



PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Sidnei Furtado Costa

**Subvariedades tipo-espaço completas imersas no espaço
de De Sitter $S_p^{n+p}(1)$ com vetor curvatura média paralelo.**

São Luís - MA

2012

Sidnei Furtado Costa

**Subvariedades tipo-espaço completas imersas no espaço
de De Sitter $S_p^{n+p}(1)$ com vetor curvatura média paralelo.**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do
Programa de Pós-Graduação em Matemática da
UFMA como requisito parcial para obtenção do
título de **Mestre em Matemática** sob a orientação
do **Professor Doutor Maxwell Mariano de Bar-
ros**.

São Luís - MA

2012

Sidnei Furtado Costa

**Subvariedades tipo-espaço completas imersas no espaço
de De Sitter $S_p^{n+p}(1)$ com vetor curvatura média paralelo.**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do
Programa de Pós-Graduação em Matemática da
UFMA como requisito parcial para obtenção do
título de **Mestre em Matemática** sob a orientação
do **Professor Doutor Maxwell Mariano de Bar-
ros**.

Dissertação aprovada em 24 de Maio de 2012, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(ORIENTADOR) Dr. Maxwell Mariano de Barros (UFMA)

Dr. Barnabé Pessoa Lima (UFPI)

Dr. Axel Peter Winterhalder (UEMA)

AGRADECIMENTOS

A Deus por sua generosidade.

A minha mãe Maria das Graças, pelo amor, dedicação e por sua interminável fé em mim.

Ao meu orientador prof. Dr. Maxwell Mariano de Barros, por sua paciência durante esse último ano de mestrado e por sua contribuição na pesquisa e no desenvolvimento desta dissertação.

Ao grande amigo e colega de mestrado Raimundo Nonato Launé Macêdo, pelo apoio e por seus diversos conselhos, que não se limitaram ao ambiente matemático.

Ao prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo, por ter dado crédito a um novato em matemática, sempre incentivando e ajudando no que fosse necessário.

Aos demais professores, servidores e colegas da Universidade Federal do Maranhão, cujo contato, de alguma forma, me permitiu obter algum aprendizado.

Aos professores do Departamento de Matemática e Informática da Universidade Estadual Maranhão, pela oportunidade que me foi dada de fazer parte deste departamento. Este fato foi, sem dúvida, o mais importante incentivo para a continuação deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho consideramos uma subvariedade completa tipo-espaço M^n imersa no espaço de De Sitter $S_p^{n+p}(1)$ com vetor curvatura média paralelo. Usamos uma desigualdade tipo Simons para obter alguns resultados de rigidez caracterizando subvariedades totalmente umbilicas e cilindros hiperbólicos em $S_p^{n+p}(1)$.

Palavras-chave: espaço de De Sitter, subvariedade tipo-espaço, vetor curvatura média paralelo, desigualdade de Simons.

ABSTRACT

In this work we consider a complete spacelike submanifold M^n immersed in the De Sitter space $S_p^{n+p}(1)$ with parallel mean curvature vector. We use a Simons type inequality to obtain some rigidity results characterizing umbilical submanifolds and hyperbolic cylinders in $S_p^{n+p}(1)$.

Keywords: De Sitter space, spacelike submanifolds, parallel mean curvature vector, Simons type inequality.

SUMÁRIO

	Page
Capítulo 1: Variedades Diferenciáveis	6
1.1 Aplicações diferenciáveis	7
1.2 Vetores Tangentes	7
1.3 Diferencial	10
1.4 Fibrado tangente	10
1.5 Fibrado cotangente	12
1.6 Subvariedades	13
1.7 Imersões	14
Capítulo 2: Tensores	16
2.1 Álgebra básica	16
2.2 Campo de tensores	16
2.3 Formas bilineares simétricas	18
2.4 Produto escalar	18
Capítulo 3: Variedades semi-Riemannianas	20
3.1 Métrica	20
3.2 Partição da unidade	21
3.3 Conexões	23
3.4 Transporte Paralelo e Geodésicas	25
3.5 Conexão Riemanniana	26
3.6 Curvatura	28
3.7 Curvatura Seccional	29
3.8 Curvatura de Ricci e curvatura escalar	30
3.9 Alguns operadores diferenciais	32
Capítulo 4: Subvariedades	34
4.1 Introdução	34
4.2 A conexão induzida	34
4.3 A equação de Codazzi	37
Capítulo 5: Definições e Equações Fundamentais	38
5.1 Equações de estrutura	38
5.2 Lema de Cartan	41

5.3	Equações fundamentais	43
5.4	Uma desigualdade tipo Simons	49
5.5	O Princípio do Máximo	52
Capítulo 6:	Resultados de rigidez	54
6.1	Teorema Principal	54
Referências		61

INTRODUÇÃO

Uma variedade semi-Riemanniana conexa de dimensão $n + p$, índice p e de curvatura constante c , será chamada uma *forma espacial indefinida* de índice p e notada por $Q_p^{n+p}(c)$. Em particular, se $c > 0$, nós a chamamos de espaço de De Sitter de índice p e a denotamos por $S_p^{n+p}(c)$. Uma imersão $\psi : M^n \rightarrow S_p^{n+p}(c)$ é chamada *tipo espaço* se a métrica induzida em M^n da métrica de $S_p^{n+p}(c)$ é positiva definida.

Em 1977 A.J. Goddard [11] conjecturou que hipersuperfícies completas tipo espaço com curvatura média constante no espaço de De Sitter S_1^{n+1} são totalmente umbílicas. Mas desde 1981 é conhecido um contra exemplo de Dajczer e Nomizu [9] de uma superfície de curvatura média constante $H > 1$ em S_1^3 que não é totalmente umbílica, dado a seguir.

Exemplo 0.0.1. Para $r > 0$ seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1^3$ dada por

$$f(x, y) = \left(r \cosh \frac{x}{r}, r \sinh \frac{x}{r}, \sqrt{1+r^2} \cos \frac{y}{\sqrt{1+r^2}}, \sqrt{1+r^2} \sin \frac{y}{\sqrt{1+r^2}} \right).$$

Esta é uma imersão planar com curvaturas principais $\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$ e $\frac{\sqrt{1+r^2}}{r}$.

Claramente f não é umbílica e $H > 1$.

A primeira solução parcial para a conjectura de Goddard foi dada por J. Ramathan.

Teorema 0.0.1. ([27], 1987) *Seja $\psi : M^2 \rightarrow S_1^3$ uma imersão completa tipo espaço com curvatura constante H , com $H^2 < 1$. Então ψ é totalmente umbílica.*

Exemplo 0.0.2. Seja $r \geq 0$ e defina $f_r : S^2 \rightarrow S_1^3$ por $f_r(x) = (\sinh rx, \cosh rx)$. A imersão f_r tem curvatura constante $H = \tanh(r)$. Então, existe uma superfície completa tipo espaço em S_1^3 com curvatura média constante H para todo $H^2 < 1$ [27].

Teorema 0.0.2. ([2], 1987) *Seja $M^{n+1}(c)$ uma variedade de Lorentz de dimensão $n + 1$ e curvatura constante $c > 0$. Seja M^n uma hipersuperfície completa tipo espaço com curvatura constante H imersa em $M^{n+1}(c)$ tal que*

1. $|H| \leq c^{\frac{1}{2}}$ se $n + 2$;
2. $|H| < 2[(n - 1)c]^{\frac{1}{2}}/n$, se $n > 2$.

Então M^n é totalmente umbílica.

Um ano depois, S. Montiel resolveu a conjectura de Goddard para hypersuperfícies tipo espaço compactas em S_1^{n+1} sem restrição sobre o valor da curvatura média H .

Teorema 0.0.3. ([21], 1988) *Seja M^n uma hypersuperfície tipo espaço compacta imersa no espaço de De Sitter S_1^{n+1} com curvatura média constante H . Então ela é totalmente umbílica. Além do mais, a menos de um movimento rígido em S_1^{n+1} , M^n coincide com alguma das hypersuperfícies descritas no exemplo abaixo.*

Exemplo 0.0.3. Defina

$$M_{\sigma,\tau}^n = \{x \in S_1^{n+1}; \langle x, a \rangle = \tau\},$$

onde $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+2}$, $|a|^2 = \sigma = 0, 1, -1$ e $\tau^2 > \sigma$. A segunda forma fundamental B de $M_{\sigma,\tau}^n$ é dada por

$$Bv = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \sigma}}v$$

para v tangente a $M_{\sigma,\tau}^n$. Assim, $M_{\sigma,\tau}^n$ é umbílica com curvatura média $H^2 = \frac{\tau^2}{(\tau^2 - \sigma)}$. É possível verificar que $M_{\sigma,\tau}^n$ cai em uma das seguintes três categorias:

- a) se $\sigma = 1$, então $M_{1,\tau}^n$ é isométrica a um espaço hiperbólico de dimensão n , curvatura seccional $\frac{-1}{\tau^2 - 1}$ e H^2 assume valores no intervalo $(1, \infty)$;
- b) se $\sigma = 0$, então $M_{0,\tau}^n$ é isométrica ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e $H^2 = 1$;
- c) Se $\sigma = -1$, então $M_{-1,\tau}^n$ é isométrica a uma esfera de dimensão n com curvatura seccional constante $\frac{1}{\tau^2 + 1}$ e H^2 assume valores no intervalo $[0, 1)$.

Observação 0.0.1. Os exemplos acima descrevem todas as hypersuperfícies tipo espaço (totalmente) umbílicas em S_1^{n+1} . De fato, se M^n é umbílica, N um vetor ortonormal em M e λ o autovalor da segunda forma fundamental, façamos $a = \lambda i + N$, onde $i : S^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ é a inclusão natural. Então $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ é constante, $|a|^2 = \lambda^2 - 1$ e M^n está contido na interseção de S_1^{n+1} e o hiperplano de $\mathbb{R}_1^{n+1}$ determinado por a .

Exemplo 0.0.4. As outras, bem conhecidas, hipersuperfícies completas tipo espaço com curvatura média constante são dadas por

$$M^n = \{p \in S_1^{n+1} : p_{k+1}^2 + \cdots + p_{n+1}^2 = \cosh^2 r\},$$

quando $r \in \mathbb{R}$ e $1 \leq k \leq n$. É possível provar que M é isométrica ao produto Riemanniano $H^k(\sinh r) \times S^{n-k}(\cosh r)$ de um espaço hiperbólico n -dimensional e uma esfera $(n - k)$ -dimensional de raio $\sinh r$ e $\cosh r$, respectivamente. M tem k curvaturas principais iguais a $\coth r$ e $(n - k)$ curvaturas principais iguais a $\tanh r$, então a curvatura média é dada por

$$nH = k \coth r + (n - k) \tanh r.$$

Quando $k = 1$ a hipersuperfície M é isométrica ao produto Riemanniano $H^1(\sinh r) \times S^{n-1}(\cosh r)$ e é chamada um *cilindro hiperbólico*.

Em [22], Montiel provou o seguinte teorema:

Teorema 0.0.4. *Seja M^n ($n \geq 3$) uma hipersuperfície completa tipo espaço no espaço de De Sitter $S_1^{n+1}(1)$, com curvatura média constante $H = 2\sqrt{(n-1)}/n$. Se M não é conexa no infinito, isto é, M tem pelo menos dois fins, então M é, a menos de isometrias, um cilindro hiperbólico.*

Em 1997, Li [13], descobriu que o resultado de Montiel, acima, ainda se mantém para subvariedades completas tipo espaço de altas codimensões no espaço de De Sitter $S_p^{n+p}(1)$. De fato, ele provou o seguinte teorema

Teorema 0.0.5. *Seja M^n ($n \geq 3$) uma hipersuperfície completa tipo espaço no espaço de De Sitter $S_p^{n+p}(1)$, com vetor curvatura média paralelo. Se $H^2 = 4(n-1)/n^2$ e M não é conexa no infinito, isto é, M tem pelo menos dois fins, então M é, a menos de isometrias, um cilindro hiperbólico em $S_1^{n+1}(1)$.*

Em 1991, Ki, Kim, Nakagawa [16, p. 206] obtiveram os seguintes resultados

Teorema 0.0.6. *Seja M uma hipersuperfície completa tipo espaço com curvatura média constante de uma forma espacial de Lorentz $M_1^{n+1}(c)$. Se ela satisfaz uma das seguintes propriedades:*

a) $c \leq 0$,

b) $c > 0, n \geq 3$ e $n^2 H^2 \geq 4(n-1)c$,

c) $c > 0, n = 2$ e $n^2 H^2 > 4c$,

então $S \leq S_+(1)$, onde S é a norma da segunda forma fundamental de M e $S_+(1)$ é uma constante positiva cujo quadrado é definido por

$$-nc + \frac{n}{2(n-1)} \left(n^2 H^2 + (n-2)H\sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)c} \right).$$

Se a igualdade for satisfeita em um ponto $p \in M$, então $\nabla B(p) = 0$

Como uma aplicação do teorema acima, um cilindro hiperbólico de uma forma espacial de Lorentz pode ser caracterizado.

Teorema 0.0.7. *O cilindro hiperbólico é a única hipersuperfície tipo-espaço completa com curvatura média constante não nula de $M_1^{n+1}(c)$, cuja norma da segunda forma fundamental é igual a $S_+(1)$.*

Em 2001, X. Liu [18, p. 241], obteve o seguinte resultado

Teorema 0.0.8. *Seja M^n ($n \geq 3$) uma subvariedade completa tipo espaço no espaço de De Sitter $S_p^{n+p}(c)$ com vetor curvatura média paralelo. Se $H^2 = 4(n-1)c/n^2$, então M^n é totalmente umbílica, ou M^n é o cilindro hiperbólico $H^1(c_1) \times S^{n-1}(c_2)$ em $S_1^{n+1}(c)$, ou M^n tem volume ilimitado e curvatura de Ricci positiva e $\int_{M^n} S^m dv = \infty$ para qualquer m , onde S é a norma quadrada da segunda forma fundamental de M^n .*

Observação 0.0.2. Na notação de [16, p. 209], $H^1(c_1) \times S^{n-1}(c_2)$ é definida por

$$H^1(c_1) \times S^{n-1}(c_2) = \{(x, y) \in S_1^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_1^{n+2} = \mathbb{R}_1^2 \times \mathbb{R}^n : |x|^2 = -1/c_1, |y|^2 = 1/c_2\}.$$

onde $c_1 < 0, c_2 > 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1/c$.

Em 2003, Brasil, Colares e Palmas obtiveram em [4] um interessante teorema.

Teorema 0.0.9. *Seja $M^n, n \geq 3$, uma hipersuperfície completa tipo espaço em S_1^{n+1} com curvatura média constante $H > 0$. Então $\sup |\phi|^2 < \infty$ e*

a) $\phi \equiv 0$ e M^n é totalmente umbílica; ou

b) $B_H^- \leq \sqrt{\sup |\phi|^2} \leq B_H^+$, onde $B_H^- \leq B_H^+$ são as raízes do polinômio

$$P_H(x) = x^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx + n(1-H^2). \quad (1)$$

Uma generalização do resultado acima para altas codimensões foi obtida por Brasil, Rosa Chaves e Colares em [5], no ano de 2006. Como aplicação deste teorema foi possível caracterizar subvariedades totalmente umbílicas e cilindros hiperbólicos em $S_p^{n+p}(1)$.

Teorema 0.0.10. *Seja M^n ($n \geq 3$) uma subvariedade tipo-espaço completa no espaço de De Sitter $S_p^{n+p}(1)$ com vetor curvatura média paralelo. Então ou*

- a) $H^2 < \frac{4(n-1)}{n^2}$ e M^n é totalmente umbílica ou
- b) $H^2 \geq \frac{4(n-1)}{n^2}$ e $\max\{0, \alpha^-(n, H, p)\} \leq \sup |\Phi| \leq \alpha^+(n, H, p)$, onde $\alpha^-(n, H, p)$ e $\alpha^+(n, H, p)$ são as raízes reais do polinômio quadrático

$$P_H(x) = \frac{x^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx + n(1-H^2). \quad (2)$$

Além do mais, se a igualdade for satisfeita e M é não totalmente umbílica então $p = 1$.

Nesta dissertação, faremos um estudo da demonstração do teorema 0.0.10, iniciando com algumas noções básicas sobre variedades diferenciáveis até os conceitos fundamentais que tornarão possíveis um total entendimento mesmo.

Grande parte do que é mostrado nos capítulos 1, 2, 3 e 4 encontra-se em O'neil [25] de maneira mais detalhada.

Capítulo 1

VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS

Um *sistema de coordenadas* (ou *carta*) em um espaço topológico S é um homeomorfismo ζ de um aberto $\mathcal{U} \in S$ em um aberto $\zeta(\mathcal{U})$ de $\mathbb{R}^n$. Se nós escrevermos

$$\zeta(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \quad \text{para cada } p \in \mathcal{U}$$

as funções resultantes $x^1, \dots, x^n$ são chamadas de *funções coordenadas* de ζ . Então

$$\zeta = (x^1, \dots, x^n) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Aqui nós chamamos n a *dimensão* de ζ .

Dois sistemas de coordenadas n -dimensionais ζ e η em S são chamados *admissíveis* se as funções $\zeta \circ \eta^{-1}$ e $\eta \circ \zeta^{-1}$ são ambas diferenciáveis. Explicitamente se $\zeta : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\eta : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$, então $\eta \circ \zeta^{-1}$ é definida no conjunto aberto $\zeta(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ e tomando valores em $\eta(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$. Estas funções são então necessariamente diferenciáveis no sentido Euclideano.

Definição 1.0.1. Um atlas $\mathcal{A}$ de dimensão n em um espaço S é uma coleção de sistemas de coordenadas n -dimensionais em S tais que

- (A1) cada ponto de S está contido no domínio de algum sistema de coordenadas $\mathcal{V}$, e
- (A2) quaisquer dois sistemas de coordenadas em $\mathcal{A}$ são admissíveis.

Um atlas em S faz com que seja possível fazer cálculos consistentemente em todo o S . Chame um atlas $\mathcal{C}$ em S *completo* se $\mathcal{C}$ contém cada sistema de coordenadas em S que é admissível com todos os sistemas de coordenadas de $\mathcal{C}$.

Lema 1.0.1. Cada atlas $\mathcal{A}$ em S está contido em um único atlas completo.

Demonstração. Se $\mathcal{A}$ tem dimensão n , seja $\mathcal{A}'$ o conjunto de todos os sistemas de coordenadas n -dimensionais em S que é admissível com cada elemento de $\mathcal{A}$.

a) $\mathcal{A}'$ é um atlas (de mesma dimensão que $\mathcal{A}$).

Sendo (A1) óbvia, considere (A2). Se $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{A}'$, então por simetria nós precisamos apenas provar que a função $\eta_1 \circ \eta_2^{-1}$ é diferenciável no sentido Euclidiano. Para qualquer ponto $p \in \mathbb{R}^n$ em seu domínio, escolha um $\xi \in \mathcal{C}$ cujo domínio contém $\eta_2^{-1}(p)$. Como uma composição de aplicações diferenciáveis, $(\eta_1 \circ \xi^{-1}) \circ (\xi \circ \eta_2^{-1})$ é diferenciável. Uma vez que esta função é igual a $\eta_1 \circ \eta_2^{-1}$ em uma vizinhança de p , esta última é diferenciável nesta vizinhança. Sendo diferenciabilidade uma propriedade local, a) segue.

b) $\mathcal{A}'$ é completo. Se um sistema de coordenadas $\xi \in S$ é admissível com qualquer elemento de $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, então por definição $\xi \in \mathcal{A}$.

c) $\mathcal{A}'$ é o único atlas completo contendo $\mathcal{A}$.

□

Definição 1.0.2. Uma *variedade diferenciável* M é um espaço de Hausdorff munido com um atlas completo.

1.1 Aplicações diferenciáveis

Consideremos inicialmente o caso das funções reais f definidas em uma variedade M , isto é, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas em M , então a composta $f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \rightarrow \mathbb{R}^1$ é chamada a *expressão coordenada* para f em termos de ξ . Denotaremos por $\mathfrak{F}(M)$ o anel das funções reais diferenciáveis em M .

Definição 1.1.1. Sejam M^m e N^n variedades. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é diferenciável quando a expressão coordenada $\eta \circ f \circ \xi^{-1}$ é diferenciável no sentido Euclidiano (e definida em um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$), para todo sistema de coordenadas ξ em M e η em N .

Definição 1.1.2. Um *difeomorfismo* $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável cuja inversa é também diferenciável.

1.2 Vetores Tangentes

Definição 1.2.1. Seja p um ponto de M . Um *vetor tangente* a M em p é uma função real $v : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$
2. $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

Em cada ponto $p \in M$ seja $T_p M$ o conjunto de todos os vetores tangentes a M em p . As definições usuais de adição de funções e multiplicação por escalar fazem de $T_p M$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Explicitamente

$$\begin{aligned}(v + w)(f) &= v(f) + w(f) \\ (av)(f) &= av(f) \text{ para todos } f \in \mathfrak{F}(M), a \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

e $T_p M$ é chamado o *espaço tangente a M em p* .

Definição 1.2.2. Seja $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ um sistema de coordenadas de M em p . Se $f \in \mathfrak{F}(M)$, seja

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi p)$$

onde $u^1, \dots, u^n$ são as coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$

Um cálculo simples mostra que a função

$$\partial_i|_p = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

que leva cada $f \in \mathfrak{F}(M)$ em $(\partial f / \partial x^i)(p)$ é um vetor tangente a M em p .

Lema 1.2.1. Seja $v \in T_p M$. (a) Se $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ são iguais em uma vizinhança de p , então $v(f) = v(g)$. (b) Se $h \in \mathfrak{F}(M)$ é constante em uma vizinhança de p , então $v(h) = 0$.

Este lema é um modo de expressar o fato que vetores tangentes são objetos locais, de outro modo: Se $\mathcal{U}$ é um conjunto aberto em M então, como uma variedade aberta, $\mathcal{U}$ tem espaço tangente $T_p \mathcal{U}$ em $p \in \mathcal{U}$. Se $v \in T_p \mathcal{U}$ defina

$$\bar{v}(f) = v(f|_{\mathcal{U}}) \quad \text{para todo } f \in \mathfrak{F}(M)$$

Evidentemente $\bar{v} \in T_p M$, e a função $v \rightarrow \bar{v}$ é um isomorfismo linear, e por simplicidade, doravante escreveremos apenas $T_p \mathcal{U} = T_p M$.

Teorema 1.2.1. Se $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ é um sistema de coordenadas de M em p , então os vetores coordenados $\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p$ formam uma base para o espaço tangente $T_p M$; e

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \partial_i|_p \quad \text{para todo } v \in T_p M$$

Demonstração. A demonstração utiliza uma adaptação da expressão coordenada de funções. Considere que $\varphi : U \rightarrow V$ seja uma carta onde supomos, sem perda de generalidade, que V é uma bola aberta de raio ε com $\varphi(p) = 0$, assim $x^1(p) = \dots = x^n(p) = 0$. Seja $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, e $f := h \circ \varphi$. Nós escrevemos

$$h_i(y) := \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial u^i}(t \cdot y) dt \quad (\text{nota : } h \in C^\infty \Rightarrow h_i \in C^\infty)$$

e efetuamos o seguinte cálculo:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial u^i}(t \cdot y) \cdot \frac{d(tu^i)}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t}(t \cdot y),$$

que implica

$$\sum_{i=1}^n h_i(y) \cdot u^i = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(t \cdot y) dt = h(y) - h(0).$$

Disto nós temos, usando as identidades $f = h \circ \varphi$, $f_i = h_i \circ \varphi$, $x^i = u^i \circ \varphi$, a equação

$$f(q) - f(p) = \sum_{i=1}^n f_i(q) \cdot x^i(q)$$

para um ponto variável q . Aplicando $\partial_i|_p$, nós temos por definição

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p = f_i(p).$$

Dado um vetor tangente $v \in T_p M$, temos

$$\begin{aligned} v(f) &= v \left(f(p) + \sum_{i=1}^n f_i \cdot x^i \right) = 0 + \sum_{i=1}^n v(f_i) \cdot x^i(p) + \sum_{i=1}^n f_i(p) v(x^i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot v(x^i) = \left(\sum_{i=1}^n v(x^i) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) (f) \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathfrak{F}(M)$. Resta mostrar que os vetores coordenados $\partial_i|_p$ são linearmente independentes. De fato, se $\sum a_i \partial_i|_p = 0$, então aplicando ambos os lados em x^j , temos:

$$0 = \sum a_i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (x^j) = \sum a_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \sum a_i \delta_i^j = a^j.$$

□

1.3 Diferencial

Se $v \in T_p M$ então a função $v_\phi : \mathfrak{F}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ que leva cada g em $v(g \circ \phi)$ é um vetor tangente a N em $\phi(p)$. Para provar a propriedade de Leibniz, por exemplo, sejam $f, g \in \mathfrak{F}(N)$, então

$$\begin{aligned} v_\phi(fg) &= v(fg \circ \phi) = v((f \circ \phi)(g \circ \phi)) = v(f \circ \phi)f(\phi p) + f(\phi p)v(g \circ \phi) \\ &= v_\phi(f)g(\phi p) + f(\phi p)v_{\phi p}v_\phi(g). \end{aligned}$$

Definição 1.3.1. Seja $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ a função

$$d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi p} N$$

levando v em v_ϕ é chamada a *diferencial* de ϕ em p .

Então $d\phi_p$ é caracterizada pela equação

$$d\phi_p(v)g = v(g \circ \phi)$$

para todos $v \in T_p M$ e $g \in \mathfrak{F}(N)$. Disto segue que a *diferencial* é linear.

1.4 Fibrado tangente

Para uma variedade M , seja

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

Um ponto de TM será notado por X_p se $X_p \in T_p M$. Existe uma projeção natural

$$\pi : TM \rightarrow M$$

definida por $\pi(X_p) = p$.

As cartas locais de TM são constituídas da seguinte forma: a cada carta local de M , $(U, \varphi) = (U; x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}$ é o atlas que define a estrutura diferenciável em M , associamos a carta local TM seguinte

$$(\pi^{-1}(U), \phi) := (\pi^{-1}(U); x^1 \circ \pi, \dots, x^n \circ \pi, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$$

onde $\dot{x}^i$ são as funções reais definidas em $\pi^{-1}(U)$ através de $\dot{x}^i(X_p) = X_p(x^i)$. Mais concretamente, as coordenadas locais de cada ponto $X_p \in \pi^{-1}(U)$ são dadas pelas

coordenadas locais $x^i(p)$ de $p = \pi(X_p)$ e pelas coordenadas de $X_p \in T_p M$ na base de vetores coordenados $\partial_i|_p$, isto é, $X_p = \sum \dot{x}^i \partial_i|_p$.

Vemos portanto que a aplicação $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$:

$$\phi : X_p \in \pi^{-1}(U) \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), \dot{x}^1(X_p), \dots, \dot{x}^n(X_p)) \in \mathbb{R}^{2n}$$

define uma bijeção de $\pi^{-1}(U)$ sobre o aberto $\phi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$. Definimos então uma topologia em TM que tem como base os conjuntos da forma $\{\phi^{-1}(O)\}_{(\phi, O)}$, onde O é um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ e ϕ é a aplicação associada a $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, como definida acima. Desta forma TM fica munida da estrutura de variedade de dimensão $2n$.

Definição 1.4.1. Um *campo de vetores* (diferenciável de classe C^∞) em M é uma seção (diferenciável) do fibrado tangente TM , isto é, uma função diferenciável $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = id$.

Se X é um campo de vetores em M e $f \in \mathfrak{F}(M)$, então Xf denota uma função real definida em M por

$$(Xf)(p) = X_p(f) \quad \text{para todo } p \in M.$$

Então X é diferenciável sempre que $Xf \in \mathfrak{F}(M)$ para toda $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Representaremos por $\mathfrak{X}(M)$ (resp., $\mathfrak{X}(U)$) o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M (resp., no aberto $U \subset M$).

Se $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ é um sistema de coordenadas em $U \subset M$, então para cada $1 \leq i \leq n$, o campo de vetores ∂_i em U que leva cada p em $\partial_i|_p$, é chamado o i -ésimo campo de vetores coordenado de ξ . Estes campos de vetores são diferenciáveis, pois $\partial_i(f) = \partial f / \partial x^i$. Daí é imediato do teorema da base que

$$X = \sum X(x^i) \partial_i.$$

Definição 1.4.2. Uma derivação em $\mathfrak{F}(M)$ é uma função $\mathcal{D} : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ que satisfaz

1. $\mathcal{D}(af + bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g)$, $a, b \in \mathbb{R}$;
2. $\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g)$.

A definição de vetor tangente mostra que para um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ a função $f \rightarrow Xf$ é uma derivação em $\mathfrak{F}(M)$. Reciprocamente, toda derivação $\mathcal{D}$ em

$\mathfrak{F}(M)$ provém de um campo de vetores. De fato, para cada $p \in M$ defina $X_p : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ por $X_p(f) = \mathcal{D}(f)(p)$. As propriedades 1 e 2 de derivação mostram que X_p é um vetor tangente a M em p ; Isso significa que X é um campo de vetores bem definido em M . Mas $Xf = D(f) \in \mathfrak{F}(M)$ para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$, então X é diferenciável e determina a derivação $\mathcal{D}$.

De agora em diante será conveniente considerar campos de vetores como derivações em $\mathfrak{F}(M)$. Esta interpretação leva a uma operação em campos de vetores. Se $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, seja $[V, W] = VW - WV$. Esta função de $\mathfrak{F}(M)$ em $\mathfrak{F}(M)$ leva cada f em $V(Wf) - W(Vf)$. Não é difícil ver que $[V, W]$ é uma derivação em $\mathfrak{F}(M)$, e portanto um campo de vetores em M , chamado o colchete de V e W .

Lema 1.4.1. *A operação colchete em $\mathfrak{X}(M)$ possui as seguintes propriedades:*

- a) $[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$, $[X, aV + bW] = a[X, V] + b[X, W]$;
- b) $[W, V] = -[V, W]$;
- c) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

1.5 Fibrado cotangente

Consideraremos agora o fibrado cotangente T^*M sobre M . Seja

$$T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

onde T_p^*M é o espaço dual a T_pM , i.e., o espaço das formas lineares $\theta_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ (chamados às vezes 'covetores tangentes em p '). Um ponto de T^*M será notado por θ_p se $\theta_p \in T_p^*M$. Existe uma projeção natural

$$\pi : T^*M \rightarrow M$$

definida por $\pi(\theta_p) = p$.

A topologia e a estrutura diferenciável definem-se de maneira análoga à do fibrado tangente, usando agora as cartas locais de T^*M dadas por:

$$(\pi^{-1}(U); x^1 \circ \pi, \dots, x^n \circ \pi, p_1, \dots, p_n)$$

onde $(U, \varphi) = (U; x^1, \dots, x^n)$ é uma carta local de M , e p_i são as funções reais definidas em $\pi^{-1}(U)$ através de $p_i(\theta_p) = \theta_p(\partial_i|_p)$. Mais concretamente, as coordenadas locais

de cada ponto $\theta_p \in \pi^{-1}(U)$ são dadas pelas coordenadas locais $x^i(p)$ de $p = \pi(\theta_p)$ e pelas coordenadas de $\theta_p \in T_p^*M$ na base de covetores $(dx^i)_p$, dual à base de vetores coordenados $\partial_i|_p$, i.e., $(dx^i)_p(\partial_j|_p) = \delta_j^i$ e $\theta_p = \sum p_i(dx^i)_p$.

Vemos portanto que a aplicação $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$:

$$\phi : \theta_p \in \pi^{-1}(U) \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), p_1(\theta_p), \dots, p_n(\theta_p))$$

define um homeomorfismo de $\pi^{-1}(U)$ sobre o aberto $\phi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Definição 1.5.1. Uma 1-forma diferenciável em M é uma seção diferenciável do fibrado cotangente T^*M :

$$\theta : M \rightarrow T^*M.$$

Portanto uma 1-forma diferenciável θ associa a cada ponto $p \in M$ uma aplicação linear $\theta(p) = \theta_p \in T_p^*M$.

Se θ é uma 1-forma em M e X é um campo de vetores em M , denotamos por θX a função real em M cujo valor em cada ponto p é $\theta_p(X_p)$. Uma 1-forma θ é diferenciável se θX é diferenciável para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}^*(M)$ o conjunto de todas as 1-formas diferenciáveis em M .

1.6 Subvariedades

A grosso modo uma subvariedade P de uma variedade M é um subconjunto de M que adquiriu a estrutura de variedade de M . Em particular nós iremos requerer que P seja um subespaço topológico de M , isto é, tem a topologia induzida, para a qual um subconjunto $\mathcal{V}$ de P é aberto se, e somente se existe um aberto $\overline{\mathcal{V}}$ de M tal que $\overline{\mathcal{V}} \cap P = \mathcal{V}$.

Definição 1.6.1. Uma variedade P é uma *subvariedade* da variedade M se:

1. P é um subespaço topológico de M ;
2. A inclusão $j : P \hookrightarrow M$ é diferenciável e em cada ponto $p \in P$ sua diferencial dj é injetiva.

Se $\xi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas na variedade M , então fazendo $n - m$ funções coordenadas constantes, produzimos uma subvariedade m -dimensional chamada uma ξ -coordenada slice (fatia) Σ de $\mathcal{U}$. É fato que toda subvariedade pode ser construída colando tais fatias.

Definição 1.6.2. Seja P um subconjunto de M^n . Um sistema de coordenadas $\xi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ em M é *adaptada* a P se $\mathcal{U} \cap P$ é uma ξ -coordenada slice de $\mathcal{U}$

Por permutação das coordenadas, podemos sempre supor que as últimas $n - m$ coordenadas é que são constantes. Então seja $\xi_P : \mathcal{U} \cap P \rightarrow \mathbb{R}^m$ a restrição de $(x_1, \dots, x_m)$ a $\mathcal{U} \cap P$. No caso P é uma subvariedade e segue-se usando o teorema da função inversa que ξ_P é um difeomorfismo para a sua imagem (aberta) em $\mathbb{R}^m$, e assim é um sistema de coordenadas em P .

Proposição 1.6.1. Se P^m é uma subvariedade de M^n , então em cada ponto de P existe um sistema de coordenadas de M adaptado a P .

Corolário 1.6.1. Seja P^m um subvariedade de M^n . Se $f : N \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável tal que $f(N) \subset P$, então a aplicação induzida $\bar{f} : N \rightarrow P$ é diferenciável.

Corolário 1.6.2. Um subconjunto P de uma variedade diferenciável M pode ser feito uma subvariedade de M por, no máximo, um caminho.

Proposição 1.6.2. Um subconjunto P de uma variedade M é uma subvariedade m -dimensional se, e somente se, para cada ponto $p \in P$ existir um sistema de coordenadas de M adaptado a P por m -dimensionais slices.

Um campo de vetores X em M é tangente a uma subvariedade P de M desde que $X_p \in T_p P$ para todo $p \in P$. (Relembre que para uma subvariedade, $T_p P$ é considerado como um subespaço de $T_p M$.)

1.7 Imersões

Lema 1.7.1. Seja $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável, e seja p um ponto de M . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A diferencial df_p é injetiva.
2. O matriz Jacobiana de df_p tem posto m relativo a uma (e portanto todos) escolha de sistemas de coordenadas.
3. Se $y^1, \dots, y^n$ é um sistema de coordenadas de N em $f(p)$, então existem inteiros $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n$ tais que as funções $y^{i_1} \circ f, \dots, y^{i_m} \circ f$ formam um sistema de coordenadas de M em uma vizinhança de p .

Definição 1.7.1. Uma *imersão* $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável tal que df_p é injetiva para todo $p \in M$.

Um *mergulho* de uma variedade P em M é uma imersão injetiva f tal que a aplicação induzida $P \rightarrow f(P)$ é um homeomorfismo sobre o subespaço $f(P)$ de M .

Subvariedades e mergulhos estão rigorosamente relacionados: se P é uma subvariedade de M , então a aplicação inclusão $j : P \hookrightarrow M$ é um mergulho. Reciprocamente, se $f : P \rightarrow M$ é um mergulho, faça de sua imagem $f(P)$ uma variedade, tal que a aplicação induzida $\bar{f} : P \rightarrow f(P)$ seja um difeomorfismo. Então $f(P)$ é um subespaço de M , e a aplicação inclusão $j : f(P) \hookrightarrow M$ é justamente $f \circ \bar{f}^{-1}$, que pela regra da cadeia é uma imersão. Então $f(P)$ é uma subvariedade de M .

Capítulo 2

TENSORES

2.1 Álgebra básica

As seguintes definições englobam os dois casos mais importantes que nós necessitamos: o módulo $\mathfrak{X}(M)$ sobre $\mathfrak{F}(M)$ e o espaço vetorial $T_p M$ sobre R .

Sejam $V_1, \dots, V_s$ módulos sobre um anel K . Então $V_1 \times \dots \times V_s$ é o conjunto de todas as s -uplas $(v_1, \dots, v_s)$ com $v_i \in V_i$. As definições usuais de adição e multiplicação por um elemento de K em cada componente, fazem de $V_1 \times \dots \times V_s$ um módulo sobre K , chamado um produto direto. Se W é também um módulo sobre K , a função

$$A : V_1 \times \dots \times V_s \rightarrow W$$

é K -multilinear se A for K -linear em cada componente, isto é, para $1 \leq i \leq s$ e $v_j \in V_j$ ($j \neq i$), a função

$$v \rightarrow A(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_s)$$

é K -linear.

Se V é um módulo sobre K , seja V^* o conjunto de todas as aplicações K -lineares de V em K . As definições usuais de adição de funções e multiplicação por elementos de K fazem de V^* um módulo sobre K , chamado o *módulo dual* de V .

Definição 2.1.1. Para inteiros $r \geq 0, s \geq 0$ não simultaneamente nulos, uma função K -linear $A : (V^*)^r \times V^s \rightarrow K$ é chamada um *tensor do tipo* (r, s) sobre V .

O conjunto $\mathfrak{T}_r^s(V)$ de todos os tensores do tipo (r, s) sobre V é um módulo sobre K , novamente com as definições usuais de adição de funções e multiplicação por um elemento de K . Um *tensor do tipo* $(0, 0)$ sobre V é simplesmente um elemento de K .

2.2 Campo de tensores

Um *campo de tensores* A em uma variedade M é um tensor sobre o $\mathfrak{F}(M)$ -módulo $\mathfrak{X}(M)$, como definido acima. Então se A é do tipo (r, s) , ele é uma função $\mathfrak{F}(M)$ -multilinear

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{F}(M).$$

O conjunto de todos os campos de tensores em M será denotado por $\mathfrak{T}_s^r(M)$.

Se $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ e $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$, defina

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \rightarrow \mathfrak{F}(M)$$

por

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) \\ = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) B(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'}). \end{aligned}$$

Então $A \otimes B$ é um tensor do tipo $(r + r', s + s')$, chamado o *tensor produto* de A e B .

Observação 2.2.1. Alguns casos especiais são:

1. $\mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$.
2. $\mathfrak{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}(M)$.
3. Se $A : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é $\mathfrak{F}(M)$ -multilinear, defina $\bar{A} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^r \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ por

$$\bar{A}(\theta, X_1, \dots, X_s) = \theta(A(X_1, \dots, X_s)), \text{ para todo } \theta \in \mathfrak{X}^*(M) \text{ e } X_i \in \mathfrak{X}(M).$$

Evidentemente $\bar{A}$ é $\mathfrak{F}(M)$ -multilinear, e portanto é um $(1, s)$ -tensor.

4. Um tensor $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ tem um valor A_p em cada ponto $p \in M$, este valor é a função

$$A_p : (T_p M^*)^r \times (T_p M)^s \rightarrow \mathbb{R}$$

definida como segue. Se $\alpha^1, \dots, \alpha^r \in T_p^* M$ e $x_1, \dots, x_s \in T_p M$, seja

$$A_p(\alpha^1, \dots, \alpha^r, x_1, \dots, x_s) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p),$$

onde $\theta^1, \dots, \theta^r$ são quaisquer 1-formas em M tais que $\theta^i|_p = \alpha^i$ ($1 \leq i \leq r$) e $X_1, \dots, X_s$ são quaisquer campos de vetores tais que $X_j|_p = x_j$ ($1 \leq j \leq s$).

Definição 2.2.1. Seja $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ um sistema de coordenadas em $U \subset M$. Se $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, as componentes de A relativas a ξ são as funções de valores reais

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = A(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}) \text{ em } U,$$

onde todos os índices vão de 1 até $n = \dim M$.

Lema 2.2.1. *Seja $x^1, \dots, x^n$ um sistema de coordenadas em $U \subset M$. Se A é um (r, s) -tensor, então em U ,*

$$A = \sum A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s},$$

onde cada índice é somado de 1 até n .

2.3 Formas bilineares simétricas

A geometria semi-Riemanniana envolve um caso particular de $(0, 2)$ tensor em espaços tangentes. Para estudar isso em geral, seja V um espaço vetorial real (de dimensão finita). Uma forma bilinear em V é uma função $\mathbb{R}$ -bilinear $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, e nós consideraremos somente os casos simétricos: $b(v, w) = b(w, v)$ para todos v, w .

Definição 2.3.1. Uma forma bilinear simétrica b em V é

- a) positiva [negativa] definida desde que $v \neq 0$ implica $b(v, v) > 0$ [< 0];
- b) positiva [negativa] semidefinida desde que $b(v, v) \geq 0$ [≤ 0] para todo $v \in V$;
- c) não degenerada desde que $b(v, w) = 0$ para todo w implica $v = 0$.

Definição 2.3.2. O índice ν de uma forma bilinear simétrica b em V é o maior inteiro que é dimensão de um subespaço $W \subset V$ em que $b|_W$ é negativa definida.

Lema 2.3.1. *Uma forma bilinear simétrica é não degenerada se, e somente se sua matriz com relação a uma (e portanto todas) base é inversível.*

2.4 Produto escalar

Definição 2.4.1. Um produto escalar g em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica não degenerada em V .

Aqui, e até o fim desta seção, V denotará um *espaço com produto escalar*, que é um espaço vetorial (real de dimensão finita) munido com um produto escalar g .

Se W é um subespaço de V , seja

$$W^\perp = \{v \in V : v \perp W\}.$$

$W^\perp$ é um subespaço de V chamado W perp.

Lema 2.4.1. *Se W é um subespaço de um espaço com produto escalar V , então*

$$a) \dim W + \dim W^\perp = n = \dim V,$$

$$b) (W^\perp)^\perp = W.$$

Observação 2.4.1. Um subespaço W de V é chamado *não degenerado* se $g|_W$ é não degenerada.

Lema 2.4.2. *Um subespaço W de V é não degenerado se e somente se V é a soma direta de W e $W^\perp$.*

Lema 2.4.3. *Um espaço com produto escalar $V \neq 0$ tem uma base ortonormal.*

Lema 2.4.4. *Sejam $e_1, \dots, e_n$ uma base ortonormal para V , com $\epsilon_i = g(e_i, e_i)$. Então cada $v \in V$ tem uma única expressão*

$$v = \sum \epsilon_i g(v, e_i) e_i.$$

Capítulo 3

VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

3.1 Métrica

Definição 3.1.1. Uma métrica em uma variedade diferenciável M é um $(0,2)$ -tensor g simétrico, não degenerado de índice constante em M .

Em outras palavras, $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ associa diferenciavelmente a cada ponto p um produto escalar g_p no espaço tangente $T_p M$, e o índice de g_p é o mesmo para todo p .

Definição 3.1.2. Uma *variedade semi-Riemanniana* é uma variedade diferenciável M munida com uma métrica g .

Assim, estritamente falando, uma variedade semi-Riemanniana é um par ordenado (M, g) ; duas métricas diferentes na mesma variedade constituem diferentes variedades semi-Riemannianas. No entanto costumamos denotar uma Variedade semi-Riemanniana com o nome de sua variedade diferenciável $M, N, \dots$

O valor comum ν do índice de g_p em uma variedade semi-Riemanniana M é chamado de índice de M : $0 < \nu < n = \dim M$. Se $\nu = 0$, M é uma Variedade Riemanniana; cada g_p é então um produto interno (positivo definido) em $T_p(M)$. Se $\nu = 1$ e $n > 2$, M é uma variedade de Lorentz.

Nós usamos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como uma notação alternativa para g , escrevendo $g(v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ para vetores tangentes, e $g(V, W) = \langle V, W \rangle \in \mathfrak{F}(M)$ para campos de vetores.

Se $x^1, \dots, x^n$ é um sistema de coordenadas em $U \subset M$ as componentes da métrica g em U são

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \quad (i \leq i, j \leq n),$$

logo o tensor métrica pode ser escrito como

$$g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Observação 3.1.1. Como o tensor métrica é simétrico, é tradicional o escrevermos numa base de tensores simétricos. O *produto simétrico* de ω e η é o tensor

$$\omega\eta = \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega)$$

Note que $\omega\eta = \eta\omega$ e que $\omega^2 = \omega\omega = \omega \otimes \omega$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} g &= \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j + \sum g_{ji} dx^i \otimes dx^j \right) \quad (\text{pois } g_{ij} = g_{ji}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j + \sum g_{ij} dx^j \otimes dx^i \right) \quad (\text{trocando } i \leftrightarrow j \text{ no segundo termo}) \\ &= \sum g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{definição de produto simétrico}). \end{aligned}$$

Definição 3.1.3. Um vetor v tangente a M é

- a) *spacelike* (tipo espaço) se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$,
- b) *null* se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$.
- c) *timelike* (tipo tempo) se $\langle v, v \rangle < 0$.

Definição 3.1.4. Sejam M e N variedades semi-Riemannianas com métricas g_M e g_N . Uma *isometria* (local) de M em N é uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ tal que

$$\langle v, w \rangle_M = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_N$$

para todos $v, w \in T_p M$, $p \in M$.

3.2 Partição da unidade

Pelas considerações feitas até o momento, nada nos impede de perguntar: Existe uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M arbitrária? Localmente não existe problema em construir uma, basta escolher qualquer (g_{ij}) que seja ao mesmo tempo positiva definida e simétrica. Para fazer a construção global, nós podemos usar o método da *partição da unidade*. Antes de discutir este conceito nós precisaremos de algumas definições preliminares.

Uma cobertura $\{A_\alpha\}$ de uma variedade M por subconjuntos é chamada *localmente finita* se cada $p \in M$ tem uma vizinhança U que intersecta somente um número finito

de conjuntos A_α . Se $\{A_\alpha\}$ e $\{B_\beta\}$ são coberturas de M , então B_β é chamado um *refinamento* de $\{A_\alpha\}$ se cada $B_\beta \subset A_\alpha$ para algum α . Nestas definições nós não supomos que os conjuntos são abertos. Qualquer variedade diferenciável M é localmente compacta, pois é localmente Euclideana. Um espaço com a propriedade que toda cobertura aberta tem um refinamento localmente finito é chamado *paracompacto*;

Recordemos que o *suporte* de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, é o conjunto

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 3.2.1. Uma *partição da unidade* de classe C^∞ em uma variedade diferenciável M é uma família $\{f_i\}_{i \in I}$ de funções de classe C^∞ , $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, com as seguintes propriedades:

- a) $0 \leq f_i \leq 1$ para todo $i \in I$;
- b) $\{\text{supp}(f_i)\}_{i \in I}$ formam uma cobertura localmente finita de M ;
- c) $\sum_{i \in I} f_i(p) = 1$ para todo $p \in M$.

Note que em virtude de b) a soma é uma função de classe C^∞ bem definida em M , pois cada ponto $p \in M$ tem uma vizinhança em que somente um número finito de f_i 's são diferentes de zero. Uma partição da unidade é chamada *subordinada* a uma cobertura aberta $\{A_\alpha\}$ de M se para cada i , existir um A_α tal que $\text{supp}(f_i) \subset A_\alpha$.

Observação 3.2.1. A topologia de uma variedade diferenciável M :

- a) é de *Hausdorff* se dados dois pontos distintos de M , existem vizinhanças desses pontos que não se intersectam.
- b) tem *base enumerável* se M puder ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas.

Teorema 3.2.1. Uma variedade diferenciável M possui uma partição diferenciável da unidade se e somente se toda componente conexa de M é de Hausdorff e tem base enumerável.

De agora em diante, todas as variedades diferenciáveis consideradas serão supostas de Hausdorff e com base enumerável.

Lema 3.2.1. *Se existir uma partição da unidade em M tal que o suporte $\text{supp}(f_i)$ de cada função está contido em alguma vizinhança coordenada, então existe uma métrica Riemanniana em M .*

Demonstração. Para cada $i \in I$ escolha $g_{jk}^{(i)}$ simétrica e positiva definida na vizinhança coordenada associada a $\text{supp}(f_i)$. Isto define localmente uma métrica Riemanniana $g^{(i)}$, e $f_i \cdot g^{(i)}$ é diferenciável e bem definida em M , já ela é identicamente nula fora de $\text{supp}(f_i)$. Então nós definimos

$$g := \sum_{i \in I} f_i \cdot g^{(i)}.$$

É fácil ver que g é simétrica e positiva semi-definida, pois $f_i \geq 0$ e $g^{(i)} > 0$, e de $\sum_i f_i \equiv 1$ nós vemos que g é positiva definida em todo ponto de M . $\square$

3.3 Conexões

Definição 3.3.1. Uma *conexão* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma função $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que

- a) $\nabla_V W$ é $\mathfrak{F}(M)$ -linear em V
- b) $\nabla_V W$ é $\mathbb{R}$ -linear em W
- c) $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W$ para $f \in \mathfrak{F}(M)$

$\nabla_V W$ é chamada a *derivada covariante* de W com respeito a V para a conexão ∇ .

Lema 3.3.1. *O valor $\nabla_X Y(p)$ em um ponto $p \in M$ depende somente dos valores de Y numa vizinhança de p e de X em p .*

Demonstração. ver [20] página 13. $\square$

Lema 3.3.2. *Seja $x^1, \dots, x^n$ um sistema de coordenadas em U . Se $X = X^i \partial_i$ e $Y = Y^j \partial_j$ são campos de vetores em U então*

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k$$

onde as n^3 funções diferenciáveis Γ_{ij}^k são os **símbolos de Christoffel** dados por $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$.

Se M é uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha\}$ um atlas diferenciável em M então nós podemos encontrar uma conexão ∇^α em cada U_α . Afim de construir uma conexão em M , seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade subordinada a U_α .

Teorema 3.3.1 (Existência de conexões). *Em qualquer variedade diferenciável M existem várias conexões:*

$$\nabla_X Y = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \nabla_X^{\alpha} Y$$

é uma conexão em M .

Lema 3.3.3 (Existência e unicidade da derivada covariante de um campo de tensores).

Seja $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ uma conexão em M . Então existe uma única conexão

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$$

tal que

- a) $\nabla_X f = Xf$ para toda $f \in \mathfrak{T}_0^0(M) = \mathfrak{F}(M)$
- b) $\nabla_X Y$ é a dada conexão para todos os campos de vetores $Y \in \mathfrak{T}_1^0(M)$
- c) $\nabla_X (A \otimes B) = \nabla_X A \otimes B + A \otimes \nabla_X B$
- d) $\nabla_X \text{tr} A = \text{tr} \nabla_X A$ para todo $A \in \mathfrak{T}_{s+1}^{r+1}(M)$

A saber, para qualquer 1-forma ω , $\nabla_X \omega$ é a 1-forma dada por

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \quad (3.1)$$

e, em geral, para qualquer (r, s) -tensor $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, $\nabla_X A$ é o r, s -tensor dado por

$$\begin{aligned} (\nabla_X A)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) &= X(A(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^s A(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_s) \\ &\quad - \sum_{j=1}^r A(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s). \end{aligned}$$

para quaisquer escolha de s campos de vetores $Y_1, \dots, Y_s$ e r 1-formas $\omega^1, \dots, \omega^r$ em M .

Demonstração. ver [20] página 14. □

3.4 Transporte Paralelo e Geodésicas

Proposição 3.4.1. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo de vetores X ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo de vetores DX/dt ao longo de c , denominado derivada covariante de X ao longo de c , tal que*

1. $\frac{D}{dt}(aX + bY) = a\frac{DX}{dt} + b\frac{DY}{dt} \quad (a, b \in \mathbb{R});$
2. $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}$, onde X é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I ;
3. Se X é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, i.e., $X(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DX}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Definição 3.4.1. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇ . Um campo de vetores X ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DX}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Proposição 3.4.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e X_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (i.e. $X_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores X ao longo de c , tal que $X(t_0) = X_0$, ($X(t)$ é chamado o transporte paralelo de $X(t_0)$ ao longo de c).*

Definição 3.4.2. *Uma geodésica em uma variedade semi-Riemanniana M é uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ cujo campo de vetores γ' é paralelo.*

Corolário 3.4.1. *Seja $x^1, \dots, x^n$ um sistema de coordenadas em $U \subset M$. Uma curva γ em U é uma geodésica de M se, e somente se suas funções coordenadas $x^k \circ \gamma$ satisfazem*

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0$$

para $1 \leq k \leq n$.

De fato, estas expressões são as coordenadas de γ'' relativas aos campos de vetores coordenados $\partial_1, \dots, \partial_n$.

O teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias dá o seguinte resultado local.

Lema 3.4.1. *Se $v \in T_p M$ existe um intervalo I centrado em 0 e uma única geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\gamma'(0) = v$.*

A última equação implica, é claro, que $\gamma(0) = 0$; nós dizemos que γ é uma geodésica começando em p com velocidade inicial v .

Lema 3.4.2. *Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ geodésicas. Se existir um número $a \in I$ tal que $\alpha'(a) = \beta'(a)$, então $\alpha = \beta$.*

Proposição 3.4.3. *Dado qualquer vetor tangente $v \in T_p M$ existe uma única geodésica γ_v em M tal que*

1. *A velocidade inicial de γ_v é v ; isto é, $\gamma_v'(0) = v$;*
2. *O domínio I_v de γ_v é o maior possível. Assim, se $\alpha : J \rightarrow M$ é uma geodésica com velocidade inicial v , então $J \subset I_v$ e $\alpha = \gamma_v|_J$.*

O item 2. justifica o fato de as geodésicas γ_v serem chamadas de *maximais* ou *geodesicamente inextendíveis*.

Uma variedade semi-Riemmanina M em que todas as suas geodésicas maximais estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ é chamada *geodesicamente completa*, ou simplesmente *completa*. Para maiores detalhes sobre a completude de uma variedade diferenciável, vide por exemplo [19, p. 250].

3.5 Conexão Riemanniana

Em uma variedade Riemanniana existe uma conexão notável.

Teorema 3.5.1. *Uma variedade Riemanniana admite uma única conexão simétrica compatível com a métrica.*

Esta particular conexão é chamada a conexão Riemanniana ou conexão de Levi-Civita.

Definição 3.5.1. A conexão ∇ é simétrica se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todos os campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 3.5.1. *Seja $x^1, \dots, x^n$ um sistema de coordenadas tal que $[\partial_i, \partial_j] = 0$, $1 \leq i, j \leq n$. Então ∇ é simétrica se, e somente se*

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad 1 \leq i, j, k \leq n$$

Demonstração. $\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k$ □

Definição 3.5.2. A conexão ∇ é compatível com a métrica g se

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

para quaisquer campos de vetores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 3.5.2. *Seja $x^1, \dots, x^n$ um sistema de coordenadas. Então ∇ é compatível com a métrica g se, e somente se*

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ki}^\ell g_{j\ell} + \Gamma_{kj}^\ell g_{i\ell}, \quad 1 \leq i, j, k, \ell \leq n$$

Demonstração. $\partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle - \langle \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j \rangle - \langle \partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_j \rangle = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^\ell g_{j\ell} - \Gamma_{kj}^\ell g_{i\ell}$ □

Demonstração do Teorema 3.5.1. Primeiro iremos mostrar a unicidade. Assuma que ∇ é uma conexão simétrica que é compatível com a métrica g . Então

$$X\langle Y, Z \rangle \stackrel{3.5.1}{=} \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \stackrel{3.5.2}{=} \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle$$

para quaisquer campos de vetores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Permutando X, Y, Z ciclicamente, obtemos

$$X\langle Y, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle + Y\langle Z, X \rangle = 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle$$

e concluímos que

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} (X\langle Y, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle + Y\langle X, Z \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle) \quad (3.2)$$

Esta equação mostra que ∇ , se existir, está determinada pela métrica. Agora, mostraremos a existência. Para isso considere um sistema de coordenadas $x^1, \dots, x^n$ em uma vizinhança coordenada U tal que $[\partial_i, \partial_j] = 0$. A única possibilidade é colocar

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} - \partial_\ell g_{ij} + \partial_j g_{i\ell}) \quad (3.3)$$

porque

$$\Gamma_{ij}^k g_{k\ell} = \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_\ell \rangle = \frac{1}{2} (\partial_i g_{j\ell} - \partial_\ell g_{ij} + \partial_j g_{i\ell}) \quad (3.4)$$

pela equação 3.2. Como $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ e

$$\Gamma_{ki}^\ell g_{j\ell} + \Gamma_{il}^\ell g_{kj} = \Gamma_{ki}^\ell g_{\ell j} + \Gamma_{il}^\ell g_{\ell j} \stackrel{3.4}{=} \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk}) + \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik}) = \partial_k g_{ij}$$

esta conexão ∇ é simétrica e compatível com a métrica g (3.5.1, 3.5.2).

Lema 3.5.3. *Seja ∇ uma conexão e g a métrica em M . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) ∇ e g são compatíveis (3.5.2);
- b) $\nabla g = 0$
- c) $\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle D_t V, W \rangle + \langle V, D_t W \rangle$ onde V, W são campos de vetores ao longo de uma curva diferenciável.
- d) $\langle V, W \rangle$ é constante, onde V, W são campos de vetores paralelos ao longo de uma curva diferenciável.
- e) Transporte paralelo é uma isometria.

Demonstração. ver [20] página 18. □

3.6 Curvatura

Lema 3.6.1. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana com uma conexão de Levi-Civita ∇ . A aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z$$

é um $(1, 3)$ -tensor em M chamado o tensor curvatura Riemanniana de M .

O tensor R pode ser visto como uma função $\mathbb{R}$ -multilinear em vetores tangentes. Se $x, y \in T_p M$ o operador linear

$$R(x, y) : T_p M \rightarrow T_p M$$

levando cada z em $R(x, y)z$ é chamado um *operador curvatura*. As seguintes identidades são as simetrias da curvatura.

Proposição 3.6.1. *Se $x, y, z, v, w \in T_p M$, então*

1. $R_{xy} = -R_{yx}$;
2. $\langle R_{xy}v, w \rangle = -\langle R_{xy}w, v \rangle$;
3. $R_{xyz} + R_{yzx} + R_{zxy} = 0$;
4. $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$

Demonstração. ver [25] página 75. □

As simetrias do tensor curvatura R conduzem para uma simetria, não tão óbvia, da derivada covariante ∇R , chamada a *segunda identidade de Bianchi*.

Proposição 3.6.2 (Segunda Identidade de Bianchi). *Se $x, y, z \in T_p M$, então*

$$(\nabla_z R)(x, y) + (\nabla_x R)(y, z) + (\nabla_y R)(z, x) = 0$$

.

Demonstração. ver [25] página 76. □

Lema 3.6.2. *Em uma vizinhança coordenada de um sistema de coordenadas $x^1, \dots, x^n$,*

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum R_{ijk}^\ell \partial_\ell$$

onde as componentes de R são dadas por

$$R_{ijk}^\ell = \partial_i \Gamma_{jk}^\ell - \partial_j \Gamma_{ik}^\ell + \sum \Gamma_{im}^\ell \Gamma_{jk}^m - \sum \Gamma_{jm}^\ell \Gamma_{ik}^m$$

3.7 Curvatura Seccional

O tensor curvatura Riemanniana R é bastante complicado; agora iremos considerar uma simples função real que determina completamente R .

Proposição 3.7.1. *Para $p \in M$, $\xi, \eta \in T_p M$ defina*

$$k(\xi, \eta) = \langle R(\xi, \eta)\xi, \eta \rangle.$$

Então, por 3.6.1, nós temos para quaisquer $\xi, \eta, \zeta, \mu \in T_p M$

$$\langle R(\xi, \eta)\zeta, \mu \rangle = \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{s=t=0} \{k(\xi + s\zeta, \eta + t\mu) - k(\xi + s\mu, \eta + t\zeta)\}.$$

Assim, a função $k : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ e as propriedades em 3.6.1 determinam completamente $R : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$.

Demonstração. Diretamente de 3.6.1-(2) e 3.6.1-(4). $\square$

Proposição 3.7.2. Para $p \in M$, $\xi, \eta, \zeta \in T_p M$, define

$$R_1(\xi, \eta)\zeta = \langle \xi, \zeta \rangle \eta - \langle \eta, \zeta \rangle \xi, \quad k_1(\xi, \eta) = \langle R_1(\xi, \eta)\xi, \eta \rangle$$

Então

$$k(\xi, \eta) = \langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle - \langle \xi, \eta \rangle^2$$

e R_1 satisfaz 3.6.1(1-4). Além disso, se ξ, η são vetores tangentes linearmente independentes em $T_p M$, então

$$K(\xi, \eta) := \frac{k(\xi, \eta)}{k_1(\xi, \eta)} = \frac{\langle R(\xi, \eta)\xi, \eta \rangle}{|\xi|^2 |\eta|^2 - \langle \xi, \eta \rangle^2}$$

está bem definida e depende somente do subespaço bi-dimensional determinado por ξ e η .

Demonstração. Para a última afirmação é suficiente notar que se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são números reais e ξ, η vetores tangentes linearmente independentes em $T_p M$, então

$$\langle R(\alpha\xi + \beta\eta, \gamma\xi + \delta\eta)(\alpha\xi + \beta\eta), \gamma\xi + \delta\eta \rangle = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \langle R(\xi, \eta)\xi, \eta \rangle,$$

e

$$|\alpha\xi + \beta\eta|^2 |\gamma\xi + \delta\eta|^2 - \langle \alpha\xi + \beta\eta, \gamma\xi + \delta\eta \rangle^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \{ |\xi|^2 |\eta|^2 - \langle \xi, \eta \rangle^2 \},$$

que implica a afirmação. $\square$

Definição 3.7.1. Nos referíamos a $K(\xi, \eta)$ como a *curvatura seccional do subespaço bi-dimensional determinado por ξ, η* .

3.8 Curvatura de Ricci e curvatura escalar

Definição 3.8.1. a) Seja A um $(1, 1)$ -tensor, $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$. Nós definimos a *contração* ou *traço* CA por

$$CA|_p = \text{tr}(A_p) = \sum_i \langle A_p e_i, e_i \rangle$$

onde $e_1, \dots, e_n$ é uma base ortonormal em $T_p M$.

b) Seja A um $(1, s)$ -tensor. Então para todo $i \in \{1, \dots, s\}$ e vetores fixos X_j , $j \neq i$ $A(X_1, \dots, X_{i-1}, -, X_{i+1}, \dots, X_s)$ é um $(1, 1)$ -tensor, cuja contração (ou traço) é denotado por $C_i A$:

$$C_i A(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_s) = \sum_{j=1}^n \langle A(X_1, \dots, X_{i-1}, e_j, X_{i+1}, \dots, X_s), e_j \rangle$$

$C_i A$ é então um $(0, s-1)$ -tensor.

c) O *divergente* de um campo de vetores Y é definido como o traço de ∇Y , i.e.,

$$\operatorname{div} Y = \operatorname{tr}(\nabla Y) = \sum_i \langle \nabla_{e_i} Y, e_i \rangle.$$

d) O *divergente* de um $(0, 2)$ -tensor simétrico A é definido por

$$(\operatorname{div} A)(X) = \sum_i (\nabla_{e_i} A)(X, e_i)$$

Definição 3.8.2. A segunda contração do tensor curvatura $R(X, Y)Z$ é dada pela expressão

$$(C_2 R)(X, Z) = \operatorname{tr}(\zeta \mapsto R(X, \zeta)Z) = \sum_{i=1}^n \langle R(X, e_i)Z, e_i \rangle \quad (3.5)$$

e é chamado o *tensor de Ricci* $\operatorname{Ric}(Y, Z)$, ou brevemente, $\operatorname{Ric} = C_2 R$. O traço do tensor de Ricci é chamado a *curvatura escalar* E , ou seja,

$$E = \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle.$$

Da equação 3.5, temos que Ric é uma forma bilinear simétrica em M . Para calcular sua forma quadrática associada, escolha uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ para $T_p M$ tal que $e_n = \zeta/|\zeta|$; então

$$\operatorname{Ric}(\zeta, \zeta) = \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} K(\zeta, e_j) \right\} |\zeta|^2$$

Em particular, para uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, temos

$$\operatorname{Ric}(e_k, e_k) = \operatorname{Ric}_{kk} = \sum_j \langle R(e_k, e_j)e_k, e_j \rangle = \sum_{j \neq k} K(e_k, e_j). \quad (3.6)$$

e

$$E = \sum_{j \neq k; j,k=1}^n K(e_j, e_k) \quad (3.7)$$

Proposição 3.8.1. Em uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante C ,

$$a) R(X, Y)Z = C\{\langle Z, X \rangle Y - \langle Z, Y \rangle X\}$$

$$b) \langle R(X, Y)Z, W \rangle = C\{\langle Y, W \rangle \langle Z, X \rangle - \langle Z, Y \rangle \langle X, W \rangle\}$$

$$c) \operatorname{Ric}(X, Y) = (n-1)C\langle X, Y \rangle$$

$$d) S = n(n-1)C$$

Demonstração. A primeira e a segunda equações são equivalentes. Ambos os lados da segunda equação são tensores com as propriedades simétricas do tensor curvatura. Então eles são iguais, se eles são iguais para $(X, Y, Z, W) = (X, Y, X, Y)$, com X, Y ortonormais, afinal a curvatura seccional determina a curvatura Riemanniana. E neste caso, o lado esquerdo da igualdade é $K(X, Y) = C$ e o lado direito é C .

Ambos os lados da terceira equação são tensores simétricos. Então eles são iguais se eles forem iguais para $(X, Y) = (X, X)$, com X unitário. E neste caso, o lado direito da igualdade é $(n - 1)C$ pela fórmula dada em 3.6 e o lado direito é também $(n - 1)C$.

A fórmula dada em 3.7 diz que curvatura seccional constante C implica em curvatura escalar constante de valor $n(n - 1)C$. $\square$

3.9 Alguns operadores diferenciais

Definição 3.9.1. O gradiente ∇f de uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ é o campo de vetores metricamente equivalente ao diferencial $df \in \mathfrak{X}^*(M)$. Então

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = Xf \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 3.9.2. A Hessiana de uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ é a segunda derivada covariante $H_f = \nabla(\nabla f)$.

Lema 3.9.1. A Hessiana H_f de f é o $(0, 2)$ -tensor simétrico dado por

$$H_f(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle$$

Demonstração. Como $\nabla f = df$,

$$H_f(X, Y) = \nabla(df)(X, Y) = \nabla_X(df)(Y) = X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = XYf - (\nabla_X Y)f.$$

As igualdades $XY - YX = [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ nos permitem, facilmente, perceber que H_f é simétrica. E por fim,

$$\langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle = X\langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle = H_f(X, Y)$$

$\square$

Definição 3.9.3. O Laplaciano Δf de uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ é o divergente do seu gradiente: $\Delta f = \text{div}(\nabla f) \in \mathfrak{F}(M)$.

Do lema 3.3.3 e da definição 3.8.1, temos que

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{tr}(\nabla(\nabla f)) = \sum_i \langle \nabla_{e_i}(\nabla f), e_i \rangle = \sum_i H_f(e_i, e_i) = \operatorname{tr}(H_f),$$

ou seja, o Laplaciano de f é o traço de sua Hessiana H_f .

Observação 3.9.1. Uma notação alternativa para a Hessiana é $H_f(X, Y) = \nabla_{X,Y}^2 f = f_{XY}$, onde

$$\begin{aligned} \nabla_{X,Y}^2 f &= \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_{\nabla_X Y} f \\ &= \nabla_X \langle Y, \nabla f \rangle - \langle \nabla_X Y, \nabla f \rangle \\ &= \langle Y, \nabla_X \nabla f \rangle \\ &= H_f(X, Y) \end{aligned}$$

Usando esta nova notação para a Hessiana, doravante escreveremos o Laplaciano como

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i, e_i}^2 f = \sum_i f_{ii}. \quad (3.8)$$

Capítulo 4

SUBVARIEDADES

4.1 Introdução

Sejam M^n , $\overline{M}^{n+p}$ variedades Riemannianas. Uma imersão $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+p}$ é uma imersão isométrica se

$$\langle v, w \rangle_q = \langle d\varphi(v), d\varphi(w) \rangle_{\varphi(q)} \quad (4.1)$$

para todo $q \in M^n$ e todo par de vetores tangentes $v, w \in T_q M^n$.

Quando $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+p}$ é uma imersão isométrica, diremos que M^n é uma subvariedade de $\overline{M}^{n+p}$.

Para qualquer $p \in M$, o produto interno em $T_p \overline{M}$ decompõe $T_p \overline{M}$ na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$.

Se $v \in T_p \overline{M}$, $p \in M$, iremos denotar a projeção de v em $T_p M$ por v^T , e a projeção de v em $T_p M^\perp$ por v^N .

Agora é fácil ver que o fibrado tangente ambiente $T\overline{M}|M$ se divide

$$T\overline{M}|M = TM \oplus NM$$

na soma ortogonal direta do fibrado tangente de M com o fibrado normal $NM \rightarrow M$,

$$NM = \bigcup_{p \in M} T_p M^\perp.$$

Qualquer seção de $T\overline{M}|M$ se divide ortogonalmente na soma direta de sua parte tangencial e normal. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)^\perp$ o conjunto dos campos de vetores normais a M .

4.2 A conexão induzida

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são campos diferenciáveis de vetores em M e $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$, então $\overline{\nabla}_X Y$ é uma seção diferenciável bem definida de $T\overline{M}|M$, já que depende apenas do valor de X em $p \in M$ e de Y ao longo de uma curva tangente a X_p .

Observe que para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante $\bar{\nabla}_V W$ não necessariamente é tangente a M . Então é natural perguntar o que $(\bar{\nabla}_V W)^T$ e $(\bar{\nabla}_V W)^N$ são.

Lema 4.2.1. Para $M \subset \bar{M}$, se $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\nabla_V W = (\bar{\nabla}_V W)^T,$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M .

Demonstração. ver [25] página 99. □

Lema 4.2.2. A função $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por

$$B(V, W) = (\bar{\nabla}_V W)^N$$

é $\mathfrak{X}(M)$ -bilinear e simétrica. B é chamada a segunda forma fundamental de $M \subset \bar{M}$.

Demonstração. ver [25] página 100. □

Observação 4.2.1. Como B é uma aplicação bilinear, para cada $v \in T_p M^\perp$, podemos associá-la a uma aplicação linear auto-adjunta $A_v : T_p M \rightarrow T_p M$ dada por

$$\langle A_v X, Y \rangle = \langle B(X, Y), V \rangle,$$

onde $V \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Podemos escrever esta aplicação linear associada á segunda forma fundamental em termos da derivada covariante da seguinte maneira:

$$A_v(X) = -(\bar{\nabla}_X V)^T$$

onde V é qualquer extensão de v a algum elemento de $\mathfrak{X}(M)^\perp$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle A_v(X), Y \rangle &= \langle B(X, Y), V \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, V \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, V \rangle \\ &= -\langle Y, \bar{\nabla}_X V \rangle \\ &= \langle -\bar{\nabla}_X V, Y \rangle \\ &= \langle -(\bar{\nabla}_X V)^T, Y \rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle A_v(X) - (\bar{\nabla}_X V)^T, Y \rangle = 0$$

e, portanto,

$$A_v(X) = -(\bar{\nabla}_X V)^T.$$

A aplicação A_v é conhecida como a *aplicação de Weingarten*.

Definição 4.2.1. Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+p}$ é (totalmente) umbílica se, para cada $\xi \in NM$, existe $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$ tal que $A_\xi = \lambda_\xi id$.

As seguintes afirmações são equivalentes:

1. f é umbílica;
2. $A_\xi = \langle h, \xi \rangle id, \forall \xi \in NM$;
3. $B(X, Y) = \langle X, Y \rangle h, \forall X, Y \in TM$.

onde h é o vetor curvatura média como definido em 5.3.1.

Teorema 4.2.1. Seja M uma subvariedade semi-Riemanniana de $\bar{M}$, com R e $\bar{R}$ seus tensores curvatura Riemanniana e B a segunda forma fundamental de M . Então, para campos de vetores $V, W, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\langle R(V, W)X, Y \rangle = \langle \bar{R}(V, W)X, Y \rangle + \langle B(V, X), B(W, Y) \rangle - \langle B(V, Y), B(W, X) \rangle.$$

Demonstração. ver [25] página 100. □

Definição 4.2.2. Uma subvariedade semi-Riemanniana M de $\bar{M}$ é *totalmente geodésica* se $B \equiv 0$.

Proposição 4.2.1. Para $M \subset \bar{M}$ as seguintes afirmações são equivalentes.

- a) M é totalmente geodésica em $\bar{M}$.
- b) Toda geodésica de M é também uma geodésica de $\bar{M}$.
- c) Se $v \in T_p \bar{M}$ é tangente a M , então as $\bar{M}$ geodésicas γ_v encontra-se inicialmente em M .
- d) Se α é uma curva em M e $v \in T_{\alpha(0)} M$, então o transporte paralelo de v ao longo de α é o mesmo para M e para $\bar{M}$.

4.3 A equação de Codazzi

Definição 4.3.1. A *conexão normal* de $M \subset \overline{M}$ é a função $\nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por

$$\nabla_V^\perp Z = (\overline{\nabla}_V Z)^N \text{ para } V \in \mathfrak{X}(M), Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$$

$\nabla_V^\perp Z$ é chamada a *derivada covariante normal* de Z com respeito a V . As seguintes propriedades são imediatas:

- a) $\nabla_V^\perp Z$ é $\mathfrak{F}(M)$ -linear em V e $\mathbb{R}$ -linear em Z .
- b) $\nabla_V^\perp(fZ) = f\nabla_V^\perp Z + V f Z$, onde $f \in \mathfrak{F}(M)$.
- c) $V\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_V^\perp Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_V^\perp Z \rangle$ onde $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$

Definição 4.3.2. Seja B a segunda forma fundamental de $M \subset \overline{M}$. Se $V, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, seja

$$(\overline{\nabla}_V B)(X, Y) = \nabla_V^\perp(B(X, Y)) - B(\nabla_V X, Y) - B(X, \nabla_V Y)$$

A equação de Gauss descreve $(\overline{R}(V, W)X)^T$, onde V, W, X são todos tangentes a M , em termos do tensor segunda forma fundamental. A seguinte equação é o análogo para $(\overline{R}(V, W)X)^N$, e é conhecida como *equação de Codazzi*.

Proposição 4.3.1. *Seja M uma subvariedade semi-Riemanniana de $\overline{M}$. Se $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ então*

$$(\overline{R}(V, W)X)^N = -(\overline{\nabla}_V B)(W, X) + (\overline{\nabla}_W B)(V, X).$$

Demonstração.

□

Definição 4.3.3. Um campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ é *normal paralelo* se $\nabla_V^\perp Z = 0$ para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Capítulo 5

DEFINIÇÕES E EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

5.1 Equações de estrutura

Para ξ, η em um espaço vetorial V , e α, β em seu espaço dual V^* , a definição do produto exterior será dada por

$$(\alpha \wedge \beta)(\xi, \eta) = \alpha(\xi)\beta(\eta) - \alpha(\eta)\beta(\xi) \quad (5.1)$$

Também para uma variedade diferenciável M , campos diferenciáveis de vetores X, Y e uma 1-forma diferenciável ω em M , a derivada exterior $d\omega$ será dada por

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \quad (5.2)$$

Considere M munida com a conexão ∇ , com torsão T e curvatura R associadas.

Definição 5.1.1. A derivada covariante de 1-formas é definida por

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

isto é

$$X(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y) \quad (5.3)$$

(isto mostra que $\nabla_X \omega$ é também uma 1-forma.)

Observe que

$$d\omega(X, Y) = (\nabla_X \omega)(Y) - (\nabla_Y \omega)(X) - \omega(T(X, Y)) \quad (5.4)$$

onde T denota o tensor torsão de ∇ .

Antes de prosseguir, precisamos definir o espaço ambiente $S_p^{n+p}(1)$.

Definição 5.1.2. Uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $n + p$ conexa de índice p e de curvatura constante c , será chamada uma *forma espacial indefinida* de índice p e será notada por $Q_p^{n+p}(c)$. Em particular, se $c = 1$, nós a chamamos de espaço de De Sitter de índice p e a denotamos por $S_p^{n+p}(1)$.

Definição 5.1.3. Seja M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n e $f : M^n \rightarrow S_p^{n+p}(1)$ uma imersão. A imersão é chamada *tipo espaço* se a métrica induzida em M^n da métrica de $S_p^{n+p}(1)$ é positiva definida. (ver [25] p. 141.)

Agora seja M^n uma subvariedade completa tipo espaço imersa no espaço de De Sitter $S_p^{n+p}(1)$. Escolha um referencial móvel pseudo-ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+p}\}$ em $S_p^{n+p}(1)$ tal que, em cada ponto $p \in M^n$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal para o espaço tangente $T_p M$. Vamos usar a seguinte notação para os índices:

$$1 \leq A, B, C, \dots, \leq n+p, \quad 1 \leq i, j, k, \dots, \leq n, \quad n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots, \leq n+p. \quad (5.5)$$

Seja $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+p}\}$ seu referencial dual, de modo que a métrica semi-Riemanniana de $S_p^{n+p}(1)$ é escrita como $ds^2 = \sum_i \omega_i^2 - \sum_\alpha \omega_\alpha^2 = \sum_A \epsilon_A \omega_A^2$, $\epsilon_i = 1$ e $\epsilon_\alpha = -1$.

Então, para qualquer vetor tangente ξ a $S_p^{n+p}(1)$, existe uma expansão de $\bar{\nabla}_\xi e_A$ em termos da base $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+p}\}$,

$$\bar{\nabla}_\xi e_A = \sum_B \epsilon_B \omega_{AB}(\xi) e_B. \quad (5.6)$$

onde $\bar{\nabla}$ denota a conexão de $S_p^{n+p}(1)$.

Como $\bar{\nabla}_\xi e_A$ é linear em ξ , a coleção $\{\omega_{AB} : A, B = 1, \dots, n+p\}$ forma uma matriz de 1-formas diferenciáveis, chamadas de 1-formas da conexão $\bar{\nabla}$. Para qualquer ξ tangente a $S_p^{n+p}(1)$, nós temos por 5.3,

$$\begin{aligned} 0 &= \xi(\omega_C(e_A)) \\ &= (\bar{\nabla}_\xi \omega_C)(e_A) + \omega_C(\bar{\nabla}_\xi e_A) \\ &= (\bar{\nabla}_\xi \omega_C)(e_A) + \omega_{AC}(\xi). \end{aligned}$$

daí,

$$\bar{\nabla}_\xi \omega_C = \sum_A \epsilon_A \bar{\nabla}_\xi \omega_C(e_A) \omega_A = - \sum_A \epsilon_A (\omega_{AC}(\xi)) \omega_A \quad (5.7)$$

Então nós temos,

$$\begin{aligned}
d\omega_A(X, Y) &= \sum_B \epsilon_B (\omega_B \wedge \omega_{BA})(X, Y) \\
&= X(\omega_A(Y)) - Y(\omega_A(X) - \omega_A([X, Y])) \\
&\quad - \sum_B \epsilon_B \{ \omega_B(X) \omega_{BA}(Y) - \omega_B(Y) \omega_{BA}(X) \} \\
&= X(\omega_A(Y)) + \sum_B \epsilon_B \omega_B(Y) \omega_{BA}(X) \\
&\quad - Y(\omega_A(X)) - \sum_B \epsilon_B \omega_B(X) \omega_{BA}(Y) - \omega_A([X, Y]) \\
&= X(\omega_A(Y)) - (\bar{\nabla}_X \omega_A)(Y) \\
&\quad - Y(\omega_A(X)) + (\bar{\nabla}_Y \omega_A)(X) - \omega_A([X, Y]) \\
&= \omega_A(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y]) \\
&= -\omega_A(T(X, Y))
\end{aligned}$$

nós portanto concluímos que

$$d\omega_A = \sum_B \epsilon_B \omega_B \wedge \omega_{BA} - \omega_A(T) \quad (5.8)$$

onde $\omega_{AB} = -\omega_{BA}$, de fato

$$\omega_{AB} = \langle \bar{\nabla} e_A, e_B \rangle = -\langle e_A, \bar{\nabla} e_B \rangle = -\omega_{BA}.$$

Como a conexão $\bar{\nabla}$ em $S_p^{n+p}(1)$ é de Levi Civita, temos $T \equiv 0$, o que implica

$$d\omega_A = \sum_B \epsilon_B \omega_{AB} \wedge \omega_B \quad (5.9)$$

Agora nós consideramos por [5.2](#)

$$d\omega_{AB}(X, Y) = X(\omega_{AB}(Y)) - Y(\omega_{AB}(X)) - \omega_{AB}([X, Y]).$$

Por fim, notemos que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X e_A &= \bar{\nabla}_Y \left(\sum_B \omega_{AB}(X) e_B \right) \\
&= \sum_B \{ Y(\omega_{AB}(X)) e_B + \omega_{AB}(X) \bar{\nabla}_Y e_B \} \\
&= \sum_B \left\{ Y(\omega_{AB}(X)) + \sum_C \epsilon_C \omega_{AC}(X) \omega_{CB}(Y) \right\} e_B,
\end{aligned}$$

a partir do qual temos,

$$\begin{aligned}
& \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X e_A - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y e_A - \bar{\nabla}_{[Y,X]} e_A \\
&= \sum_B \left\{ Y(\omega_{AB}(X)) - X(\omega_{AB}(Y)) + \sum_C \epsilon_C (\omega_{AC} \wedge \omega_{CB})(X, Y) - \omega_{AB}([Y, X]) \right\} e_B \\
&= \sum_B \left\{ d\omega_{AB}(Y, X) + \sum_C \epsilon_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}(X, Y) \right\} e_B.
\end{aligned}$$

então

$$d\omega_{AB} = \sum_C \epsilon_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \bar{\Omega}_{AB} \quad (5.10)$$

onde $\bar{\Omega}_{AB}$ é definido por

$$\bar{\Omega}_{AB}(X, Y) = -\langle \bar{R}(X, Y) e_A, e_B \rangle$$

As formas $\bar{\Omega}_{AB}$ são formas de grau dois, logo elas podem ser escritas no referencial $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+p}\}$ como:

$$\bar{\Omega}_{AB} = -\frac{1}{2} \sum_{C,D} \epsilon_C \epsilon_D \bar{R}_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D.$$

onde, por 3.8.1,

$$\bar{R}_{ABCD} = \epsilon_A \epsilon_B (\delta_{AC} \delta_{BD} - \delta_{AD} \delta_{BC}). \quad (5.11)$$

As equações 5.9 e 5.10 são conhecidas como as *equações de estrutura* do espaço ambiente $S_p^{n+p}(1)$.

5.2 Lema de Cartan

Lema 5.2.1. (Lemma de Cartan) *Seja V^n um espaço vetorial de dimensão n , e sejam $\omega_1, \dots, \omega_r : V^n \rightarrow \mathbb{R}$, $r \leq n$, 1-formas em V que são linearmente independentes. Suponha que existem 1-formas $\theta_1, \dots, \theta_r : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0$. Então*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j, \quad \text{com } a_{ij} = a_{ji}$$

Demonstração. Nós completamos as 1-formas ω_i para uma base $\omega_1, \dots, \omega_r, \omega_{r+1}, \dots, \omega_n$ de V^* e nós escrevemos

$$\theta_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} \omega_j + \sum_{l=r+1}^n b_{il} \omega_l, \quad l = r+1, \dots, n.$$

Usando a hipótese nós obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \omega_i \wedge \theta_i = \sum_{i,j} a_{ij} \omega_i \wedge \omega_j + \sum_l b_{il} \omega_i \wedge \omega_l \\ &= \sum_{i < j \leq p} (a_{ij} - a_{ji}) \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i \leq p < l} b_{il} \omega_i \wedge \omega_l. \end{aligned}$$

Como $\omega_k \wedge \omega_s$, $k < s$, $k, s = 1, \dots, n$ são linearmente independentes, nós concluímos que $b_{il} = 0$ e $a_{ij} = a_{ji}$. $\square$

Lema 5.2.2. *Seja $U \subset S_p^{n+p}(1)$ e sejam $\omega_1, \dots, \omega_{n+p}$ 1-formas diferenciáveis linearmente independentes em U . Suponha que existe um conjunto de 1-formas diferenciáveis ω_{AB} , $A, B = 1, \dots, n + p$ que satisfazem as condições:*

$$\omega_{AB} = -\omega_{BA}, \quad d\omega_A = \sum_B \epsilon_B \omega_B \wedge \omega_{BA}.$$

Então tal conjunto é único.

Demonstração. Suponha que existem outro conjunto $\bar{\omega}_{AB}$ com

$$\bar{\omega}_{AB} = -\bar{\omega}_{BA}, \quad d\omega_A = \sum_B \epsilon_B \omega_B \wedge \bar{\omega}_{BA}.$$

então

$$\sum_B \epsilon_B \omega_B \wedge (\bar{\omega}_{BA} - \omega_{BA}) = 0$$

e, pelo Lemma de Cartan 5.2.1,

$$\bar{\omega}_{BA} - \omega_{BA} = \sum_C G_{BC}^A \omega_C, \quad G_{BC}^A = G_{CB}^A$$

Note que

$$\bar{\omega}_{BA} - \omega_{BA} = \sum_C G_{BC}^A \omega_C = -(\bar{\omega}_{AB} - \omega_{AB}) = -\sum_C G_{AC}^B \omega_C,$$

e, como as ω_C são linearmente independentes, $G_{BC}^A = -G_{AC}^B$. Usando as simetrias acima, nós obtemos

$$G_{AC}^B = -G_{BC}^A = -G_{CB}^A = G_{AB}^C = G_{BA}^C = -G_{CA}^B = -G_{AC}^B = 0,$$

isto é, $\bar{\omega}_{BA} = \omega_{BA}$. $\square$

5.3 Equações fundamentais

O objetivo desta seção é criar um ambiente favorável à obtenção de uma estimativa para o laplaciano $\Delta|\Phi|^2$ de $|\Phi|^2$, sendo que

$$\Phi = \sum_{i,j,\alpha} \Phi_{ij}^\alpha \omega_i \otimes \omega_j \otimes e_\alpha, \quad (5.12)$$

onde $\Phi_{ij}^\alpha = h_{ij}^\alpha - \frac{1}{n} \text{tr} H^\alpha \delta_{ij}$, $H^\alpha = (h_{ij}^\alpha)$ e h_{ij}^α são os coeficientes da segunda forma fundamental na direção e_α .

Começaremos restringindo as formas ω_α , 5.9 e 5.10 à variedade M^n . Antes de mais nada, $\omega_\alpha = 0$ em M^n . De fato, dado $v = \sum_j v_j e_j \in T_p M^n$, temos

$$\omega_\alpha(v) = \sum_j v_j \omega_\alpha(e_j) = 0, \quad \forall \alpha.$$

Disso, segue que

$$0 = d\omega_\alpha = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_i \quad (5.13)$$

e, do Lema de Cartan 5.2.1,

$$\omega_{\alpha i} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha \quad (5.14)$$

Denotaremos por $B = \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^\alpha \omega_i \omega_j e_\alpha$ o tensor segunda forma fundamental de M^n .

Definição 5.3.1. O campo de vetores

$$h = \frac{1}{n} \text{traço}(B) = \frac{1}{n} \sum_\alpha \left(\sum_i h_{ii}^\alpha \right) e_\alpha,$$

é chamado o *vetor curvatura média* de M^n .

O valor $H = |h|$, definido por

$$H = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_\alpha \left(\sum_i h_{ii}^\alpha \right)^2}. \quad (5.15)$$

é chamado a *curvatura média* de M^n . Obviamente, se o vetor curvatura média h de M^n é paralelo (ver definição 4.3.3), então a curvatura média H de M^n é constante. De fato, se X é um campo de vetores em M^n , então

$$X\langle h, h \rangle = 2\langle \nabla_X^\perp h, h \rangle,$$

como $\nabla_X^\perp h = 0$, temos que $X\langle h, h \rangle = 0$. Logo, $\langle h, h \rangle = H^2$ é constante.

Separando as equações de estrutura (5.10) em suas partes tangenciais e normais, obtemos

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad (5.16)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} + \bar{\Omega}_{ij} \quad (5.17)$$

$$d\omega_{i\alpha} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{k\alpha} + \sum_\beta \omega_{i\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} + \bar{\Omega}_{i\alpha}, \quad (5.18)$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = \sum_j \omega_{\alpha j} \wedge \omega_{j\beta} + \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} + \bar{\Omega}_{\alpha\beta}. \quad (5.19)$$

As formas ω_{ij} só dependem da métrica Riemanniana de M^n e da parte tangente do referencial $\{e_A\}$. As formas

$$d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \Omega_{ij}$$

são as formas de curvatura da métrica Riemanniana de M^n . As formas

$$d\omega_{\alpha\beta} - \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} = \Omega_{\alpha\beta}, \quad (5.20)$$

onde

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{\alpha\beta ij} \omega_i \wedge \omega_j$$

são chamadas as formas de curvatura normal de M^n .

Da equação 5.17 temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l &= \Omega_{ij} \\ &= d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \\ &= \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} + \bar{\Omega}_{ij} \\ &= \sum_\alpha \left(\sum_k h_{ik}^\alpha \omega_k \right) \wedge \left(\sum_l h_{jl}^\alpha \omega_l \right) + \bar{\Omega}_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left(\sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha) \right) \omega_k \wedge \omega_l \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k,l} \bar{R}_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l, \end{aligned}$$

ou seja

$$R_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk} - \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha). \quad (5.21)$$

Da equação 5.19, concluímos de maneira análoga que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{\alpha\beta ij} \omega_i \wedge \omega_j &= \Omega_{\alpha\beta} \\
&= d\omega_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} \\
&= \sum_k \omega_{\alpha k} \wedge \omega_{k\beta} + \bar{\Omega}_{\alpha\beta} \\
&= \sum_k \left(\sum_i h_{ki}^{\alpha} \omega_i \right) \wedge \left(\sum_j h_{kj}^{\beta} \omega_j \right) + \bar{\Omega}_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\sum_k (h_{ki}^{\alpha} h_{kj}^{\beta} - h_{kj}^{\alpha} h_{ki}^{\beta}) \right) \omega_i \wedge \omega_j \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \bar{R}_{\alpha\beta ij} \omega_i \wedge \omega_j,
\end{aligned}$$

ou seja

$$R_{\alpha\beta ij} = - \sum_k (h_{ik}^{\alpha} h_{jk}^{\beta} - h_{jk}^{\alpha} h_{ik}^{\beta}). \quad (5.22)$$

As equações 5.21 e 5.22 são conhecidas como *Equação de Gauss* e *Equação de Ricci*, respectivamente.

Da definição 3.8.2, da proposição 3.8.1 e da equação 5.21 obtemos a seguinte expressão para o tensor curvatura de Ricci R_{ik}

$$R_{ik} = (n-1)\delta_{ik} - \sum_{\alpha} \left(\sum_j h_{jj}^{\alpha} \right) h_{ik}^{\alpha} + \sum_{\alpha,j} h_{ij}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha} \quad (5.23)$$

e segue imediatamente da equação anterior (ver definição 3.8.2) que a expressão para a curvatura escalar E é dada por

$$\begin{aligned}
E = \text{tr}(R_{ik}) &= n(n-1) - \sum_{\alpha} \left(\sum_j h_{jj}^{\alpha} \right)^2 + \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^{\alpha})^2 \\
&= n(n-1) - n^2 H^2 + S
\end{aligned}$$

onde $S = \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^{\alpha})^2$ é a norma quadrada de B .

Da proposição 4.3.1 a equação de Codazzi, no referencial $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$, se escreve como

$$h_{ijk}^{\alpha} = h_{ikj}^{\alpha} \quad (5.24)$$

Nós iremos definir a segunda derivada covariante $\bar{\nabla} \bar{\nabla} B$ da segunda forma fundamen-

tal B por

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_W \bar{\nabla}_X B)(Y, Z) &= \nabla_W^\perp(\bar{\nabla}_X B(Y, Z)) - (\bar{\nabla}_X B)(\nabla_W Y, Z) \\
&\quad - (\bar{\nabla}_X B)(Y, \nabla_W Z) - (\bar{\nabla}_{\nabla_W X} B)(Y, Z) \\
&= \nabla_W^\perp[\nabla_X^\perp(B(Y, Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z)] \\
&\quad - \nabla_X^\perp(B(\nabla_W Y, Z)) + B(\nabla_X \nabla_W Y, Z) + B(\nabla_W Y, \nabla_X Z) \\
&\quad - \nabla_X^\perp(B(Y, \nabla_W Z)) + B(\nabla_X Y, \nabla_W Z) + B(Y, \nabla_X \nabla_W Z) \\
&\quad - \nabla_{\nabla_W X}^\perp(B(Y, Z)) + B(\nabla_{\nabla_W X} Y, Z) + B(Y, \nabla_{\nabla_W X} Z) \\
&= \nabla_W^\perp \nabla_X^\perp(B(Y, Z)) - \nabla_W^\perp(B(\nabla_X Y, Z)) - \nabla_W^\perp(B(Y, \nabla_X Z)) \\
&\quad - \nabla_X^\perp(B(\nabla_W Y, Z)) + B(\nabla_X \nabla_W Y, Z) + B(\nabla_W Y, \nabla_X Z) \\
&\quad - \nabla_X^\perp(B(Y, \nabla_W Z)) + B(\nabla_X Y, \nabla_W Z) + B(Y, \nabla_X \nabla_W Z) \\
&\quad - \nabla_{\nabla_W X}^\perp(B(Y, Z)) + B(\nabla_{\nabla_W X} Y, Z) + B(Y, \nabla_{\nabla_W X} Z).
\end{aligned}$$

Para quaisquer campos de vetores tangentes X, Y, Z, W em M^n . Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned}
&(\bar{\nabla}_W \bar{\nabla}_X B)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_W B)(Y, Z) \\
&= \nabla_W^\perp \nabla_X^\perp(B(Y, Z)) - \nabla_X^\perp \nabla_W^\perp(B(Y, Z)) - \nabla_{\nabla_W X}^\perp(B(Y, Z)) + \nabla_{\nabla_X W}^\perp(B(Y, Z)) \\
&\quad + B(\nabla_X \nabla_W Y, Z) - B(\nabla_W \nabla_X Y, Z) + B(\nabla_{\nabla_W X} Y, Z) - B(\nabla_{\nabla_X W} Y, Z) \\
&\quad + B(Y, \nabla_X \nabla_W Z) - B(Y, \nabla_W \nabla_X Z) + B(Y, \nabla_{\nabla_W X} Z) - B(Y, \nabla_{\nabla_X W} Z) \\
&= (\nabla_W^\perp \nabla_X^\perp - \nabla_X^\perp \nabla_W^\perp - \nabla_{\nabla_W X}^\perp + \nabla_{\nabla_X W}^\perp)B(Y, Z) \\
&\quad + B(\nabla_X \nabla_W Y - \nabla_W \nabla_X Y + \nabla_{\nabla_W X} Y - \nabla_{\nabla_X W} Y, Z) \\
&\quad + B(Y, \nabla_X \nabla_W Z - \nabla_W \nabla_X Z + \nabla_{\nabla_W X} Z - \nabla_{\nabla_X W} Z) \\
&= R^\perp(X, W)B(Y, Z) - B(R(X, W)Y, Z) - B(R(X, W)Z, Y)
\end{aligned}$$

que no referencial $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$ se escreve como

$$h_{ijkl}^\alpha - h_{ijlk}^\alpha = \sum_m h_{im}^\alpha R_{mjkl} + \sum_m h_{jm}^\alpha R_{mikl} - \sum_\beta h_{ij}^\beta R_{\alpha\beta kl}. \quad (5.25)$$

O Laplaciano Δh_{ij}^α de h_{ij}^α é definido por

$$\Delta h_{ij}^\alpha = \sum_{k=1}^n h_{ijkk}^\alpha.$$

Da equação de Codazzi 5.24 e da equação 5.25, nós obtemos para qualquer α

$$\begin{aligned}
 \Delta h_{ij}^\alpha &= \sum_k h_{kijk}^\alpha \\
 &= \sum_k h_{kikj}^\alpha + \sum_{k,m} h_{km}^\alpha R_{mijk} + \sum_{k,m} h_{mi}^\alpha R_{mkjk} - \sum_{\beta,k} h_{ki}^\beta R_{\alpha\beta jk} \\
 &= \sum_k h_{kkij}^\alpha + \sum_{k,m} h_{km}^\alpha R_{mijk} + \sum_{k,m} h_{mi}^\alpha R_{mkjk} - \sum_{\beta,k} h_{ki}^\beta R_{\alpha\beta jk}. \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

Observação 5.3.1. Seja $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e espaço vetorial real das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Então,

$$N(A) := \text{tr}(AA^t) \geq 0, \quad \forall A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}),$$

em que A^t denota a tranposta da matriz M .

De fato, considere a matriz A , e chame $B = A^t$. Notemos os elementos de AB por $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Recordando que $b_{ij} = a_{ji}$, temos

$$N(A) = \text{tr}(AA^t) = \text{tr}(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \left(\sum_k a_{ik}b_{ki} \right) = \sum_{i,k} a_{ik}a_{ik} = \sum_{i,k} (a_{ik})^2 \geq 0.$$

Proposição 5.3.1. *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço completa imersa no espaço de De Sitter $S_p^{n+p}(1)$ com vetor curvatura média paralelo h . Então nós temos*

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + nS - n^2H^2 - nH \sum_\alpha \text{tr}(H^{n+1}(H^\alpha)^2) \\
 &\quad + \sum_{\alpha,\beta} [\text{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2 + \sum_{\alpha,\beta} N(H^\alpha H^\beta - H^\beta H^\alpha), \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

onde $N(A) = \text{tr}(AA^t)$, para cada matriz $A = (a_{ij})$.

Demonstração. como o vetor curvatura média é paralelo, implica que a curvatura média H é constante. Se $H = 0$, M^n é maximal e de [14] nós sabemos que M^n é totalmente geodésica. Se $H \neq 0$, nós escolhemos $e_{n+1} = \frac{h}{H}$, e da definição de h

$$h = \frac{1}{n} \left(\sum_i h_{ii}^{n+1} \right) e_{n+1} + \frac{1}{n} \sum_{\alpha \geq n+2} \left(\sum_i h_{ii}^\alpha \right) e_\alpha$$

obtemos diretamente que

$$\text{tr}H^{n+1} = nH, \quad \text{tr}H^\alpha = 0, \quad \alpha \geq n+2 \tag{5.28}$$

onde H^α denota a matriz (h_{ij}^α) . Como h é paralelo, temos

$$\sum_k h_{kki}^\alpha = 0, \quad \forall i, \alpha. \tag{5.29}$$

e

$$\omega_{\alpha,n+1} = \langle \nabla^\perp e_\alpha, e_{n+1} \rangle = -\langle e_\alpha, \nabla^\perp e_{n+1} \rangle = -\frac{1}{H} \langle e_\alpha, \nabla^\perp h \rangle = 0, \quad \forall \alpha. \quad (5.30)$$

Além disso

$$H^\alpha H^{n+1} = H^{n+1} H^\alpha. \quad (5.31)$$

De fato, como $d\omega_{\alpha,n+1} = 0, \forall \alpha$ a equação 5.20 resume-se a

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{n+1\beta ij} \omega_i \wedge \omega_j = 0$$

que implica, $R_{n+1\beta ij} = 0$. Daí pela equação 5.22 concluímos que

$$\sum_l (h_{il}^{n+1} h_{jl}^\beta - h_{jl}^{n+1} h_{il}^\beta) = 0.$$

Logo, considerando o elemento genérico ij na representação matricial, podemos escrever

$$(H^{n+1} H^\beta)_{ij} = \sum_l h_{il}^{n+1} h_{lj}^\beta = \sum_l h_{jl}^{n+1} h_{li}^\beta = \sum_l h_{il}^\beta h_{lj}^{n+1} = (H^\beta H^{n+1})_{ij}$$

De 5.26, 5.21 temos para $\alpha = n + 1$,

$$\begin{aligned} \Delta h_{ij}^{n+1} &= \sum_{k,m} h_{km}^{n+1} R_{mijk} + \sum_{k,m} h_{mi}^{n+1} R_{mkjk} - \sum_{\beta,k} h_{ki}^\beta R_{n+1\beta jk} \\ &= \sum_{k,m} h_{km}^{n+1} \left\{ \delta_{mj} \delta_{ik} - \delta_{mk} \delta_{ij} - \sum_{\beta} (h_{mj}^\beta h_{ik}^\beta - h_{mk}^\beta h_{ij}^\beta) \right\} \\ &\quad + \sum_{k,m} h_{mi}^{n+1} \left\{ \delta_{mj} \delta_{kk} - \delta_{mk} \delta_{kj} - \sum_{\beta} (h_{mj}^\beta h_{kk}^\beta - h_{mk}^\beta h_{kj}^\beta) \right\} \\ &\quad - \sum_{\beta,k,m} h_{ki}^\beta (h_{jm}^{n+1} h_{km}^\beta - h_{km}^{n+1} h_{jm}^\beta) \\ &= \left\{ \sum_{k,m} h_{km}^{n+1} (\delta_{mj} \delta_{ik} - \delta_{mk} \delta_{ij}) \right\} - \sum_{\beta,m} h_{km}^{n+1} (h_{mj}^\beta h_{ik}^\beta - h_{mk}^\beta h_{ij}^\beta) \\ &\quad + \left\{ \sum_{k,m} h_{mi}^{n+1} (\delta_{mj} \delta_{kk} - \delta_{mk} \delta_{kj}) \right\} - \sum_{\beta,m} h_{mi}^{n+1} (h_{mj}^\beta h_{kk}^\beta - h_{mk}^\beta h_{kj}^\beta) \\ &\quad - \sum_{\beta,k,m} h_{ki}^\beta (h_{jm}^{n+1} h_{km}^\beta - h_{km}^{n+1} h_{jm}^\beta) \\ &= n h_{ij}^{n+1} - n H \delta_{ij} + \sum_{\beta,k,m} h_{km}^{n+1} h_{mk}^\beta h_{ij}^\beta - 2 \sum_{\beta,k,m} h_{km}^{n+1} h_{mj}^\beta h_{ik}^\beta + \sum_{\beta,k,m} h_{mi}^{n+1} h_{mk}^\beta h_{kj}^\beta \\ &\quad - n H \sum_m h_{mi}^{n+1} h_{mj}^{n+1} + \sum_{\beta,k,m} h_{jm}^{n+1} h_{mk}^\beta h_{ki}^\beta. \end{aligned}$$

e para $\alpha > n + 1$

$$\begin{aligned}\Delta h_{ij}^\alpha &= nh_{ij}^\alpha + \sum_{\beta,k,m} h_{km}^\alpha h_{mk}^\beta h_{ij}^\beta - 2 \sum_{\beta,k,m} h_{km}^\alpha h_{mj}^\beta h_{ik}^\beta + \sum_{\beta,k,m} h_{mi}^\alpha h_{mk}^\beta h_{kj}^\beta \\ &\quad - nH \sum_m h_{mi}^\alpha h_{mj}^{n+1} + \sum_{\beta,k,m} h_{jm}^\alpha h_{mk}^\beta h_{ki}^\beta.\end{aligned}$$

E daí,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^\alpha \Delta h_{ij}^\alpha = \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1} \Delta h_{ij}^{n+1} + \sum_{\alpha>n+1} \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha \Delta h_{ij}^\alpha \\ &= \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + n \sum_{i,j} (h_{ij}^{n+1})^2 - nH \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1} \delta_{ij} + \sum_{\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{n+1} h_{km}^{n+1} h_{mk}^\beta h_{ij}^\beta \\ &\quad - 2 \sum_{\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{n+1} h_{km}^{n+1} h_{mj}^\beta h_{ik}^\beta + \sum_{\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{n+1} h_{mi}^{n+1} h_{mk}^\beta h_{kj}^\beta \\ &\quad - nH \sum_{i,j,m} h_{ij}^{n+1} h_{mi}^{n+1} h_{mj}^{n+1} + \sum_{\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{n+1} h_{jm}^{n+1} h_{mk}^\beta h_{ki}^\beta + n \sum_{\alpha>n+1,i,j} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\alpha \\ &\quad + \sum_{\alpha>n+1} \sum_{\beta,i,j,k,m} h_{ij}^\alpha h_{km}^\alpha h_{mk}^\beta h_{ij}^\beta - 2 \sum_{\alpha>n+1} \sum_{\beta,i,j,k,m} h_{ij}^\alpha h_{km}^\alpha h_{mj}^\beta h_{ik}^\beta \\ &\quad + \sum_{\alpha>n+1} \sum_{\beta,i,j,k,m} h_{ij}^\alpha h_{mi}^\alpha h_{mk}^\beta h_{kj}^\beta - nH \sum_{\alpha>n+1} \sum_{i,j,m} h_{ij}^\alpha h_{mi}^\alpha h_{mj}^{n+1} + \sum_{\alpha>n+1} \sum_{\beta,i,j,k,m} h_{ij}^\alpha h_{jm}^\alpha h_{mk}^\beta h_{ki}^\beta \\ &= \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + nS - n^2 H^2 + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^\alpha h_{km}^\alpha h_{mk}^\beta h_{ij}^\beta - 2 \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^\alpha h_{km}^\alpha h_{mj}^\beta h_{ik}^\beta \\ &\quad + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^\alpha h_{mi}^\alpha h_{mk}^\beta h_{kj}^\beta - nH \sum_{\alpha,i,j,m} h_{ij}^\alpha h_{mi}^\alpha h_{mj}^{n+1} + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^\alpha h_{jm}^\alpha h_{mk}^\beta h_{ki}^\beta \\ &= \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + nS - n^2 H^2 - nH \sum_{\alpha} \text{tr}(H^{n+1}(H^\alpha)^2) \\ &\quad + \sum_{\alpha,\beta} [\text{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2 + \sum_{\alpha,\beta} N(H^\alpha H^\beta - H^\beta H^\alpha).\end{aligned}$$

□

5.4 Uma desigualdade tipo Simons

Antes de demonstrarmos o teorema principal desta seção precisamos do seguinte lema algébrico.

Lema 5.4.1. (Walcy Santos [28]) *Sejam $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações lineares simétricas tais que $AB - BA = 0$ e $\text{tr} A = \text{tr} B = 0$. Então*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\text{tr} A^2)(\text{tr} B^2)^{1/2} \leq \text{tr} A^2 B \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(\text{tr} A^2)(\text{tr} B^2)^{1/2} \quad (5.32)$$

e a igualdade é satisfeita do lado direito (resp. do lado esquerdo) se e somente se $n - 1$ dos autovalores x_i de A e os correspondentes autovalores y_i de B satisfazem

$$\begin{aligned} |x_i| &= \frac{(tr A^2)^{1/2}}{\sqrt{n(n-1)}}, \quad x_i x_j \geq 0, \\ y_i &= \frac{(tr B^2)^{1/2}}{\sqrt{n(n-1)}} \left(\text{resp. } y_i = -\frac{(tr B^2)^{1/2}}{\sqrt{n(n-1)}} \right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Teorema 5.4.1. (Uma desigualdade tipo Simons). *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço completa no espaço de De Sitter $S_p^{n+1}(1)$ com vetor curvatura média paralelo. Então a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$\frac{1}{2} \Delta |\Phi|^2 \geq |\Phi|^2 \left(\frac{|\Phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H |\Phi| + n(1 - H^2) \right). \quad (5.34)$$

Demonstração. Como o vetor curvatura média é paralelo ou $H = 0$ ou $H \neq 0$. Suponhamos inicialmente que $H \neq 0$. Escolhemos um referencial ortonormal adaptado tal que $e_{n+1} = \frac{h}{H}$. Como e_{n+1} é uma direção paralela, é fácil verificar que

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{n+1} &= h_{ij}^{n+1} - H \delta_{ij}, \quad \Phi_{ij}^\alpha = h_{ij}^\alpha, \quad \alpha > n+1, \\ \Phi^{n+1} &= H^{n+1} - H I, \quad \Phi^\alpha = H^\alpha, \quad \alpha > n+1, \\ N(\Phi^{n+1}) &= tr(\Phi^{n+1})^2 = tr(H^{n+1})^2 - nH^2, \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde Φ^α e H^α denotam, respectivamente, as matrizes (Φ_{ij}^α) e (h_{ij}^α) . Além do mais

$$tr(H^{n+1})^3 = tr(\Phi^{n+1})^3 + 3H tr(\Phi^{n+1})^2 + nH^3. \quad (5.36)$$

E por definição

$$\begin{aligned} N(\Phi^\alpha) &= tr((\Phi_{ij}^\alpha)(\Phi_{ji}^\alpha)) = \sum_{i,j} \Phi_{ij}^\alpha \Phi_{ji}^\alpha = \sum_{i,j} (\Phi_{ij}^\alpha)^2, \\ |\Phi|^2 &= \sum_{\alpha} N(\Phi^\alpha) = \sum_{\alpha, i, j} (\Phi_{ij}^\alpha)^2 = S - nH^2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Substituindo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\Phi|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + n \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^\alpha)^2 - n^2 H^2 - nH \sum_{\alpha} \text{tr}(H^{n+1}(H^\alpha)^2) \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta} [\text{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2 + \sum_{\alpha,\beta} N(H^\alpha H^\beta - H^\beta H^\alpha) \\
&= \sum_{\alpha,i,j,k} (\Phi_{ijk}^\alpha)^2 + n \sum_{\alpha,i,j} (\Phi_{ij}^\alpha + H\delta_{ij})^2 - n^2 H^2 - nH \text{tr}(H^{n+1})^3 \\
&\quad - nH \sum_{\alpha>n+1} \text{tr}((\Phi^{n+1} + HI)(\Phi^\alpha)^2) + (\text{tr}(\Phi^{n+1})^2 + nH^2)^2 \\
&\quad + \sum_{\beta>n+1} (\text{tr}((\Phi^{n+1} + HI)(\Phi^\beta)))^2 + \sum_{\alpha>n+1} (\text{tr}((\Phi^\alpha)(\Phi^{n+1} + HI)))^2 \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta>n+1} (\text{tr}(\Phi^\alpha \Phi^\beta))^2 + \sum_{\alpha,\beta} N(\Phi^\alpha \Phi^\beta - \Phi^\beta \Phi^\alpha) \\
&= \sum_{\alpha,i,j,k} (\Phi_{ijk}^\alpha)^2 + n \sum_{\alpha,i,j} (\Phi_{ij}^\alpha)^2 + 2n \sum_{\alpha,i,j} H\Phi_{ij}^\alpha \delta_{ij} + n \sum_{\alpha,i,j} (H\delta_{ij})^2 - n^2 H^2 \\
&\quad - nH(\text{tr}(\Phi^{n+1})^3 + 3H\text{tr}(\Phi^{n+1})^2 + nH^3) - nH \sum_{\alpha>n+1} \text{tr}(\Phi^{n+1}(\Phi^\alpha)^2) \\
&\quad - nH^2 \sum_{\alpha>n+1} \text{tr}(\Phi^\alpha)^2 + (\text{tr}(\Phi^{n+1})^2)^2 + 2nH^2 \text{tr}(\Phi^{n+1})^2 + n^2 H^4 \\
&\quad + \sum_{\beta>n+1} (\text{tr}(\Phi^{n+1}\Phi^\beta) + H\text{tr}(\Phi^\beta))^2 + \sum_{\alpha>n+1} (\text{tr}(\Phi^\alpha \Phi^{n+1}) + H\text{tr}(\Phi^\alpha))^2 \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta>n+1} (\text{tr}(\Phi^\alpha \Phi^\beta))^2 + \sum_{\alpha,\beta} N(\Phi^\alpha \Phi^\beta - \Phi^\beta \Phi^\alpha) \\
&= \sum_{\alpha,i,j,k} (\Phi_{ijk}^\alpha)^2 + n \sum_{\alpha,i,j} (\Phi_{ij}^\alpha)^2 - nH \sum_{\alpha} \text{tr}(\Phi^{n+1}(\Phi^\alpha)^2) \\
&\quad - nH^2 \sum_{\alpha} \text{tr}(\Phi^\alpha)^2 + \sum_{\alpha,\beta} (\text{tr}(\Phi^\alpha \Phi^\beta))^2 + \sum_{\alpha,\beta} N(\Phi^\alpha \Phi^\beta - \Phi^\beta \Phi^\alpha) \\
&= \sum_{\alpha,i,j,k} (\Phi_{ijk}^\alpha)^2 + n(1 - H^2)|\Phi|^2 - nH \sum_{\alpha} \text{tr}(\Phi^{n+1}(\Phi^\alpha)^2) \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta} (\text{tr}(\Phi^\alpha \Phi^\beta))^2 + \sum_{\alpha,\beta} N(\Phi^\alpha \Phi^\beta - \Phi^\beta \Phi^\alpha)
\end{aligned}$$

Aplicando o lema 5.4.1 a Φ^α e Φ^{n+1} nós temos

$$|\text{tr}(\Phi^{n+1}(\Phi^\alpha)^2)| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{N(\Phi^{n+1})N(\Phi^\alpha)}. \quad (5.38)$$

Agora fazendo a soma para todo $\alpha \neq n+1$ no lado direito da equação acima e usando

5.37 nós temos

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \text{tr}(\Phi^{n+1}(\Phi^{\alpha})^2) &\leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{N(\Phi^{n+1})} \sum_{\alpha} N(\Phi^{\alpha}) \\ &\leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} |\Phi|^3 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |\Phi|^4 &= \left(\sum_{\alpha} N(\Phi^{\alpha}) \right)^2 \leq \left(\sum_{\alpha} 1^2 \right) \left(\sum_{\alpha} (N(\Phi^{\alpha}))^2 \right) = p \sum_{\alpha} N^2(\Phi^{\alpha}) \\ &= p \sum_{\alpha} (\text{tr} \Phi^{\alpha} \Phi^{\alpha})^2 \leq p \sum_{\alpha, \beta} (\text{tr} \Phi^{\alpha} \Phi^{\beta})^2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

E segue de 5.4, 5.39 e 5.40 que a desigualdade 5.34 é satisfeita.

Se $H = 0$, M^n é chamada maximal. Neste caso, $\sum_i h_{ii} = 0$ para todo α , que junto com 5.27 implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\Phi|^2 = \frac{1}{2} \Delta S &= \sum_{\alpha, i, j, k} (h_{ijk}^{\alpha})^2 + nS + \sum_{\alpha, \beta} [\text{tr}(H^{\alpha} H^{\beta})]^2 \\ &\quad + \sum_{\alpha, \beta} N(H^{\alpha} H^{\beta} - H^{\beta} H^{\alpha}) \geq nS + \sum_{\alpha} N^2(H^{\alpha}) \\ &= n|\Phi|^2 + \sum_{\alpha} N^2(H^{\alpha}) \geq |\Phi|^2 \left(\frac{|\Phi|^2}{p} + n \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

□

5.5 O Princípio do Máximo

Nesta seção iremos apenas mencionar um princípio do máximo que desempenha um papel importante no estudo de geometria diferencial em variedades Riemannianas. O primeiro é conhecido como *princípio do máximo de Hopf*.

Lema 5.5.1. *Seja M um variedade Riamanniana compacta. Se uma função f de classe C^2 em M satisfaz $\Delta f \geq 0$ ou $\Delta f \leq 0$, então f é uma função constante, onde Δ denota o laplaciano em M .*

Como uma generalização do princípio do máximo de Hopf, Omori [24] e Yau [32] provaram um importante teorema, que é conhecido como o *princípio do máximo generalizado*.

Lema 5.5.2. (*Princípio do máximo generalizado*) Seja M^n uma variedade Riemanniana completa conexa com curvatura de Ricci limitada por baixo e seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 que é limitada inferiormente em M . Então existe uma sequência de pontos $\{p_k\}$ em M^n satisfazendo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = \inf(f), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla f(p_k)| = 0 \quad e \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \Delta f(p_k) \geq 0.$$

Capítulo 6

RESULTADOS DE RIGIDEZ

Antes de enunciar o resultado principal deste trabalho, deixaremos aqui o seguinte lema técnico.

Lema 6.0.3. *Seja P_H o polinômio definido em 2, então:*

a) *Se $H^2 < 4(n-1)/n^2$, então $P_H(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

b) *Se $H^2 = 4(n-1)/n^2$, podemos escrever $H = 2\sqrt{(n-1)}/n$; a raiz (dupla) de P_H é*

$$\alpha(n, H, p) = \frac{n(n-2)}{2\sqrt{n(n-1)}}H = \frac{n-2}{\sqrt{n}},$$

tal que $P_H(x) = (x - (n-2)/\sqrt{n})^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) *Se $H^2 > 4(n-1)/n^2$, então P_H tem duas raízes reais $\alpha^-(n, H, p)$ e $\alpha^+(n, H, p)$ dadas por*

$$\alpha^\pm(n, H, p) = \sqrt{\frac{n}{4(n-1)}} \left((n-2)H \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)} \right). \quad (6.1)$$

$\alpha^+(n, H, p)$ sempre é positiva; por outro lado, $\alpha^-(n, H, p) > 0$ se, e somente se

$$(n-2)H - \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)} > 0,$$

que é satisfeita se e somente se $4(n-1)/n^2 \leq H^2 < 1$. De maneira análoga, $\alpha^-(n, H, p) = 0$ se, e somente se $H^2 = 1$ e $\alpha^-(n, H, p) < 0$ se, e somente se $H^2 > 1$.

6.1 Teorema Principal

Teorema 6.1.1. *Seja M^n ($n \geq 3$) uma subvariedade tipo-espaço completa no espaço de De Sitter $S_p^{n+p}(1)$ com vetor curvatura média paralelo. Então ou*

a) *$H^2 < \frac{4(n-1)}{n^2}$ e M^n é totalmente umbílica ou*

b) *$H^2 \geq \frac{4(n-1)}{n^2}$ e $\max\{0, \alpha^-(n, H, p)\} \leq \sup |\Phi| \leq \alpha^+(n, H, p)$, onde $\alpha^-(n, H, p)$ e $\alpha^+(n, H, p)$ são as raízes reais do polinômio quadrático*

$$P_H(x) = \frac{x^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx + n(1-H^2). \quad (6.2)$$

Além do mais, se a igualdade for satisfeita e M é não totalmente umbílica então $p = 1$.

Demonstração. Consideremos a função positiva F em M^n definida por $F = \frac{1}{\sqrt{1+|\Phi|^2}}$. Um cálculo simples mostra que

$$|\nabla F|^2 = \frac{|\nabla|\Phi|^2|^2}{4(1+|\Phi|^2)^3} \text{ e } F\Delta F = \frac{-\Delta|\Phi|^2}{2(1+|\Phi|^2)^2} + 3|\nabla F|^2. \quad (6.3)$$

Agora, de 5.34 e 6.3 nós obtemos

$$F\Delta F \leq \frac{-|\Phi|^2}{2(1+|\Phi|^2)^2} \left(\frac{|\Phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\Phi| + n(1-H^2) \right) + 3|\nabla F|^2. \quad (6.4)$$

Assuma que a segunda forma fundamental (h_{ij}^{n+1}) de M^n com respeito a e_{n+1} tenha sido diagonalizada e que seus autovalores sejam iguais a λ_i^{n+1} . Logo

$$\begin{aligned} Ric(e_i, e_i) &= (n-1) - \left(\sum_j h_{jj}^{n+1} \right) h_{ii}^{n+1} + \sum_{\alpha,j} (h_{ij}^\alpha)^2 \geq (n-1) - nHh_{ii}^{n+1} + \sum_j (h_{ij}^{n+1})^2 \\ &= \left(\lambda_i^{n+1} - \frac{nH}{2} \right)^2 + (n-1) - \frac{n^2 H^2}{4}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Assim a curvatura de Ricci de M^n é limitada inferiormente. Como M^n é tipo-espaço e $F > 0$, podemos aplicar o lema 5.5.2 para a função F . Então podemos obter uma sequência de pontos $\{p_k\}$ em M^n tal que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} F(p_k) &= \inf(F); \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi|^2(p_k) &= \sup |\Phi|^2 = (\sup |\Phi|)^2; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla F(p_k)| &= 0; \quad \liminf \Delta F(p_k) \geq 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Aplicando 6.4 na sequência obtida e usando 6.6 temos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} F(p_k) \Delta F(p_k) &\geq 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} 3|\nabla F(p_k)|^2 &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-|\Phi|^2(p_k)}{2(1+|\Phi|^2(p_k))^2} \left(\frac{|\Phi|^2(p_k)}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\Phi|(p_k) + n(1-H^2) \right) &\geq 0, \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\sup |\Phi|^2}{(1 + \sup |\Phi|^2)^2} \left(\frac{\sup |\Phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H \sup |\Phi| + n(1-H^2) \right) \leq 0. \quad (6.7)$$

A desigualdade 6.7 mostra que $\sup |\Phi| < \infty$. Mais que isso, mostra que $\sup |\Phi| = 0$ ou $\max\{0, \alpha^-(n, H, p)\} \leq \sup |\Phi| \leq \alpha^+(n, H, p)$. Se $H^2 < 4(n-1)/n^2$, da parte a) do lema 6.0.3 implica $P_H(|\Phi|) > 0$ para todo $|\Phi|$, mas como a igualdade em 6.7 é verdadeira, temos que $\sup |\Phi| = 0$, e a conclusão em a) do Teorema 6.1.1 segue. Agora suponha que a primeira conclusão de b) do Teorema 6.1.1 não seja satisfeita, i.e., que

$$\sup |\Phi| < \alpha^-(n, H, p) \quad \text{ou} \quad \sup |\Phi| > \alpha^+(n, H, p),$$

quando $\alpha^-(n, H, p) > 0$, visto que $\sup |\Phi| > 0$. Então $P_H(\sup |\Phi|)$ é estritamente positivo, que implica que o lado direito de 6.7 é não negativo. Isto implica que $\sup |\Phi|^2 = 0$, isto é, $|\Phi|^2 \equiv 0$, e então M^n é totalmente umbílica.

Vamos supor agora que $\sup |\Phi| = \alpha^-(n, H, p) > 0$ ou $\sup |\Phi| = \alpha^+(n, H, p)$. Em particular, estes pressupostos implicam que M^n não é totalmente umbílica. Assumindo além disso, que $p \geq 2$ vamos obter uma contradição. Como $|\Phi|^2 = \sum_{\alpha} N(\Phi^{\alpha})$ é uma função diferenciável limitada por cima em M^n , podemos aplicar novamente o lema 5.5.2 para a função $|\Phi|^2$. Portanto, tomando subsequências se necessário, obtemos uma sequência $\{p_k\}$ em M^n tal que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |\Phi|^2(p_k) &= \sup |\Phi|^2 = (\sup |\Phi|)^2, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} N(\Phi^{\alpha})(p_k) &= C_{\alpha}^2, \quad \alpha = n+1, \dots, n+p, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla |\Phi|^2(p_k)| &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sup(\Delta |\Phi|^2)(p_k) &\leq 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

onde C_{α} são constantes.

Recordemos que para provar a desigualdade 5.34 nós usamos as desigualdades 5.38 e 5.40. Então a igualdade será satisfeita em 5.34 se, e somente se, for satisfeita em 5.38 e 5.40. Aplicando 5.34, 5.38 e 5.40 em (p_k) , fazendo $k \rightarrow \infty$ e usando 6.8 obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{2} \sup(\Delta |\Phi|^2)(p_k) \\ &\geq \sup |\Phi|^2 \left(\frac{\sup |\Phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H \sup |\Phi| + n(1-H^2) \right); \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$C_{n+1} \sup |\Phi|^2 \leq \sup |\Phi|^3; \tag{6.10}$$

$$(\sup |\Phi|^2)^2 \leq p \sum_{\alpha} C_{\alpha}^4. \tag{6.11}$$

Como nós assumimos que $\sup |\Phi| = \alpha^-(n, H, p) > 0$ ou $\sup |\Phi| = \alpha^+(n, H, p)$, ambos os lados da desigualdade 6.9 são iguais a zero. E como antes, a igualdade será satisfeita

em 6.9 se, e somente se a igualdade for satisfeita em 6.10 e 6.11. Mais precisamente, 6.10 e 6.11 podem ser escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} C_{n+1}(\sup |\Phi|)^2 &= C_{n+1} \sup |\Phi|^2 = \sup |\Phi|^3 = (\sup |\Phi|)^3, \\ (\sup |\Phi|^2)^2 &= p \sum_{\alpha} C_{\alpha}^4. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Como M^n não é totalmente umbílica, 6.12 implica $C_{n+1} = \sup |\Phi| > 0$ e então a segunda fórmula de 6.12 satisfaz $(p-1)C_{n+1}^4 + p \sum_{\alpha=n+1}^{n+p} C_{\alpha}^4 = 0$. Assim, se $p \geq 2$, como todas as constantes C_{α} são não-negativas, nós podemos inferir que $0 = C_{n+1} = \sup |\Phi|$ e M^n é totalmente umbílica. $\square$

Observação 6.1.1. Quando a codimensão de M^n é 1, a subvariedade M^n é chamada uma hipersuperfície.

Dada uma hipersuperfície tipo-espaço M^n com curvatura média constante H , para cada $q \in M^n$ nós definimos o tensor $\Phi : T_q M \rightarrow T_q M$ por

$$\langle \Phi X, Y \rangle = \langle AX, Y \rangle - H \langle X, Y \rangle,$$

onde A é o operador associado à segunda forma fundamental de M^n .

Nessa forma, é fácil perceber que os autovalores de Φ são da forma $\mu_i = \kappa_i - H$, e que

$$|\Phi|^2 = \sum_i \mu_i^2 = \frac{1}{2n} \sum (\kappa_i - \kappa_j)^2.$$

Antes de provarmos o primeiro corolário do teorema 0.0.10, enunciaremos alguns resultados importantes. O primeiro é um lema algébrico devido a M. Okumura [23] e completado com o caso da igualdade por Alencar e do Carmo [3]. E o segundo é um teorema de congruência devido a N. Abe, N. Koike, e S. Yamaguchi (Teorema 5.1 em [1]).

Lema 6.1.1. *Seja $\mu_i, i = 1, \dots, n$, números reais com $\sum \mu_i = 0$ e $\sum \mu_i^2 = \beta^2 \geq 0$. Então*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3, \quad (6.13)$$

e a igualdade é satisfeita se, e somente se $(n-1)$ dos números μ_i são iguais a $\beta/\sqrt{n(n-1)}$ ou $(n-1)$ dos números μ_i são iguais a $-\beta/\sqrt{n(n-1)}$.

Teorema 6.1.2. *Seja M^n uma hipersuperfície própria de uma forma espacial $Q_1^{n+1}(1)$. Assuma que existem constantes λ e μ ($\lambda \neq \mu$) e que o conjunto de todos os autovalores de A_{η} é*

$\{\lambda, \mu\}$ ou $\{\lambda\}$ para um vetor normal unitário η em cada ponto de M^n . Então M^n é localmente congruente ao cilindro hiperbólico

$$\begin{aligned} H^1(c_1) \times S^{n-1}(c_2) &= \{(x, y) \in S_1^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2} = \mathbb{R}_1^2 \times \mathbb{R}^n; \\ |x|^2 &= -1/c_1, |y|^2 = 1/c_2\}. \end{aligned}$$

onde $c_1 < 0, c_2 > 0$ e $1/c_1 + 1/c_2 = 1$.

Corolário 6.1.1. *Seja M^n ($n \geq 3$) uma subvariedade tipo-espaço completa em $S_p^{n+p}(1)$ com vetor curvatura média paralelo e $H^2 \geq \frac{4(n-1)}{n^2}$. Se $\sup |\Phi| \leq \max\{0, \alpha^-(n, H, p)\}$ ou $\sup |\Phi| \geq \alpha^+(n, H, p)$, então ou*

a) M^n é totalmente umbílica ou

b) $\sup |\Phi| = \alpha^-(n, H, p) > 0$ ou $\sup |\Phi| = \alpha^+(n, H, p)$.

Além disso, se $\sup |\Phi| = \alpha^-(n, H, p) > 0$ e este supremo é atingido em M^n , então M^n é isométrica ao cilindro hiperbólico $H^1 \times S^{n-1}$.

Demonstração. Observe, inicialmente, que $\alpha^-(n, H, p) \leq 0$ pode implicar $\sup |\Phi| = 0$, que de imediato nos dá a). Então suponha que

$$0 < \sup |\Phi| < \alpha^-(n, H, p) \text{ ou } \sup |\Phi| > \alpha^+(n, H, p),$$

da demonstração do teorema anterior, temos a). Restando as igualdades

$$\sup |\Phi| = \alpha^-(n, H, p) > 0 \text{ ou } \sup |\Phi| = \alpha^+(n, H, p)$$

em b).

Vamos mostrar agora a segunda parte de b). Antes de tudo, da segunda parte de b) do Teorema 6.1.1, concluímos que $p = 1$.

Supondo $\sup |\Phi| = \alpha^-(n, H, p) > 0$, nós temos $|\Phi| \leq \alpha^-(n, H, p)$, isso significa que $P_H(|\Phi|) \geq 0$ para cada $|\Phi|$, onde P_H é o polinômio 2. Este fato e a desigualdade tipo Simons 5.4.1,

$$\frac{1}{2} \Delta |\Phi|^2 \geq |\Phi|^2 P_H(|\Phi|),$$

implicam que $\Delta |\Phi|^2 \geq 0$. Por hipótese, $\sup |\Phi|$ é atingido em algum ponto de M^n , então nós aplicamos o princípio do máximo de Hopf (lema 5.5.1) para mostrar que $|\Phi|$

é constante e assim $|\Phi| \equiv \alpha^-(n, H, p)$. Usando novamente a desigualdade tipo Simons 5.4.1, nós obtemos

$$0 = \frac{1}{2} \Delta |\Phi|^2 \geq |\Phi|^2 P_H(|\Phi|) = (\alpha^-(n, H, p)) P_H(\alpha^-(n, H, p)) = 0,$$

então a igualdade é satisfeita no lema 6.1.1. Disto segue que $(n-1)$ dos autovalores $k_i - H$ de Φ , são iguais a

$$\frac{|\Phi|}{\sqrt{n(n-1)}} = \frac{\alpha^-(n, H, p)}{\sqrt{n(n-1)}},$$

ou igual ao negativo desta última expressão. Isto significa que a hipersuperfície M^n tem $(n-1)$ curvaturas principais iguais e constantes. Como $nH = \sum k_i$ e H é constante, a outra curvatura principal também é constante. O teorema 6.1.2 mostra que M^n é isométrica a um cilindro hiperbólico. $\square$

Corolário 6.1.2. *Seja M^n ($n \geq 3$) uma subvariedade tipo-espaço completa em $S_p^{n+p}(1)$ com vetor curvatura média paralelo e $H^2 \geq \frac{4(n-1)}{n^2}$. Se M^n tem curvatura escalar constante e $\sup |\Phi| \leq \max\{0, \alpha^-(n, H, p)\}$ ou $\sup |\Phi| \geq \alpha^+(n, H, p)$, então ou M^n é totalmente umbílica ou M^n é isométrica a um cilindro hiperbólico $H^1 \times S^{n-1}$.*

Demonstração. A hipótese e o corolário 6.1.1 implica que M^n é totalmente umbílica ou $\sup |\Phi| = \alpha^-(n, H, p)$ ou $\sup |\Phi| = \alpha^+(n, H, p)$. Como nós estamos assumindo que a curvatura escalar E é constante, da expressão em 5.3,

$$E = n(n-1) - n^2 H^2 + S,$$

nós temos que S é constante, e da expressão em 5.37,

$$|\Phi|^2 = S - nH^2,$$

concluimos que $|\Phi|$ também é constante.

Supondo inicialmente que $\sup |\Phi| = \alpha^+(n, H, p)$, obtemos $|\Phi| \equiv \alpha^+(n, H, p)$, e da equação 6.1

$$|\Phi|^2 = -nH^2 + C_1$$

onde

$$C_1 = -n + \frac{n}{2(n-1)} \left(n^2 H^2 + (n-2)H \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)} \right).$$

Usando novamente a equação 5.37, temos

$$S = C_1,$$

e do teorema 0.0.7, M^n é um cilindro hiperbólico.

Suponha agora que $\sup |\Phi| = \alpha^-(n, H, p) > 0$, como $|\Phi|$ é constante, $\sup |\Phi|$ é atingido em algum ponto de M^n e, do corolário anterior, M^n é isométrica a um cilindro hiperbólico. $\square$

REFERÊNCIAS

- [1] N. Abe, N. Koike e S. Yamaguchi. Congruence theorems for proper semi-riemannian hypersurfaces in a real space form. *Yokohama Math*, 35:123–136, 1987.
- [2] K. Akatugawa. On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the sitter space. *Math. Z.*, 196:13–19, 1987.
- [3] H. Alencar e M. do Carmo. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120:1223–1229, 1994.
- [4] Aldir Brasil Jr., A. Gervasio Colares e Oscar Palmas. Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de sitter space: a gap theorem. *Illinois J. Math*, 47:847–866, 2003.
- [5] Aldir Brasil Jr., Rosa M. B. Chaves e A. Gervasio Colares. Rigidity results for submanifolds with parallel mean curvature vector in the de sitter space. *Glasgow Math. J.*, 48:1–10, 2006.
- [6] Manfredo Perdigão do Carmo. *Geometria Riemanniana*. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [7] Isaac Chavel. *Riemannian Geometry, a modern introduction*. Cambridge University press, 2006.
- [8] Rosa M.B. Chaves e Luiz Amancio M. Sousa Jr. Some applications of a simons type formula for complete spacelike submanifolds in a semi-riemannian space form. *Differential Geometry and its Applications*, 25:419–432, 2007.
- [9] Marcos Dajczer, Katsumi Nomizu. On flat surfaces in S_1^3 e H_1^3 , in manifolds and lie groups, in honor of y. matsushima. *Birhauser*, pages 71–88, 1981.
- [10] Qing-Ming Cheng e Kazuhiro Nonaka. Complete submanifolds in euclidean spaces with parallel mean curvature vector. *manuscripta mathematica*, 105:353–366, 2001.
- [11] A.J. Goddard. Some remarks on the existencce of submanifolds of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 82:489–495, 1977.
- [12] Sigmundur Gudmundsson. An introduction to riemannian geometry. Internet, <http://www.matematik.lu.se/matematiklu/personal/sigma/index.html>. Notas de aula.
- [13] Li Haizhong. Complete spacelike submanifolds in de sitter space with parallel mean curvature vector satisfying $h^2 = 4(n - 1)/n^2$. *Ann. Global Anal. Geom.*, 15:335–345, 1997.

- [14] Toru Ishihara. Maximal space-like submanifolds in a pseudo-riemannian space of constant curvature. *Mich. Math. J.*, 35:345–352, 1988.
- [15] Wolfgang Kühnel. *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*. American Mathematical Society, 2006.
- [16] U-Hang Ki, He-Jin Kim, Hisao Nakagawa. On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature of a lorentz space form. *Tokyo J. Math.*, 14:205–216, 1991.
- [17] Jeffrey M. Lee. *Differential Geometry, Analysis and Physics*. 2000.
- [18] Ximin Liu. Complete spacelike submanifolds in the de sitter space. *Acta Math. Univ. Comenianae*, LXX:241–249, 2001.
- [19] Peter W. Michor. *Topics in Differential Geometry*. 2007.
- [20] Jesper Michael Moller. Riemannian geometry. Internet, <http://www.math.ku.dk/~moller>. Notas de aula.
- [21] Sebastián Montiel. An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in the sitter space and applications to the case of constant mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, 37:909–917, 1988.
- [22] Sebastián Montiel. A characterization of hyperbolic cylinders in the de sitter space. *Tôhoku Math. J.*, 48:23–31, 1996.
- [23] M. Okumura. Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamental tensor. *Amer. J. Math*, 96:207–213, 1974.
- [24] Hideki Omori. Isometric immersions of riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, 19:205–214, 1967.
- [25] Barret O’Neil. *Semi-Riemannian Geometry, with applications to Relativity*. Academic Press Inc, New York, 1983.
- [26] Peter Petersen. *Riemannian Geometry*. Springer, New York, 2006.
- [27] J. Ramanathan. Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in the sitter space. *Indiana University Math. J.*, 36:349–359, 1987.
- [28] Walcy Santos. Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres. *Tôhoku Math. J.*, 46:403–415, 1994.
- [29] Shlomo Sternberg. *Semi-Riemann Geometry and General Relativity*. 2003.
- [30] João Nuno Tavares. Curso de cálculo avançado. Internet, <http://cmup.fc.up.pt/cmup/cv>. Notas de aula.
- [31] Riaz A. Usmani. *Applied Linear Algebra*. Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1987.

- [32] S. T. Yau. Harmonic functions on complete riemannian manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28:201–228, 1975.