, então $f^n(D)$ está ϵ-próxima da variedade instável local de p.*

Proof. Ver demonstração em [12] □

2.2 Conjuntos Hiperbólicos

A noção de ponto fixo periódico se extende para o que chamamos conjunto hiperbólico.

Definição 2.2.1. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r com M um variedade riemanniana . Dizemos que $\Lambda \subset M$ um compacto invariante por f é hiperbólico, se temos a decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ onde E^s, E^u são subfibrados invariantes por Df e constantes $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ tal que $\forall n > 0$

$$||Df^n|_{E^s_x}|| < C\lambda^n \text{ e } ||Df^{-n}|_{E^u_x}|| < C\lambda^n$$

Observe que a taxa de expansão e contração nos subespaços independe do ponto no conjunto invariante. Além do mais, duas métricas riemannianas quaisquer em M são equivalentes no compacto, assim a noção de conjunto hiperbólico não depende da escolha da métrica, apenas a constante C depende e nós podemos encontrar uma métrica adaptada de tal forma que $C = 1$.

Um resultado importante que será utilizado posteriormente nos dá uma condição necessária e suficiente para obtermos hiperbolicidade.

Proposição 2.2.2. *Se Λ um conjunto compacto f-invariante tal que $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$, com E^s, E^u subfibrados invariantes por Df e além do mais existe um $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $x \in \Lambda$, existem $0 < k_1 < m$ e $0 < k_2 < m$ tais que*

$$||Df^{k_1}|_{E^s_x}|| < \frac{1}{2}$$

$$||Df^{-k_2}|_{E^u_x}|| < \frac{1}{2}$$

então Λ é um conjunto hiperbólico.

Proof. Se Λ é um conjunto hiperbólico temos que existem $C > 0$ e λ tal que dado um $x \in \Lambda$

$$||Df^n|_{E^s_x}|| < C\lambda^n \text{ para todo } n > 0$$

então basta tomarmos um n_0 tal que $C\lambda^{n_0} < \frac{1}{2}$ para termos o desejado.

Agora observe que pela regra da cadeia temos

$$||Df^n|_{E^s_x}|| \leq ||Df^k|_{E^s_x}||\, ||Df^{n-k}|_{E^s_{f^k(x)}}|| \leq \frac{1}{2}||Df^{n-k_x}|_{E^s_{f^{k_x}(x)}}||$$

sendo que $0 < k = k_x \leq m$ por hipótese, dessa forma se $n - k(x) \geq m$ podemos podemos aplicar novamente a regra da cadeia para f^{n-k_x}. Esse procedimento pode ser realizado para $[\frac{n}{m}]$ vezes, e assim conseguimos

$$||Df^n|_{E^s_x}|| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{[\frac{n}{m}]} ||Df^{n-l}|_{E^s_{f^{n-l}(x)}}||$$

para l inteiro e satisfazendo $n - l \leq m$. Para termos o controle sobre os valores $||Df^{n-l}|_{E^s_{f^{n-l}(x)}}||$ definimos

$$C = max\{||Df^i|_{E^s_y}||;\, y \in \Lambda \text{ e } 0 < i \leq m\}$$

portanto escrevendo $\lambda = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{m}}$ conluímos que

$$||Df^n|_{E^s_x}|| \leq C(\frac{1}{2})^{[\frac{n}{m}]} \leq C\lambda^n$$

□

Também é válido a recíproca.
Por definição podemos caracterizar os elementos dos subespaços invariantes da seguinte forma: dados $x \in \Lambda$ e $v \in T_xM$

$$v \in E^s_x \iff ||Df^m_x(v)|| \leq \lambda^m ||v||$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. De maneira análoga os elementos de $E^u(x)$. Com isso afirmamos que tais subespaços variam continuamente. De fato se tomarmos subsequências $\{x_n\} \in M$ e $v_n \in E^s_{x_n}$ tais que $x_n \to x$ e $v_n \to v \in T_xM$, usando a continuidade da diferencial prova-se que $v \in E^s_x$ e por subseqências, se necessário, temos que $\dim E^s_{x_{n_k}} = r$ e para uma base ortonormal fixada em cada um dos $E^s_{x_{n_k}}$ não é difícil ver que cada vetor da base vai satisfazer a propriedade que determina quando um vetor do espaço tangente está no subespaço estável. Portanto $\dim(E^s_x) \geq r$ e de forma semelhante podemos provar que $\dim(E^u_x) \geq n - r$. Comcluímos então que $\dim(E^s_x) = r$ e $\dim(E^u_x) = n - r$ e temos o afirmado.

Definição 2.2.3. Dado um ponto periódico hiperbólico p, dizemos que tem índice k se $\dim(E^s) = k$.

Note que se um conjunto Λ é hiperbólico, dado qualquer ponto periódico no conjunto, ele deve ser hiperbólico é ter a mesma decomposição que o conjunto, pela observação feita acima. Se esse conjunto além do mais for transitivo não pode ter pontos hiperbólicos de índices diferentes. Note que qualquer subconjunto fechado de um conjunto hiperbólico também é hiperbólico e da mesma forma que os pontos periódicos hiperbólicos, os conjuntos hiperbólicos também persistem à pequenas perturbações, ou seja, se Λ é um conjunto hiperbólico podemos encontrar uma vizinhanças do conjunto de Λ e do difeomorfismo f na topologia C^1 tais que qualquer compacto invariante por um difeomorfismo na vizinhança de f também seja hiperbólico. Agora vejamos o Teorema da Variedade Estável para conjuntos hiperbólicos.

Teorema 2.2.4. *(Teorema da Variedade Estável) Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r e Λ um conjunto hiperbólico, onde temos a decomposição tangente $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$. Então existe um $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in \Lambda$ temos que $W^s_\epsilon(x)$ é uma subvariedade imersa de classe C^r em M tal que $T_x W^s_\epsilon(x) = E^s(x)$ e $W^s(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon(x))$. Além do mais se $f_n \to f$ na topologia C^r, então $W^s_\epsilon(x, f_n) \to W^s_\epsilon(x, f)$. O mesmo vale para o conjunto instável.*

Note que as variedades estáveis e instáveis variam continuamente e além do mais pela a diferenciabilidade das mesmas podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que se $x, y \in \Lambda$ com $d(x, y) < \delta$, então W^s_ϵ e W^u_ϵ se intersectam transversalmente em um único ponto.

Definição 2.2.5. Um conjunto hiperbólico é localmente maximal (ou isolado) para o $f \in Diff^r(M)$ se existe uma vizinhança de U de Λ em M tal que

$$\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U).$$

Essa vizinhança é chamada de vizinhança isolada.

Podemos provar que a definição acima é equivalente a

Definição 2.2.6. Um conjunto hiperbólico tem estrutura de produto local se existe δ e ϵ tal que para qualquer pontos $x, y \in \Lambda$ onde $d(x, y) < \delta$ temos que

$$W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) \in \Lambda$$

Como exemplos de conjuntos hiperbólicos que têm estrutura de produto local e podemos verificar que são localmente maximais temos a ferradura de Smale e o solenóide. Um exemplo de conjunto hiperbólico que não tem estrutura de produto local é o conjunto formado por um ponto fixo hiperbólico junto com a órbita de um ponto homoclínico tranversal associado ao ponto fixo. Podemos provar a equivalência das definições usando um teorema muito importante para a teoria dos sistemas dinâmicos chamado *Lema do Sombreamento*. Este resultado é um mecanismo de se *criar* pontos periódicos, no sentido de garantirmos a densidade dos pontos periódicos em um conjunto hiperbólico e também uma ferramenta importante para encontrarmos conjugações para difeomorfismos próximos (na prova de estabilidade estrutural).

Definição 2.2.7. Dado um número real $\epsilon > 0$ e $f : M \to M$, uma α-pseudo órbita é uma sequência $\{x_n\}$ finita ou infinita de pontos em M, tal que para todo n temos $d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon$ (ϵ-pseudo órbitas são órbitas indestinguíveis a menos de ϵ). Uma pseudo órbita é dita periódica se existe um $n_0 > 0$ tal que $x_{n+n_0} = x_n$ para todo n. Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ é β-sombreada pela órbita de uma ponto y, com $\beta > 0$ se para todo n tivermos

$$d(f^n(y), f(x_n)) < \beta$$

Teorema 2.2.8. *(Lema do Sombreamento) Seja Λ um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo f. Dado $\beta > 0$, existem $\alpha > 0$ e $\eta > 0$, tais que para toda α-pseudo órbita $\{x_n\}$, satisfazendo $d(x_n, \Lambda) < \eta$, para todo n, existe um ponto x cuja órbita β-sombreia a pseudo-órbita. Além disso x é um ponto periódico se $\{x_n\}$ é periódica, o sombreamento é único quando $n \to \pm\infty$.*

Não faremos a demonstração do resultado acima que pode ser encontrado em [KH], mas por motivos de necessidade e aproveitando a situação faremos um caso particular.

Definição 2.2.9. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo. Dizemos que um ponto $x \in M$ é um ponto *não-errante* se dada uma vizinhança U de x, existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ e denotamos o conjuntos dos pontos não errante por $\Omega(f) = \overline{per(f)}$. Podemos definir uma relação (não necessariamente de equivalência) em M da seguinte forma, dizemos que $x \prec y$ se dadas vizinhanças U de x e V de y, existe um $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ e em particular temos que $\Omega(f) = \{x; x \prec x\}$. Definimos agora uma outra relação usando pseudo órbitas da seguinte forma, $x \dashv y$ se para todo $\epsilon > 0$ encontramos uma ϵ-pseudo órbita de x até y (se existe uma sequência $\{x_i\}_0^n$ tal que $x = x_0$ e $y = x_n$) definimos então o conjunto *recorrente por cadeias* $R(f) = \{x; x \dashv x\}$, mas $\dashv$ não é uma relação de equivalência em $R(f)$, pois não vale a propriedade simétrica. Para resolver isso definimos um simetrização de tal forma a termos $x \dashv y$ e $y \dashv x$, assim as classe da relação de equivalência são chamadas classes de recorrência por cadeias. Um difeomorfismo é dito ser *Axioma A* se o seu conjunto de pontos não-errante $\Omega(f)$ é hiperbólico e $\Omega(f) = \overline{per(f)}$, onde $per(f)$ é o conjunto dos pontos periódicos de f.

O próximo resultado pode ser visto em [3], sendo que nesse o difeomorfismo f é Axioma A é também é provado que com essa hipótese o $\Omega(f)$ tem estrutura de produto local.

Proposição 2.2.10. *Para todo β existe um $\alpha > 0$ tal que toda α-pseudo órbita $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ em $\Omega(f)$ é β-sombreada por um ponto $x \in \Omega(f)$.*

Proof. Dado $\epsilon > 0$ que será especificado posteriormente, escolhemos um $\delta \in (0, \epsilon)$ (tal que se $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) \cap \Omega(f) \neq \emptyset$ sempre que $d(x, y) < \delta$) e para um $0 < \lambda < 1$ tomamos um k suficientememte grande de tal forma que $\lambda^k \epsilon < \frac{\delta}{2}$ e então escolhemos um $\alpha > 0$ com a propriedade de que se $\{x_i\}_{i=0}^{M}$ é uma α-pseudo órbita em $\Omega(f)$ então $d(f^j(x_0), x_j)) < \frac{\delta}{2}$ para todo $j = 1, 2, ..., M$. Consideramos uma α-pseudo órbita $\{x_i\}_{i=1}^{rM}$ com $r > 0$. definimos os z_k recursivamente em $k \in [0, r]$ por $z_0 = x_0$ e

$$z_{(k+1)M} = W^u_\epsilon(f^M(z_k)) \cap W^s_\epsilon(x_{(k+1)M}) \in \Omega(f)$$

Para ficar mais claro, note que

$$d(f^M(z_0), x_m) < \frac{\delta}{2} \Rightarrow \exists\, z_1 \in W^u_\epsilon(f^M(z_0)) \cap W^s_\epsilon(x_M) \in \Omega(f)$$

Seja o conjunto dos pontos $z = f^{-rM}(z_k)$. Para todo $i \in [0, rM]$ escolhemos um s tal que $i \in [sM, (s+1)M]$ então como

$$\begin{aligned} d(f^i(z), f^{i-sM}(z_s)) = d(f^{i-rM}(z_r), f^{i-sM}(z_s)) &\leq \sum_{t=s+1}^{r} d(f^{i-tM}(z_t), f^{i-tM+M}(x_{(t-1)M})) \\ &\leq \sum_{t=s+1}^{r} \epsilon\lambda^{tM-i} \leq \frac{\epsilon\lambda}{1-\lambda} \end{aligned}$$

foi usado acima desigualdade triangular para a métrica e o fato que $z_t \in W^u_\epsilon(f^M(z_s))$. Portanto como $z_s \in W^s_\epsilon(x_{sM})$ temos que $d(f^{i-sM}(z_s), f^{i-sM}(x_{sM})) \leq \epsilon$ e pela escolha do α obtemos $d(f^{i-sM}(z_s), x_i) < \frac{\delta}{2}$ usando a desigualdade triangular

$$d(f^i(x), x_i) \leq \frac{\epsilon\lambda}{1-\lambda} + \epsilon + \frac{\delta}{2}.$$

Para ϵ pequeno tal que seja menor que um dado β a órbita de z que β-sombreia a pseudo órbita. □

Além de ser um mecanismo para provar a equivalência entre as noções de estrutura de produto local e conjunto localmente maximal, podemos com o Lema do Sombreamento mostrar que quando restringimos o difeomorfismo somente ao conjunto hiperbólico maximal, todo ponto não-errante é aproximado por pontos periódicos.

Corolário 2.2.11. *Se Λ é hiperbólico isolado, então $\overline{Per(f)} = \Omega(f|_\Lambda)$.*

Proof. Pela continuidade de f temos que $\overline{Per(f)|\Lambda} \subset \Omega(f|_\Lambda)$. Agora seja $x \in \Omega(f|_\Lambda)$ e dado ϵ_0 pretendemos achar um ponto periódico ϵ_0-próximo de x. Usaremos o lema do sombreamento para $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{2}$, existe portanto o δ. Considere a bola B de raio

$$r < min\{\epsilon, \frac{\delta}{2}\}$$

centrada em x. Como x é não errante, existe um iterado $k \in \mathbb{N}$ de algum $y \in B$ tal que $f^k(y) \in B$ e temos a seguinte δ-pseudo órbita periódica.

$$..., y, f(y), f^2(y), ..., f^k(y), y, ...$$

e pelo Lema do Sombreamento. Existe um ponto periódico y_0 em Λ (pois Λ é hiperbólico isolado) que ϵ-sombreia a δ-pseudo órbita acima. Das escolhas temos

$$d(y_0, x) < d(y_0, y) + d(y, x) < \epsilon + r < \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_0}{2}$$

logo y é o ponto procurado $\square$

Uma outra consequência desse resultado fundamental é que com ele podemos terminar a argumentação feita anteriomente sobre a estabilidade dos conjuntos hiperbólicos.

Corolário 2.2.12. *Se Λ é um conjunto hiperbólico maximal para um difeomorfismo f, então existem vizinhanças U de Λ e V de f na topologia C^1 tal que se $g \in V$ temos que*

$$\Lambda_g = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(\overline{U})$$

é um conjunto hiperbólico maximal para g. Além do mais, existe um homeomorfismo

$$h_g : \Lambda \to \Lambda_g$$

tal que $g \circ h_g = h_g \circ f$ e o homeomorfismo varia continuamente com g.

Como foi visto acima a dinâmica sobre um conjunto hiperbólico é bem simples, no sentido de que temos o conhecimento de como se comportam seus pontos, mas impõe exigências fortes sobre o conjunto o conjunto não-errante (deve ter periódicos densos). Então é de se esperar que a hiperbolicidade não seja uma propriedade universal, e de fato existem resultados que garantem a existência de abertos de difeomorfismos não hiperbólicos. Uma maneira de superar a ausência é enfraquecer a definição, ou seja, definir noções mais fracas de hiperbolicidade. Vejamos agora uma que garante a decomposição do subfibrado tangente, mas não necessariamente temos contração nem expansão nos subfibrados, só temos como certo a dominação.

Definição 2.2.13. Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ invariante. Dizemos que a decomposição $T_\Lambda M = E \oplus F$ é uma *decomposição dominada* se satisfaz

1. $Df_x E(x) = E(f(x))$ e $Df_x F(x) = F(f(x))$

2. Existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

$$||Df^n|_{E(x)}||\,||Df^{-n}|_{F(f^n(x))}|| \leq C\lambda^n, n \geq 0$$

A definição acima nos diz que ao longo de qualquer órbita de um ponto em Λ temos

- Se na direção F tivermos expansão ou contração fraca, então na direção E deve haver uma expansão com taxa inferior a de F.

- Se na direção F tivermos contração ou expansão fraca, então na direção E deve haver uma contração com taxa superior a de F.

Teorema 2.2.14. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e $\Lambda \subset M$ com decomposição dominada de índice k. Então*

1. *$\overline{\Lambda}$ também tem decomposição dominada de mesmo índice.*

2. *Os subfibrados $E(x)$ e $F(x)$ variam continuamente em x.*

3. *O ângulo entre E e F estão unifomemente limitados inferiormente.*

Proof. Ver demonstração em [2] □

Uma forma mais geral de se obter decomposição dominada a partir de uma decomposição já existente é dada pela seguinte proposição

Proposição 2.2.15. *Seja Λ um conjunto invariante por f e $T_\Lambda M = E \oplus F$, com índice fixado e para todo $x \in \Lambda$. Então a decomposição é dominada se e somente se, existe m_0 tal que*

$$||Df^{m_0}|_{E(x)}||\,||Df^{-m_0}|_{F(f^{m_0}(x))}|| < \frac{1}{2}$$

para todo $x \in \Lambda$.

Proof. A demonstração é semelhante a da Proposição 2.2.2 □

Podemos provar ainda que para dimensão fixa dos subespaços, a decomposição é única e algumas outras popriedades que valem para conjuntos hipérbólicos também valem para decomposição dominada.

2.3 Classes Homoclínicas

Uma outra noção muito importante para a teoria dos sistemas dinâmicos é a de classe homoclínica, tem um papel interessante, pois contém ferradura e dessa forma um boa fonte de hiperbolicidade. Considere M um variedade riemanniana compacta, conexa e sem bordo e $f \in Diff^1(M)$ equipado com a topologia C^1. Considere $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r, seja p um ponto fixo hiperbólico de f, pelo Teorema da Variedade Estável temos que $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são subvariedades imersas injetivamente em M e com o mesmo grau de diferenciabilidade de f. Para motivar o que trataremos a seguir a vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.3.1. Dada uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tal que seu espectro não intersecte o círculo unitário, supomos que possua k autovalores com módulo menor que um e como $A(0) = 0$, a origem é unico ponto fixo, no caso hiperbólico, então temos que $W^s(0) = E^s$ e $W^u(0) = E^u$

$$\mathbb{R}^d = W^s(0) \oplus W^u(0).$$

Dessa forma as variedades estável e instável não se intersectam em outro ponto diferente da origem.

Contrário ao exemplo acima temos a seguinte comportamento.

Definição 2.3.2. Se p é um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo de classe C^1, então um ponto $x \in W^s(p) \cap W^u(p) - \{p\}$ é chamado ponto homoclínico. se a interseção de $W^s(p)$ com $W^u(p)$ for transversal, então x é dito ponto homoclínico transversal.

A definição acima também vale para p um ponto periódico hiperbólico. Vejamos agora o resultado que será muito utilizado neste trabalho.

Teorema 2.3.3. *Todo ponto homoclínico transversal é acumulado por pontos periódicos.*

Proof. A idéia da prova é montar um conjunto hiperbólico contendo o ponto homoclínico e criar uma pseudo órbita periódica contendo o ponto e usar o lema do sombreamento para garantir a existência de pontos periódicos suficientemente próximos da pseudo órbita e em particular do ponto homoclínico. Se $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$ supomos sem perda de generalidade que p é fixo, logo definimos o seguinte conjunto

$$\Lambda = \{p\} \cup \mathcal{O}(q)$$

obviamente é fechado e invariante. Afirmamos que o conjunto é hiperbólico. De fato se definirmos $E^s(q)$, como os subespaços tangentes a variedade estável e instável de q e $E^s(f^n(q)) = Df_q^n(E^s(q))$ da mesma forma os subespaços instáveis. Assim podemos usar o Lema do Sombreamento para Λ. Resta então construirmos a pseudo órbita. Dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ (Lema do Sombreamento). Como q é ponto homoclínico para um m suficientemente grande seus iterados futuros coincidirão com o passado, assim temos que

$$\{..., f^m(q), f^{-m}(q), ..., f^{-1}(q), q, f(q), ..., f^m(q), f^{-m}(q), ...\}$$

Então existe um ponto periódico y_0 que está ϵ-próximo da pseudo órbita e portanto também de q. $\square$

Seja $per_h(f)$ o conjunto dos pontos periódicos hiperbólicos de f (sem perda de generalidade trabalharemos apenas com os pontos fixos hiperbólicos) e nesse definimos uma relação $\sim$ da seguinte forma:

$$p, q \in per_h(f),\ q \sim p \Leftrightarrow\ W^s(q) \pitchfork W^u(p) \neq \emptyset \text{ e } W^s(q) \pitchfork W^u(p) \neq \emptyset$$

Obviamente essa relação é reflexiva e simétrica, para mostrarmos que é transitiva basta usarmos o λ-lema. Então assumimos que $\sim$ é uma relação de equivalência e se $p \sim q$ diremos que p está homoclinicamente relacionado com q. Denotaremos por $H_p(f)$ a classe de p, ou seja, o conjunto de todos os pontos homoclinicamente relacionados com p. Pelo teorema anterior temos que dado um ponto homoclínico transversal de $p \in per_h(f)$, ele é limite de uma sequência $q_n \in per_h(f)$, onde cada um dos q_n estão homoclinicamente relacionados com p. Não é dificil ver que $H_p(f) \supset \mathcal{O}(p)$ e que $H_p(f) \supsetneq \mathcal{O}(p)$ se, e somente se, p tem pelo menos um ponto homoclínico transversal.

Nesse caso temos mais ainda, o fecho do conjunto dos pontos homoclinicamente relacionados com p, coincide com o fecho do conjunto dos pontos homoclínicos transversais de p, que denotaremos por

$$H_T(p,f) = \overline{\{q \in M; q \in W^s(p) \pitchfork W^u(p)\}}$$

Antes de enunciarmos o próximo resultado vejamos algumas definições

Definição 2.3.4. Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo. Dizemos que é *topologicamente transitivo* se dados quaisquer abertos não vazios U e V em M, existir um inteiro $m \geq 0$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ (ou equivalentemente $f^{-m}(V) \cap U \neq \emptyset$). Da mesma forma se para quaisquer U e V existe um m_o tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $m \geq m_0$, dizemos que f é *topologicamente misturadora*

Teorema 2.3.5. *O conjunto $H_T(p,f)$ é compacto, invariante por f e topologicamente transitivo.*

Proof. Como a variedade é compacta é imediato que a classe é um conjunto compacto, já que é fechado. Pela invariância das variedades estáveis e instáveis se $q_1 \sim q_2$ então $f(q_1) \sim f(q_2)$. Para finalizar, dados dois abertos U e V em $H(p)$ queremos provar que algum iterado de U intersecta V. Se a classe for trivial não há o que mostrar, caso contrário existem periódicos $q_1 \in U \cap H(p)$ e $q_2 \in V \cap H(p)$, provaremos que se $z \in W^s(q_1) \cap W^u(q_2)$ e $w \in W^s(q_2) \cap W^u(q_1)$ então $w, z \in H(p)$. Basta usarmos o mesmo argumento que foi usado para provar o teorema anterior só que usando

$$\Lambda = \{q_1, q_2\} \cup \mathcal{O}(z) \cup \mathcal{O}(w)$$

logo esse conjunto será aproximado por periódicos e por continuidade das variedades estáveis e instáveis, z e w devem estar na mesma classe homoclínica em que estão os pontos q_1 e q_1. Com isso se $z \in W^s(q_1) \cap W^u(q_2)$ então $z \in H(p)$ e para um n suficientemente grande $f^n(z) \in U$ e $f^{-n}(z) \in V$ (λ-Lema), portanto f sobre a classe homoclínica é transitivo. □

Uma propriedade muito importante satisfeita pelos difeomorfismos Axioma A e que pode ser encontrado em [17], é que na presença de hiperbolicidade podemos reduzir o estudo da dinâmica às chamadas peças básicas.

Teorema 2.3.6. *(Decomposição Espectral) Se f é um Axioma A então podemos decompor o conjunto dos pontos não errantes $\Omega(f) = \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap ... \cap \Lambda_k$ onde os Λ_i são todos disjuntos, compactos, invariantes e transitivos. Além do mais, cada Λ_i e decomposto como*

$$\Lambda_i = \cap_{j=1}^{k} \Lambda_{i,j}$$

sendo $\Lambda_{i,j}$ disjuntos e cíclicos $(f(\Lambda_{i,j}) = \Lambda_{i,j+1}$ para $j = 1, 2, ...k - 1$ e $f(\Lambda_{i,k}) = \Lambda_{i,1})$ e $f^k : \Lambda_{i,j} \to \Lambda_{i,j}$ é topologicamente misturadora.

Tomamos como $\Lambda_{i,j}$ ditas peças básicas, as classes homoclínicas que já sabemos ser transitivas, logo decompõem a dinâmica.

2.4 Expansividade

Dada qualquer função contínua sobre um espaço métrico M compacto, os sistemas dinâmicos concentram-se em estudar o comportamento assintótico dos iterados desta função. Uma propriedade bastante explorada é a densidade de órbitas, isto é, órbitas que visitam todo o espaço de fase. Portanto se tornam interessantes os sistemas que possuem uma abundância de órbitas densas. Um sistema com tal característica é a função deslocamento sobre o espaço de símbolos, mais conhecido com os Shifts, por outro lado nem sempre é possível determinar o que acontecerá com as órbitas de um sistema dinâmico, assim surge os sistemas dinâmicos expansivos, com uma condição para obtermos uma previsão do comportamento de uma grande partes das órbitas.

Definição 2.4.1. Seja X um espaço métrico e $f : X \to X$ um homeomorfismo, dizemos que f é *expansivo* se existe um $\delta > 0$, tal que dados $x, y \in X$ se $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ implicar em $x = y$. Equivalentemente, se dados $x, y \in X$ distintos, então existe um $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$

A definição de sistemas expansivos no diz que para algum $\delta > 0$ duas órbitas diferentes nunca se acompanham a uma distância δ ao longo de suas trajetórias, ou dito de outra forma que se sempre duas órbitas se acompanha a distância δ ao longo de suas trajetória, então são iguais. Da definição pode vir a surgir o questionamento sobre a importância de pedirmos que as órbitas se separem no passado e(ou) futuro, em vez de supormos apenas um dos casos. Encaremos como uma boa resposta o seguinte exemplo

Exemplo 2.4.2. Se $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear diagonalizável, a qual o módulo de todos os autovalores é maior(ou menor) do que 1, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ distintos e se tomarmos λ como o menor dos autovalores (maior) temos

$$\|A^n x - A^n y\| > \lambda^n \|x - y\|$$

e significa que a distância dos iterados futuros (passados) de y e x por A tende para o infinito. Portanto tanto ambas as transfomações lineares A e A^{-1}, podem ser expansivas.

Existe também uma propriedade parecida com a expansividade que é a sensibilidade nas condições iniciais

Definição 2.4.3. Se X é um espaço métrico perfeito e $f : M \to M$ é um homeomorfismo, dizemos que f tem *sensibilidade nas condições iniciais* se existe um $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ e todo $\epsilon > 0$ existe um $y \in X$ satisfazendo $d(x, y) \leq \epsilon$ e um $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$.
Vale lembrar que um espaço métrico é dito *perfeito* se todos os seus pontos são de acumulação.

A definição de expansividade não deve ser confundida com a de sensibilidade nas condições iniciais, mas podemos afirmar o seguinte resultado.

Proposição 2.4.4. *Se X é um espaço métrico perfeito, se $f : M \to M$ é um homeomorfismo expansivo então tem sensibilidade nas condições iniciais.*

Proof. Como X é um espaço métrico perfeito, sendo $z \in X$ um ponto de acumulação e dado $\epsilon > 0$, para toda bola $B(z, \epsilon)$ temos que existe um $y \neq z$ em $B(z, \epsilon) \cap X$, já que o homeomorfismo é expansivo, temos que existe um $\delta > 0$ e um $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$d(f^k(z), f^k(y)) \geq \delta.$$

Portanto f sobre X tem sensibilidade nas condições iniciais □

Observemos que se X não é perfeito, existe pelo menos um $z_0 \in X$ que é isolado, dessa forma existe um $\epsilon > 0$ tal que $B(z_0, \epsilon) \cap X - \{z_0\} = \emptyset$, portanto não existe $y_0 \neq z_0 \in X$ tal que $d(y_0, z_0) < \epsilon$, assim não podemos ter sensibilidade nas condições iniciais.
O exemplo seguinte mostra que sensibilidade nas condições iniciais não implica em expansividade.

Exemplo 2.4.5. Seja a aplicação quadrática $Q(x) = 2x^2 - 1$, dado $\epsilon > 0$ escolhemos um $0 < x < \frac{\epsilon}{2}$. Temos que $Q(x) = Q(-x)$ e separação máxima das órbitas de x e $-x$ é dada por $sup_{n\geq 0}|Q^n(x) - Q^n(-x)| = 2x < \epsilon$, logo não é expansiva, embora tenha sensibilidade nas condições iniciais.

A expansividade também é uma propriedade topológica, ou seja, é preservada por conjugações

Proposição 2.4.6. *X, Y são espaços métricos compactos. Suponha que os sistemas $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ são conjugados por um homeomorfismo $h : X \to Y$. Então g é expansivo se, e somente, se f é expansivo.*

Proof. Se g é expansiva, existe um $\delta > 0$ tal que dados $a, b \in Y$ existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $d(g^k(a), g^k(b)) \geq \delta$. Por compacidade de X e Y tanto h como h^{-1} são uniformemente contínuos, logo dado δ existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$d(p,q) < \epsilon \implies d(h(p), h(q)) < \delta$$

que é equivalente a

$$d(h(p), h(q)) \geq \delta \implies d(p,q) \geq \epsilon$$

escrevendo $h(q) = z$ e $h(p) = w$, também temos o mesmo para h^{-1}

$$d(z,w) < \epsilon \implies d(h^{-1}(z), h^{-1}(w)) < \delta$$

$$d(h^{-1}(z), h^{-1}(w)) \geq \delta \implies d(z,w) \geq \epsilon$$

Agora provaremos a expansividade de f, sejam $p, q \in X$ tais que $h(p) = a$ e $h(q) = b$, pela expansividade de g temos que $d(g^k(a), g^k(b)) \geq \delta$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ pela continuidade uniforme de h^{-1}, segue que $d(h^{-1}(g^k(a)), h^{-1}(g^k(b))) \geq \epsilon$, sendo que $h \circ f = g \circ h$ implica em

$$d(f^k(h^{-1}(a)), f^k(h^{-1}(b))) = d(f^k(p), f^k(q)) \geq \epsilon$$

Assim como p e q foram tomados arbitrários f sobre X é também expansivo, com constante de expansividade ϵ. A recíproca segue-se da mesma forma. □

Exemplo 2.4.7. Seja $\sum = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ o espaço das sequências de 0 e 1 com topologia discreta em $\{0,1\}$ e dotamos $\sum$ com a topologia produto, esse espaço é compacto com a métrica

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}.$$

Definimos a *aplicação deslocamento* $\sigma : \sum \to \sum$ dada por

$$\sigma(\{x_n\}) = \{y_n\} \text{ onde } y_n = x_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Mostraremos que a aplicação σ é expansiva. De fato se $\{x_n\} \neq \{y_n\}$, logo deve existir um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x_m \neq y_m$ como $\sigma^{-1}(\{x_n\}) = \{y_n\}$, onde cada $y_n = x_{n-1}$ dessa forma pelo m considerado acima temos $|x_m - y_m| = 1$ que implica

$$d(\sigma^{-m}(x_n), \sigma^{-m}(y_n)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n-m|}} \geq |x_n - y_n| = 1.$$

Portanto qualquer que seja $\alpha < 1$ é constante de expansividade do Shift de Bernoulli.

O exemplo seguinte é devido a Stephen Smale que contribuiu muito para o desenvolvimento dos sistemas dinâmicos. Inicialmente propôs a conjectura de que os sistemas dinâmicos tendiam, quase sempre a um comportamento previsível, o que naquele tempo se entendia por ausência de caos, mas foi logo dado um contra-exemplo para sua conjectura. Só se deu por convencido quando criou a *ferradura* uma transformação topológica que fornece uma boa estrutura para compreender-se as propriedades caóticas dos sistemas dinâmicos. Vejamos uma construção simples da ferradura de Smale.

Exemplo 2.4.8. Seja uma região $R \subseteq \mathbb{R}^2$ formada por $A \cup Q \cup B$ onde A e B São semicírculos e Q um quadrado unitário. $f : R \to \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo sobre sua imagem, sendo essa obtida a partir da contração uniforme de Q no eixo horizontal com um fator $\lambda < \frac{1}{2}$, em seguida expande uniformemente com fator $\frac{1}{\lambda}$ e por último faz uma dobra no meio de 180°.

Vemos que $f(B) \subset B$ e usando o teorema do ponto fixo de Brouwer, existe um ponto fixo $p \in B$. Considerando

$$H_0 = f(Q_1) \cap Q H_1 = f(Q_3) \cap Q$$

retângulos horizontais de comprimento 1 e altura λ tais que $f(Q) \cap Q = H_0 \cup H_1$. Se fizermos a mesma ação para $f(Q)$ temos que

$$f^2(Q) \cap f(Q) \cap Q = f^2(Q) \cap (H_0 \cup H_1) = f^2(Q) \cap Q$$

que é a união de quatro retângulos horizontais de comprimento 1 altura λ^2 que podem ser expresso por H_{ij} com $i, j \in \{0, 1\}$. Fazendo a mesma ação para um número finito de vezes, tomamos uma sequência $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$ em $\sum$ expressamos um retângulo horizontal resultado da ação feita, sobre Q por

$$H_{x_0 x_1 ... x_n} = H_{x_0} \cap f(H_{x_1}) \cap ... \cap f^n(H_{x_n})$$

de comprimento 1 e altura λ^n, dessa forma não é difícil ver que o conjunto $f^n(Q) \cap Q$ que é a união de 2^n retângulos como o descrito acima. Para infinitas ações tomamos uma sequência infinita $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ em $\sum$ definimos um retângulo da imagem sobre Q por

$$H_x^+ = \cap_{i=0}^{+\infty} f^i(H_{x_i})$$

e a imagem toda sobre Q

$$\Lambda^+ = \cap_{i=0}^{+\infty} f^i(Q) = \cup_x H_x^+$$

O conjunto descrito pode ser visto com o produto $I_x \times C^+$ (um intervalo unitário com um conjunto de Cantor vertical). Além do mais o conjunto descrito é invariante $(f(\Lambda^+)) = \Lambda^+$.

Analisaremos agora a ação de f^{-1}. Não é difícil ver que

$$f^{-1}(H_0) = f^{-1}(Q) \cap Q_1 \text{ e } f^{-1}(H_1) = f^{-1}(Q) \cap Q_2$$

são retângulos verticais de comprimento λ^{-1} e altura 1, assim para qualquer sequência $x = (x_{-n}, x_{-n+1}, ..., x_{-1})$ temos o retângulo vertical

$$H_x^- = \cap_{i=0}^{+\infty} f^{-i}(H_{x_i})$$

de comprimento λ^{-n} e altura 1. Definimos então o conjunto

$$\Lambda^- = \cap_{i=0}^{+\infty} f^{-i}(Q) = \cup_x H_x^-$$

que é o resultado do produto $C^- \times I_y$ (um conjunto de Cantor horizontal com um intervalo unitário vertical). A ferradura de Smale é o conjunto $\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$ que é produto de conjuntos de Cantor C^+ e C^-. Além do mais a ferradura é um conjunto fechado e f-invariante.

Analisando a dinâmica da aplicação ferradura, o ponto p é um poço, ou seja, se

$$z \in A \cup Q_2 \cup B$$

temos que $f^n(z) \to p$, quando $n \to +\infty$ e usando o mesmo argumento que foi usado para garantir a existência de p , podemos assegurar que existem outros dois postos

fixos $q \in Q_1$ e $s \in Q_3$ são hiperbólicos sela. Se tomarmos como referência p, os pontos que estão na sua horizontal serão empurrados para p por f^n quando $n \to +\infty$ e se tiverem na vertical serão empurados por f^{-n}. Similarmente podemos ter os mesmos resultados para s.
As variedades estável e instável de p se intersectam no ponto homoclínico r.

Com a ferradura de Smale construída o próximo resultado garante que a ferradura possui as mesmas propriedades topológicas da aplicação Deslocamento de Bernoulli. Primeiramente definimos a aplicação $h : \Lambda \to \sum$ dada por

$$h(z) = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...)$$

onde $x_j = n$ se, e somente se, $f^n(z) \in H(n)$, pensemos em h como a aplicação que fornece o itinerário de um ponto, ou seja, o destino dos seus iterados.

Teorema 2.4.9. *Seja $\sigma : \sum \to \sum$ a aplicação deslocamento e a função ferradura $f|_\Lambda$. A função $h : \Lambda \to \sum$ é uma conjugação topológica entre $f|_\Lambda$ e σ.*

Proof. Tomando $z \in \Lambda$ e aplicando h temos $x = h(z) \in \sum$ e para o mesmo z aplicamos $h \circ f$, obtemos $y = h(f(z)) \in \sum$. Pela definição de h sabemos que $f^{j+1}(z) \in H_{x_{j+1}}$, logo $f^{j+1}(z) = f^j(f(z))$ e sendo que o itinerário de q é dado por y temos $f^j(f(z)) \in H_{y_j}$. Portanto $x_{j+1} = y_j$ que implica em $\sigma(x) = y$, ou seja, $(\sigma \circ h)(z) = (h \circ f)(z)$.
Seja $x = h(z)$ e para um n_0 fixo, consideramos como uma vizinhança sua o conjunto

$$N = \{t : t_j = s_j, \text{ para } j \in \{-n_0, ..., n_0\}\ \}.$$

Usando a continuidade de f, existe um $\delta > 0$ tal que para $w \in \Lambda$ se $|w - z| \leq \delta$, então $f^j(w)$ está proximo o quanto se quer de $f^j(z) \in H_{s_j}$ (vale lembra que a sequência s é o itinerário de q), logo necessariamente $f^j(w) \in H_{s_j}$ onde $j \in \{-n_0, ..., n_0\}$. Portanto se $t = h(w)$ e $|w - z| \leq \delta$ temos que $t \in N$, dessa forma h é contínua.
Dados $z, w \in \Lambda$ tais que $h(z) = h(w) = x$, temos que $f^{-1}(z), f^{-1}(w) \in H_{x_j}$ e z e w estão em $f(H_{x_{-j}})$, para qualquer j o que implica em $z, w \in \cap_{j=1}^{+\infty} f^j(H_{x_{-j}})$, então estão em uma mesma reta horizontal. Usando argumentos semelhantes temos que

$$z, w \in \cap_{j=-\infty}^{0} f^j(H_{x_{-j}}).$$

Então estão em um mesmo segmento de reta vertical e como o conjunto

$$\cap_{j=-\infty}^{+\infty} f^j(H_{s_{-j}}).$$

é singular, concluímos que $z = w$.
Seja $x = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...)$ um elemento em $\sum$, é pelo construção da ferradura, não é difícil ver que para cada $k \in \mathbb{N}$ temos um quadrado

$$H_x = H_{x_{-k}...x_{-1},x_0,x_1...x_k}$$

e tais quadrados formam uma sequência encaixada de quadrados de lados λ^k o que nos permite assegurar a existência de um ponto $z \in \Lambda$ tal que

$$z \in \cap_{k=1}^{+\infty} H_{x_{-k}...,x_{-1},x_0,x_1,...x_k}$$

portanto $h(z) = x$. $\square$

Com o resultado acima temos que a função deslocamento σ é um modelo para a restrição de f sobre Λ e como $\sigma : \sum \to \sum$ é uma aplicação caótica temos o mesmo de $f|_\Lambda$. Além do mais, Smale provou que mesmo sobre pequenas perturbações a ferradura persiste, logo como provamos que a aplicação deslocamento σ é expansiva e sendo essa propriedade topológica, a ferradura também é, assim ela persistência da ferradura temos que essa expansividade é robusta na topologia C^r, ou seja, esse é um exemplo de conjunto com expansividade robusta e que é hiperbólico.

Exemplo 2.4.10. Um exemplo significativos de aplicações expansivas são as restrições aos conjuntos hiperbólicos. Se $\Lambda \subset M$ é um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo f, logo temos a decomposição $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$, assim sendo ϵ o do Teorema da Variedade Estável e $W^s_\epsilon(x)$ e $W^u_\epsilon(x)$ são discos tangentes a $E^s(x)$ e $E^u(x)$ respectivamente. Assim $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(x) = \{x\}$. Dado $y \in \Lambda$, se para todo $n \geq 0$ tivermos

$$d(f^n(y), f^n(x)) \leq \epsilon \implies y \in W^s_\epsilon(x)$$

$$d(f^{-n}(y), d(f^{-n}(x)) \leq \epsilon \implies y \in W^u_\epsilon(x).$$

Então $y \in W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(x)$ e necessariamente $y = x$. Portanto $f|_\Lambda$ é expansivo.

Capítulo 3

RESULTADOS PRELIMINARES

3.1 Argumentos Genéricos

O espaço $Diff^r(M)$ com a topologia C^r é um espaço métrico completo, portanto um espaço de Baire (espaço em que toda interseção enumerável de conjuntos abertos e densos é densa. Da mesma forma, toda união enumerável de conjuntos fechados de interior vazio tem interior vazio). Essas interseções enumeráveis são chamadas de conjuntos residuais, e essas uniões enumeráveis são chamadas de conjuntos magros. A Dinâmica genérica mostra resultados que valem em residuais de $Diff^r(M)$.
Considere M uma variedade compacta, conexa e sem bordo. Seja o espaço $Diff^r(M)$ munido com a topologia C^r, ou seja, de de forma grosseira, dizer que $f^n \to f$ convergem uniformemente na topologia C^r significa dizer que

$$f^n \to f \text{ e } D^i f^n \to D^i f$$

convergem uniformemente, onde $i = 1, 2, ..., r$.

Definição 3.1.1. Dado um espaço topológico X, um subconjunto desse espaço é dito *residual* se é interseção enumerável de abertos densos. Dizemos que um *espaço é de Baire* se seus residuais são densos.

O teorema abaixo é fundamental para a teoria de dinâmica genérica.

Teorema 3.1.2. *O espaço $Diff^r(M)$ é de Baire.*

Com este resultado faz sentido a expressão *quase todos os sistemas de $Diff^r(M)$ cumprem a propriedade P*.

Definição 3.1.3. Diremos que P é uma *propriedade genérica* para os difeomorfismos de $Diff^r(M)$ se existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset Diff^r(M)$ tal que se $f \in \mathcal{R}$, então f cumpre a propriedade P.

O importante é que todas as propriedades genéricas se realizam em um conjunto denso de $Diff^r(M)$. Não somente isto, mas qualquer quantidade enumerável de propriedades deste tipo se realiza simultaneamente em um conjunto denso.
Agora nós definiremos o conjunto residual $\mathcal{R}$ citado no Teorema Principal deste trabalho, caracterizado por algumas propriedades genéricas, para cada $f \in Diff^1(M)$ vale

- f **é Kupka-Smale**

  Definição 3.1.4. Um difeomorfismo é dito Kupka-Smale se todos os seus pontos periódicos são hiperbólicos e as variedade estáveis e instáveis desses pontos se intersectam transversalmente (para qualquer ponto da interseção). O próximo resultado é devido a Smale e pode ser encontrado em [19]

  Teorema 3.1.5. *(Kupka-Smale) O conjunto dos difeomorfismos Kupka-Smale de classe C^r é residual em $Diff^r(M)$ para todo $r \geq 1$. Em particular é denso.*

  O seguinte teorema clássico é devido a Charles Pugh e é uma consequência direta do famoso C^1 Closing Lemma que foi provado pelo mesmo em [13]

  Teorema 3.1.6. *(Teorema da densidade de Pugh) É residual o conjunto dos difeomorfismos em $f \in Diff^1(M)$ que satisfazem*

  $$\Omega(f) = \overline{Per(f)}$$

  Seja R(f) o conjunto recorrente por cadeia de f temos que $\Omega(f) \subset R(f)$. O Teorema da densidade de Pugh pode ser obtido como corolário do seguinte teorema que é resultado do C^1-Closing Lemma para pseudo órbitas e pode ser encontrado em [1]

  Teorema 3.1.7. *(Bonatti-Crovisier) É residual o conjunto dos difeomorfismos em $f \in Diff^1(M)$ que satisfazem*

  $$R(f) = \overline{Per(f)}$$

  Sabemos que os difeomorfismos Kupka-Smale são residuais em $Diff^r(M)$ para $r \geq 1$, com isso temos que são residuais os difeomorfismos cujos pontos periódicos são hiperbólicos, pelo último teorema acima temos que são residuais em $Diff^1(M)$ os difeomorfismos tais que seus pontos periódicos são densos em $R(f)$, em particular em $\Omega(f)$ e desses dois resultados temos que existe um residual $\mathcal{R}_1$ em $Diff^1(M)$ tal que se $f \in \mathcal{R}_1$ os pontos periódicos hiperbólicos de f são densos em $R(f)$.

- **Classes homoclínicas coincidem ou são disjuntas**
  Como uma consequência do C^1-Connecting Lemma provado por Hayashi em [5] temos um resultado dado por Carballo-Morales-Pacífico em [4] que mostra que genericamente classes homoclínicas ou são iguais ou são disjuntas.

  Teorema 3.1.8. *(Carballo-Morales-Pacífico) Existe um conjunto residual $\mathcal{R}_2$ no espaço $Diff^1(M)$, tal que se $f \in \mathcal{R}_2$ então classes homoclínicas ou são iguais ou são disjuntas.*

- **Classes homoclínicas variam continuamente**
  Os pontos periódicos hiperbólicos persistem por pequenas perturbações e ainda variam continuamente.

  Teorema 3.1.9. *Seja $f : M \to M$ e p um ponto n-periódico hiperbólico de f. Então existe uma vizinhança U_p de p e uma vizinhança V_f de f em $Diff^1(M)$ na topologia C^1 e uma função contínua $\phi : V_f \to U_p$ definida por $\phi(g) = p_g$ onde o ponto p_g é o único n-periódico de g em U_p.*

  Proof. Usando cartas locais podemos supor $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $p = 0 = f(0)$. Assim definimos uma vizinhança de f a $\widetilde{V_f}$ e $\Gamma : \overline{V}_f \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $\Gamma(g, x) = g(x) - x$, logo $\Gamma(f, p) = 0$. Podemos escrever $\Gamma(g, x) = g(x) - Id(x)$, assim temos que $\partial_2\Gamma(g, x) = Dg_x - Id$ tomando $g = f$ e $x = p = 0$, implica que

  $$\partial_2\Gamma(f, p) = Df_p - Id \neq 0$$

  pois $Df_p - Id$ é sobrejetiva e caso exista um v tal que $(Df_p - Id)v = 0$ como Df_p não tem autovalores com módulo igual a 1 devemos ter $v = 0$. Concluímos que $Df_p - Id$ é um isomorfismo. Nessas condições usando o Teorema da Função Implícita existem vizinhanças U_p de p, V_f de f e uma função contínua tais que $\phi : V_f \to U_p$ tal que $\{(g, x) \in V_f \times \mathbb{R}^n; \Gamma(g, x) = 0\} = \{(g, \phi(g)) : g \in V_f\}$, ou seja, para cada g existe um único ponto $p_g = \phi(g)$. □

A demonstração foi feita para p ponto fixo de f, mas vale para periódicos já que se p é n-periódico de f, é fixo de f^n, além do mais, se $g \to f$ na topologia C^1 então $p_g \to p$ em M. Dizemos assim que P_g é *continuação analítica* de p.
Em seu trabalho [9], Mañé provou que sob certas hipóteses, se f tem um ponto *quase homoclínico* (são os pontos da interseção do fecho $W^s(p)$ com o fecho de $W^u(p)$ diferentes de p) associado a um hiperbólico p, existe um g arbitrariamente próximo de f na topologia C^1 tal que g admite um ponto homoclínico associado a p_g. O problema era que os argumentos da prova não deixavam claro a proximidade desses pontos. Se fosse garantida a aproximação teríamos que genericamente o conjunto dos pontos quase homoclínico é exatamente o fecho dos pontos homoclínicos, ou seja a classe homoclínica. Isto sugere a propriedade de continuação, pois em particular um ponto homoclínico é quase homoclínico se $g \to f$ para q_f homoclínico transversal, existe um q_g também homoclínico transversal tal que $q_g \to q_f$. Felizmente o problema de Mañé foi resolvido na demonstração do seguinte resultado que também utiliza o C^1-Connecting Lemma.

Lema 3.1.10. *Existe um residual $\mathcal{R}$ em $Diff^1(M)$ tal que se $f \in \mathcal{R}$, temos que para todo ponto periódico hiperbólico p de f temos que*

$$H(p) = \overline{W^s(p)} \cap \overline{W^u(p)}.$$

. Resolve o que queremos, pois tomando um $f \in \mathcal{R}_1$, sabe-se que o conjunto $P_n(f)$ é finito e supomos que seja $\{p_0, p_1, ..., p_k\}$, logo existe um vizinhança $U(f,n)$ na topologia C^1, tal que se $g \in U(f,n)$ então $\sharp P_n(g) = \sharp P_n(f)$. Definimos a aplicação

$$\phi_i(g) = H(p_i(g), g)$$

onde $i \in \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ e afirmamos que ϕ é semicontínua inferiormente em $U(f,n)$. De fato se tivermos $h_k \to h$ e p for um ponto periódico hiperbólico de h, então existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ temos que $p_k \to p$, onde os p_k são continuações analíticas de p. Além do mais, $z \in W^s_h(p) \pitchfork W^u_h(p)$, existe um k_1 tal que para todo $k \geq k_0, k_1$ temos que as variedades associadas aos p_k também se intersectam em pontos z_k e $z_k \to z$. Agora usando o seguinte resultado de topologia

Teorema 3.1.11. *Se $\phi : Y \to F(X)$ é semicontínua inferiormente (onde Y um espaço métrico e $F(X)$ é uma família de fechados não vazios de um espaço métrico X). Então é contínua em algum residual de Y.*

Portanto temos o que desejavamos

Teorema 3.1.12. *Existe um conjunto residual $\mathcal{R}_3$ em $Diff^1(M)$, tal que se $f \in \mathcal{R}_3$ temos que as classes homoclínicas de f dependem continuamente das órbitas periódicas de f na topologia de Hausdorff.*

- **Classe de cadeia recorrente com ponto periódico é classe homoclínica**
  Usando o C^1-Connecting Lemma e suas variações podemos mostrar que para difeomorfismos genéricos, a classe homoclínica de qualquer ponto periódico é a sua classe de recorrência por cadeia, ou equivalente qualquer classe de recorrência contendo um ponto periódico coincide com a classe homoclínica associada ao ponto periódico. Existem classes de recorrência por cadeia que não contém pontos periódicos, mas usando o Connecting Lemma pode-se provar que genericamente elas são limites de Haunsdorff de pontos periódicos. Sobre isto temos o seguinte resultado também encontrado em [1].

  Teorema 3.1.13. *Existe um residual $\mathcal{R}_4$ em $Diff^1(M)$, toda classe homoclínica e uma classe de cadeia recorrente. Equivalentemente, toda classe de cadeia recorrente contendo um ponto periódico p é a classe homoclínica associada a esse ponto.*

Como $Diff^1(M)$ é um espaço de Baire, obtemos o residual que desejávamos por

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4$$

3.2 Decomposição Dominada da Classe Homoclínica

Mostraremos que a classe homoclínica tem decomposição dominada usando o argumentos parecidos com os usados em [8]. Mostraremos que o ângulo entre os subespaços tangentes de pontos em um subconjunto denso em $H(p)$ está longe de zero, geralmente esse subconjunto é dos pontos periódicos, mas faremos para o conjunto dos pontos homoclínicos de $H(p)$ e os candidatos a subespaços da decomposição são $T_xW^s(p)$

e $T_xW^u(p)$. Para garantirmos esse controle provaremos que não pode haver tangências entre variedades estáveis e instáveis de pontos homoclínicos, pois se houvesse poderíamos cria uma interseção plana e infinitas interseções transversais entre as variedades estáveis e instáveis locais de um ponto homoclínico, logo esse comportamento contadiz a expansividade C^1-robusta de f. Conseguimos a dominação repetindo os passos dados em [8]. Os resultados obtidos são válidos também para todo difeomorfismo g em uma vizinhança de f na topologia C^1.
Iniciaremos com o seguinte lema sobre linearização de subvariedades do $\mathbb{R}^n$ na vizinhança de um ponto $x \in W$ através de perturbações arbitrariamente pequenas.

Lema 3.2.1. *Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade tal que $0 \in W$. Então dado um $\epsilon > 0$ existe um difeomorfismo $\varphi = \varphi_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e um ϵ_0 arbitrariamente pequeno tal que*

- *Globalmente, φ está ϵ-próximo da identidade, na topologia C^1.*
- *Fora da bola $B(0, \epsilon_0)$, temos que φ coincide com a identidade*
- *Para alguma $\delta \in (0, \epsilon_0)$ temos que $\varphi(W \cap B(0, \delta)) \subset T_0W$*

Proof. Ver em [15] Lema 2. □

O Próximo lema será muito usado neste trabalho, pois é um instrumento importantíssimo para perturbações na topologia C^1, pois garante que se perturbamos de forma linear a derivada de um difeomorfismo em um conjunto finito de pontos, podemos encontrar um difeomorfismo próximo do original tal que a sua derivada realiza a perturbação no conjunto de pontos.

Lema 3.2.2. *(Lema de Frank's) Sejam $f \in Diff^1(M)$ e $\mathcal{U}$ uma vizinhança de f na topologia C^1. Então existem $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ uma vizinhança na topologia C^1 de f e $\epsilon > 0$ com a propriedade: se $g \in \mathcal{V}$ e $\{x_1, ..., x_n\}$ é um conjunto finito de pontos, tais que $L_i : T_{x_i} \to T_{f(x_i)}$ satisfazendo $||L_i - Df(x_i)|| < \epsilon$ e U uma vizinhança do conjunto de pontos, então existe $\widetilde{g} \in \mathcal{U}$ e $\widetilde{g} = g$ em $\{x_1, ..., x_n\} \cup (M - U)$ de tal forma que $D\widetilde{g}(x_i) = L_i$.*

Proof. Ver em [8]. □

O próximo resultado nos diz que as interseções na classe homoclínica são necessariamente transversais.

Lema 3.2.3. *Considere p um ponto fixo hiperbólico de f com índice k e $H_T(p)$, sua classe homoclínica transversal tal que f sobre $H_T(p)$ tem expansividade C^1-robusta. Se tivermos $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$ então $W^s(p)$ intersecta $W^u(p)$ transversalmente em x.*

Proof. As variedades $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são hiperplanos k e $(d-k)$ dimensionais, imersos em M. Se $W^s(p) \cap W^u(p)$ em x não é transversal, não temos $T_xW^s(p) \oplus T_xW^u(p) = T_xM$, ou seja, não há a soma direta, logo existe $0 \neq u \in T_xW^s(p) + T_xW^u(p)$. Usando o Lema de Frank, podemos provar que o subespaço $< u >$ gerado por u, é o único comum a $T_xW^s(p)$ e $T_xW^u(p)$ e como

$$T_xW^s(p) + T_xW^u(p) = < T_xW^s(p) \cup T_xW^u(p) >$$

temos que

$$\begin{aligned} dim(T_xW^s(p) + T_xW^u(p)) &= dim(T_xW^s(p)) + dim(T_xW^u(p)) \\ &- dim(T_xW^s(p) \cap T_xW^u(p)) \\ &= k + (d-k) - 1 = d - 1. \end{aligned}$$

Além do mais $k \geq d - k$.

Escolhemos um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $B(x,\epsilon)$ esteja inteiramente em uma carta local e $W^s_\epsilon(x)$ contida no domínio fundamental de $W^s(p)$ e além do mais e também tenhamos $f^n(W^s(x)_\epsilon) \cap B(x,\epsilon) = \emptyset$ para todo $n \geq 1$ (isto decorre do fato de $x \in W^s(p) \cap W^u(p)$). Usando coordenadas locais, identificamos $B(x,\epsilon)$ com uma bola aberta do $\mathbb{R}^n$ centrada na origem, dessa forma usando o Lema 3.2.1

$$W = W^s_\epsilon(x) \Rightarrow h_s \Rightarrow h_s(W \cap B(x,\delta)) \supset B_s(0) \text{ em } T_xW^s_\epsilon(x)$$

$$W = W^u_\epsilon(x) \Rightarrow h_u \Rightarrow h_u(W \cap B(x,\delta)) \supset B_u(0) \text{ em } T_xW^u_\epsilon(x).$$

Definimos então $g : M \to M$ como

$$g(y) = \begin{cases} h_u \circ f \circ h_s^{-1} & \text{se} \quad y \in B(x,\epsilon) \\ f(y) & \text{se} \quad y \notin B(x,\epsilon) \end{cases}$$

Como h_s e h_u estão definidas em $\mathbb{R}^d$ e identificamos $B(x,\epsilon)$ com um aberto no mesmo e g está C^1-próximo de f.

Se $y \in B_s$, então para todo $n \geq 1$, $g^n(y) = f^n(h_s^{-1}(y)) \to p$ quando $n \to \infty$, pois $h_s^{-1}(y) \in W^s_\epsilon(x)$ e $f^n(x) \to p$. Resultado similar temos para B_u. Resumindo, a

interseção $W^s(p,g) \cap W^u(p,g)$ em coordenadas locais contém um segmento
$I = \{su : -\delta \leq s \leq \delta\}$, onde

$$I =< u > \cap (B_s(0) \cup B_u(0))$$

Seja ω um vetor unitário em T_xM, sendo que $\omega \notin T_xW^s(p,g) + T_xW^u(p,g)$. Definimos a funcão C^∞-Bump $b(s) \in [0,\epsilon']$, tal que $b(0) = \epsilon'$ e suas derivadas de todas as ordem se anulam na origem com suporte contido em $[-\epsilon',\epsilon']$. No plano gerado por 0 e os vetores ω e u, nós consideramos a função $\phi : \gamma \to \mathbb{R}$ com o gráfico no mesmo, definida por

$$\phi(s) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} & s = 0 \\ b(s)s^3 sen\frac{1}{s} \quad \text{se} & s \neq 0 \end{cases}$$

Mudamos as coordenadas da carta local $Y = (S,U,s,t)$, onde identificamos

$$(S,0,s,0) \sim B_s$$

$$(0,U,s,0) \sim B_u$$

e seja $h : M \to M$ dada por

$$(S,U,s,t) \longmapsto (S,U,s,(t+\phi(s))B(Y))$$

onde $h = id$ fora de $B(x,\epsilon)$ e B é a função Bump da demosntração do lema anterior. Definindo $\widetilde{g} : M \to M$ por $\widetilde{g} = h \circ g$, e não é difícil ver que $B_s \subset W^s(p,\widetilde{g})$ e $(0,U,s,l(s)) \subset W^u(p,\widetilde{g})$. Além do mais, não é difícil mostrar que $W^s(p,\widetilde{g})$ e $W^u(p,\widetilde{g})$ se intersectam transversalmente nos pontos $x_n = (0,0,\frac{1}{n\pi},\phi(\frac{1}{n\pi}))$, para n suficientemente grande. Assim $x \in H(p,\widetilde{g})$, embora a interseção não seja transversal.
Observe que na construção, podemos tomar $\widetilde{g}$ e f suficientemente próximas.
Agora para finalizar provaremos que $\widetilde{g}|_{H(p,\widetilde{g})}$ não é α-expansiva para todo $\alpha > 0$. Para todo $\alpha > 0$, existe um $N(\alpha) > 0$ tal que

$$f^N(W^s_\epsilon(x)) \subset W^s_{\frac{\alpha}{4}}(p)$$

$$f^{-N}(W^u_\epsilon(x)) \subset W^u_{\frac{\alpha}{4}}(p).$$

Como $\widetilde{g}$ está suficientemente próxima de f e tal funções coincidem em uma pequena vizinhança de x e também pela proximidade podemos conciderar o comportamento que f citado acima também para $\widetilde{g}$. Mas $x_n \to x$, então nós podemos achar x_n próximo de x tal que

$$d(\widetilde{g}^j(x), \widetilde{g}^j(x_n)) < \alpha$$

para todo $j \in [-N, N]$. Para todo $j \geq N$ ou $j \leq -N$ também temos

$$d(\widetilde{g}^j(x), \widetilde{g}^j(x_n)) \leq d(\widetilde{g}^j(x), p) + d(\widetilde{g}^j(x_n), p) < \alpha.$$

Então $\widetilde{g}$ não é α-expansiva para todo $\alpha > 0$, contradizendo a expansividade C^1-robusta de f. □

Como consequência do Lema 3.2.3 temos que *p está C^1-longe de tangências*, ou seja, todo difeomorfismo g que está C^1-próximo de f não tem tangências homoclínicas associadas a p_g (continuação de p). Podemos ver tal resultado como $H(p) = H_T(p)$. Além do mais sendo U_f a vizinhança de expansividade de f, então o resultado do Lema 3.2.3 vale para todo $g \in U_f$.
Nosso objetivo é provar que a classe homoclínica tem decomposição dominada e uma condição suficiente para obtemos esse resultado é provar que os ângulos dos subespaços da decomposição natural que supomos estão afastados de zero, para isso vejamos agora a definição de ângulo entre esses subespaços.

Definição 3.2.4. Sejam E e F subespaços do $\mathbb{R}^n$ tais que $E \oplus F = \mathbb{R}^n$, logo $dim(F) = dim(E^{\perp})$ e F é o gráfico da aplicação linear $L : E \to E^{\perp}$ definida como: se $v \in E^{\perp}$ então existe um único par de vetores $u \in E$ e $w \in F$, tal que $v + u = w$, logo $L(v) = u$ é linear e o $Graf(L) = F$. A partir de L definimos o ângulo entre os subespaços E e F como $\angle(E, F) = \| L \|^{-1}$. Em particular dizemos que $\angle(E, E^{\perp}) = +\infty$

Vale ressaltar que se $dim(E) = dim(E^{\perp})$, podemos ter $L : E^{\perp} \to E$, logo $\angle(E, E^{\perp}) = ||L||$, mas se E e $E^{\perp}$ tiverem dimensões diferentes, isso não faz sentido.
Para enterdermos melhor a definição acima vejamos o seguiente exemplo

Exemplo 3.2.5. Supondo em dimensão 2, seja a matriz diferencial

$$Df_x^n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ K & \gamma \end{bmatrix}$$

Com autovetores $(0, 1)$ e $(1, \frac{K}{\gamma - \lambda})$ associados aos autovalores λ e γ respectivamente e tais que

$$0 < |\lambda| < 1 < |\gamma|$$

para determinar o ângulo entre os subespaços $E =< (0,1) >$ e $F =< (1, \frac{K}{\gamma-\lambda}) >$ utilizamos a transformação $L : E \to E^{\perp} =< (1,0) >$, a qual definimos por

$$L((0,1)) = \frac{\gamma-\lambda}{K}(1,0)$$

que faz sentido, pois $z \in F$, temos que

$$\begin{aligned} z &= C(1, \frac{K}{\gamma-\lambda}) \\ &= C((0, \frac{K}{\gamma-\lambda}) + (1,0)) \\ &= \frac{\gamma-\lambda}{K}((0, \frac{K}{\gamma-\lambda}) + (1,0)) \\ &= (0,1) + L((0,1)) \end{aligned}$$

para $C = \frac{\gamma-\lambda}{K}$ pela observação feita acima temos

$$\angle(E,F) = |L| = \frac{\gamma-\lambda}{K}.$$

Proposição 3.2.6. *Seja $f \in Diff^1(M)$ e $H(p)$ com expansividade C^1-robusta em U_f. Então existe um $\gamma > 0$ e $\widetilde{U_f} \subset U_f$ tal que para quaisquer $g \in \widetilde{U_f}$ e $x \in H(p_g, g)$, temos que $\angle(E^s(x,g), E^u(x,g)) > \gamma$.*

Proof. Seja U_f uma vizinhança de f na topologia C^1, a qual todos os difeomorfismos são expansivos. Tomamos então $U_0 \subset U_f$ do lema de Frank e do mesmo temos a existência de uma $\delta > 0$ que nos será útil posteriormente.
Assumimos que $C \geq sup\{||D_x g||; g \in U_0\}$, para algum $C > 0$.
A argumento da demonstração será por contradição. Portanto supomos que em U_0 temos que dados λ_n, existem $g_n \in U_0$ e $x_n \in H(p_{g_n}, g_n)$ tais que

$$\angle(E^s(x_n, gn), E^u(x_n, g_n)) \leq \lambda_n$$

Se escolhessemos um $\widetilde{\lambda}_n \leq \lambda_n$ para termos o desejado para g_n e todo $x_n \in H(x_n, g_n)$, mas haveria um $\widetilde{g}_n$ em U_0 e $\widetilde{x}_n \in H(\widetilde{x}_n, \widetilde{g}_n)$ tais que

$$\angle(E^s(\widetilde{x}_n, \widetilde{g}n), E^u(x_n, g_n)) \leq \widetilde{\lambda}_n.$$

Por isso temos que

$$\angle(E^s(x_n, gn), E^u(x_n, g_n)) \leq \frac{1}{n}$$

assim consideramos um certo n tal que tenhamos $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{C}$ e por simplicidade escrevemos $x = x_n$ e $g = g_n$, logo a expressão acima fica

$$\angle(E^s(x,g), E^u(x,g)) \leq \frac{1}{n}$$

Usando a definição de ângulo entre subespaços do $\mathbb{R}^d$ dada anteriormente temos que, existem $v \in (E^s)^\perp$ e um $w \in E^s$ tais que $v + w \in E^u$, com $||w|| = 1$ e $||v|| < \frac{1}{n}$.
Definindo

$$T : T_xM \to T_xM$$

por $T|_{(E^s)^\perp} = 0$ e caso contrário $T(w) = -v$. Dessa forma temos que $||T|| < \frac{\delta}{C}$, pois

$$||T|| = sup\{|T(w)| = |-v|\} < \frac{1}{n} < \frac{\delta}{C}.$$

Agora montaremos a transformação linear que estará de acordo com as hipóteses do lema de Frank

$$L : T_{g^{-1}(x)}M \to T_xM$$

definida por $L = (Id + T) \circ D_{g^{-1}(x)}g$, e além disso satisfaz $||L - D_{g^{-1}(x)}g|| < \delta$, pois

$$\begin{aligned}
||L - D_{g^{-1}(x)}g|| &= ||(Id + T) \circ D_{g^{-1}(x)}g - D_{g^{-1}(x)}g|| \\
&= ||T \circ D_{g^{-1}(x)}g|| \\
&\leq ||T||.||D_{g^{-1}(x)}g|| \\
&< \frac{\delta}{C}.C = \delta
\end{aligned}$$

e afirmamos que $w \in L(E^u_{g^{-1}(x)})$. De fato

$$\begin{aligned}
L(E^u_{g^{-1}(x)}) &= (I + T) \circ D_{g^{-1}(x)}(E^u_{g^{-1}(x)} \\
&= Dg^{-1}(x)g(E^u_{g^{-1}(x)}) + T(D_{g^{-1}(x)}g(E^u_{g^{-1}(x)}))
\end{aligned}$$

como $v + w \in Dg^{-1}(x)g(E^u_{g^{-1}(x)})$ e $T(w) = -v$, podemos garantir o que afirmamos. Tomando uma vizinhança $U = V_{g^{-1}(x)}$ tal que $\mathcal{O}(x) \cap U = g^{-1}(x)$. Usando o lema de Frank, existe um difeomorfismo $\widetilde{g} \in \mathcal{U}_f$, tal que $\widetilde{g}^j(x) = g^j(x)$, para $j = -1$ e $\widetilde{g} = g$ fora de U. Além do mais, $D_{g^{-1}(x)}\widetilde{g} = L$ para $x \in H(p_g, g)$.
Portanto $x \in H(p_{\widetilde{g}}, \widetilde{g})$ e temos também que

$$w \in L(E^u_{g^{-1}(x)}) \Rightarrow w \in D_{g^{-1}(x)}\widetilde{g}(E^u_{g^{-1}(x)}) \Rightarrow w \in E^u_{(x,g)} \Rightarrow w \in E^u_{(x,\widetilde{g})}.$$

Por definição $w \in E^s(x, g)$ que implica em $w \in E^s(x, \widetilde{g})$, ou seja, $w \in E^s(x, \widetilde{g}) \cap E^u(x, \widetilde{g})$ e sendo $w \neq 0$, implica que a interseção $x \in W^s(p_{\widetilde{g}}) \cap W^u(p_{\widetilde{g}})$ é não transversal, fato que contradiz o resultado anterior. $\square$

Para a próxima demostração utilizaremos o resultado Corolário II.10 encontrado em [8]. Vejamos um caso particular

Lema 3.2.7. *Suponha que $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$ e $L : (E^s)^\perp \to E^s$ é como na definição dada de ângulo. Então para todo $v \in E^s$ e $w \in E^u$ temos que*

$$||w - v|| \geq \frac{\angle(E^s, E^u)}{1 + \angle(E^s, E^u)} ||w||.$$

Proof. Dado $u \in (E^s)^\perp$ de tal forma que $w = u + L(u) \in E^u$. Assim temos que $L(u) - v \in E^s$, sempre quando $v \in E^s$ usando o Teorema de Pitágoras

$$||w - v||^2 = ||u + L(u) - v||^2 = ||u||^2 + ||L(u) - v||^2 \geq ||u||^2$$

logo $||w - v|| \geq ||u||$, mas usando a desigualdade triangular

$$||w|| \leq ||u|| + ||L|| \, ||u|| = ||u||(1 + ||L||)$$

que implica em

$$||w - v|| \geq \frac{\angle(E^s, E^u)}{1 + \angle(E^s, E^u)} ||w||$$

$\square$

Teorema 3.2.8. *Considere p um ponto fixo hiperbólico de f com índice k e $H(p)$, sua classe homoclínica tal que f sobre $H(p)$ tem expansividade C^1-robusta. Então $H(p)$ tem uma decomposição dominada homogênea $E \oplus F$.*

Proof. Na proposição 2.2.15 é dada uma condição suficiente para a existência de decomposição dominada, supomos então que para todo $m \in \mathbb{Z}^+$ existe $x_m \in H(p)$ tal que

$$\| Df^n \mid E^s(x_m) \| \, . \, \| Df^{-n} \mid E^u(f^n(x_m)) \| \geq \frac{1}{2}$$

para todo $1 \leq n \leq m$.

Podemos para um m arbitrariamente escrever $x = x_m$ e tomando $n = m$, existem $w \in E^u(x), v \in E^s(x)$ tais que

$$\frac{\| Df^n(w_m) \|}{\| Df^n(v_m) \|} > \frac{1}{2}$$

A idéia é mostrar que na ausência de decomposição dominada podemos perturbar a f de tal forma a gerar um novo difeomorfismo (Usando o Lema de Frank) suficientemente próximo do original, tal que o ângulo entre os subespaços estável e instável do ponto homoclínico que é o mesmo anterior não é limitado inferiormente e junto com a estimativa dada pelo Lema 3.2.7 teremos uma contradição.
Tomamos $\widetilde{U_f}$ da Proposição 3.2.6. Pelo Lema de Frank existe um $\delta > 0$ que explicitaremos a seguir. Antes disso precisamos definir algumas transformações.
Seja $L : E^u(x) \to E^s(x)$ definida por $L(v) = \delta w$ e $\|L\| = \delta$, logo notamos que essa aplicação *encolhe* os vetores instáveis da decomposição de T_xM. Considere a $P : T_xM \to T_xM$ uma transformação linear definida por $P|E = id$, $P|F = id + L$ que deixa fixa a parte estável e *aumenta* os instáveis com magnitude determinada por L. Portanto dado um $z \in T_xM$ tal que $z = v + w$ com $v \in E^s$ e $w \in E^u$ a transformação P age da seguinte forma

$$P(z) = P(v) + P(w) = v + (1+\delta)w$$

Agora definimos as transformações lineares $T_j : T_{f^j(x)}M \to T_j : T_{f^j(x)}M$, que de grosso modo fazem o papel contário da P, pois estão definidas como $T_j|E^s(f^j(x)) = (1+\delta)id$ e $T_j|E^u(f^j(x)) = id$. Para finalizar definimos as perturbações desejadas como

$$G_0 = T_1 \circ Df_x \circ P$$

$$G_j = T_{j+1} \circ Df_{f^j(x)}$$

Vejamos como atua G_0

$$\begin{aligned} G_0(z) &= (T_1 \circ Df_x \circ P)(v) \\ &= T_1(Df_x(v + (1+\delta)w)) \\ &= T_1(Df_x(v) + (1+\delta)Df_x(w)) \\ &= (1+\delta)(Df_x(z)) \end{aligned}$$

logo essas são as perturbações que procurávamos e que satisfazem $\|G_j - Df_{f^j(x)}\| < \delta$. Pelo Lema de Frank's existe um difeomorfismo $g : M \to M$ em $B_\varepsilon(f) \subset \widetilde{U_f}$, onde $g^j(x) = f^j(x)$. Podemos escolher vizinhanças $V_{f^j(x)}$ suficientemente pequenas de tal forma que exista uma vizinhança de p que não pertença ao suporte de g (que neste caso depende da $V_{f^j(x)}$) e dessa forma x também é ponto homoclínico de $g \in U_1(f)$. As diferenciais de g na órbita de q são $Dg_{f^j(x)} = G_j$, logo para $v \in F(x)$ temos

$$P(v) = (id + L)(v) = v + \delta w = u$$

aplicando a g m vezes, lembrando que $Dg_{f^j(x)} = G_j = Df_{f^j(x)}$

$$\begin{aligned} u_m &= Dg_x^m(u) = Dg_{g^{m-1}(x)} Dg_{g^{m-2}(x)} ... Dg_{g(x)} Dg_x(v + \delta w) \\ &= Df_{f^{m-1}(x)} Df_{f^{m-2}(x)} ... Df_{f(x)} Df_x(v) + Df_{f^{m-1}(x)} Df_{f^{m-2}(x)} ... Df_{f(x)} Df_x(\delta w) \\ u_m &= Df_x^m(v) + (1+\delta)^m Df_x^m(\delta w). \end{aligned}$$

O argumento para obtermos a segunda parcela da última linha foi que
$Dg_x(\delta w) = G_0(\delta w) = T_1(Df_x)(\delta w) = (1+\delta)(\delta w)$.
Dada a constante γ da Proposição 3.2.6, existe um m tal que

$$\delta(1+\delta)^m \geq 4 + \frac{2}{\gamma}. \tag{3.1}$$

Usando o Lema 3.2.7 para $w \in E(x)$ onde m foi o escolhido em 3.1 e γ da Proposição 3.2.6

$$\begin{aligned} \|Df_x^m(v)\| &= \|u_m - (1+\delta)^m Df^m(\delta w)\| \\ &\geq \frac{\gamma}{1+\gamma} \|u_m\| \\ &= \frac{\gamma}{1+\gamma} \|Df^m(v) + \delta(1+\delta)^m Df_x^m(w)\| \\ &= \frac{\gamma}{1+\gamma} \|\delta(1+\delta)^m Df_x^m(w) - (-Df_x^m(v))\| \\ &\geq \frac{\gamma}{1+\gamma} \mid \|\delta(1+\delta)^m Df_x^m(w)\| - \|(Df_x^m(v))\| \mid . \end{aligned}$$

Agora dividindo tudo por $\frac{\gamma}{1+\gamma} \|Df_x^m(w)\|$ obtemos

$$\tfrac{1+\gamma}{\gamma} \geq \delta(1+\delta)^m \tfrac{\|Df_x^m(w)\|}{\|Df_x^m(v)\|} - 1$$

pela suposição feita em 3.2 e usando 3.1 temos

$$\begin{aligned} \frac{1+\gamma}{\gamma} &\geq \delta(1+\delta)^m \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{\delta(1+\delta)^m \ - \ 2}{2} \geq \frac{1+\gamma}{\gamma} \end{aligned}$$

que é uma contradição. $\square$

3.3 Contração Por Blocos

Em seu trabalho [Ma], Mañé introduziu o conceito de sequência periódica de isomorfismos lineares e com o uso de tais objetos provou um resultado que apresentaremos a seguir. Vejamos antes algumas definições necessárias.

Definição 3.3.1. Seja $GL(n)$ é o grupo dos isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^n$ e $L : \mathbb{Z} \to GL(n)$ uma *sequência de isomorfismos lineares* de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathcal{E}_j^s(L)$ o espaço dos vetores $v \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$s_j(v) = sup\{\|(\prod_{i=0}^{n} L_{j+i})v\|; n \geq 0\} < \infty$$

Igualmente se $\mathcal{E}_j^u(L)$

$$u_j(v) = sup\{\|(\prod_{i=0}^{n}(L_{j-(i+1)})^{-1})v\|; n \geq 0\} < \infty.$$

A sequência de isomorfismos lineares é *hiperbólica* se $\mathcal{E}_j^s(L) \oplus \mathcal{E}_j^u(L) = \mathbb{R}^n$, para todo j em $\mathbb{Z}$.

Observe que na definição acima é suficiente que seja válido para um $j_0 \in \mathbb{Z}$, pois se $v \in \mathcal{E}_{j_0}^s(L)$ temos que

$$s_{j_0}(v) = sup\{\|(\prod_{i=0}^{n} L_{j_0+i})v\|; n \geq 0\} = sup\{\|(\prod_{i=0}^{n-k} L_{(j_0+k)+i})v\|; n-k \geq 0\} < \infty$$

então $v \in \mathcal{E}_i^s(L)$, para $i_0 = j_0 + k$, para $k \geq 0$. Igualmente podemos ter para $\mathcal{E}_{j_0}^s(L)$. Caso exista um $n_0 \geq 1$ tal que $L_{j+n_0} = L_j$ para todo j, dizemos que a sequência é *periódica*.

A hiperbolicidade da sequência periódica de isomorfismos lineares L é equivalente a hiperbolicidade da aplicação $\prod_{j=0}^{n_0-1} L_j$. De fato se L for uma sequência hiperbólica, supomos que $\prod_{j=0}^{n_0-1} L_j$ não é uma aplicação hiperbólica, assim tem pelo menos um autovalor com módulo igual a 1 e associado a esse um autovetor v, logo temos $s_0(v)$, $u_0(v) < \infty$ e pela poriodicidade da sequência L, não poderiamos ter $\mathcal{E}_j^s(L) \oplus \mathcal{E}_j^u(L)$. Reciprocamente se a aplicação $\prod_{j=0}^{n_0-1} L_j$ é hiperbólica temos a decomposição $E^s \oplus E^u = \mathbb{R}^n$, onde E^s é o espaço estável e E^u o espaço instável, se $v \in E^s$ temos que $||(\prod_{j=0}^{k(n_0-1)} L_j)v|| \to 0$, quando $k \to \infty$, o que implica em $s_0(v) < \infty$, ou seja, $v \in \mathcal{E}_0^s(L)$. Com argumentos semelhantes podemos garantir que se $w \in E^u$, então $w \in \mathcal{E}_0^u(L)$. Portanto $E^s \subset \mathcal{E}_0^s(L)$ e $E^u \subset \mathcal{E}_0^u(L)$, necessariamente $\mathcal{E}_0^s(L) \oplus \mathcal{E}_0^u(L) = \mathbb{R}^n$, ou seja, a sequência L é hiperbólica. Para melhorar a compreenção do que foi definido vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.3.2. Dado $m \in \mathbb{N}$, onde $m > 1$ e considere a seguinte sequência

$$L_{2n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \qquad L_{2n+1} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

A sequência não é hiperbólica, pois para qualque $v \in \mathbb{R}^2$ temos que $s_0(v),\ u_0(v) < \infty$ e temos assim $v \in \mathcal{E}_0^s(L),\ \mathcal{E}_0^u(L)$, portanto não podemos ter $\mathcal{E}_0^s(L) \oplus \mathcal{E}_0^u(L) = \mathbb{R}^2$, embora as aplicações L_i sejam hiperbólica. Usando o argumento anterior a sequência é periódica e não hiperbólica pois

$$L_{2n}.L_{2n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

não uma aplicação hipebólica.

Acontece o contrário se considerarmos a seguinte sequência

$$L_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L_{2n+1} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

Usando um argumento anterior, a sequência L é hiperbólica, pois

$$L_{2n}\, L_{2n+1} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

é uma aplicação hiperbólica.

Seja $\{L^{(\epsilon)}; \epsilon \in \mathcal{I}\}$ uma família de sequências periódicas de isomorfismo lineares. Duas famílias $K^{(\epsilon)}$ e $L^{(\epsilon)}$ são ditas periodicamente equivalentes, se para todo $\epsilon \in \mathcal{I}$ possuem o mesmo período mínimo. Dizemos que tal família é hiperbólica se toda sequência é hiperbólica e $sup\{\|L(\epsilon)_n; \epsilon \in \mathcal{I}$ e $n \in \mathbb{Z}\} < \infty$. A hiperbolicidade da família é uniforme, se existe um $\delta > 0$ tal que para quaisquer famílias $K^{(\epsilon)}$ e $L^{(\epsilon)}$ periodicamente equivalentes satisfazendo $d(K^\epsilon, L^\epsilon) < \delta$ é também hiperbólica, onde

$$d(K^\epsilon, L^\epsilon) = sup\{\|K_n^{(\epsilon)} - L_n^{(\epsilon)}\|; \epsilon \in \mathcal{I}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Vale lebrar que a sequência periódica uniformemente hiperbólica, temos contração e expansão em direções complementares, para uma família hiperbólica dessas sequências, as taxas de contração e expansão não necessariamente são as mesmas, mas o resultado a seguir diz que se a família for uniformemente hiperbólica, então pelo menos para sequências com período suficientemente grande as taxas de contração e expansão são uniformes.

Teorema 3.3.3. *(Mañé) Se $\{L^{(\epsilon)}; \epsilon \in \mathfrak{A}\}$ é uma família uniformemente hiperbólica de sequências de isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^n$, então existem constantes $C > 0, 0 < \mu < 1$ e $m \in \mathbb{Z}^+$ tais que*

$$\prod_{j=0}^{k-1} \| (\prod_{i=0}^{m-1} L^{(\epsilon)}_{mj+i}) \mid \mathcal{E}^s_{mj}(L^{(\epsilon)}) \| < C\mu^k$$

$$\prod_{j=0}^{k-1} \| (\prod_{i=0}^{m-1} L^{(\epsilon)}_{mj+i})^{-1} \mid \mathcal{E}^u_{m(j+1)}(L^{(\epsilon)} \| < C\mu^k$$

Proof. Ver em [8] Proposição II.3 □

O próximo exemplo nos dá uma forma de obter sequências de isomorfismos lineares do resultado anterior que nos será útil.

Exemplo 3.3.4. Considere $f : M \to M$ e um ponto periódico hiperbólico de período n, para todo $1 \leq i \geq n$ temos que

$$Df_{f^i(p)} : T_{f^i(p)}M \to T_{f^{i+1}(p)}M$$

é um isomorfismo linear. A aplicação Df^n_p é hiperbólica e pelo que vimos acima, a sequência definida por $L_j = Df(f^j(p))$ também é hiperbólica.

Então para obtermos uma família uniformente hiperbólica, basta que tenhamos um conjunto onde os pontos periódicos são hiperbólicos, e ainda em uma vizinhança no espaço do difeomorfismo esta propriedade seja robusta. Dessa forma usando o exemplo acima podemos obter uma gama de famílias de sequências periódicas uniformemente hiperbólicas. Portanto faz sentido enunciarmos o seguinte resultado

Teorema 3.3.5. *Seja $f \in Diff^1(M)$ e $H(p)$ com expansividade C^1-Robusta. Então existem uma vizinhança U_f de f, $m > 0$, $0 < \mu < 1$ e $C > 0$ tais que se $g \in U_f$, q é hiperbólico de período $\pi(q)$ e $q \sim p_g$ então*

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Dg^m \mid E^s(g^{im}(q)) \| < C\mu^k$$

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Dg^{-m} \mid E^u(g^{-im}(q)) \| < C\mu^k$$

sendo $k = [\frac{\pi(q)}{m}]$. Além do mais, as constantes C, μ e m são uniformes em uma vizinhança de f.

Portanto se conseguirmos garantir as hipóteses do teorema de Mañé usando as do Teorema 3.3.5 teremos a propriedade desejada. Dessa forma devemos provar que com expansividade C^1-robusta de $f_{|_{H(p)}}$ temos que famílias de sequências periódicas lineares de $\mathbb{R}^d$ geradas por Df ao longo de um ponto hiperbólico $q \in H(p,f)$ e $q \sim p$ com índice(q) = índice(p) são uniformemente hiperbólicas. Antes de provarmos tal fato, mostraremos outro resultado que utilizaremos.
Considerando um ponto periódico q de período $\pi(q)$, os autovalores normalizados de $Df_q^{\pi(q)}$ são dados por

$$\{\lambda^{\frac{1}{\pi(q)}}; \text{ para } \lambda \text{ autovalor de } Df_q^{\pi(q)}\}.$$

Sendo agora q um ponto periódico hiperbólico tomamos seus k autovalores contrativos

$$0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < ... < |\lambda_k| < 1.$$

Assumimos que λ_k são todos reais e de multiplicidade 1, dessa forma podemos supor a existência de um $\eta > 0$ tal que para todo $j \in 1, 2, ..., k-1$ tenhamos $|\lambda_j| < |\lambda_k| - \eta$, dizemos assim que esse autovalor é o menos contrativo. Segue que foi mostrado em [HPS] a existência de variedades estáveis fortes W^{ss} de codimensão 1 em W^s e para algum $\epsilon > 0$ nós temos que $W^s_\epsilon \setminus W^{ss}_\epsilon$ tem duas componentes. Um ponto q com tais características é chamado de *η-simples* para algum $\eta > 0$ e o valor $1 - |\eta|$ é dito a abertura estável do ponto periódico.

Definição 3.3.6. Seja q um ponto periódico hiperbólico tal que $q \sim p$. Dizemos que o ponto q é *ponto fronteira não estável forte* quando satisfaz

1. q é um ponto η-simples para algum $\eta > 0$.

2. $W^u(p)$ intersecta ambas as componentes de $W^s_\epsilon(q) \setminus W^{ss}_\epsilon(q)$.

Proposição 3.3.7. *Dados U_f uma vizinhança de f, $\rho > 0$ e q um ponto periódico nas condições da definição acima, então existe um $\delta > 0$ tal que se $g \in U_f$ e q_g um ponto ponto fronteira não estável forte com abertura estável menor que δ e $q_g \sim p_g$ temos que*

1. *Existe um difeomorfismo $\widetilde{g}$ que está ρ-próximo de g e pontos periódicos q_1 e q_2 de $\widetilde{g}$ tais que $q_i \sim p_{\widetilde{g}}$ para $i = 1, 2$, $\pi(q_1) = \pi(q_2)$ e $d(\widetilde{g}^j(q_1), \widetilde{g}^j(q_2)) \leq \delta$ para $0 \leq j \leq \pi(q_1)$. Além do mais $\widetilde{g} = g$ fora de uma vizinhança arbitrariamente pequena de q_g.*

2. *Existe um ponto periódico $\widetilde{q}$ de $\widetilde{g}$ fronteira não estável forte de $H(p_{\widetilde{g}}, \widetilde{g})$ com abertura estável menor que $\delta(\frac{\rho}{2})$ e $\widetilde{q} \sim p_{\widetilde{g}}$.*

Proof. A idéia da prova é bifurcarmos o ponto q, de tal forma a ser decomposto em dois ponto periódicos hiperbólicos. Tal perturbação é feita sobre g em uma vizinhança da órbita de q e o tamanho da perturbação é da ordem da perturbação linear ao longo da órbita de q. Tomamos vizinhanças $U_i = U(g^i(q))$ disjuntas para $i = 1, 2, ..., \pi(q) - 1$ e usamos cartas locais para identificá-las com bolas do $\mathbb{R}^d$ de tal forma que $g^i(p)$ seja representado por 0. Identificamos $W^s_\epsilon(g^i(p))$ como uma bola do $\mathbb{R}^k$ centrada na origem com de raio ϵ de tal que forma que autovetor ssociado a λ_k seja representado por com e_1. Por hipótese $W^u(p)$ intersecta ambas as componetes de $W^s_\epsilon(q) \backslash W^{ss}_\epsilon(q)$, dessa forma podemos tomar dois pontos z_1 e z_2 nessa interseção, mas um em cada componente e um certo $\lambda > 0$ arbitrariamente pequeno que determinaremos posteriormente.
Agora considere $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}+$ uma função Bump C^∞, $0 \leq \sigma(x) \leq 1$ onde $\sigma(x) = 1$ se $||x|| \leq \frac{\lambda}{4}$, $\sigma(x) = 0$ se $||x|| \geq \lambda$ e $||\nabla\sigma|| < \frac{2}{\lambda}$.
Definimos a matriz A, tal que agindo sobre $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ é $\lambda_k^{-1} Id$ e quando agir sobre $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-k}$ é Id.
Façamos agora a primeira perturbação em g para obter g_1, tal que se $x \in U_i$ temos que

$$g_1(x) = \sigma(x) A \circ Dg_{g^i(p)} x + (1 - \sigma(x)) g(x)$$

Observe que se $\sigma(x) = 0$, então $g_1(x) = g(x)$ e se $\sigma(x) = 1$ temos $g_1(x) = A.Dg_{g^i(q)} x$. Isso justifica o que tinhamos falado anteriormente sobre o tamanho da perturbação, que seria da ordem da parte linear sobre a órbita.
consideremos $C \geq ||Dg(x)||$ para qualquer x e $g \in U_f$ e um δ, tal que $C\delta < \frac{\rho}{4}$. Se considerarmos λ pequeno o suficiente teremos que g_1 está $\frac{\rho}{2}$ próxima de g, além do mais seja o conjunto

$$I = \{te_1; \frac{-\lambda}{4} \leq t \leq \frac{\lambda}{4}\}$$

O difeomorismo $g_1^{\pi(q)}$ é Id em I e se $w \in W^s_\epsilon(q)$ temos que por $g_1^{\pi(q)}$ o ponto w converge para um elemento em I, dessa forma com λ suficientemente pequeno temos que z_1 e

z_2 pertencem a $W^u_\epsilon(p)$.

Dados q_1 e q_2 pontos extremos de I, nós perturbamos g_1 e obtemos $\widetilde{g}$ arbitrariamente próximo de g_1, tal que q_1 e q_2 e o q que identificamos com o 0, são os únicos pontos periódicos (hiperbólicos) em I e o índice dos pontos q_1 e q_2 é k ambos com período $\pi(q)$ ou $2\pi(q)$ (o segundo corresponde a $g_1^{\pi(q)} = -Id$ em I e neste caso $g^{\pi(q_1)} = q_2$ e também o contrário). Segue-se que $d(\widetilde{g}^j(q_1, \widetilde{g}^j(q_2))) \leq \delta$, para todo $i = 1, 2, ..., \pi(q_1)$.Além do mais $z_1 \in W^s(q_1)$ e $z_2 \in W^s(q_2)$. Por outro lado $W^u(q_i) \cap W^s_\epsilon(p) \neq \varnothing$ por continuação de $W^u(q, g)$ no subconjunto compacto que implica em $q_i \sim p_{\widetilde{g}}$. Note também que os pontos q_i são simples com abertura estável arbitrariamente pequena, assim concluímos a primeira parte.

Observe que se q_1 e $p_{\widetilde{g}}$ são homoclinicamente relacionados então estão em um conjunto hiperbólico, portanto nesse vale a propriedade do sombreamento, assim podemos tomar pontos periódicos que passem a maior parte do tempo próximos da órbita de q_1 e que é um ponto ponto fronteira não estável forte de $H(p_{\widetilde{g}}, \widetilde{g})$. Então é um ponto simples e sua abertura estável é arbitrariamente pequena. □

Proof. (*Teorema* 3.3.5) Queremos provar que toda família hiperbólica de sequências periócicas de isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^d$ gerada por Df ao longo da órbita de um ponto periódico hiperbólico $q \in H(p, f)$ (onde $q \sim p$ e índice(q)=índice(p)) é uniforme. Faremos a prova por contradição. Supomos então que dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $q \in H(p, f)$ homoclinicamente relacionado com p e uma sequência de isomorfismos lineares

$$L_i : T_{f^i(q)}M \to T_{f^{i+1}(q)}M$$

tal que $\| \; L_i - Df_{f^i(q)} \; \| < \epsilon$, onde $i = 0, 1, 2, ..., \pi(q) - 1$ e não hiperbólica, ou seja, $\prod_{i=0}^{\pi(q)-1} L_i$ tem um autovalor de módulo 1.

Para podermos relacionar os isomorfismos definimos uma isotopia entre $Df_{f^i}(q)$ e L_i por $L_i(t)$ com $0 \leq$ t ≤ 1 onde

$$L_i(t) : [0, 1] \times T_{f^i(q)}M \to T_{f^{i+1}(q)}M$$

diferenciável, fixando um t_0 temos que $v \longmapsto L_i(t_0)v$ é um difeomorfismo. Para $t = 0$ temos $L_i(0) = Df_{f^i(q)}$, assim

$$\prod_{i=0}^{\pi(q)-1} L_i(0) = \prod_{i=0}^{\pi(q)-1} Df_q^{\pi(q)}$$

que é hiperbólica (q é periódico hiperbólico) e existe um $t_0 \neq 1$ tal que $\prod_{i=0}^{\pi(q)-1} L_i(t_0)$ é uma aplicação não hiperbólica.

Para todo $t < t_0$ a matriz $\prod_{i=0}^{\pi(q)-1} L_i(t)$ é hiperbólica, escolhemos assim um t tal que $t < t_0$ e $\prod_{i=0}^{\pi(q)-1} L_i(t)$ tenha mesmo índice de q e possua um autovalor λ_k com módulo bem próximo de 1 e que dizemos ser $\mid \lambda_k \mid < 1$.

Por construção estamos com as hipóteses do lema de Frank's, então existe um difeomorfismo $g \in U_f$ tal que q é g-periódico, em particular hiperbólico com indice(q) = indice(p) e $Dg_{g^i(q)} = L_i(t)$. Dessa forma λ_k é também autovalor de $Dg_{g^i(q)}$ e com módulo próximo de 1, podendo ser real ou complexo.

Podemos fazer se for necessário $q \sim p_g$, basta tomarmos como o suporte de g uma vizinhança arbitrariamente pequena da $\mathcal{O}(q)$ de tal forma que não contenha uma vizinhança de p_g. Além do mais podemos ter g suficientemente próximo de f basta escolhermos inicialmente ϵ arbitra- riamente pequeno.

Se λ_k for complexo tal que $\mid \lambda_k \mid < 1$, mas pode não ser entre os contrativos o mais próximo de 1, para resolvermos o problema basta fazermos uma perturbação arbitrariamente pequena nesse autovalor.

Seja g_s $(-1 \leq s \leq 1)$ uma família genérica a 1-parâmetro de difeomorfismo em U_f com $g_{-1} = g_1$, sobre uma bifurcação Hopf em $s = 0$, temos que para um $s > 0$ próximo de 0, existe um círculo invariante (periódico) $\mathcal{C}$ que é normalmente hiperbólico tal que $g_s^{\pi(q)}|_{\mathcal{C}}$ é conjugada a rotação irracional, dessa forma herda da mesma as propriedades topológicas, uma delas é ter órbita densa e com isso podemos garantir que

$$W^u(\mathcal{C}) \cap W^s(p_g) \neq \emptyset$$

$$W^s(\mathcal{C}) \cap W^u(p_g) \neq \emptyset$$

logo $\mathcal{C} \subset H(p_{g_s}, g_s)$ o que contradiz a a robustez da expansividade de f em $H(p, f)$.

Agora se λ_k é real dados $\beta > 0$ e U_f uma vizinhança de f contendo o difeomorfismo g β-próximo de f. Usaremos a Proposição 3.2.3 para construirmos uma sequência de difeomorfismos g_n e outra de pares de pontos periódicos $(q_{1,n}, q_{2,n})$ e as usaremos para chegarmos em uma situação de não expansividade C^1-robusta de f.

Seja $\rho = \frac{\beta}{2}$ e $g_0 = g$, podemos também assumir que o ponto periódico q é fronteira não estável forte com abertura estável menor que δ_0, e caso não fosse poderíamos fazê-lo por pequenas perturbações (como já temos que q é ponto periódico hiperbólico de g

quando fazemos uma perturbação em λ_k para torná-lo o mais distante de 1, pois a abertura de q é o valor $1-|\lambda_k|$ também é simples mediante pequenas perturbações para afastá-lo dos outros autovalores, de tal forma que exista um $\eta > 0$ tal que $|\lambda_i| < |\lambda_k| - \eta$ para $i = 1, 2, ..., k-1$), então existe um difeomorfismo g_1 que está ρ_0-próxima de g_0 e dois pontos periódicos $q_{1,1}$, $q_{2,1}$ de mesmo período tais que $d(g_1^j(q_{1,1}), g_1^j(q_{2,1})) < \delta_0$ e também a existência de um ponto ponto fronteira não estável forte $\tilde{q}$ o que nos permite usarmos para g_1 novamente a Proposição 3.2.3. Portanto temos garantido a existência de g_n está $\frac{\beta}{2^n}$-próxima de g_{n-1} e que tem uma sequência $(q_{1,i}, q_{2,i})$ com $i = 1, ..., n$ de pontos periódicos em $H(p_{g_n}, g_n)$ tais que $d(g_n^k(q_{1,i}), g_n^k(q_{2,i})) < \delta_i$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ Portanto g_n é uma sequência de Cauchy em $Diff^1(M)$ logo $g_n \to \tilde{g}$ quando $n \to \infty$ como as g_n estão todas $\frac{\beta}{2^n}$-próximas de f temos que $\tilde{g} \in U_f$. Como pela contrução podemos obter um par de sequências $(q_{1,i}, q_{2,i})$ em $H(p_{\tilde{g}}, \tilde{g})$ onde $i = 1, 2, ...$ tais que

$$d(\tilde{g}^k(q_{1,i}), \tilde{g}^k(q_{2,i})) < \delta_i$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, 2, ...$ que contradiz a robustez da expansividade de f em $H(p, f)$. □

A demonstração foi feita para o difeomorfismo f, mas vale lembrar que o argumento principal foi a expansividade C^1-robusta, logo qualquer g que está na vizinhança de expansividade também tem expansividade C^1-robusta sobre a classe homoclínica associada a um ponto hiperbólico continuação de p, portanto segue-se o resultado.

3.4 Estrutura de Produto Local e Propriedade de Sombreamento

Nosso objetivo principal é provar que a classe homoclínica $H(p)$ tem a propriedade de sombreamento, mas para obtermos esse resultado usaremos o fato da classe ter estrutura de produto local, e tal resultado decorre de podermos garantir que com expansividade C^1-robusta de f sobre $H(p)$ as variedades centro estáveis e instáveis de $f_{|_{H(p)}}$ são verdadeiras variedades estáveis e instáveis locais. Se f sobre $H(p)$ tem expansividade C^1-robusta pela invariância da classe homoclínica podemos garantir a mesma propriedade para f^m com $m \in \mathbb{N}^+$ e se q é um ponto periódico hiperbólico homoclinicamente relacionado com p por f, temos pela invariância da variedades estáveis e instáveis que o ponto q também é periódico homoclinicamente relacionado por f^m. Com essas observações podemos por um motivo de simplicidade supor que $m = 1$

no Teorema 3.3.5, ou seja, que existe $C > 0$ e $0 < \mu < 1$ tal que para q hiperbólico homoclinicamente relacionado com p por f de período k segue-se que

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Df_{|_{E^s(f^i(q))}} \| < C\mu^k$$

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Df_{|_{E^u(f^{-i}(q))}} \| < C\mu^k.$$

Em um conjunto que admite decomposição dominada sempre existe variedades invariantes locais tangente aos subespaços da decomposição. Mais precisamente definimos como

$$\text{Emb}\Lambda(D^i_r, M) = \{\beta : D^i_r \to M; D^i_r \, \text{disco de raio} \, r \, \text{e} \, i = dimE, dimF\}$$

o espaço dos C^1 mergulhos tais que $\beta(0) \in \Lambda$ dotado com a topologia C^1. Dessa forma apresentamos a seguinte proposição que pode ser encontrada em [6].

Proposição 3.4.1. *Seja $\Lambda = H(p, f)$ tendo uma decomposição dominada $E \oplus F$. Então existe $\phi^s : \Lambda \to Emb\Lambda(D^s_r, M)$ e $\phi^u : \Lambda \to Emb\Lambda(D^r_u, M)$ tais que definindo $W^{cs}_\epsilon(x) = \phi^s(x)(D^{cs}_\epsilon)$ e $W^{cu}_\epsilon(x) = \phi^u(x)(D^{cu}_\epsilon)$ temos*

1. *$T_x W^{cs}_\epsilon(x) = E(x) e T_x W^{cu}_\epsilon(x) = F(x)$*

2. *Para todo $0 < \epsilon_1 < 1$ existe um $0 < \epsilon_2 < 1$ tal que $f(W^{cs}_{\epsilon_2}(x)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f(x))$ e $f^{-1}(W^{cu}_{\epsilon_2}(x)) \subset W^{cu}_{\epsilon_1}(f^{-1}(x))$.*

Nós chamamos W^{cs}_ϵ e W^{cu}_ϵ as variedades centro estáveis e instáveis locais. Pela proposição acima podemos concluir que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\rho(\epsilon) > 0$ tal que para qualquer $x \in H(p)$ a $W^{cs}_\epsilon(x)$ contém uma bola de raio $\rho(\epsilon)$ dentro da variedade centro estável local e o mesmo temos para $W^{cu}_\epsilon(x)$. Por simplicidade tomamos $\rho(\epsilon) = \epsilon$, quando $y \in W^{cs}_\epsilon(x)$ temos que $E(y) = T_y W^{cs}_\epsilon(x)$ da mesma forma se $y \in W^{cu}_\epsilon(x)$ obtemos $F(y) = T_y W^{cu}_\epsilon(x)$.

Para provar que as variedades W^{cs} e W^{cu} são verdadeiras variedades estáveis e instáveis locais precisamos dos dois seguintes resultados

Lema 3.4.2. *Com C, λ nas condições do Teorema 3.3.5 e $\delta > 0$ tal que $\lambda(1+\delta) = \lambda' < 1$ e $q \sim p$. Então existe $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ tal que se para todo $0 \leq n \leq \pi(q)$ acontece*

$f^n(W^{cs}_{\epsilon_2}(q)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f^n(q))$ para algum $0 < \epsilon_2 < \epsilon$ então

$$f^{\pi(q)}(W^{cs}_{\epsilon_2}(q)) \subset W^{cs}_{C\lambda'^{\pi(q)}\epsilon_2}(q)$$

da mesma forma se $f^{-n}(W^{cu}_{\epsilon_2}(q)) \subset W^{cu}_{\epsilon_1}(f^{-n}(q))$ implica em

$$f^{-\pi(q)}(W^{cu}_{\epsilon_2}(q)) \subset W^{cu}_{C\lambda'^{-\pi(q)}\epsilon_2}(q).$$

Proof. Pela continuidade uniforme de Df dado um $\delta > 0$ existe $\epsilon_1 > 0$ tal que se $d(x,y) < \epsilon$ temos

$$(1-\delta)||Df_y\mid_E|| \leq ||Df_x\mid_E|| \leq (1+\delta)||Df_y\mid_E|| \tag{3.2}$$

e com os mesmos argumentos

$$(1-\delta)||Df_y^{-1}\mid_F|| \leq ||Df_x^{-1}\mid_F|| \leq (1+\delta)||Df_y^{-1}\mid_F||.$$

Como por hipótese $f^n(W^{cs}_{\epsilon_2}(q)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f^n(q))$ para $x \in W^{cs}_{\epsilon_2}(q)$ e todo $0 \leq n \leq \pi(q)$ usando a expressão 3.2 escrita acima para $q = y$ e o Teorema 3.3.5 obtemos

$$\prod_{i=0}^{n}||Df_i(q)\mid_E|| \leq \prod_{i=0}^{n}(1+\delta)||Df_i(q)\mid_E|| \leq (1+\delta)^n C\lambda^n = C\lambda'^n.$$

Em particular $n = \pi(q)$ temos que

$$\prod_{i=0}^{\pi(q)}||Df_i(q)\mid_E|| \leq C\lambda'^{\pi(q)} \tag{3.3}$$

Seja $\gamma : [a,b] \to W^{cs}_{\epsilon_2}(q)$ um arco ligando os pontos q e $y \in W^{cs}_{\epsilon_2}(q)$ com comprimento $l(\gamma)$, por 3.3 temos que $||D(f^{\pi(q)} \circ \gamma)\mid_E|| \leq \prod_{i=0}^{\pi(q)}||Df_i(q)\mid_E|| \leq C\lambda'^{\pi(q)}$ para todo $t \in (a,b)$ podemos usar o Teorema do Valor Médio para $f^{\pi(q)} \circ \gamma$, dessa forma $l(f^{\pi(q)} \circ \gamma) \leq C\lambda'^{\pi(q)} l(\gamma)$, portanto caminhos γ em $W^{cs}_{\epsilon_2}(q)$ são mandados por $f^{\pi(q)}$ em caminhos sobre $W^{cs}_{C\lambda'^{\pi(q)}\epsilon_2}(q)$, como o y tomado na definição de γ foi arbitrário temos que

$$f^{\pi(q)}(W^{cs}_{\epsilon_2}(q)) \subset W^{cs}_{C\lambda'^{\pi(q)}\epsilon_2}(q)$$

e com argumentos semelhantes também temos

$$f^{-\pi(q)}(W^{cu}_{\epsilon_2}(q)) \subset W^{cu}_{C\lambda'^{-\pi(q)}\epsilon_2}(q).$$

□

Consideremos o conjunto dos pontos periódicos

$$S = \{p \sim q; \pi(q) = N, \text{ onde } C\lambda'^N \leq \frac{1}{2}\}$$

Não é difícil ver que $\overline{S} = H(p)$, isto decorre do fato de que os pontos homoclinicamente relacionados a p serem densos em $H(p)$, portanto dado qualquer ponto na classe homoclínica, próximo dele podemos encontrar pontos periódicos hiperbólicos homoclinicamente relacionados a p e de períodos arbitrariamente grandes.

Lema 3.4.3. *Seja $f \in \mathcal{R}$ e $H(p)$ com expansividade C^1-Robusta. Para α é a constante de expansividade de $H(p, f)$. Então dado $\epsilon_1 < \alpha$, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que acontece o seguinte*

1. *Para todo $q \in S$ temos $f^n(W^{cs}_{\epsilon_2}(q)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f^n(q)), \forall n \geq 0$. Similarmente para as centro-instáveis.*

2. *Para todo $y \in W^{cs}_{\epsilon_2}(q)$ onde $q \in S$ temos que*

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(q), f^n(y)) = 0.$$

Similarmente temos para as variedades centro-instáveis.

Proof. Pela Proposição 3.4.1 para $q \sim p$, dado $0 < \epsilon_1 < 1$ podemos encontrar um $\epsilon(q)$ tal que

$$f(W^{cs}_{\epsilon}(q)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f(q))$$

para determinadas escolhas para os ϵ podemos ter

$$f^n(W^{cs}_{\epsilon}(q)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f^n(q))$$

desses escolhemos

$$\epsilon(q) = sup\{\epsilon > 0 \mid f^n(W^{cs}_{\epsilon}(q)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f^n(q))\} > 0$$

Se $\epsilon(q_1) < \epsilon(q_2)$ temos que

$$f^n(W^{cs}_{\epsilon(q_i)}(q_i)) \subset W^{cs}_{\epsilon(q_i)}(f^n(q_i)) \text{ para } i = 1, 2.$$

Com isso um candidato a ϵ_2 é o ínfimo do conjunto formado pelos $\epsilon(q)$, mas devemos assegurar que não seja 0. Se esse for o caso $\epsilon(q) \to 0$ quando $n \to \infty$, dessa forma podemos encontrar $y_n \in W^{cs}_{\epsilon}(q)$ e $m_n > 0$ tais que $d(f^{m_n}(q_n), f^{m_n}(y_n)) = \epsilon_1$, pela periodicidade de q_n podemos supor que $0 < m_n < \pi(q_n)$, como

$$f^{m_n}(W^{cs}_{\epsilon(q_n)}(q_n)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f^{m_n}(q_n))$$

pelo Lema 3.4.2 temos que

$$f^{\pi(q_n)}(W^{cs}_{\epsilon(q_n)}(q_n)) \subset W^{cs}_{C\lambda'^{\pi(q_n)}\epsilon(q_n)}(q_n). \tag{3.4}$$

Temos que $m_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e o mesmo acontece com $\pi(q_n)$, assim tomando subsequências podemos supor que

$$f^{m_{n_k}}(q_{n_k}) \to q \ \text{ e } \ f^{m_{n_k}}(y_{n_k}) \to y$$

tais argumentos foram feitos para f, mas também podem ser feitos para f^{-1}, assim para todo $k \in \mathbb{Z}$ temos

$$d(f^k(q), f^k(y)) \leq \epsilon_1.$$

Observe que como $H(p)$ é fechado o ponto q está em $H(p)$, logo se y também estiver em $H(p)$ teremos uma contradição sobre α-expansividade de f sobre $H(p)$, ja que $\epsilon_1 < \alpha$. Mostraremos então que com uma hipótese genérica sobre f, teremos que $y \in H(p)$. Dado $\epsilon > 0$, como $\epsilon(q_n) \to 0$ existe um n tal que $\epsilon(q_n) < \epsilon$ para n suficientemente grande podemos encontra um $\epsilon(q_n)$ tal que $f(q_n)$ esteja $\epsilon(q_n)$-próximo de $f(y_n)$, podemos se necessário tomar n ainda maior para garantir junto com o fato de y é limite dos $f^{m_n}(q_n)$ que $f^{m_n}(q_n)$ está também $\epsilon(q_n)$-próximo de y e por continuidade $f(y)$ também de $f^{m_{n+1}}(q_n)$. Por 3.4 temos que $f^{\pi(q_n)}(q_n)$ está em $W^{cs}_{C\lambda'^{\pi(q_n)}\epsilon(q_n)}(q_n)$, tais argumentos são suficientes para montarmos uma ϵ-pseudo órbita periódica de q_n a q_n e contendo o ponto y como

$$q_n, f(y_n), ..., f^{m_n-1}(y_n), y, f^{m_n+1}(y_n), ..., f^{\pi(y_n)-1}(y_n), q_n$$

A ϵ-órbita periódica contém y e um ponto periódico de $H(p)$, portanto y pertence a classe de recorrência por cadeias de p, como $f \in \mathcal{R}$ por argumentos genéricos y está em $H(p)$, o que contradiz a α-expansividade de $f|_{H(p)}$. Isso conclui a prova do primeiro item. O segundo item é consequência de que o conjunto dos pontos periódicos com período fixado é finito, pois dessa forma como os periódicos são densos na classe, dado qualquer ponto em $H(p)$ sempre tem um elemento de S suficientemente próximo, logo como primeiro item é válido podemos usar o Lema 3.4.2

$$f^{n.\pi(q)}((W^{cs}_{\epsilon_2}(q))) \subset W^{cs}_{(\frac{1}{2})^n\epsilon_2}(q)$$

portanto se $y \in W^{cs}_{\epsilon_2}(q)$ temos que

$$lim_{n\to\infty} d(f^n(q), f^n(y)) = 0$$

. □

Como consequência da Proposição 3.4.1 e dos Lemas 3.4.2 e 3.4.3 para todo $x \in S$ as variedades $W^{cs}_{\epsilon}(x)$ e $W^{cu}_{\epsilon}(x)$ são na verdade variedades estável e instável locais respectivamente. O próximo resultado nos diz que este resultado é válido não somente para os pontos do conjunto S, mas sim para todo ponto da classe homoclínica.

Corolário 3.4.4. *Para $f \in \mathcal{R}$ e f em $H(p)$ tem expansividade C^1-robusta, então para todo $x \in H(p)$ dado um $\epsilon_1 > 0$ existe um $\epsilon_2 > 0$ tal que $\forall n \geq 0$ temos o seguinte*

1. $f^n(W^{cs}_{\epsilon_2}(x)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f^n(x))$
2. *Se $y \in W^{cs}_{\epsilon_2}(x) \cap H(p)$ temos que $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ quando $n \to +\infty$.*

Resultado análogo temos para a $W^{cu}_{\epsilon_2}$.

Proof. Segundo o resultado anterior sabemos que o primeiro item é verdadeiro para todo $x \in S$, como os pontos periódicos são densos em $H(p)$ e para f difeomorfismo genérico esses pontos são hiperbólicos. Dado $x \in H(p)$ podemos assumir que suficientemente próximo podemos encontrar pontos de S e por continuidade das variedades $W^{cs}_{\epsilon_2}(x)$ em x, o primeiro item é válido em toda a classe homoclínica. Para provarmos o segundo item supomos que não seja verdadeiro para pelo menos um $y \in W^{cs}_{\epsilon_2}(x) \cap H(p)$. Com esse raciocínio supomos que existam uma sequência $n_k \to +\infty$ para $k \to +\infty$ e um $\rho > 0$ tais que

$$d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)) \geq \rho \tag{3.5}$$

Usando a compacidade de M temos que $f^{n_k}(x) \to \widetilde{x}$, $f^{n_k}(y) \to \widetilde{y}$ quando $n_k \to +\infty$ e por continuidade é também válido que

$$d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \geq \rho$$

Como a classe homoclínica é fechada e f-invariante, $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$ pertencem a $H(p)$, novamente pela densidade dos periódicos hiperbólicos homoclinicamente relacionados com p, podemos supor a existência de pontos de S suficientemente próximos de x para podermos garantir o resultado do Lema 3.4.3 para $y \in W^{cs}_{\epsilon_2}(x)$, logo
$f^n(y) \in W^{cs}_{\epsilon_1}(f^n(x))$ implicando em

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon_1. \tag{3.6}$$

Portanto de 3.5 e 3.6 concluímos que par todo $j \in \mathbb{Z}$

$$d(f^j(x), f^j(y)) \leq \epsilon_1$$

o que contradiz a expansividade de f sobre $H(p)$. □

Uma boa interpretação do resultado anterior pode ser $W^{cs}_{\epsilon_2}(x) \subset W^s_{\epsilon_1}(x)$, ou seja, que as variedades centro-instáveis são estáveis no sentido de $d(f^n(q), f^n(y)) \leq \epsilon_1$ para todo $x \in H(p)$ e $y \in W^{cs}_{\epsilon_2}(x)$ e todo $n \geq 0$. Pelo Lema 3.4.3 se x é ponto periódico temos $d(f^n(q), f^n(y)) \to 0$ quando $n \to +\infty$, caso x seja não periódico teremos o mesmo , somente se, $y \in H(p)$, pois assim podemos encontrar pontos de S arbitrariamente próximo de y.
Por motivos de simplicidade pode assumimos que $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$. Nosso próximo objetivo será provar que a classe homoclínica tem estrutura de produto local.

Corolário 3.4.5. *Seja $f \in \mathcal{R}$ e f em $H(p)$ tem expansividade C^1-robusta, então existe um $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que para quaisquer $x, y \in H(p)$ satisfazendo $d(x, y) < \delta$ temos que*

$$W^{cs}_{\epsilon}(x) \cap W^{cu}_{\epsilon}(y) \neq \emptyset \;\; e \;\; W^{cs}_{\epsilon}(x) \cap W^{cu}_{\epsilon}(y) \in H(p)$$

Proof. Igualmente como foi argumentado no Corolário 3.4.1, tomamos x e y em S homoclinicamente relacionados com p. Seja $\epsilon = \epsilon_2$ do Lema 3.4.3, sendo $W^{cs}_{\epsilon}(x) \subset W^s_{\epsilon}(x)$ e $W^{cs}_{\epsilon}(y) \subset W^s_{\epsilon}(y)$ e o mesmo para as W^{cu}_{ϵ}. Dessa forma sejam D^s , D^u discos em $W^u_{\epsilon}(p)$ e $W^s_{\epsilon}(p)$ respectivamente e que contenham as interseções de $W^u_{\epsilon}(p)$ com $W^s_{\epsilon}(x)$ e $W^s_{\epsilon}(p)$ com $W^u_{\epsilon}(y)$. Pelo λ-lema, dado um $\epsilon_n > 0$, existem m_u e m_s tais que para um $m \geq \max\{m_u, m_s\}$ temos que os iterados $f^{m_u}(D^u)$ e $f^{-m_s}(D^s)$ estão ϵ_n-próximos das variedades $W^u_{\epsilon}(x)$ e $W^s_{\epsilon}(y)$ respectivamente. Fazendo $\epsilon_n \to 0$ podemos dentre esses, garantir a existência de um ϵ_0 tal que para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$ tenhamos $f^m(D^u) \cap f^{-m}(D^s) \neq \emptyset$, esta interseção está em $W^s_{\epsilon}(p) \pitchfork W^u_{\epsilon}(p)$, além do mais tais

pontos estão suficientemente próximos de pontos em $W^u_\epsilon(x) \cap W^s_\epsilon(y)$, então dado um ponto $z \in W^u_\epsilon(x) \cap W^s_\epsilon(y)$ existe uma sequência de pontos $q_n \in W^s_\epsilon(p) \pitchfork W^u_\epsilon(p)$ convergindo para z. Portanto $z \in H(p)$.
Agora sejam quaisquer pontos $x, y \in H(p)$ se $d(x,y) < \delta$, para um tal que $\delta > 0$ suficientemente próximo deles podemos encontrar pontos de S, assim tomamos sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de pontos periódicos homoclinicamente relacionados com p, lembrando que podemos encarar as variedades $W^{cs}_\epsilon(x)$ e $W^{cu}_\epsilon(x)$ como localmente variedades estáveis e instáveis respectivamente , então por continuidade das mesmas $W^{cs}_\epsilon(x_n)$ converge para $W^{cs}_\epsilon(x)$ e $W^{cu}_\epsilon(y_n)$ converge para $W^{cu}_\epsilon(y)$. Pelo que foi provado na primeira parte da demonstração temos

$$W^{cu}_\epsilon(y_n) \cap W^{cs}_\epsilon(x_n) = z_n \ \text{ e } \ \{z_n\} \in H(p)$$

como M é compacta

$$z_n \to z \in W^{cu}_\epsilon(y) \cap W^{cs}_\epsilon(x)$$

e como $H(p)$ é fechado concluímos que $z \in H(p)$. Portanto $W^{cu}_\epsilon(y) \cap W^{cs}_\epsilon(x) \in H(p)$, tendo$H(p)$ estrutura de produto local. $\square$

Agora estamos em condições de provar o principal resultado da seção.

Lema 3.4.6. *Se $f \in \mathcal{R}$ e tem expansividade C^1-robusta sobre $H(p)$. Dado um $\eta > 0$ existe um $\theta > 0$ tal que qualquer θ-pseudo órbita periódica $\{x_n\}$ em $H(p)$ é η-sombreada por um órbita em $H(p)$. Além do mais se θ, η forem menores que metade da constante de expansividade essa órbita é única (se em particular a pseudo órbita for periódica a órbita é periódica).*

Proof. Seja $H(p) = \Lambda$ e f expansivo em $H(p)$ pelo Teorema A.0.5, existe uma métrica D e constantes $k > 1$, $r > 0$, tal que

$$\max\{D(f(x), f(y)), D(f^{-1}(x), f^{-1}(y))\} \geq \min\{kD(x,y), r\}$$

e define a mesma topologia que a métrica (Métrica Riemanniana). Tomando $\lambda = \frac{1}{k} < 1$ e ϵ do Corolário 3.4.5, se for necessário quando tivermos $d(x,y) < \epsilon$ então $D(x,y) < \lambda^2 r = \frac{r}{k^2} < r$. Assim para quaisquer $x, y \in H(p)$

$$\max\ \{D(f(x), f(y)), D(f^{-1}(x), f^{-1}(y))\} \geq \min\{kD(x,y), r\}. \tag{3.7}$$

Se $y \in W^s_\epsilon(x) \cap H(p)$, logo $d(x,y) < \epsilon$ pelo que foi mencionado acima e sendo $k > 1$ temos que

$$D(x,y) \geq \frac{r}{k^2} \Longrightarrow kD(x,y) \geq \frac{r}{k} \Longrightarrow min\{kD(x,y), r\} = kD(x,y)$$

Por 3.7 se $x \neq y$ temos a as seguintes possibilidades ou $D(f(x), f(y)) \geq kD(x,y)$ Então pela invariância de $W^s_\epsilon(x)$ temos que

$$D(f^2(x), f^2(y)) \geq kD(f(x), f(y)) \geq k^2 D(x,y)$$

e da mesma forma $D(f^3(x), f^3(y)) \geq k^3 D(x,y)$, assim até certo n_0 tal que $k^{n_0} D(x,y) > r$ logo

$$D(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) \geq k^{n_0} D(x,y) > r \text{ logo } d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) \geq \epsilon$$

que contradiz o fato de $y \in W^s_\epsilon$. Portanto resta a seguinte possibilidade

$$D(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{k} D(x,y) = \lambda D(x,y)$$

novamente pela invariância de $W^s_\epsilon(x)$ temos $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ assim $D(f^2(x), f^2(y)) \leq \lambda^2 D(x,y)$ e assim para todo $n \geq 0$

$$D(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n D(x,y).$$

De forma análoga se tomarmos $y \in W^u_\epsilon(x)$ teremos que para todo $n \geq 0$.

$$D(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \lambda^n D(x,y)$$

Com as duas desigualdades basta usarmos os mesmos argumentos da demonstração da Proposição 2.2.10 para concluir o resultado. $\square$

O próximo resultado nos dá resultados globais sobre as variedades invariantes de pontos na classe e ainda mais que qualquer ponto periódico no caso hiperbólico na classe tem o mesmo índice de p, usaremos isso para aumentar os possibilidades de utilização de Teorema 3.3.5.

Proposição 3.4.7. *Seja $f \in \mathcal{R}$ que sobre tem $H(p)$ tem expansividade C^1-robusta e um ponto periódico $q \in H(p)$. Então nós temos*

1. $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$ *e* $W^s(q) \cap W^u(p) \neq \emptyset$

2. $indice(p) = indice(q)$

Proof. Como $H(p)$ tem estrutura de produto local e os pontos periódicos homoclinicamente relacionados com p são densos na classe, existe um ponto periódico hiperbólico z suficientemente próximo de q e tal que $z \sim p$. Assim temos que

$$W^s_\epsilon(z) \cap W^u_\epsilon(p) \neq \emptyset$$
$$W^s_\epsilon(p) \cap W^u_\epsilon(z) \neq \emptyset.$$

Lembrando que já foi feita uma observação que uma consequência da expansividade robusta é a distância de tangência, logo as interseções são transversais e como z está relacionado a p
$dim(W^s(p)) = dim(W^s(z)) = dim(W^s(q))$
$dim(W^u(p)) = dim(W^u(z)) = dim(W^u(q))$
Por suposições genéricas q é hiperbólico assim $indice(q) = indice(p)$ e usando o λ-lema como na demonstração Lema 3.4.5 podemos garantir

$$W^s(q) \cap W^u(p) \neq \emptyset$$
$$W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$$

□

Para o próximo resultado assumimos que os periódicos em questão são os com período maior do que uma certa constante que explicitaremos na demonstração do mesmo. A afirmação não particulariza o que objetivamos provar, pois por argumentação genérica os periódicos são hiperbólicos, logo fixando um período indesejado, existe uma quantidade finita de pontos periódicos de mesmo período e se excluirmos esses pontos não afeta a classe, já que pela densidade dos homoclinicamente relacionados com p, tais pontos são de acumulação, ou seja, podemos encontrar periódicos desejáveis (com período os arbitrariamente grande) cada vez mais próximos.

Corolário 3.4.8. *Para $f \in \mathcal{R}$ e f em $H(p)$ tem expansividade C^1-robusta. Então existe um $0 < \lambda < 1$ e $m > 1$ tal que se q é um ponto periódico em $H(p)$ temos que*

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Df^m \mid E^s(f^{im}(q)) \| < \lambda^k$$

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Df^{-m} \mid E^u(f^{-im}(q)) \| < \lambda^k$$

onde sendo $k = [\frac{\pi(q)}{m}]$.

Proof. Se q é periódico por argumentos genéricos é hiperbólico e pela proposição anterior é homoclinicamente relacionado com p, dessa forma pelo Teorema 3.3.5 existem as constantes $C > 0$, $0 < \mu < 1$ e $m > 0$ tais que

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Df^m \mid E^s(f^{im}(q)) \| < C\mu^k$$

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Df^{-m} \mid E^u(f^{-im}(q)) \| < C\mu^k$$

tomando um $\lambda < \mu < 1$ existe um k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ temos $C\mu^k < \lambda^k$, ou seja

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Df^m \mid E^s(f^{im}(q)) \| < \lambda^k$$

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Df^{-m} \mid E^u(f^{-im}(q)) \| < \lambda^k$$

para todo q satisfazendo $[\frac{\pi(q)}{m}] = k \geq k_0$. $\square$

Capítulo 4

TEOREMA PRINCIPAL

Assumindo o Corolário 3.4.8 sabemos que existem constantes $m > 0$, $0 < \mu < 1$ e $L > 0$, onde é $q \in per(f)$ tal que $q \sim p$. Sendo $\gamma > 0$ tal que $(\mu(1+\gamma)) < 1$ existe um ν tal que se $x, y \in H(p)$ e $d(x,y) \leq \nu$ temos que

$$1 - \mu \leq \frac{\| Df^m \mid E^s(x) \|}{\| Df^m \mid E^s(y) \|} \leq 1 + \mu \tag{4.1}$$

4.1 Teorema

Teorema 4.1.1. *Existe um conjunto residual $\mathcal{R}$ em $Diff^1(M)$ tal que se $f \in \mathcal{R}$ tem um ponto periódico hiperbólico com classe homoclínica H(p) com expansividade C^1-robusta, então H(p) é um conjunto hiperbólico.*

Proof. Desejamos provar a hiperbolicidade de $H(p)$ então pela Proposição 2.2.2 basta provar que existe um $m > 0$ e um $\bar{k}$ tal que para todo $x \in H(p)$ existe um
$0 < k = k(x) < \bar{k}$ onde

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Df^m|_{E^s(f^{im}(x))} \| < \frac{1}{2}$$

e pela Proposição 2.2.2 temos garantido o comportamento hiperbólico .
Então supomos que a expressão 4.1 não seja verdadeira para uma quantidade infinita de pontos em $H(p)$. Para cada $m > 0$ existe $x_m \in H(p)$ e para esse um $\bar{k}_m$ arbitrariamente grande tal que para todo $0 < k \leq \bar{k}_m$ temos

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Df^m \mid E^s(f^{im}(x_m)) \| \geq \frac{1}{2}.$$

Definimos então

$$K = inf\{\| Df^m|_{E^s(x)} \|; x \in H(p)\}$$

e grosseiramente, a idéia é encontrar um absurdo da forma

$$\square K^{\diamond} \leq \bigcirc < \square K^{\diamond}$$

para isso usaremos a propriedade de contração dada pelo Corolário 3.4.8.

Como $\{x_m\}$ é uma sequência infinita em M que é um variedade compacta, admite uma subsequência $\{x_{m_k}\}$ que converge para um z em $H(p)$ e pela continuidade da norma, logo

$$\prod_{i=0}^{k-1} \| Df^m \mid E^s(f^{im}(z)) \| \geq \frac{1}{2}$$

pelas propriedades genéricas de f todo ponto periódico é hiperbólico e pela expressão acima temos que z não é, dessa forma $\{f^n(z)\}$ é uma sequência infinita e pelo mesmo argumento feito anteriormente possui um subsequência $\{f^{n_k}(z)\}$ que converge para um certo w que é um ponto de acumulação pelo fato da subsequência não ser constante dessa forma os iterados de $\{f^{n_k}(z)\}$ estão suficientemente próximos.

Agora utilizando z e w montaremos uma pseudo órbita periódica de z a z e usando o Lema 3.4.6 para criar um ponto periódico η-próximo dos ponto dos pontos da pseudo-órbita e usar o Corolário 3.4.8 para encontrarmos uma contradição.

Do Teorema da Decomposição Espectral temos que $f^{\pi(p)}|_{H(p)}$ é topologicamente misturadora, então tomando as bolas $B(\frac{\theta}{2}, w)$ e $B(\theta, z)$ existe $n_0 = k_0\pi(p)$ tal que para todo $m \geq 1$ temos $B(\frac{\theta}{2}, w) \cap f^{m.n_0}(B(\theta, z)) \neq \emptyset$, isso nos diz que existe um $z_1 \in B(\frac{\theta}{2}, w)$ tal que $f^{m.n_0}(z_1) \in B(\theta, z)$, ou seja $d(z_1, w) < \frac{\theta}{2}$ e $d(z, f^{m.n_0}(z_1)) < \theta$.

e um j_0 tal que tenhamos $[\mu(1+\gamma)]^{n_0+j} < \frac{1}{2}K^{n_0}$ para todo $j > j_0$. Usando o fato de w ser um ponto de acumulação, podemos escolher um $i_k > j_0$ tal que $d(f^{i_k.m}(z), w) < \frac{\theta}{2}$ assim temos por continuidade que $f^{i_k.m+1}(z)$ está $\frac{\theta}{2}$-próximo de w, sendo que esse último está $\frac{\theta}{2}$- próximo do z_1. Agora podemos determinar uma θ-pseudo órbita periódica da seguinte forma

$$z, f(z), ..., f^{i_k.m}(z), z_1, ..., f^{n_0.m}(z_1), z.$$

Pelo Lema 3.4.6 dado $0 < \eta < 1$ existe um θ (o mesmo da construção acima que pode ser diminuido se necessário) tal que existe uma órbita periódica $\mathcal{O}(q)$ que η-sombreia a órbita acima e com o período $m(i_k + n_0)$ ou múltiplo, pois podemos ter fechado a θ-pseudo órbita bem antes do especificado. Para usarmos o Corolário 2.2.2 para o ponto q a constante L deve satisfazer $k > L$ lembrando que $k = [\frac{\pi(q)}{m}]$ como m é fixo sabemos que quanto menor for o η, maior será o $\pi(q)$ e assim cumprindo as hipóteses. Por 4.1

temos que o produto dos n_0 termos

$$\| Df^m \mid E^s(z) \|, \| Df^m \mid E^s(f^m(z)) \| ,... \| Df^m \mid E^s(f^{(i_k-1).m}(z)) \|,$$

$$\| Df^m \mid E^s(z_1) \|, ..., \| Df^m \mid E^s(f^{(n_0-1).m}(z_1)) \|$$

não excede K^{n_0} então

$$\frac{1}{2}K^{n_0} \leq \prod_{i=0}^{i_k-1} \| Df^m \mid E^s(f^{im}(z)) \| . \prod_{i=0}^{n_0-1} \| Df^m \mid E^s(f^{im}(z_1)) \| .$$

Como a propriedade de sombreamento garante que

$$d(f^{im}(z), q) < \eta < \nu$$

$$d(f^{im}(z_1), q) < \eta < \nu$$

usamos 4.1, o Corolário 3.4.8 e 4.1 (já que $i_k - 1 \geq j_0$)

$$\frac{1}{2}K^{n_0} \leq \prod_{i=0}^{i_k-1}(1+\gamma) \| Df^m \mid E^s(f^{im}(q)) \| \prod_{i=0}^{n_0-1}(1+\gamma) \| Df^m \mid E^s(f^{im}(q)) \|$$

$$= \prod_{i=0}^{i_k+n_0-1} (1+\gamma) \| Df^m \mid E^s(f^{im}(q)) \|$$

$$\leq (1+\gamma)^{i_k+n_0-1}\mu^{i_k+n_0-1} < \frac{1}{2}K^{n_0}$$

contradição. □

4.2 Outros Resultados

Para provarmos o Lema 3.4.3 usamos um argumento genérico. Supomos a existência de uma sequência $\{q_n\}$ em S com certas propriedades e $\{y_n\}$ em $W^{cs}_{\epsilon(q_n)}(q_n)$ satisfazendo

$$d(f^{m_n}(q_n), f^{m_n}(y_n)) = \epsilon_1$$

Para determinados $0 < m_n < \pi(q_n)$, tomando subsequência vimos que $f^{m_n}(q_n) \to x \in H(p)$ e $f^{m_n}(y_n) \to y$, tais que

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leq \epsilon_1$$

para $k \in \mathbb{Z}$, provamos que para difeomorfismo genérico $y \in H(p)$, com a expressão da penúltima linha chegamos à contradição da expansividade C^1-robusta de f sobre a classe homoclínica. Assim se conseguirmos uma outra forma de contradizer a expansividade C^1-robusta sem utilizar argumentos genéricos estaremos abrindo o caminho para provar a hiperbolicidade da classe com respeito aos difeomorfismos com as hipóteses impostas. Com esse objetivo definimos o seguinte

Definição 4.2.1. Dado um conjunto compacto f-invariante $\Lambda \subset M$ nós dizemos que o Λ-germe de f é expansivo ,se existe $\delta > 0$ tal que se $x \in H(p)$, $y \in M$ e

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ então $y = x$.

Essa noção é uma fomar mais abrangente de hiperbolicidade no sentido de que pede-se além do subconjunto ser expansivo tal caracteristica se 'espalhe' pelo espaço todo. Em [SV]assume-se que $H(p)$-germe de f é expansivo para provar o seguinte resultado semelhante ao que provamos anteriormente, sem necessidade de suposição genérica

Lema 4.2.2. *Seja $f \in Diff^1(M)$ e $H(p)$ com expansividade C^1-Robusta. Para α é a constante de expansividade de $H(p,f)$. Então dado $\epsilon_1 > \alpha$, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que acontece o seguinte:*
a) Para todo $q \in S$ temos $f(W^{cs}_{\epsilon_2}(q)) \subset W^{cs}_{\epsilon_1}(f^n(q)), \forall n \geq 0$. Similarmente para as centro-instáveis.
b)Se $\epsilon_1 < \alpha$ onde α é a constante de expansividade do $H(p)$-germe de f, entaõ para todos $y \in W^{cs}_{\epsilon_2}(q)$ e $q \in S$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(q), f^n(y)) = 0.$$

Similarmente temos para as variedades centro-instáveis.

A idéia da demonstração é semelhante ao que fizemos, mas em vez de usar argumentos genéricos para mostrarmos que $y \in H(p)$, usaremos a hipótese adicional de que o $H(p)$-germe é expansivo. Portanto ainda que y não esteja em $H(p)$ como $x \in H(p)$ temos que isso contradiz a expansividade de f sobre a classe. Pela semelhança com o Lema 3.4.3 usando a hipótese da germe expansividade de $H(p)$ no lugar da argumentação genérica para provar b), se $y \in H(p)$ contradiz a robustez da expansividade de f sobre a classe, ou se y não está em $H(p)$ lembrado que $x \in H(p)$ e $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \epsilon_1$, que contradiz o fato de $H(p)$ ser um germe expansivo de f.

O que prova o resultado. No mesmo trabalho também prova-se, como mostramos no Corolário 3.4.4 que as variedades $W^{cs}_{\epsilon_2}(x)$ e $W^{cu}_{\epsilon_2}(x)$ para todo $x \in H(p)$ são verdadeiras variedades estáveis e instáveis, como faz uso apenas do Lema 4.2.2, tal resultado também é válido para todo difemorfismo $f \in Diff^1(M)$ com expansividade C^1-robusta em $H(p)$ e com classe sendo um germe expansivo. Nessas condições temos também que

- $H(p)$ Tem estrutura de produto local
- $H(p)$ Tem a propriedade de sombreamento

Para provarmos a Proposição 3.4.8 usamos o argumento genérico de que todo ponto periódico é hiperbólico. Como não queremos usar os argumentos genéricos usamos também a hipótese de que $H(p)$ seu germe é expansivo e provamos que

$$W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$$

$$W^s(q) \cap W^u(p) \neq \emptyset.$$

Para garantirmos que $indice(p) = indice(q)$, é preciso que q seja periódico hiperbólico, então se caso não seja, se fizermos uma pequena C^1-perturbação em f obtemos um difeomorfismo g tal que q seja hiperbólico, e tenha autovalores arbitrariamente próximos de 1, assim g ainda tem expansividade C^1-robusta o que contradiz o Teorema 3.3.5. Também temos como no Corolário 4.2.2 que o Teorema 3.3.5 é válido para periódico q. Portanto com esses resultados podemos provar

Teorema 4.2.3. *Seja $f \in Diff^r(M)$ onde $r \geq 1$ tem um ponto periódico hiperbólico p com classe homoclínica $H(p)$ com expansividade C^1-robusta e $H(p)$ é germe-expansivo. Então $H(p)$ é hiperbólico.*

Uma outra situação é quando M é uma superfície, Teorema 4.1.1 segue direto de

Teorema 4.2.4. *([PS]) Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^2 e M uma superfície. Se $\Lambda \subset \Omega(f)$ é um conjunto compacto f-invariante com decomposição dominada $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$ e com todos seus pontos periódicos hiperbólicos sela. Então $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, onde Λ_1 é um conjunto hiperbólico e Λ_2 é a união de uma quantidade finita círculos normalmente hiperbólicos $C^1, ..., C^k$ dois a dois disjuntos tais que $f^{m_i}(C_i) = C^i$ e $f^{m_i}|_{C^i}$ é uma rotação irracional, para algum $m_i \geq 1$*

Como a classe homoclínica $H(p)$ é invariante compacta e ainda em [PS] é provado que tem decomposição dominada, mas $H(p)$ não pode ter os circulos normalmente hiperbólicos. De fato se existisse algum desses circulos, para algum iterado de f restrito a esse círculo deveria ser conjugado a uma rotação irracinal, o que não pode acontecer já que $H(p)$ é um conjunto invariante e expansivo. Portanto em comparação com o teorema acima, escrevendo $H(p) = \Lambda$, temos que $\Lambda_2 = \emptyset$, logo a $H(p) = \Lambda_1$ é hiperbólico.

Apêndice A
MÉTRICA

Seja $\widetilde{d}$ uma métrica em Λ e ϵ a constante de expansividade de f, vemos agora expansividade da seguinte forma

$$\exists\, \epsilon > 0 \,\text{tal que dados}\, x, y \in \Lambda \;\; \text{temos} \;\; sup_{n\in\mathbb{Z}}\widetilde{d}(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon$$

Teorema A.0.5. *Se Λ um espaço métrico e $f : \Lambda \to \Lambda$ é um homeomorfismo expansivo, então existe uma métrica D em Λ definindo uma mesma topologia que uma métrica $\widetilde{d}$ em Λ e números $r > 0$ e $k > 1$ tais que*

$$\forall x, y \in \Lambda : max\{D(f(x), f(y)), D(f^{-1}(x), f^{-1}(y))\} \geq min\{kD(x, y), r\}$$

Proof. Definimos o número $\phi(x, y) = \infty$ se $x = y$ caso contrário, se $x \neq y$
$\phi(x, y) = min\{n_0 \in \mathbb{N} | max_{|n|\leq n_0}\widetilde{d}(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon\}$
indicando o tempo mínimo para o afastamento ϵ no passado e(ou) no futuro da órbita de pontos e vale a pena ressaltar que a quantidade de inteiros tal que $|n| \leq n_0$ é finita, pois ϵ é a constante de expansividade. Definimos para uma $\alpha > 1$ uma aplicação

$$\rho : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R}_+$$

dada por $\rho(x, y) = \alpha^{\phi(x,y)}$ e da definição é imediato que $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ e $\rho(x, y) = 0$ se, e somente, se $x = y$. Poderíamos por entusiasmo indagar que ρ define uma métrica em Λ, mas tal fato não confere pois dados x e y em λ tomados arbitrariamente próximos e um z com distância de x , y bem próxima de ϵ, por continuidade temos que $\rho(x, y)$ é arbitrariamente grande e ambos os valores $\rho(x, z)$ e $\rho(z, y)$ são menores que $\rho(x, y)$, logo não necessariamente ρ satisfaz a desigualdade triangular. No entanto ρ define a mesma topologia que $\widetilde{d}$, isso decorre da expansividade de f.Se

$$\max_{|i|\leq n-1} \rho(f^i(x), f^i(y)) = \max_{|i|\leq n-1} \alpha^{\phi(f^i(x), f^i(y))} \leq \frac{1}{\alpha} \tag{A.1}$$

O máximo em questão não excede $\frac{1}{\alpha}$ e é obtido quando o expoente é mínimo, logo está descartada a hipótese de $\phi(f^i(x), f^i(y))$ ser zero, para todo i, consequentemente temos que para x , y até o iterado $|n-1|$ não estão a uma distancia superior a ϵ então

$$\max_{|i|\leq n-1} \rho(f^i(x), f^i(y)), \rho(f^{-i}(x), f^{-i}(y)) \geq \alpha^n \rho(x, y).$$

Agora faremos uma escolha precisa do α. Pela hipótese de expansividade podemos encontar um m tal que para os pontos $x, y \in \Lambda$ satisfazendo $\widetilde{d}(x, y) > \frac{\epsilon}{2}$, dessa forma escolhemos o α por $\alpha^m \leq 2$.

Dados pontos $x, y \in \Lambda$ e um z tal que $\widetilde{d}(x, z) > \frac{\epsilon}{2}$ e $\widetilde{d}(y, z) > \frac{\epsilon}{2}$. Usando a desigualdade triangular e pela definição de m acima

$$\begin{aligned}
\phi(z, y) &= \max_{|n|\leq n_0} \widetilde{d}(f^n(z), f^n(y)) \\
&\leq \max_{|n|\leq n_0} \widetilde{d}(f^n(z), f^n(x)) + \max_{|n|\leq n_0} \widetilde{d}(f^n(x), f^n(y)) \\
&\leq m + \phi(x, y)
\end{aligned}$$

igualmente tem

$$\phi(z, x) \leq m + \phi(x, y)$$

o que equivale a

$$\rho(z, y) \geq \alpha^{-m} \rho(x, y) \geq \frac{\rho(x, y)}{2} \rho(z, x) \geq \alpha^{-m} \rho(x, y) \geq \frac{\rho(x, y)}{2}$$

e das expressões concluímos

$$\rho(x, y) \leq 2 \max\{\rho(z, x), \rho(z, y)\}$$

Pelo Teorema da Metrização de Fink's [Fi] existe uma métrica $\widetilde{D}$ tal que

$$\widetilde{D}(x, y) \leq \rho(x, y) \leq 4\widetilde{D}(x, y) \tag{A.2}$$

A expressão anterior indica que há uma equivalência entre as métricas, logo definem a mesma topologia. Assim se A.1 é satisfeita por D, de A.2 temos que

$$\max_{|i|\leq n-1} \widetilde{D}(f^n(x), f^n(y)), \widetilde{D}(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \geq \frac{\alpha^n}{4} \widetilde{D}(x, y).$$

Para a expressão $\frac{\alpha^n}{4}$ (lembrando que $\alpha > 1$) escolhemos um $n = n_0$ tal que o número $k = \alpha 4^{\frac{1}{n_0}} > 1$. Finalmente definimos a métrica procurada por

$$D(x, y) = \max_{|i|\leq n_0 - 1} \frac{\widetilde{D}(f^i(x), f^i(y))}{k^i} \tag{A.3}$$

é fácil de ver que realmente define uma métrica e a mesma topologia de $\widetilde{D}$. Pela definição de D temos que

$$\max\{D(f(x),f(y)),D(f^{-1}(x),f^{-1}(y))\} \geq \max_{0<|i|\leq n_0} \frac{\widetilde{D}(f^i(x),f^i(y))}{k^{|i|-1}} \tag{A.4}$$

que é o máximo dos valores

$$A = \max_{0<|i|<n_0} \frac{\widetilde{D}(f^i(x),f^i(y))}{k^{|i|-1}} = k \max_{0<|i|<n_0} \frac{\widetilde{D}(f^i(x),f^i(y))}{k^{|i|}} \tag{A.5}$$

$$B = \max \frac{\widetilde{D}(f^{n_0}(x),f^{n_0}(y))}{k^{n_0}}.$$

Semelhante a argumentação de A.1 se $D(x,y) < \frac{1}{4\alpha k^{n_0-1}}$ por A.4 e A.5 que temos

$$B \geq kD(x,y) \tag{A.6}$$

Se $D(x,y) \geq \frac{1}{4\alpha k^{n_0-1}}$ então por A.5 e A.6 temos que

$$\max\{D(f(x),f(y)),D(f^{-1}(x),f^{-1}(y))\} \geq kD(x,y).$$

Sendo Λ compacto, podemos encontrar um $r > 0$ arbitrariamente pequeno tal que para os pontos que satisfazem $D(x,y) < \frac{1}{4\alpha k^{n_0-1}}$ temos

$$\max\{D(f(x),f(y)),D(f^{-1}(x),f^{-1}(y))\} \geq r.$$

Portanto para todo $x,y \in \Lambda$ temos que

$$\max\{D(f(x),f(y)),D(f^{-1}(x),f^{-1}(y))\} \geq \min\{kD(x,y),r\}.$$

$\square$

REFERÊNCIAS

[1] C. Bonatti and S. Crovisier. Recurrence and genericity. *Comptes Rendus Mathematique*, 336(10):839–844, 2003.

[2] C. Bonatti, L. Díaz, and M. Viana. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective*, volume 221. Springer Verlag, 2004.

[3] R. Bowen. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470. Springer Verlag, 2008.

[4] C. Carballo, C. Morales, and M. Pacifico. Homoclinic classes for generic c^1 vector fields. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(2):403–416, 2003.

[5] S. Hayashi. Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω-stability conjectures for flows. *Annals of Math.*, 145:81–137, 1997.

[6] M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub. *Invariant manifolds*, volume 583 of *Lect. Notes in Math.* Springer Verlag, 1977.

[7] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, 1995.

[8] R. Mañé. An ergodic closing lemma. *Annals of Math.*, 116:503–540, 1982.

[9] R. Mañé. A proof of the C^1 stability conjecture. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 66:161–210, 1988.

[10] M. Pacifico, E. Pujals, M. Sambarino, and J. Vieitez. Robustly expansive codimension-one homoclinic classes are hyperbolic. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 29(1):179, 2010.

[11] M. Pacifico, E. Pujals, and J. Vieitez. Robustly expansive homoclinic classes. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25(1):271–300, 2005.

[12] J. Palis and W. de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems*. Springer Verlag, 1982.

[13] C. Pugh. An improved closing lemma and a general density theorem. *Amer. J. of Math.*, 89:1010–1021, 1967.

[14] E. Pujals and M. Sambarino. Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms. *Annals of Mathematics-Second Series*, 151(3):961–1024, 2000.

[15] M. Sambarino and J. Vieitez. On c^1-persistently expansive homoclinic classes. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 14(3):465, 2006.

[16] M. Sambarino and J. Vietez. c^1-robustly expansive homoclinic classes are generically hyperbolic. *preprint*, 2008.

[17] M. Shub. *Global stability of dynamical systems*. Springer Verlag, 1987.

[18] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Am. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.

[19] S. Smale. Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms. *Topologia differenziale*, pages 93–126, 2011.