

PPGMAT - UFMA

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

**MESTRADO EM MATEMÁTICA**

**Marcos Azevedo**

**Pontos Periódicos e Classes Homoclínicas**

São Luís - MA

2012

**Marcos Azevedo**

## **Pontos Periódicos e Classes Homoclínicas**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Nivaldo Costa Muniz**.

São Luís - MA

2012

**Marcos Azevedo**

## **Pontos Periódicos e Classes Homoclínicas**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Nivaldo Costa Muniz**.

Dissertação aprovada em 13 de dezembro de 2012, pela **BANCA EXAMINADORA**:

---

(ORIENTADOR) **Dr. Nivaldo Costa Muniz** (UFMA)

---

**Dr. Vanderlei Minori Horita** (UNESP/SJRP)

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho a Tarciana pela maior prova de amor que tive, à Jessé França Azevedo e Maria da Luz Nascimento Azevedo pelo suporte emocional e afetivo.

## AGRADECIMENTOS

Sempre é muito complicado escrever esta parte, pelo pequeno espaço para um contingente de grandiosos amigos e colaboradores. Dessa forma quero agradecer primeiramente a Deus e ao meu orientador, Prof. Nivaldo Costa Muniz, pela orientação, desafios, incentivo e sobretudo confiança, ao me propiciar através das circunstâncias, a oportunidade de adquirir e valorizar maior independência. À família Azevedo e a família Noronha composta por irmãos, cunhados, cunhadas, sobrinhos e sobrinhas pelo apoio incondicional, por compreender minha ausência constante e pelo amor dedicado em todas as fases da minha vida. Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA, pelo suporte oferecido. À FAPEMA, pelo auxílio financeiro. Aos inicias parceiros de estudo de Sistemas Dinâmicos: Marlon e Santana e a galera da sala de estudo do mestrado PPGMAT-UFMA em particular Ermerson, Calado, Paulinho e Ronaldo

## RESUMO

No estudo da dinâmica de  $C^1$ -genérico difeomorfismos  $f$ , classes homoclínicas são objetos dinâmicos de grande importância, pois elas residualmente podem ser vista como classes de cadeias recorrentes. Podendo falhar em ser uniformemente hiperbólicas classes homoclínicas podem apresentar um modo robusto de ter selas de índices distintos então podemos afirmar que para um  $C^1$ -genérico difeomorfismos  $f$  com coincidentes classes homoclínicas associadas as duas selas  $p$  e  $q$  com índices distintos  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente é possível ter um subconjunto denso de selas de índices intermediários aos índices dados na classe homoclínica inicial. O objetivo desta dissertação é o estudo da criação destas selas de índices intermediários visando demonstrar tal afirmação. Estas novas selas são construídas através de cociclos lineares com transição dentro do contexto de ciclos heterodimensionais que nos permitem criar selas de períodos arbitrariamente grande e finalmente estas novas selas podem ser tomadas dentro da classe homoclínica e isto é devido ao fato das classes homoclínicas coincidentes são localmente residualmente coincidentes.

Palavras-chave: Classes homoclínicas, Ciclos heterodimensionais, Selas de índices distintos,  $C^1$ -genérico difeomorfismos.

## ABSTRACT

In the study of the dynamics of  $C^1$ -generic diffeomorphisms  $f$ , homoclinic classes are dynamic objects of great importance, because they can be seen as residually chain recurrent classes. May fail to be uniformly hyperbolic homoclinic classes can provide a robust way to have saddles of different indices then we can say that for a  $C^1$ -diffeomorphisms  $f$  genérico coincident with homoclinic classes associated  $p$  e  $q$  two saddles with different indices  $\alpha$  and  $\beta$  respectively is possible to have a dense subset of saddles of intermediate indices to indices homoclinic initial data in the class. The goal of this dissertation is studying the creation of these saddles índices intermediaries seeking to establish such a claim. These new saddles are built through cociclos linear with transition within the context of heterodimensionais cycles that allow us to create arbitrarily large periods of saddles and finally these new saddles can be taken within the homoclinic class and this is due to the fact that homoclinic classes are coincident residually locally coincident.

Keywords: Homoclinic classes, heterodimensionais Cycles, Saddles indices distinct e  $C^1$ -generic diffeomorphisms.

## LISTA DE FIGURAS

Número da Figura	Página
2.1 Distância em $C^r$ . . . . .	13
2.2 Ponto Homoclínico Transversal . . . . .	19
2.3 Pontos homoclinicamente relacionados . . . . .	19
3.1 Conexão de Órbitas . . . . .	28
4.1 Ciclo Heterodimensional . . . . .	30
4.2 Ciclo Heterodimensional Afim . . . . .	33
4.3 Ponto Heteroclínico $\gamma$ . . . . .	33
4.4 Variedade estável da órbita de $p$ . . . . .	35
4.5 Dominação 1 . . . . .	35
4.6 Dominação 2 . . . . .	36
4.7 Órbita Heteroclínica . . . . .	39

## SUMÁRIO

	Page
Lista de Figuras . . . . .	8
Capítulo 1: Introdução . . . . .	1
Capítulo 2: Nocões preliminares . . . . .	10
2.1 Recorrência . . . . .	10
2.2 Topologia $C^r$ e Conjuntos Residuais . . . . .	12
2.3 Hiperbolicidade . . . . .	14
2.4 Cociclos Lineares . . . . .	15
2.5 Decomposição Espectral . . . . .	17
2.6 Decomposição Dominada . . . . .	19
Capítulo 3: Classes Homoclínicas . . . . .	22
3.1 Genéricas Propriedades de $C^1$ -genérico difeomorfismos . . . . .	22
3.2 Coincidência de Classes Homoclínicas . . . . .	23
3.3 Selas de Classes Homoclínicas . . . . .	25
3.4 Criação de interseções entre variedades invariantes . . . . .	27
Capítulo 4: Ciclos heterodimensionais . . . . .	30
4.1 Ciclos heterodimensionais e criação de órbitas periódicas . . . . .	30
4.2 Ciclos heterodimensionais afins . . . . .	31
4.2.1 Definição . . . . .	31
4.3 Criando selas com índices intermediários . . . . .	37
4.4 Controle das interseções heteroclínicas . . . . .	41
4.5 Ciclos heterodimensionais e pontos periódicos. Prova do teorema principal . . . . .	43
Referências . . . . .	46

## Capítulo 1

### INTRODUÇÃO

O presente trabalho visa um detalhamento do elegante resultado em [1] que pode ser visto como continuação do [4] para conjunto robustamente transitivo. O conjunto dos pontos periódicos hiperbólicos desempenham um papel importante no estudo da dinâmica de difeomorfismos e isso está bem caracterizado no fato de a derivada da aplicação neste conjunto de pontos produzir direções que contraem ou expandem com taxa uniforme. Na tentativa de estruturar a dinâmica do conjunto de difeomorfismos usando este conjunto de pontos como esqueleto promissores resultados tem sido alcançados. A estratégia de se entender a dinâmica dos difeomorfismos olhando os pontos periódicos deve-se em muito ao "Closing Lema de Pugh" que o conjunto dos pontos periódicos hiperbólicos são densos no conjunto limite de  $f$  genericamente falando. Usando os pontos periódicos tenta-se decompor a dinâmica  $C^1$ -genérico difeomorfismo em peças elementares na tentativa de imitar o teorema da decomposição espectral de Smale onde acaba por ser uma espécie de decomposição dinâmica padrão a ser perseguida. O bom seria que estas peças fossem como as classes homoclínicas duas a duas disjuntas e indecomponíveis dinamicamente falando e não contida em peças maiores. No objetivo de descrever a dinâmica no  $C^1$ -genérico contexto grandes resultados foram alcançados, particularmente na descrição de bons candidatos para regra destas peças elementares, em [2] está provado que para genéricos difeomorfismos  $Diff^1(M)$  as peças elementares são classes de cadeias recorrentes. Também é conhecido que toda classe de cadeia recorrente com um ponto periódico  $p$  é classe homoclínica de  $p$  também devido ao "Closing Lema de Pugh" e alguns resultados de [6] classes homoclínicas particionam um denso subconjunto do  $L(f)$  de um genérico difeomorfismo. Ainda mais, [8] afirma que classes de cadeias recorrentes para são limites de Hausdorff de classes homoclínicas de genéricos difeomorfismos. Tais resultados dão a real dimensão da importância de se estudar classes homoclínicas em dinâmica e nos motiva a obter uma total descrição de classes homoclínicas fora do contexto uniformemente hiperbólico. Introduzidas por Newhouse em [14] classes homoclínicas são generalizações das peças básicas do

Teorema da Decomposição Espectral de Smale (vê [18] ) são  $f$ -invariantes e transitivas, isto é, existe um  $z$  na classe homoclínica  $H(p_f, f)$  de  $p$  tal que  $\omega$ -limite de  $z$  é igual a  $H(p_f, f)$ . Classes homoclínica podem falhar em ser uniformemente hiperbólica pois podem apresentar num robusto modo selas tendo índices diferentes do de  $p$ , vê construções em [10], [9]. Com isto em mente é razoável indagar se os índices das selas formam um intervalo em  $\mathbb{N}$ . Neste presente trabalho o objetivo principal é a demonstração do teorema abaixo.

**Teorema Principal 1.** Existe um residual subconjunto  $\mathcal{I}$  de  $Diff^1(M)$  de difeomorfismo  $f$  tal que, para todo  $f \in \mathcal{I}$ , qualquer classe homoclínica  $H(p, f)$  contendo selas hiperbólicas de índices  $\alpha$  e  $\beta$  contém um subconjunto denso de selas de índice  $\tau$  para todo  $\tau \in [\alpha, \beta] \cap \mathbb{N}$

Na verdade o teorema é uma espécie de extensão de um resultado análogo provado em [4] para *conjuntos robustamente transitivos* de tal forma que para todo  $f \in Diff^1(M)$  tendo um conjunto robustamente transitivo  $\Lambda_f$ , a propriedade dos índices das selas de  $\Lambda_f$  formando um intervalo em  $\mathbb{N}$  é aberto e denso. O ingrediente chave na nossa construção é a noção do ciclo heterodimensional onde é a principal máquina de criação das novas selas. Os principais ingredientes da prova do teorema principal foram divididos por uma questão didática em pequenos resultados para um melhor entendimento. No primeiro resultado está associado a propriedade localmente residualmente de que sela  $p_f$  e  $q_f$  onde  $H(p_f, f) = H(q_f, f)$  por uma perturbação  $g$  de  $f$  tal propriedade permanece e o mesmo acontece com a afirmação contrária. No segundo resultado é dado pelo lema de conexão de Hayashi que nos permite criar ciclos heterodimensionais associados a continuação da selas  $p_f$  e  $q_f$ . Através do desdobramento dos ciclos leva-nos a difeomorfismos  $g$  tendo sela  $r_g$  de qualquer índice  $\tau$  entre  $\alpha$  e  $\beta$ . Em princípio esta nova sela pode não pertencer a classe homoclínica  $H(p_g, g) = H(q_g, g)$ , mas em nosso contexto isto não acontece, isto é,  $r_g$  obtida depois de uma perturbação pode ser tomada dentro da classe homoclínica  $H(p_g, g)$  e genericamente isto implica que  $H(p_g, g) = H(r_g, g)$ . Isto é feito em duas etapas, a primeira vemos que a sela  $r_g$  pode ser obtida de tal forma  $W^u(p_g, g)$  intersecta transversalmente  $W^s(r_g, g)$  e que  $W^u(r_g, g)$  intersecta transversalmente  $W^s(q_g, g)$  e isto implica que  $p_g, q_g$  e  $r_g$  estão na mesma classe de cadeia recorrente e por fim se uma classe de cadeia recorrente possui num ponto periódico então esta mesma classe é a classe homoclínica deste ponto

periódico que nos dá a garantia de  $H(p_g, g) = H(r_g, g) = H(q_g, g)$ . E encerrando a explanação desta introdução explanaremos a organização deste trabalho dando o esboço da porva doteorema principal. No capítulo 3 enumeramos as básicas propriedades das classes homoclínicas e classes de cadeias recorrentes de um genérico difeomorfismo e demonstra-se a genérica dicotomia de que classes homoclínicas persistem coincidentemente ou de forma disjunta e ainda é demonstrado o resultado técnico (Proposição 3.3.3): *Existe um residual subconjunto  $G_1$  de  $\text{Diff}^1(M)$  consistindo de difeomorfismos  $f$  tal que  $\text{Per}_{\mathbb{R}}(H(p, f))$  é denso em  $H(p_f, f)$  para toda classe homoclínica não trivial  $H(p_f, f)$  de  $f$*  que é a chave a da construção das selas de índices intermediários que são obtidas via ciclos heterodimensionais associados a selas na classe homoclínica, todavia a criação de tais selas está bem entendida quando as selas do ciclo tem autovalores reais com multiplicidade 1. No capítulo 4 ciclos heterrodimensionais são perturbados para criar um novo longo ciclo onde sua dinâmica é essencialmente afim, simplificando assim análise dinâmica do ciclo e por último selas de índices intermediários podem ser tomadas dentro da classe homoclínica provando assim o teorema principal.

## Capítulo 2

### NOCÕES PRELIMINARES

Iniciaremos com esse capítulo com uma breve explanação sobre os principais resultados sobre dinâmica topológica, hiperbólica e  $C^1$  dinâmica genérica além de outras fracas formas de hiperbolicidade ( para um maior detalhamento vê [13], [15], [17], [5])

#### 2.1 *Recorrência*

Numa perspectiva simplificada diremos que um Sistemas Dinâmicos é uma recente área da matemática que objetiva estudar o comportamento dinâmico de um par  $(M, f)$ , onde  $M$  é uma variedade compacta suave e  $f : M \rightarrow M$  é um difeomorfismo, isto é, o objetivo é estudar o comportamento de conjuntos do tipo  $\{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$  que é denominado órbita de um ponto  $x \in M$  que por sua vez tal conjunto pode ser traduzido como o histórico do ponto quando  $f$  for repetida inúmeras vezes para frente ( $n$  é positivo) ou para trás ( $n$  é negativo). Diremos que  $x$  é um ponto fixo de  $f$  se  $f(x) = x$  e periódico de período  $n$  se  $f^n(x) = x$  para um inteiro  $n$  positivo. Em nossa análise preliminar estamos interessado em classificar os conjuntos de pontos de uma variedade  $M$  pelo seu grau de recorrência, perceba que apesar deste conceito ainda não ser inteligível para os fins que desejamos, estamos a procura de pontos que se comportam de forma "parecida" com os pontos periódicos

**Definição 2.1.1.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua. Um ponto  $x$  de  $X$  é dito *errante* se existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $f^k(U) \cap U$  não é vazio para todo  $k$  positivo, caso contrário diremos que é *não-errante* e sua existência é assegurada para toda vizinhança  $U$  de  $x$  onde  $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$  para algum  $k$  positivo. Denotaremos por  $\Omega(f)$  o conjunto dos pontos *não-errantes*.

Não é difícil vê que  $\Omega(f)$  é fechado e sub-invariante ( $f(\Omega) \subset \Omega$ ) e se  $f$  é um homeomorfismo  $f(\Omega) = \Omega$  e já que  $\Omega$  é fechado e um ponto periódico é visivelmente não-errante então o fecho do conjunto dos pontos periódico está contido em  $\Omega$ .

**Definição 2.1.2.** Se  $f : X \rightarrow X$  é uma aplicação contínua e  $x \in X$ . O conjunto  $\omega$ -limite de  $x$ ,  $\omega_f(x)$  é definido por

$$\omega_f(x) = \{y \in X \mid \exists \lim_{n_i \rightarrow +\infty} f^{n_i}(x) = y\}$$

Se  $f$  é um homeomorfismo, nós definiremos o conjunto  $\alpha$ -limite de  $x$  analogamente

$$\alpha_f(x) = \{y \in X \mid \exists \lim_{n_i \rightarrow -\infty} f^{n_i}(x) = y\}$$

Ainda mais diremos que  $L(f) = \overline{\cup_{x \in X} \omega_f(x)} \cup \overline{\cup_{x \in X} \alpha_f(x)}$  é o conjunto limite dos pontos  $x$  por  $f$ .

Observe que  $L(f)$  está contida em  $\Omega(f)$ , pois dado  $y$  em  $L(f)$  em particular podemos tomá-lo no  $\omega_f(x)$  e para alguma vizinhança  $U$  de  $y$  podemos tomar  $m$  e  $n$  suficientemente grande onde  $m > n > 0$  tal que  $f^m(x)$  e  $f^n(x)$  estão em  $U$ . Dessa forma podemos garantir que  $f^{m-n}(U) \cap U \neq \emptyset$  concluindo então que  $y$  pertence a  $\Omega(f)$ . O teorema da decomposição espectral de Smale mostra-se um modelo a ser perseguido na descrição da dinâmica dos difeomorfismo.

**Definição 2.1.3.** Suponha que  $X$  seja munido com uma métrica  $d$ . Dado  $f : X \rightarrow X$  e um número real positivo  $\varepsilon$ , uma sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma  $\varepsilon$ -pseudo órbita para  $f$  se  $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \forall n \in \mathbb{Z}$ . Uma  $\varepsilon$ -pseudo órbita de  $x$  é uma  $\varepsilon$ -pseudo órbita periódica se existe um  $n$  tal que  $x_i = x_{i+n}$  para todo  $i$ . Diremos que um ponto  $x$  em  $X$  é  $\varepsilon$ -pseudo periódico se ele é o primeiro termo de uma finita  $\varepsilon$ -pseudo órbita periódica.

**Definição 2.1.4.** Seja  $X$  um espaço métrico e  $f : X \rightarrow X$ . Um ponto  $x \in X$  é uma cadeia recorrente se é  $\varepsilon$ -pseudo periódico para todo  $\varepsilon$  positivo. Denotaremos por  $\mathcal{R}(f)$  ou simplesmente  $\mathcal{R}$  o conjunto dos pontos cadeias recorrentes.

É fácil vê que  $\mathcal{R}(f)$  é fechado e contém  $\Omega(f)$ .

**Proposição 2.1.5.** Seja  $X$  um espaço métrico e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua então  $\Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$ .

*Proof.* Seja  $x$  em  $\Omega(f)$  e dado  $\varepsilon$  positivo, mostraremos que  $x$  é um  $\varepsilon$ -pseudo periódico ponto. De fato tomando  $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$  temos pela continuidade de  $f$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando uma vizinhança  $U$  qualquer de  $x$  contida na bola de raio  $\delta$  centrada em  $x$  e como  $x$  é não-errante existe  $n$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Dessa forma para  $n = 1$  o conjunto  $\{x, x\}$  é uma  $\varepsilon$ -pseudo órbita periódica; no caso de  $n > 1$  existe  $y$  em  $U$  tal que  $f^n(y)$  está em  $U$  e assim o conjunto  $\{x, f(y), \dots, f^{n-1}(y), x\}$  é uma  $\varepsilon$ -pseudo órbita periódica.  $\square$

Dessa forma temos

$$Per(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset \mathcal{R}(f)$$

## 2.2 Topologia $C^r$ e Conjuntos Residuais

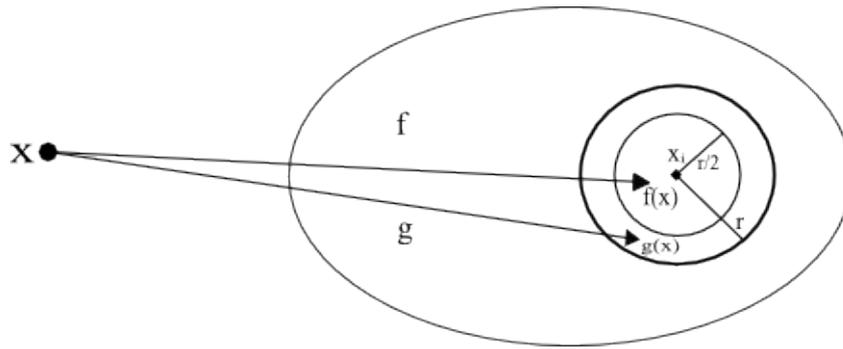
Na matemática, a Distância Hausdorff, ou métrica Hausdorff mede o quão distante dois subconjuntos de um espaço métrico estão um do outro. Informalmente falando, dois conjuntos estão perto, do ponto de vista da distância Hausdorff, se todo ponto de cada conjunto está perto a algum ponto do outro conjunto. Em outras palavras, é o mais distante ponto de um conjunto que você pode estar para um ponto próximo de um conjunto diferente.

**Definição 2.2.1.** Seja  $X$  e  $Y$  dois subconjuntos não vazios de um espaço métrico  $(M, d)$ . Nós definimos a distância Hausdorff  $d_H(X, Y)$  por:

$$d_H(X, Y) = \max\left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right\},$$

Torna-se também importante a compreensão do que corresponde uma métrica na topologia  $C^r$ . Sejam  $M$  uma variedade compacta  $C^r$ ,  $1 \leq r < \infty$  e o espaço do  $C^r$  difeomorfismos,  $Diff^r(M)$ , escolhemos uma cobertura infinita de  $M$  por cartas. Todo ponto  $x$  em  $M$  está contido numa bola de raio  $r_x$ , onde está contida numa carta. As bolas  $B(x, \frac{r_x}{2})$  cobrem  $M$ , e podemos escolher uma subcobertura finita  $B(x_1, \frac{r_{x_1}}{2}), \dots, B(x_n, \frac{r_{x_n}}{2})$ . Sendo  $\delta = \inf(\frac{r_{x_i}}{2})$ . Isto nos certifica que se duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  que satisfazem a condição  $\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) < \delta$  existe uma carta contendo  $f(x)$  e  $g(x)$  para todo  $x$  em  $M$  conforme a figura abaixo

Podemos agora calcular a  $C^r$  distância entre  $f$  e  $g$  numa carta por calcular a diferença máxima entre as correspondentes derivadas de  $f$  e  $g$  expressa na mesma carta. Necessitaremos de algumas prévias definições para lidar com as terminologias dos subconjuntos do espaço de Baire  $X$ . Um subconjunto  $S \subset X$  é denominado denso em lugar

Figure 2.1: Distância em  $C^r$ 

nenhum se  $\text{int}\bar{S} = \emptyset$ . Um subconjunto  $\tilde{S} \subset X$  é dito ser magro se pode ser escrito como uma reunião enumerável de subconjuntos densos em lugar nenhum e é dito ser *residual* se contém uma interseção enumerável de abertos densos, equivalentemente isto quer dizer que seu complementar  $X \setminus S$  é magro. Uma determinada propriedade para um conjunto de pontos de  $X$  é satisfeita para um **genérico** ponto de  $X$  se ela é satisfeita exceto para algum conjunto *magro*. Vale ressaltar que toda essa abordagem é útil se  $X$  é um espaço de Baire onde um residual subconjunto é necessariamente denso. Nesta perspectiva de entender a dinâmica de um conjunto de pontos numa variedade  $M$  compacta suave é razoável indagar sobre quais condições um subconjunto de pontos na variedade  $M$  tem comportamento idêntico ou parecido com os dos pontos periódicos a menos de uma pequena perturbação do sistema inicial  $f$ , sendo mais específico queremos entender quando pode-se obter  $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$  ou  $\mathcal{R}(f) = \Omega(f)$  genericamente em  $\text{Diff}^r(M)$ ? Na direção da resposta desta indagação temos o teorema abaixo.

**Teorema 2.2.2** (Densidade Geral de Pugh). *Existe  $R \subset \text{Diff}^1(M)$ , residual tal que para todo  $f \in R$  então  $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$ .*

Um maneira de compreender a recorrência de um homeomorfismo  $f$  é tentar montar a variedade  $M$  a partir de simples peças, onde cada uma delas são isoladas e assintoticamente específica um invariante conjunto. Para tal objetivo precisamos de mais definições. Uma *filtração*  $\mathbf{M}$ , associada a cada homeomorfismo  $f$  de uma variedade  $M$ , é uma partição  $\emptyset = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n = M$  onde cada  $M_i$  é uma subvariedade com dimensão do bordo igual a dimensão do bordo da variedade  $M$  e  $f(M_i) \subset \text{int}M_i$  e denotamos por  $\mathbf{M}^{-1}$  a filtração do homeomorfismo  $f^{-1}$ , dado por

$\emptyset = \overline{M \setminus M_n} \subset \overline{M \setminus M_{n-1}} \subset \dots \subset \overline{M \setminus M_0} = M$  e  $f^{-1}(\overline{M \setminus M_i}) \subset \text{int}(\overline{M \setminus M_i})$ . Dada uma filtração  $\mathbf{M}$  definimos  $K_i(\mathbf{M})$  como o maior compacto invariante de  $M_i - M_{i-1}$ :

$$K_i(\mathbf{M}) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - M_{i-1})$$

e finalizando  $K(\mathbf{M})$  é união dos conjuntos  $K_i(\mathbf{M})$ . A dinâmica global fica bem entendida com as filtrações, pois a órbita de um ponto que porventura visita  $M_i$  fica capturado dentro desta região ou a órbita de pontos que entram em  $M_i - M_{i-1}$  estão eventualmente presas em  $W^s(K_i)$ . Observe que  $\mathcal{R}(f) \subset K(\mathbf{M})$  pois assumindo  $\varepsilon$  como a menor distância de  $f(M_i)$  ao complementar de  $M_i$  uma  $\varepsilon$ -pseudo órbita que visita  $M_i$  permanece em  $M_i$  para qualquer filtração  $\mathbf{M}$ . Uma filtração  $\mathbf{M}$  é adaptada num compacto invariante  $\Lambda$  se  $\Lambda = K(\mathbf{M})$ . Uma filtração  $\mathbf{N}$  refina  $\mathbf{M}$ , se para cada  $i$  existe  $j$  tal que  $N_i - N_{i-1} \subset M_j - M_{j-1}$ . Uma sequência de filtração é um conjunto de filtrações  $\{\mathbf{M}_i\}$  tal que  $\mathbf{M}_{i+1}$  refina  $\mathbf{M}_i$ . Uma sequência de filtrações,  $\{\mathbf{M}_i\}$ , é adaptada a  $\Lambda$  se  $K(\{\mathbf{M}_i\}) = \bigcap_i K(\mathbf{M}_i) = \Lambda$ . Se  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  são compactos invariantes disjuntos, dizemos que uma filtração os separa se  $\Lambda_1 \subset K(\mathbf{M}_i)$  e  $\Lambda_2 \subset K(\mathbf{M}_j)$  com  $i \neq j$ . Quando dois compactos estão separados por filtração, não podemos obter um compacto invariante indecomponível que os contenha.

**Teorema 2.2.3.** *Há uma sequência de filtrações adaptadas a  $\mathcal{R}(f)$  que separa as classes de cadeias recorrentes*

### 2.3 Hiperbolicidade

Conjuntos hiperbólicos constituem um capítulo essencial no desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos, isso é dividido graças a riquezas de boas propriedades que este conjunto goza

**Definição 2.3.1.** Seja  $f : M \rightarrow M$  e  $M$  uma variedade Riemanniana. Um conjunto fechado  $\Lambda \subset M$  invariante por  $f$  é dito ser hiperbólico se existe  $C > 0$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  e para todo  $y \in \Lambda$  existem  $E^s(y)$ ,  $E^u(y) \subset T_y M$  tais que

1.  $T_y M = E^s(y) \oplus E^u(y)$
2.  $\|df_x^n v^s\| \leq C\lambda^n \|v^s\|$ , para todo  $v^s \in E^s(x)$  e  $n \geq 0$ ;
3.  $\|df_x^n v^u\| \leq C\lambda^n \|v^u\|$ , para todo  $v^u \in E^u(x)$  e  $n \geq 0$ ;

$$4. df_x E^s(x) = E^s(f(x)) \text{ e } df_x E^u(x) = E^u(f(x)).$$

Se existe uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de um conjunto hiperbólico  $\Lambda$  tal que  $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\mathcal{U})$  dizemos o conjunto hiperbólico é isolado ou maximal.

Note que os subespaços  $E^s(x)$  e  $E^u(x)$  variam contiuamente com relação a  $x \in \Lambda$  e existe uma métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ , chamada máertica adaptada, para qual  $f$  satisfaz as condições de hiperbolicidade com constante  $C' = 1$ , isto é,  $\|df v^s\|_* \leq \|v^s\|_*$ ,  $v^s \in E^s$  e  $\|df v^u\|_* \geq \|v^u\|_*$ ,  $v^u \in E^u$ .

**Definição 2.3.2.** Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $p$  um ponto fixo de  $f$ . Dizemos que  $p$  é hiperbólico se  $Df_p : T_p M \rightarrow T_p M$  é hiperbólico, isto é, não tem autovalores iguais a 1 e se  $p$  é periódico de período  $\pi(p)$  então é hiperbólico se é um ponto fixo hiperbólico de  $f^{\pi(p)}$ .

Em matemática é muito comum estudar o comportamento de uma determinada aplicação  $f$  olhando par sua aproximação linear na expectativa de que tenhamos boas informações sobre  $f$ . O teorema de Hartman-Grobman nos diz que na vizinhança de um ponto fixo hiperbólico  $p$  a dinâmica de  $f$  é idêntica no ponto de vista topológico da dinâmica de sua aproximação linear

**Teorema 2.3.3** (Hartman-Grobman). *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $p$  um ponto fixo de  $f$ . Então  $f$  e  $Df_p$  são localmente conjugados, isto é, existe uma vizinhança  $U_p$  de  $p$  em  $M$  e uma vizinhança de 0 em  $T_p M$  e um homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  tal que  $h \circ f = Df_p \circ h$ .*

## 2.4 Cociclos Lineares

Definiremos cociclos lineares com a finalidade de tornar autosuficiente e inteligível o presente trabalho.

**Definição 2.4.1.** Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação invertível e  $GL(n, \mathbb{R})$  um grupo de transformações lineares invertíveis de  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que a função  $\mathcal{A} : X \times \mathbb{Z} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  é um *linear cociclo sobre  $f$* , ou simplesmente um cociclo se

- $\mathcal{A}(x, m) = A(f^{m-1}(x)) \dots A(x)$  para  $m > 0$
- $\mathcal{A}(x, m) = A(f^m(x))^{-1} \dots A(f^{-1}(x))^{-1}$  para  $m < 0$

- $\mathcal{A}(x, 0) = Id$ , logo segue-se que

$$\mathcal{A}(x, m + k) = \mathcal{A}(f^k(x), m) \mathcal{A}(x, k)$$

Seja  $(\Sigma, f, \varepsilon, A)$  um linear cociclo, onde  $\Sigma$  é um espaço topológico,  $f$  é um homeomorfismo de  $\Sigma$ ,  $\varepsilon$  um linear fibrado Riemanniano sobre  $\Sigma$  e  $A$  é uma aplicação do fibrado que é compatível com  $f$ , isto é,  $A$  é uma aplicação linear  $A : E \rightarrow E$ , onde para cada  $x \in \Sigma$ ,  $A(x, \cdot)$  é um isomorfismo linear de  $E(x)$  para  $E(f(x))$  para os objetivos destes trabalhos o subconjunto  $\Sigma$  de  $M$  é invariante e  $f$  é a restrição de um difeomorfismo para  $\Sigma$ ,  $E$  para o fibrado tangente de  $\Sigma$ , e  $A$  a diferencial de  $f$  restrita a  $E$ . Podemos definir naturalmente a  $n$  iteradas de  $A$ , denotada por  $A^n$  e a inversa de  $A$  será denotada por  $A^{-1}$ . Dizemos que um cociclo linear é periódico se cada ponto  $x \in \Sigma$  é periódico de  $f$ . Em cada fibrado, existe uma norma que advém da métrica Riemanniana que denotaremos por  $\| \cdot \|$ . Então o cociclo é dito limitado por  $k > 0$  se a seguinte desigualdade é verdadeira

$$\max \left\{ \sup_{x \in \Sigma} \|A(x)\|, \sup_{x \in \Sigma} \|A^{-1}(x)\| \right\}$$

. Para melhor entendimento dos conceitos citados abaixo vê [3]

**Definição 2.4.2.** Dado  $\varepsilon > 0$ , um cociclo linear periódico  $(\Sigma, f, E, A)$ , admite uma  $\varepsilon$ -transição se para toda família de pontos de uma órbita periódica  $x_1, \dots, x_n = x_1 \in \Sigma$  existe um sistema de coordenada ortonormal do fibrado linear  $E$  que pode ser considerado como um sistema de matrizes  $(\Sigma, f, A)$  tal que para qualquer  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$  existe um  $k \in \mathbb{N}$  dependendo de  $i$  e  $j$  e uma sequência finita de matrizes em  $GL(n, \mathbb{R})$   $[t^{i,j}] = (t_1^{i,j}, t_2^{i,j}, \dots, t_k^{i,j})$  onde  $t_l^{i,j}(x_i) = x_j$  para todo  $l = 1, 2, \dots, k$  satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Para todo  $m \in \mathbb{N}, \iota = (i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, n\}^m$ , e  $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$  considere uma palavra

$$[W(\iota, a)] = [t^{i_1, i_m}] [M_A(x_{i_m})]^{\alpha_m} [t^{i_m, i_{m-1}}] [M_A(x_{i_{m-1}})]^{\alpha_{m-1}} \dots [t^{i_2, i_1}] [M_A(x_{i_1})]^{\alpha_1}$$

, onde palavra

$$w(\iota, a) = ((x_{i_1}, \alpha_1), \dots, (x_{i_m}, \alpha_m))$$

com letras em  $M \times \mathbb{N}$  não é uma potência. Então existe  $x(\iota, a) \in \Sigma$  talque

- O comprimento de  $[W(\iota, a)]$  é o período de  $x(\iota, a)$
- A palavra  $[M]_A(x(\iota, a))$  é  $\varepsilon$ -próximo a  $[W(\iota, a)]$  e existe uma  $\varepsilon$ -perturbação de  $\tilde{A}$  tal que a palavra  $[M]_{\tilde{A}}(x(\iota, a))$  é  $[W(\iota, a)]$ .

2. Pode-se escolher  $x(\iota, a)$  tal que a distância entre as órbitas de  $x(\iota, a)$  e qualquer ponto  $x_{i_k}$  é limitada por alguma função de  $\alpha_k$  onde tende a zero quando  $\alpha_k$  vai para o infinito.

Dado  $\iota$  e  $a$  do mesmo modo definido antes, a palavra  $[t^{i,j}]$  é uma  $\varepsilon$ -transição de  $x_j$  a  $x_i$  e a matriz  $T_{i,j}$  é o produto das letras compondo  $[t^{i,j}]$ .

*Observação 2.4.3.* Considerando os pontos  $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_1 \in \Sigma$  e  $\varepsilon$ -transições  $[t^{i,j}]$  de  $x_j$  a  $x_i$ . Então para todo  $m > 0$  e  $l > 0$  a palavra  $[t^{j,i}]([M]_A(x_i))^m [t^{i,j}]([M]_A(x_j))^l$  é uma  $\varepsilon$ -transição de  $x_j$  em si mesmo.

Diremos que um cociclo linear periódico admite transições se para todo  $\varepsilon > 0$  ele admite  $\varepsilon$ -transições. É claro que para se ter um total entendimento do teorema e de suas conclusões é necessário algumas definições e enunciado do mesmo.

## 2.5 Decomposição Espectral

**Definição 2.5.1.** Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo. Dizemos que  $f$  é

- difeomorfismo de Anosov se todos os pontos da variedade  $M$  é um conjunto hiperbólico.
- $\mathcal{R}$ -hiperbólico se o conjunto cadeia recorrente é hiperbólico.
- $L$ -hiperbólico limite  $L(f)$  é hiperbólico
- Axioma A se o conjunto não errante  $\Omega(f)$  é hiperbólico e  $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$

Observe que se um sistema é Anosov então é  $\mathcal{R}$ -hiperbólico que por sua vez será Axioma A e que finalmente será  $L$ -hiperbólico de outro modo também teremos se Axioma A é necessário e suficiente que  $L(f) = \Omega(f)$ . Um caso muito particular de sistemas Anosov são os difeomorfismo Morse-Smale.

**Definição 2.5.2.** Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  é dito Morse-Smale se

- O conjunto dos pontos periódicos é finito e hiperbólico.
- $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$ .
- $W^s(p)$  e  $W^u(q)$  se intersectam transversalmente para todo  $p, q \in Per(f)$ .

**Teorema 2.5.3** (Teorema da Decomposição Espectral de Smale). *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo Axioma A ou L-hiperbólico. Então  $L(f) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n$  onde  $\Lambda_i, i = 1, \dots, n$  são conjuntos compactos,  $f$ -invariantes, dois a dois disjuntos e transitivos (chamada de peças básicas) e cada  $\Lambda_i$  é maximal, isto é, não está contida em peças maiores.*

Ainda no espírito da decomposição espectral Newhouse nomeia cada peça básica de classe homoclínica e consegue relevante descrição matemática destes objetos.

Sejam  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $p$  um ponto hiperbólico de  $M$ . Dizemos que  $H(p, f)$  é a classe homoclínica de  $p$  se é o fecho dos pontos homoclínicos transversais de  $p$ . Observe que no fenómeno de hiperbolicidade de um ponto  $p$  pode ocorrer que as variedades invariantes de  $p$  podem se intersecta transversalmente em ponto  $y$  e a este ponto  $y$  denominamos de ponto homoclinico transversal de  $p$ .

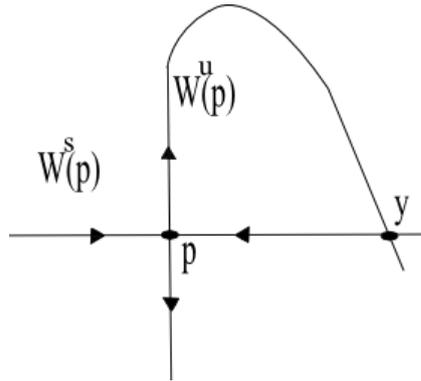


Figure 2.2: Ponto Homoclínico Transversal

Poderíamos também definir uma classe homoclínica como o fecho dos pontos homoclinicamente relacionados a  $p$ .

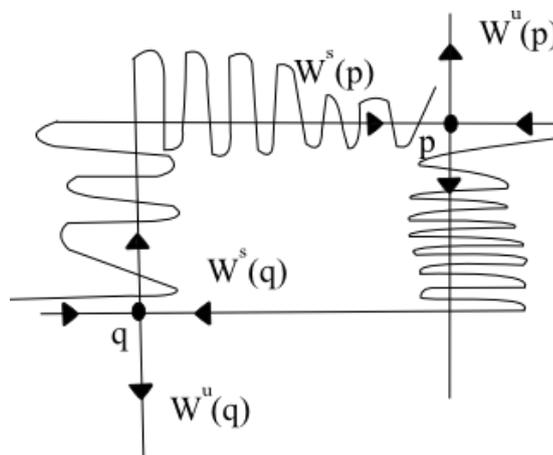


Figure 2.3: Pontos homoclinicamente relacionados

## 2.6 Decomposição Dominada

Existem várias maneiras de estender o conceito de hiperbolicidade uniforme no mesmo espírito de requerer a existência de uma decomposição invariante do fibrado tangente, mas com a seguinte ressalva de que temos um ou mais subfibrados envolvidos para ser tal que a derivada exibe uma mistura contração, neutro e expansão comportamento ao longo dela. A decomposição dominada se traduz em uma maneira de decompor o fibrado tangente em dois subfibrados: um deles é definitivamente o de maior contração (ou menor expansão) do que outro, depois de um número uniforme de iterados. Nosso objetivo nessa breve seção é relatar de maneira concisa a noção mais

geral de decomposição dominada e suas propriedades mais elementares que nos serão muito útil.

**Definição 2.6.1.** Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo numa variedade fechada  $M$  e  $K$  um conjunto  $f$ -invariante qualquer. Uma decomposição  $T_x M = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_k(x)$ ,  $x \in K$  do fibrado tangente sobre  $K$  é dominada se ela é invariante sobre a derivada  $Df$  e existe  $\ell \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $i < j$ , e todo  $x \in K$ , e todo par de vetores unitários  $u \in E_i(x)$  e  $v \in E_j(x)$ , tem-se

$$\frac{\|Df^\ell(x)u\|}{\|Df^\ell(x)v\|} < \frac{1}{2}$$

e a dimensão de  $E_i(x)$  é independente de  $x \in K$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

A definição anterior pode ser reformulada equivalentemente, como segue: existe  $C > 0$  e  $\lambda < 1$  tal que

$$\frac{\|Df^n(x)u\|}{\|Df^n(x)v\|} < C\lambda^n \text{ para todo } n \geq 1$$

Quando é usada esta noção,  $\lambda$  e  $C$  pode ser tomada como medida de força da dominação.

Dentre as propriedades elementares úteis estão:

- **Unicidade.** A decomposição dominada é única se fixada a dimensão dos subfibrados: Seja  $d$  a dimensão da variedade ambiente  $M$  e seja

$$d = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Então existe pelo menos uma decomposição dominada  $T_x M = E_1(x) \oplus \dots \oplus E_k(x)$  com dimensão de  $E_i(x)$  igual a  $n_i$  para todo  $i$ . Observe que sem a dimensão requerida, pode existir mais de uma decomposição dominada. É o caso do exemplo da decomposição  $E^s \oplus E^c \oplus E^u$  se dominada então também são  $E^s \oplus F$  e  $E \oplus E^u$  onde  $E = E^s \oplus E^c$  e  $F = E^c \oplus E^u$ .

- **Transversalidade.** O ângulo entre qualquer dois subfibrados de uma decomposição dominada são uniformemente limitada de zero. Isto quer dizer que quaisquer dois subconjuntos disjuntos  $I, J$  em  $\{1, \dots, k\}$  o ângulo entre os espaços  $\bigoplus_{i \in I} E_i$  e  $\bigoplus_{j \in J} E_j$  é uniformemente limitado de zero.

- **Continuidade.** Toda decomposição dominada é contínua, isto é, os subfibrados  $E_i(x)$  dependem continuamente no ponto  $x$ .
- **Extensão ao fecho.** Toda  $\ell$ -decomposição dominada sobre um conjunto  $K$  pode ser estendida para uma  $\ell$ -decomposição dominada sobre o fecho de  $K$ . Ainda mais, se  $g_n$  é uma sequência de difeomorfismo convergindo para  $f$  e  $K_n$  é um  $g_n$ -invariante conjunto com  $\ell$ -decomposição dominada, com dimensão independente de  $n$ , então o  $f$ -invariante conjunto

$$K = \limsup K_n = \bigcap_N \overline{\bigcup_{n \geq N} K_n}$$

admite uma  $\ell$ -decomposição dominada.

- **Extensão para uma vizinhança.** Seja  $K$  um  $f$ -invariante conjunto com uma decomposição dominada. Então tal decomposição pode ser estendida em um dominado modo para o maximal invariante conjunto de  $f$  numa vizinhança de  $K$ .
- **Persistência.** Toda decomposição dominada persiste sobre  $C^1$ -perturbações. De um modo preciso, seja um  $f$ -invariante conjunto  $K$  com uma  $\ell$ -decomposição dominada. Então, para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma vizinhança  $U$  de  $K$  e uma  $C^1$ -vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $f$  tal que, para todo  $g \in \mathcal{U}$ , o maximal  $g$ -invariante conjunto no fecho de  $U$  admite  $(\ell, \varepsilon)$ -decomposição dominada, isto é,  $\|Df^\ell(x)u\| / \|Df^\ell(x)v\| < \frac{1}{2} + \varepsilon$ , tendo as mesmas dimensões da inicial decomposição dominada sobre  $K$ .

## Capítulo 3

### CLASSES HOMOCLÍNICAS

Neste início de capítulo iremos enumerar as principais propriedades de  $C^1$ -genérico difeomorfismo  $f$  que iremos usar neste pequeno trabalho.

#### 3.1 Genêricas Propriedades de $C^1$ -genérico difeomorfismos

- (G1)  $f$  é Kupka-Smale (hiperbolicidade dos pontos periódicos e posição geral da variedades estáveis);
- (G2) Os pontos periódicos de  $f$  são densos no conjunto não-errante do conjunto  $f$ ;
- (G3) Para todo par de selas  $p$  e  $q$  de  $f$ , ou  $H(p, f) = H(q, f)$  ou  $H(p, f) \cap H(q, f) \neq \emptyset$ ; e
- (G4) Para todo par de selas  $p$  e  $q$  de  $f$ , a classe homoclínica  $H(p, g)$  depende continuamente em  $g$  em  $\mathcal{G}$ ; e Para afirmar as condições genéricas (G5) e (G6) precisaremos da noção de classe de cadeia recorrente. Um ponto  $y$  é  $f$ -cadeia atingível do ponto  $x$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma  $\varepsilon$ -pseudo órbita indo de  $x$  a  $y$ . Os pontos  $x$  e  $y$  são  $f$ -bi-atingíveis se  $x$  é cadeia atingível de  $y$  e vice-versa. Um  $f$ -invariante conjunto  $\Lambda$  é uma *cadeia recorrente* se para todo par de pontos de  $\Lambda$  são bi-cadeia atingível. A bi-cadeia atingibilidade relação define uma relação de equivalência no conjunto cadeia recorrente  $R(f)$  de  $f$  (isto é, o conjunto dos pontos que são cadeia atingíveis dele mesmo). A *classe de cadeia recorrente* são as classes de equivalência de  $R(f)$  para a bi-cadeia atingibilidade relação. Estes conjuntos são conjuntos maximais recorrentes.
- (G5) A *classe de cadeia recorrente* de  $f$  forma uma partição do *conjunto cadeia recorrente* de  $f$  (i.e eles são dois a dois disjuntos e cobre  $R(f)$ ).
- (G6) Toda classe de cadeia recorrente  $\Lambda$  contendo um (hiperbólico) ponto periódico  $p$  satisfaz  $\Lambda = H(p, f)$ ;

### 3.2 Coincidência de Classes Homoclínicas

Dentre os resultados considerados essenciais em dinâmica hiperbólica existe aquele que se refere a continuação de um ponto periódico hiperbólico  $p_f$  de  $f$ , em termos mais preciso quer dizer que existe uma vizinhança  $U$  da órbita de  $p_f$  na variedade ambiente  $M$  e uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $f$  em  $\text{Diff}^1(M)$  tal que para todo  $g$  em  $\mathcal{U}$  existe um único ponto periódico  $p_g$  próximo de  $p_f$  cuja órbita está contida em  $U$ . O ponto  $p_g$  é denominado de continuação de  $p_f$ . Nosso objetivo nesta seção é garantir que podemos ter uma espécie de resultado que reúne a propriedade (G3) na continuação de um ponto periódico num residual subconjunto de  $\mathcal{G}$ , isto é, se as classes homoclínicas de duas selas distintas coincidem ou são disjuntas então o mesmo deve acontecer para continuação das selas. O lema abaixo constitui tal resultado bastante conhecido em  $C^1$ -dinâmica, mas antes do seu enunciado e prova vale lembrar que no residual  $\mathcal{G}$  temos (G1) e conseqüentemente pontos periódicos são hiperbólicos e por isso o conjunto  $A$  dos pontos periódicos de período menor que  $N$  é discreto, como a variedade é compacta então  $A$  é finito, pois caso contrário teríamos  $A$  compacto que não admitiria uma subcobertura finita.

**Lema 3.2.1.** *Existe um residual subconjunto  $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$  de  $\text{Diff}^1(M)$  tal que, para todo difeomorfismo  $f \in \mathcal{G}_0$  e para todo par de sela  $p_f$  e  $q_f$  de  $f$ , existe uma vizinhança  $\mathcal{U}_f$  em  $\mathcal{G}_0$  tal que ou  $H(p_g, g) = H(q_g, g)$  para todo  $g \in \mathcal{U}_f$ , ou  $H(p_g, g) \cap H(q_g, g) = \emptyset$  para todo  $g \in \mathcal{U}_f$ .*

*Proof.* De fato o conjunto dos pontos periódicos de período  $N$  fixado é finito, pois caso contrário teríamos uma sequência de pontos de período fixado que tem uma subsequência convergente para um ponto  $p$  de mesmo período dos da sequência uma vez que a variedade  $M$  é compacta e isto nos levaria a um ponto periódico hiperbólico suficientemente próximo a outros pontos como todo periódico é hiperbólico o ponto  $p$  seria arrastado ou repellido pelas variedades estáveis ou instáveis dos pontos próximos e isto seria um absurdo pois  $p$  tem período igual ao período dos pontos próximos. Dessa forma para algum  $n \geq 1$  fixado e dado  $f \in \mathcal{G}$  seja  $\text{Per}_N(f) = \{p_f^1, p_f^2, \dots, p_f^{k(N)}\}$  o conjunto finito dos pontos periódicos de período menor ou igual a  $N$ . Sabe-se que existe uma vizinhança  $\mathcal{U}_N(f)$  de  $f$  tal que este conjunto varia continuamente. Agora seja  $\text{Per}_N(g) = \{p_g^1, p_g^2, \dots, p_g^{k(N)}\}$  a continuação de  $\text{Per}_N(f)$  para cada  $g \in \mathcal{U}_N(f)$  onde  $p_g^i$  é continuação de  $p_f^i$ . Fixando  $f \in \mathcal{G}$  e sua vizinhança  $\mathcal{U}_N(f)$ . Para cada  $i, j \in$

$\{1, \dots, k(N)\}$  seja:

- $\mathcal{V}_{i,j} = \{g \in \mathcal{U}_N(f) \cap \mathcal{G} : H(p_g^i, g) \cap H(p_g^j, g) = \emptyset\}$
- $\mathcal{B}_{i,j} = (\mathcal{U}_N(f) \setminus \overline{\mathcal{V}_{i,j}}) \cap \mathcal{G}$

Por uma questão didática dividiremos aqui o restante da prova nas etapas (1) e (2), a (1) objetiva argumentar que  $\mathcal{V}_{i,j}$  é um conjunto aberto e a (2) prova a existência de um residual subconjunto que satisfaz as condições exigidas e é neste momento que usaremos o clássico argumento padrão de Baire que se repetirá ao longo deste trabalho em outras demonstrações.

- (1) Dado  $g \in \mathcal{V}_{i,j}$  as disjuntas classes homoclínicas  $H(p_g^i, g)$  e  $H(p_g^j, g)$  pela propriedade (G6) são disjuntas classes de cadeia recorrente. Pela teoria de Conley (vê em [16] e [7]) esses conjuntos são separados por filtrações, isto é, existe um aberto  $U$  na variedade  $M$  tal que  $g(\overline{U}) \subset U$ , e por  $g$  está em  $\mathcal{V}_{i,j}$  os pontos periódicos  $p_g^i$  e  $p_g^j$  que estão em  $H(p_g^i, g)$  e  $H(p_g^j, g)$  por conseguinte estarão em  $U$  e  $M \setminus \overline{U}$  respectivamente. Por (G5) a propriedade  $g(\overline{U}) \subset U$  é persistente para todo  $h$  numa  $C^1$ -vizinhança de  $g$  num contexto genérico, isto é,  $h(\overline{U}) \subset U$ . Seja  $p_h^i$  a continuação de  $p_g^i$  em  $U$ , mas  $U$  também é a região de captura de todos iterados positivos de  $p_h^i$  por  $h$  que implica em  $W_{p_h^i}^s \subset U$ . De modo análogo temos  $p_h^j$  a continuação de  $p_g^j$  que está no aberto  $M \setminus \overline{U}$  que também será a região de captura de todos os iterados negativo de  $p_h^j$  por  $h$  que implica em  $W_{p_h^j}^u \subset M \setminus \overline{U}$ . Por definição de classe homoclínica obtemos  $H(p_h^i, h) \subset U$  e  $H(p_h^j, h) \subset M \setminus \overline{U}$  dessa forma o conjunto  $\mathcal{V}_{i,j}$  é um conjunto aberto.

- (2) Façamos a seguinte construção:

Seja  $\mathcal{O}_N(f) = \bigcap_{i,j} (\mathcal{V}_{i,j} \cup \mathcal{B}_{i,j})$  o conjunto das finitas interseções. Observe que para todo  $g$  em  $\mathcal{B}_{i,j}$   $H(p_g^i, g)$  e  $H(p_g^j, g)$  tem interseção não vazia logo por (G3) são coincidentes. Por outro lado  $\mathcal{V}_{i,j} \cup \mathcal{B}_{i,j}$  é aberto e denso em  $\mathcal{U}_N(f)$ . Por ser uma interseção enumerável de abertos e densos  $\mathcal{O}_N(f)$  é um aberto e denso. Observe que localmente, em  $\mathcal{U}_N(f)$  o lema está concluído para selas de  $g$  de períodos menores que  $N$  para todo  $g$  em  $\mathcal{O}_N(f)$ . Seja agora  $\mathcal{O}_N$  a união de todos os conjuntos  $\mathcal{O}_N(f)$ ,  $f \in \mathcal{G}$ . Finalmente o conjunto  $\mathcal{G}_0$  é a interseção enumerável de

abertos e densos conjuntos  $\mathcal{O}_N$  para todo  $N$  em  $\mathbb{N}$ . Por construção esse conjunto é residual e satisfaz as hipóteses do lema.

□

### 3.3 Selas de Classes Homoclínicas

Dada uma classe homoclínica  $H(p, f)$ , denote por  $\text{Per}_h(H(p, f))$  o conjunto das selas hiperbólicas  $q$  homoclinicamente relacionadas a  $p$ , e por  $\text{Per}_R(H(p, f))$  o subconjunto de  $\text{Per}_h(H(p, f))$  de pontos  $q$  tal que todos os autovalores da derivada  $Df^{\pi(q)}(q)$  são reais, positivos e tem multiplicidade um; aqui  $\pi(q)$  denota o período de  $q$  e denominaremos estas selas de *selas perfeitas*. Lembrando que um cociclo linear periódico é uma 4-upla  $\mathcal{P}=(\Sigma, f, E, A)$ , onde  $f$  é um difeomorfismo,  $\Sigma$  é um conjunto infinito de pontos periódicos de  $f$ ,  $E$  é um vetor fibrado Euclidiano definido sobre  $\Sigma$ , e  $A \in \text{GL}(\Sigma, f, E)$  é tal que  $A(x):E_x \rightarrow E_{f(x)}$  é um isomorfismo linear para cada  $x$  ( $E_x$  é a fibra de  $E$  em  $x$ ). Dizemos que um cociclo periódico linear  $\mathcal{P}=(\Sigma, f, E, A)$  é diagonalizável em um ponto  $x \in \Sigma$  se a aplicação:

$$M_A(x) : E_x \longrightarrow E_x, M_A(x) = A(f^{\pi(x)-1}(x)) \circ \dots \circ A(f^2(x)) \circ A(f(x)) \circ A(x)$$

somente tem autovalores reais positivos de multiplicidade 1. Em noções mais intuitivas um cociclo periódicos lineares com extra estrutura de transição permite criar para um dado ponto uma órbita periódica que visita órbitas periódicas prescritas diferentes, a tal transição nos dá uma espécie de propriedade de sombreamento no fibrado tangente permitindo multiplicar derivadas de pontos em diferentes diferentes órbitas, essencialmente isto nos dá um ponto periódico com períodos arbitrariamente grande. Talvez isso aparentemente não faz nenhum sentido dinamicamente falando, entretanto no contexto das boas propriedades das classes homoclínicas este procedimento é consistente. No esboço das idéias principais do que se propõe ser uma prova da proposição abaixo tornam-se imprescindíveis a compreensão das idéias dos dois seguintes lemas.

**Lema 3.3.1** ([1], Lema 2.3). *Seja  $H(p_f, f)$  uma classe homoclínica não-trivial. Então a derivada  $Df$  de  $f$  induz um cociclo linear periódico com transição sobre  $\text{Per}_h(H(p_f, f))$ .*

**Lema 3.3.2** ([1], Lema 2.4). *Para todo cociclo linear periódico com transição  $\mathcal{P}=(\Sigma, f, E, A)$  e todo  $\varepsilon > 0$  existe um denso subconjunto  $\Sigma'$  de  $\Sigma$  e uma  $\varepsilon$ -perturbação  $A'$  de  $A$  definida em  $\Sigma'$  onde é diagonalizável, isto é,  $M_{A'}$  tem autovalores reais positivos de multiplicidade um para todo  $x$  em  $\Sigma'$ .*

Estes lemas afirmam que é possível criar através de pequenas perturbações da derivada  $Df$  uma nova órbita passando por distintas órbitas de selas densamente definidas em  $Per_h(H(p_f, f))$  e estas selas por sua vez são perfeitas, isto é, sempre existe perturbações de  $Df$  que tornam o sistema diagonalizável sobre o conjunto denso em  $H(p_f, f)$ .

**Proposição 3.3.3.** *Existe um residual subconjunto  $\mathcal{G}_1$  de  $Diff^1(M)$  consistindo de difeomorfismos  $f$  tal que  $Per_{\mathbb{R}}(H(p, f))$  é denso em  $H(p_f, f)$  para toda classe homoclínica não trivial  $H(p_f, f)$  de  $f$ .*

Um outro útil lema é o famoso lema de Franks que constitui um clássico lema de perturbação na topologia  $C^1$  que em grosseiras palavras afirma que se perturbarmos a diferencial de um difeomorfismo  $f$  ao longo de uma órbita periódica sempre é possível encontrar uma  $g$   $C^1$ -próxima de  $f$  que realizará a mesma órbita periódica com a diferencial igual a perturbação da diferencial de  $f$ , em resumo o lema de Franks vem legitimar a existência de uma  $g$  próxima da  $f$  com o comportamento parecido com o de  $f$  numa quantidade finita de pontos.

**Lema 3.3.4** ([11]). *Considere um difeomorfismo  $f$  e um conjunto finito  $f$ -invariante  $\Sigma$ . Seja  $A$  uma  $\varepsilon$ -perturbação da derivada de  $f$  em  $\Sigma$  (isto é, a aplicação linear  $Df(x)$  e  $A(x)$  são  $\varepsilon$ -próxima para todo  $x \in \Sigma$ ). Então, para toda vizinhança  $U$  de  $\Sigma$ , existe  $g \varepsilon$ - $C^1$ -próxima a  $f$  tal que:*

- $f(x)=g(x)$  para todo  $x \in \Sigma$  e todo  $x \notin U$ ;
- $Dg(x) = A(x)$  para todo  $x \in \Sigma$ .

Com estas ferramentas em mãos estamos habilitados a demonstrar a Proposição 2.4.1

*Prova da Proposição 2.4.1.* Pelo Lema 3.3.1, a derivada de  $f$  induz um cociclo linear periódico com transição sobre  $Per_h(H(p, f))$  e pelo Lema 3.3.2 existe  $A$   $\varepsilon$ -perturbação de  $Df$  definida sobre um subconjunto  $\Sigma'$  denso em  $\Sigma=Per_h(H(p, f))$  para todo  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $r_f$  em  $\Sigma'$   $A$  através da órbita de  $r_f$  é diagonalizável, isto é,  $M_A(r_f) =$

$A(f^{\pi(r_f)-1}(r_f)) \circ \dots \circ A(f^2(r_f)) \circ A(f(r_f)) \circ A(r_f)$  tem autovalores reais positivos de multiplicidade 1 e por "Franks" temos uma  $g$   $C^1$ -próxima de  $f$  tal que sua derivada é  $A$  e ainda temos  $r_f=r_g$  é um ponto periódico de  $g$  cujo período é  $\pi(r_f)$ . Dessa maneira podemos concluir que  $Dg^{\pi(r_g)}(r_g) = M_A(r_f)$  é diagonalizável, em melhores palavras, temos um ponto periódico  $r_g$  de  $g$  perfeito. Uma vez  $y$  é um ponto homoclínico transversal de  $p_f$  então podemos tomar  $r_f$  cuja órbita  $\mathcal{O}(r_f)$  está arbitrariamente próxima da órbita do ponto homoclínico  $y$ . Sendo mais preciso o conjunto  $\Lambda = \{\mathcal{O}(p_f) \cup \mathcal{O}(x)\}$  está arbitrariamente próximo da órbita  $r_f$  na métrica de Hausdorff. Uma vez que  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico de  $f$ , existe  $\delta > 0$  tal que para qualquer  $r_f$  cuja órbita  $\mathcal{O}(r_f, f)$  é Hausdorff  $\delta$ -próximo a  $\Lambda$  e qualquer  $g$  que está  $C^1$ - $\varepsilon$  próximo a  $f$ ,  $r_g$  e  $p_g$  são homoclinicamente relacionados assim  $r_g \in H(p_g, g)$ . Como  $H(p_f, f)$  é compacta podemos tomar uma cobertura finita  $\mathbb{B}_n$  de bolas abertas  $B_i$  de raio  $\frac{1}{n}$  para cada  $n$ . Usando similar argumento do que foi feito acima podemos tomar em cada bola  $B_i$  uma sela  $r_f$  e uma pequena  $C^1$ -perturbação  $g \in \mathcal{G}$  com  $r_f = r_g$ . Lembrando que  $H(p_f, g)$  varia continuamente com  $p_f$ , logo em cada  $B_i$  temos  $r_g \in \text{Per}_{\mathbb{R}}(H(p_g, g))$ . Considerando perturbações em cada bola  $B_i$  e lembrando a continuidade das classes homoclínicas em função de  $p_g$  para  $g \in \mathcal{G}$ , nós obteremos  $g$  próxima a  $f$  tal que  $\text{Per}_{\mathbb{R}}(H(p_g, g))$  é  $\frac{2}{n}$ -denso em  $H(p_g, g)$ . Não é difícil vê que por continuidade  $H(p_g, g)$  também está contida na união das bolas  $B_i$ . Dessa forma para todo  $h$  próximo a  $g$  em  $\mathcal{G}$  implica que  $\text{Per}_{\mathbb{R}}(H(p_h, h))$  é  $\frac{2}{n}$ -denso em  $H(p_h, h)$ . Assim existe uma vizinhança  $\mathcal{U}_f$  de  $f$  em  $\mathcal{G}$  e um aberto e denso subconjunto  $\mathcal{D}_n(f)$  de  $\mathcal{U}_f$  de difeomorfismos  $g$  tal que  $\text{Per}_{\mathbb{R}}(H(p_g, g))$  é  $\frac{2}{n}$ -denso em  $H(p_g, g)$ . Fazendo  $\mathcal{D}_n$  a reunião de todos os  $\mathcal{D}_n(f)$  para todo  $f$  em  $\mathcal{G}$  logo a interseção enumerável de  $\mathcal{D}_n$  é residual em  $\mathcal{G}$ .  $\square$

### 3.4 Criação de interseções entre variedades invariantes

O objetivo principal dessa seção é mostrar a  $C^1$ -genérica propriedade do difeomorfismo  $f$  com selas de índices diferentes onde suas classes homoclínicas coincidem então existe alguma interseção transversal entre as variedades invariantes. Seja  $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$ , onde são residuais subconjuntos de  $\text{Diff}^1(M)$  no Lema 3.2.1 e na Proposição 3.3.3. Isto nos diz que para todo  $f$  em  $\mathcal{G}_2$  com classes homoclínicas coincidentes existe uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $f$  tal que para todo  $g$  em  $\mathcal{U}$  as continuações das classes homoclínicas em  $g$  também coincidem e na classe homoclínica  $H(p, f)$  da sela  $p$  de  $f$  existe um sub-

conjunto denso de selas perfeitas homoclinicamente relacionada a  $p$ . Dentre os lemas de perturbação existe aquele que tenta realciona dois ponto distintos na topologia  $C^1$  onde "órbita futura" de um está arbitrariamente próximo da "órbita passada" do outro então podemos perturbar o sistema e encontrar uma  $f$  que "cole" as duas órbitas. Em termos mais preciso podemos enunciar o seguinte lema que nos providenciará ciclos.

**Lema 3.4.1** ([12], Lema de Conexão de Hayashi). *Seja  $a_f$  e  $b_f$  um par de sela de um difeomorfismo  $f$  tal que existem sequências de pontos  $y_n$  e números naturais  $k_n$  tal que*

- $y_n \rightarrow y \in W_{loc}^u(a_f, f), y \neq a_f, e$
- $f^{k_n}(y_n) \rightarrow z \in W_{loc}^s(b_f, f), z \neq b_f$

*Então existe um difeomorfismo  $g$  arbitrariamente  $C^1$ -próximo a  $f$  tal que  $W^u(a_g, g)$  e  $W^s(b_g, g)$  tem alguma interseção arbitrariamente próxima de  $y$ .*

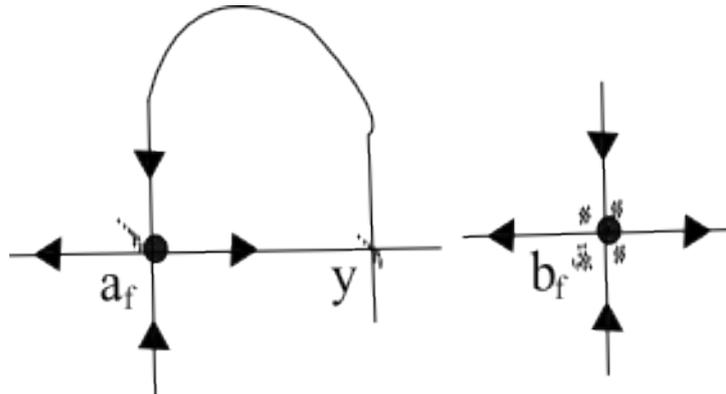


Figure 3.1: Conexão de Órbitas

**Lema 3.4.2.** *Considere uma classe homoclínica  $H(a_f, f)$ , e qualquer sela  $b_f \in H(a_f, f)$ , e qualquer ponto homoclínico transverso  $y$  de  $a_f$ . Então existe  $g$  arbitrariamente  $C^1$ -próximo a  $f$  tal que  $W^u(a_g, g)$  e  $W^s(b_g, g)$  tem uma interseção arbitrariamente próxima a  $y$ .*

*Proof.* Observe que  $H(a_f, f)$  é transitivo então existe  $w \in H(a_f, f)$  tal que  $H(a_f, f)$  é  $\omega$ -limite de  $w$ . Assim a órbita futura de  $w$  passa arbitrariamente próxima de  $a_f, b_f$  e  $y$  ele acumula em algum  $z \in W_{loc}^s(b_f)$ . Então existem sequências  $f^{m_n}(w)$  convergindo para algum  $z \in W_{loc}^s(b_f)$  e  $f^{r_n}(w) \rightarrow y$ , onde  $m_n > r_n$  e  $m_n \rightarrow \infty$ . Tomando  $y_n = f^{r_n}(w)$  e  $k_n = m_n - r_n$  obteremos uma sequência  $y_1, y_2, \dots, y_n$  de acordo com as hipóteses do

lema 3.4.1 então  $f^{k_n}(y_n) = f^{m_n}(w)$  que implica em alguma interseção  $W^u(a_g, g)$  com  $W^s(b_g, g)$  arbitrariamente próxima de  $y$ .  $\square$

**Lema 3.4.3.** *Existe um residual subconjunto  $\mathcal{G}_3$  de  $\text{Dif}^1(M)$  de difeomorfismo  $f$  tal que para todo par de sela  $p_f$  e  $q_f$  de  $f$  de índices  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$ , com  $H(p_f, f) = H(q_f, f)$  é assegurado que  $W^u(p_f, f)$  e  $W(q_f, f)$  tem alguma interseção transversal.*

*Proof.* Olhando para o lema anterior podemos fazer  $a_f = p_f$  e  $b_f = q_f$  então existe um  $g$  arbitrariamente  $C^1$ -próximo para  $f$  tal que  $W^s(q_g, g)$  e  $W^u(p_g, g)$  tem alguma interseção próxima de um ponto  $y$  homoclínico transverso de  $a_f$ .

$$\dim(W^s(q_g, g)) + \dim(W^u(p_g, g)) = \beta + (n - \alpha) > \beta + (n - \beta) = n$$

onde  $n$  é a dimensão da variedade ambiente. Assim depois de uma pequena perturbação de  $f$  podemos assumir que esta prévia interseção entre  $W^s(q_g, g)$  e  $W^u(p_g, g)$  é transversa. Fixado  $N$  em  $\mathbb{N}$  sejam  $p_f^{N_i}$  uma sela período  $N_i$  nas mesmas condições de  $p_f$  e  $q_f^{N_j}$  uma sela período  $N_j$  nas mesmas condições de  $q_f$  com  $N_i \leq N_j \leq N$ . Para alguma vizinhança  $\mathcal{U}_f$  de  $f$  o subconjunto  $\mathcal{F}_N(f)$  dos difeomorfismo que satisfazem as hipótese do lema para as selas  $p_f^{N_i}$  e  $q_f^{N_j}$  é aberto e denso em  $\mathcal{U}_f$ . Seja  $\mathcal{F}_N$  a reunião dos  $\mathcal{F}_N(f)$  para todo  $f$  em  $\mathcal{G}_2$  logo  $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_N$  é denso.  $\square$

## Capítulo 4

### CICLOS HETERODIMENSIONAIS

Ciclo heterodimensional constitui a máquina principal na construção das selas de índices diferentes, além de se mostra um robusto exemplo de obstrução de hiperbolicidade uniforme.

#### 4.1 Ciclos heterodimensionais e criação de órbitas periódicas

Percebe-se evidentemente neste trabalho que selas são estruturas fundamentais na descrição dinâmica do que queremos mostrar. O índice de um ponto periódico hiperbólico  $x$  é a dimensão de sua variedade estável por convenção. Dado um par de pontos hiperbólicos  $p$  e  $q$  se a variedade instável da órbita  $\mathcal{O}_p$  de  $p$  intersecta transversalmente a variedade estável da órbita  $\mathcal{O}_q$  de  $q$  denotaremos por  $p <_{us} q$ : existe um ponto  $x \in W^u(\mathcal{O}_p) \cap W^s(\mathcal{O}_q)$  tal que  $T_x M = T_x W^u(\mathcal{O}_p) + T_x W^s(\mathcal{O}_q)$ . É importante notar que a interseção transversal da variedade instável com a variedade estável é robusta como já foi observado na prova do lema 3.4.2, isto é, numa vizinhança  $\mathcal{U}_f$  de  $f$  tal interseção persiste para toda perturbação  $g$  de  $f$  em  $\mathcal{U}_f$ . Dizemos que um difeomorfismo  $f$  tem um *ciclo heterodimensional* associado as selas  $p$  e  $q$  se  $p$  e  $q$  tem diferentes índices e ambas as interções  $W^u(\mathcal{O}_p) \cap W^s(\mathcal{O}_q)$  e  $W^s(\mathcal{O}_p) \cap W^u(\mathcal{O}_q)$  não são vazias

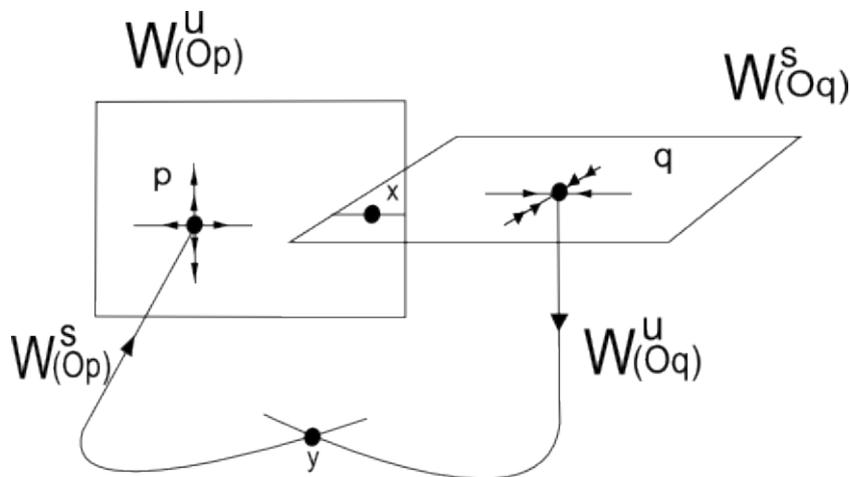


Figure 4.1: Ciclo Heterodimensional

e finalmente um ponto  $p$  de período  $\pi(p)$  de um difeomorfismo  $f$  tem autovalores reais se todo autovalor do isomorfismo linear  $Df^{\pi(p)}(p) : T_pM \rightarrow T_pM$  é real.

## 4.2 Ciclos heterodimensionais afins

### 4.2.1 Definição

Seja  $f$  um difeomorfismo tendo um ciclo heterodimensional associado a pontos periódicos  $p, q$  de índice  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$ , e pontos heteroclínicos  $x \in W^u(\mathcal{O}_p) \cap W^s(\mathcal{O}_q)$  e  $y \in W^s(\mathcal{O}_p) \cap W^u(\mathcal{O}_q)$ . Diremos que o ciclo heterodimensional é afim se todas as seguintes propriedades são satisfeitas.

- (A1) Os autovalores associados as selas  $p$  e  $q$  são todos reais e diferentes em módulos e tem multiplicidade um: denote os autovalores de  $Df^{\pi(p)}$  e  $Df^{\pi(q)}$  por  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  e  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , respectivamente, tal que teremos  $0 < |\lambda_1| < \dots < |\lambda_\alpha| < 1 < |\lambda_{\alpha+1}| < \dots < |\lambda_n|$  e  $0 < |\sigma_1| < \dots < |\sigma_\beta| < 1 < |\sigma_{\beta+1}| < \dots < |\sigma_n|$ .
- (A2) Existem cartas locais  $\varphi_p: U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\varphi_q: U_q \rightarrow \mathbb{R}^n$  centradas nos pontos  $p$  e  $q$  tais que os abertos  $U_p, f(U_p), \dots, f^{\pi(p)-1}(U_p), U_q, f(U_q), \dots, f^{\pi(q)-1}(U_q)$  são dois a dois disjuntos. Além do mais, estas cartas linearizam a dinâmica localmente: nestas coordenadas locais, as aplicações

$$f^{\pi(p)} : U_p \cap f^{-\pi(p)}(U_p) \rightarrow U_p$$

e

$$f^{\pi(q)} : U_q \cap f^{-\pi(q)}(U_q) \rightarrow U_q$$

são lineares diagonal cuja  $k$ -ésima entrada diagonal são  $\lambda_k$  e  $\sigma_k$ , respectivamente. E por fim,  $\varphi_p : (U_p \cap f^{-\pi(p)}(U_p))$  e  $\varphi_q : (U_q \cap f^{-\pi(p)}(U_p))$  contem o cubo  $[-2,2]^n$  do  $\mathbb{R}^n$ .

- (A3) O ponto heteroclínico  $x \in W^u(\mathcal{O}_p) \cap W^s(\mathcal{O}_q)$  tem duas iteradas  $x^- = f^{n_x^-}(x) \in U_p$  e  $x^+ = f^{n_x^+}(x) \in U_q$ , onde  $n_x^- < n_x^+$ , cujas as coordenadas locais são

$$x^- = (\underbrace{0, \dots, 0}_\alpha, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\alpha-1})$$

e

$$x^+ = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\beta-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\beta}).$$

(A4) Existe uma vizinhança  $U_x^- \subset U_p$  de  $x^-$  tal que a vizinhança  $U_x^+ = f^{n_x}(U_x^-)$  de  $x^+$  está contida em  $U_q$ , onde  $n_x = n_x^+ - n_x^-$ . Além do mais, nas correspondentes coordenadas locais,  $U_x^-$  e  $U_x^+$  estão contidas no cubo  $[-2,2]^n$ , a aplicação  $T_x = f^{n_x^+}: U_x^- \rightarrow U_x^+$  é afim e sua parte linear  $\mathcal{T}_x$  é diagonal. Denotaremos as entradas diagonais de  $\mathcal{T}_x$  por  $(t_{x,1}, \dots, t_{x,n})$ . Logo pela definição de  $T_x$  tem-se que

$$T_x(\underbrace{0, \dots, 0}_\alpha, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\alpha-1}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\beta-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\beta}).$$

(A5) O ponto heteroclínico  $y \in W^s(\mathcal{O}_p) \cap W^u(\mathcal{O}_q)$  tem duas iteradas  $y^- = f^{n_y^-}(y) \in U_q$  e  $y^+ = f^{n_y^+}(y) \in U_p$ , onde  $n_y^- < n_y^+$ , cujas as coordenadas locais são

$$y^- = (\underbrace{0, \dots, 0}_\beta, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\beta-1})$$

e

$$y^+ = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\alpha}).$$

(A6) Existe uma vizinhança  $U_y^- \subset U_q$  de  $y^-$  tal que a vizinhança  $U_y^+ = f^{n_y}(U_y^-)$  de  $y^+$  está contida em  $U_p$ , onde  $n_y = n_y^+ - n_y^-$ . Além do mais, nas correspondentes coordenadas locais,  $U_y^-$  e  $U_y^+$  estão contidas no cubo  $[-2,2]^n$ , a aplicação  $T_y = f^{n_y^+}: U_y^- \rightarrow U_y^+$  é afim e sua parte linear  $\mathcal{T}_y$  é diagonal. Denotaremos as entradas diagonais de  $\mathcal{T}_y$  por  $(t_{y,1}, \dots, t_{y,n})$ . Logo pela definição de  $T_y$  tem-se que

$$T_y(\underbrace{0, \dots, 0}_\beta, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\beta-1}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\alpha}).$$

**Lema 4.2.1.** *Seja  $f$  um difeomorfismo tendo um ciclo heterodimensional associado as selas  $p$  e  $q$ , tendo autovalores reais e índices  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$ , e os pontos heteroclínico  $x \in W^u(\mathcal{O}_p) \cap W^s(\mathcal{O}_q)$  e  $y \in W^s(\mathcal{O}_p) \cap W^u(\mathcal{O}_q)$ . Então, para qualquer  $C^1$ -vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $f$ , existe  $g \in \mathcal{U}$  tendo um ciclo heterodimensional afim associado as selas  $p$  e  $q$  e aos pontos heteroclínicos  $x$  e  $y$ .*

*Proof.* Observe que pelo teorema de Hartman-Grobman podemos identificar localmente a dinâmica da aplicação  $f$  com sua parte linear numa pequena vizinhança das selas  $p$  e  $q$  e por isso através de uma pequena  $C^1$ -perturbação de  $f$  está justificada a existência das cartas linearizantes. Observe que também que  $x \in W^u(\mathcal{O}_p) \cap W^s(\mathcal{O}_q)$  que é transversal logo persistente por perturbações no caso de  $y \in W^s(\mathcal{O}_p) \cap W^u(\mathcal{O}_q)$  não é

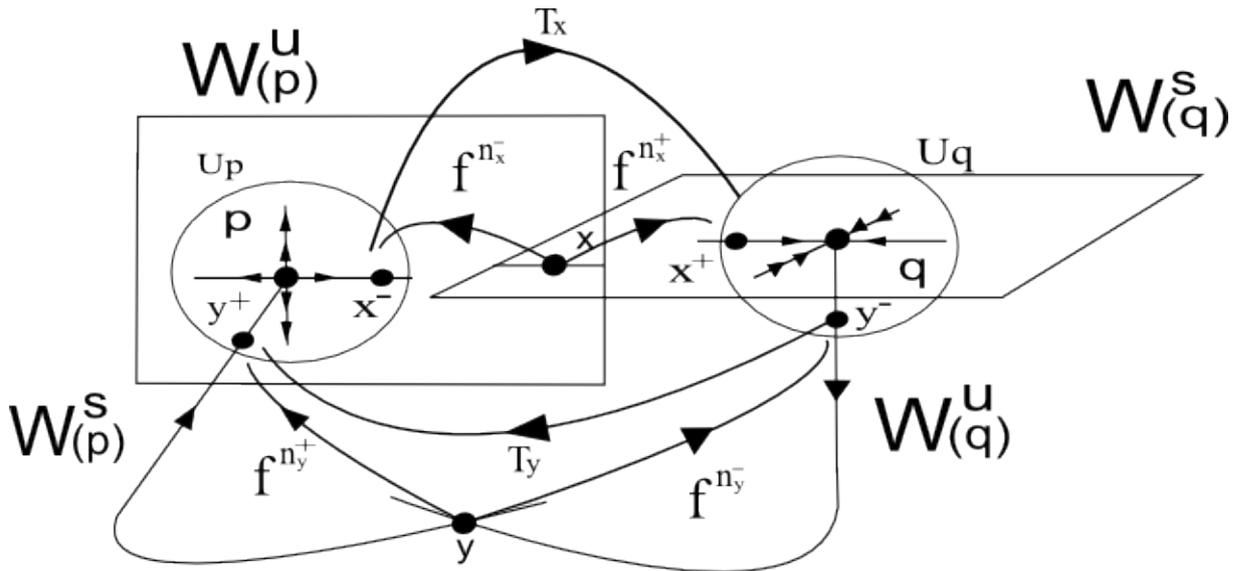
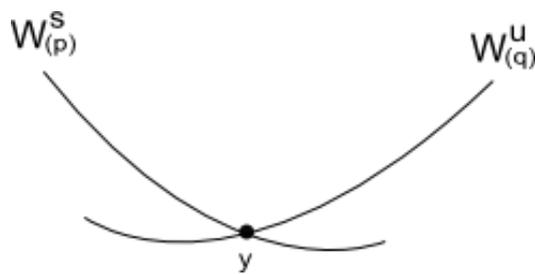


Figure 4.2: Ciclo Heterodimensional Afim

transversal, mas ainda sim é possível exibir (existe) um difeomorfismo  $C^1$ -próximo de  $f$  que o mantem. Já no caso das selas  $p$  e  $q$  não terem todos os autovalores de  $Df^{\pi(p)}(p)$  e  $Df^{\pi(q)}(q)$  diferentes em módulo podemos trocá-las por outras que tenham, pois no nosso contexto genérico selas com estas propriedades são densas no conjunto dos pontos homoclinicamente relacionados a  $p$  e a  $q$ . Dessa forma está satisfeita as condições (A1) e (A2). Pela interseção  $W^s(\mathcal{O}_p) \cap W^u(\mathcal{O}_q)$  diremos que é quase-transversa (istó é  $T_y W^s(\mathcal{O}_p) \cap T_y W^u(\mathcal{O}_q) = \bar{0}$ ).

Figure 4.3: Ponto Heteroclínico  $y$

Ainda por pequenas perturbações podemos prevenir que estas interseções pertençam a forte variedade estável (maior contração) e a forte variedade instável (maior expansão), tal que a interseção heteroclínica pertença a fraca estável (menor contração) a fraca instável (menor expansão) variedades. Para explicar este ponto de forma mais precisa e entendível faremos de algumas representações gráficas. Em nossas cartas linearizantes nós definiremos as fracas variedades instável e estável locais por

$$W_{loc}^{cu}(\mathcal{O}_q) = \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0)}_{\beta}, s, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\beta-1} \right\}, s \in [-2, 2],$$

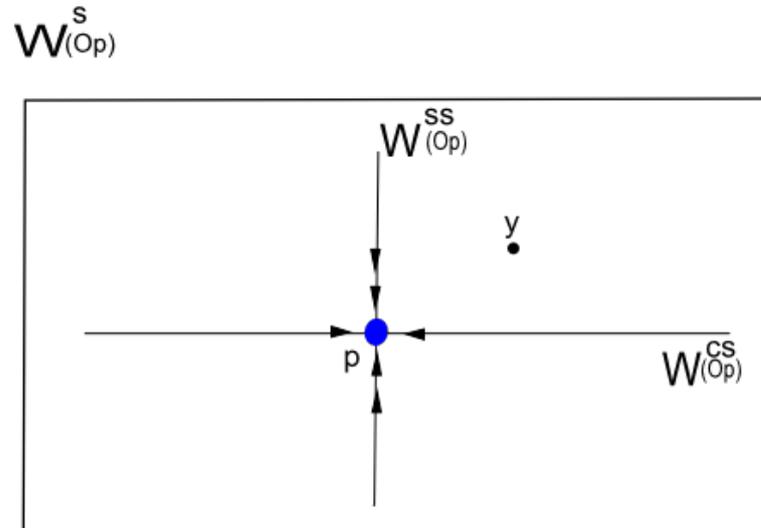
$$W_{loc}^{cs}(\mathcal{O}_p) = \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0)}_{\alpha-1}, s, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\alpha} \right\}, s \in [-2, 2],$$

Considerando as iterações por  $f$  nós obteremos a global invariante fraca instável variedade  $W_{loc}^{cu}(\mathcal{O}_q)$ . Similarmente, iterando por  $f^{-1}$  nós obteremos fraca estável variedade  $W_{loc}^{cs}(\mathcal{O}_p)$ . De forma análoga podemos definir primeiro a local forte instável e estável variedade por

$$W_{loc}^{uu}(\mathcal{O}_q) = \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0)}_{\beta+1} \right\} \times [-2, 2]^{n-\beta-1},$$

$$W_{loc}^{ss}(\mathcal{O}_p) = [-2, 2]^{\alpha-1} \times \left\{ \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-\alpha+1} \right\},$$

As variedades globais forte instável  $W^{uu}(\mathcal{O}_q)$  e forte estável  $W^{ss}(\mathcal{O}_p)$  segue-se por extensão das variedades locais pelas iterações de  $f^{\pm 1}$ . Depois de uma nova perturbação nós podemos assumir que  $y$  não pertence a  $W^{ss}(\mathcal{O}_p)$ ,

Figure 4.4: Variedade estável da órbita de  $p$ 

usando a dominação suas iteradas positivas acumulam em  $W^{cs}(\mathcal{O}_p)$ . Então

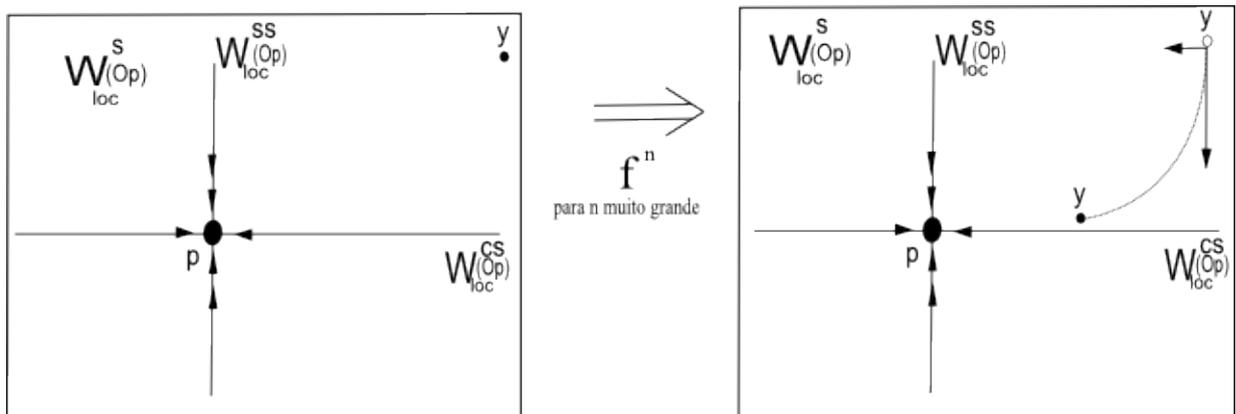


Figure 4.5: Dominação 1

Entretanto, depois de uma nova pequena perturbação, podemos assumir que  $y \in W^{cs}(\mathcal{O}_p)$ . Com argumento similar, mas agora usando as iteradas negativas e depois de uma arbitrária pequena perturbação podemos assumir que  $y \in W^{cu}(\mathcal{O}_p)$  como na figura 4.5.

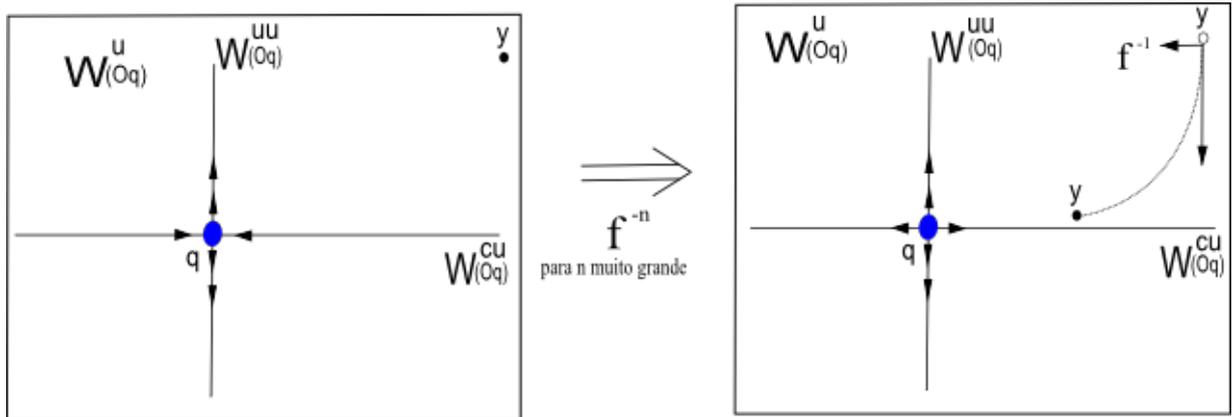


Figure 4.6: Dominação 2

Então  $y \in W^{cs}(\mathcal{O}_p) \cap W^{cu}(\mathcal{O}_q)$  isto implica (A5). Para obter (A3) procede-se analogamente ao caso anterior, isto é,  $x \in W^u(\mathcal{O}_p) \cap W^s(\mathcal{O}_q)$ ,  $x$  não pertence a forte instável variedade de  $p$  e nem a forte estável variedade de  $q$ , caso contrário, em nosso contexto genérico podemos assumir depois de uma pequena arbitrária perturbação que este é o nosso caso. Considerando um ponto  $x$  com esta propriedade e usando a dominação, nós temos que as órbitas passadas de  $x$  acumulam na fraca instável de  $p$  e similarmente as iteradas futuras de  $x$  acumulam na fraca estável de  $q$ . Para obter (A4) e (A6) basta lembrar que em coordenadas locais  $f$  é linear na vizinhança de  $p$  e  $q$  e por isso  $f^{n_x}$  é linear afim na vizinhança  $U_x^-$  de  $x^-$  em  $U_p$ , observe que após uma sequência de pequenas perturbações é razoável indagar se ainda devemos ter que a diferencial de  $f$  ainda preserva a ordem dos autoespaços ao longo da órbita heteroclínica de  $x$ , isto é equivalente a dizer que por pequenas perturbações de  $f$  o sentido dos autovetores em cada autoespaço fica invariante. De fato por dominação e através de pequenas perturbações é possível preservar o fibrado unidimensional correspondendo a forte estável  $\lambda_1$  e  $\sigma_1$ , digo  $E_1(p)$  e  $E_1(q)$  e o  $n - 1$ -dimensional fibrado correspondendo ao restante dos autovalores  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$  e  $\sigma_2, \dots, \sigma_n$ , digo  $\bigoplus_2^n E_i(p)$  e  $\bigoplus_2^n E_i(q)$ . Agora uma nova perturbação mantendo invariante os prévios fibrados  $E_1(p)$ ,  $E_1(q)$ ,  $\bigoplus_2^n E_i(p)$  e  $\bigoplus_2^n E_i(q)$  focando agora o unidimensional fibrado correspondendo aos autovalores  $\lambda_2$  e  $\sigma_2$ , digo  $E_2(p)$  e  $E_2(q)$  e  $n - 2$ -dimensional fibrado correspondendo aos autovalores restantes  $\lambda_3, \dots, \lambda_n$  e  $\sigma_3, \dots, \sigma_n$ , digo  $\bigoplus_3^n E_i(p)$  e  $\bigoplus_3^n E_i(q)$ . Dessa forma a prova segue indutivamente verificando (A4) e (A6).

□

### 4.3 Criando selas com índices intermediários

Sejam um difeomorfismo  $f$  com ciclo heterodimensional afim associado as selas  $p$  e  $q$ , de índice  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$ , e os pontos heteroclínicos  $x \in W^u(\mathcal{O}_p) \cap W^s(\mathcal{O}_q)$  e  $y \in W^s(\mathcal{O}_p) \cap W^u(\mathcal{O}_q)$  conforme a notação usada na seção 4.1. Considere uma sequência de pontos  $(r_{l,m})_{l,m \in \mathbb{N}}$  tendo coordenadas local em  $U_p$  como segue:

$$r_{l,m} = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, \lambda_{\alpha+1}^{-l}, 0, \dots, 0, \lambda_{\beta+1}^{-l} t_{x,\beta+1}^{-l} \sigma_{\beta+1}^{-m}, 0, \dots, 0)}_{\beta},$$

onde  $t_{x,\beta+1}$  é definido em (A4). Seguiremos definindo os pontos  $s_{l,m} = f^{\pi_{l,m}}(r_{l,m})$ , onde  $\pi_{l,m} = l\pi(p) + n_x + m\pi(q) + n_y$ . Pertubaremos  $f$  numa pequena vizinhança  $D_y^+$  de  $y^+ = f^{n_y^+}(y)$  onde é relativamente compacto em  $U_y^+$ . Podemos assumir que  $D_y^+$  é disjunto do cubo  $f^{\pi(p)}([-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]^n) \subset U_p$ , onde  $\varepsilon > 0$  é uma pequena constante: isto é possível devido  $f^{\pi(p)}([-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]^n)$  é um pequena vizinhança do cubo cuja expressão nas coordenadas de  $U_p$  é  $[-|\lambda_1|, |\lambda_1|] \times \dots \times [-|\lambda_n|, |\lambda_n|]$  e devido a  $\lambda_\alpha < 1$  e  $D^y$  é uma pequena vizinhança do ponto  $y^+ = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{\alpha-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\alpha}$ . Ainda mais, nós podemos escolher  $D_y^+$  disjunto das órbitas  $(f^k(x^-))$ ,  $k \in \{0, \dots, n_x - 1\}$ , e  $(f^k(x^-))$ ,  $k \in \{0, \dots, n_y - 1\}$  e do conjuntos abertos  $U_p, f(U_p), \dots, f^{\pi(p)-1}(U_p), U_q, f(U_q), \dots, f^{\pi(q)-1}(U_q)$ . A próxima proposição garante que é possível criar sequências de pontos  $(r_{l,m})$  e  $(s_{l,m})$  na vizinhança  $U_p$  onde estes pontos estão arbitrariamente próximos de  $y^+$  na fraca variedade estável de  $p$ . Isto nos dá uma idéia de que estes pontos apresentam algum tipo de recorrência. Através disso e por pequenas perturbações podemos fechar a órbita destes pontos. Um cuidado adicional a ser observado é de que o inicial ponto não visite  $D_y^+ \subset U_p$  antes da iterada desejada. A chave principal desta construção são os ciclos heterodimensionais afins.

**Proposição 4.3.1.** *Para todo  $l$  e  $m$  bastante grande, os pontos  $r_{l,m}$  e  $s_{l,m}$  estão bem definido, pertence a  $U_p$ , e a sequência  $(r_{l,m})$  e  $(s_{l,m})$  convergem para o ponto  $y^+ = f^{n_y^+}(y)$  quando  $l, m \rightarrow \infty$ . Ainda mais, as iteradas intermediárias  $f^k(r_{l,m})$ ,  $k \in \{1, \dots, \pi_{l,m} - 1\}$ , não intersecta o conjunto  $D_y^+$ .*

*Proof.* Como  $|\lambda_{\alpha+1}|, |\lambda_{\beta+1}|$  e  $|\sigma_{\beta+1}|$  são maiores que 1, a sequência  $(r_{l,m})$  converge para o ponto

$$y^+ = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{\alpha-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\alpha}.$$

Em particular, o ponto  $r_{l,m}$  está bem definido para  $l, m$  grande, e pertence a  $U_p$ . Agora, para  $l, m$  grande,  $f^{l\pi(p)}(r_{l,m})$  é um ponto em  $U_p$  cujas coordenadas são

$$f^{l\pi(p)}(r_{l,m}) = \underbrace{(0, \dots, 0, \lambda_\alpha^l, \lambda_{\alpha+1}^l \lambda_{\alpha+1}^{-l}, 0, \dots, 0, \lambda_{\beta+1}^{-l} \lambda_{\beta+1}^l t_{x,\beta+1}^{-1} \sigma_{\beta+1}^{-m}, 0, \dots, 0)}_{\beta} \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-\beta-1}$$

Os pontos intermediários  $f^k(r_{l,m}), k \in \{1, \dots, l\pi(p)\}$ , não pertencem a  $U_p$  quando  $k$  não é múltiplo de  $\pi(p)$ , simplesmente note que os conjuntos  $U_p, \dots, f^{\pi(p)-1}(U_p)$  são dois a dois disjuntos e pertence a  $f^{\pi(p)}([-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]^n)$  quando  $k$  é um múltiplo de  $\pi(p)$ . Em todos estes casos não intersecta  $D_y^+$ . Assim para  $l, m$  bastante grande

$$f^{l,m}(r_{l,m}) = \underbrace{(0, \dots, 0, \lambda_\alpha^l, 1, 0, \dots, 0, t_{x,\beta+1}^{-1} \sigma_{\beta+1}^{-m}, 0, \dots, 0)}_{\beta}$$

está suficientemente próximo de

$$x^- = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\alpha} \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-\alpha-1}.$$

Como

$$T_x \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\alpha} \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-\alpha-1} = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\beta-1} \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-\beta}$$

Então pela continuidade da transformação afim podemos concluir que

$$T_x(f^{l\pi(p)}(r_{l,m})) = \underbrace{(0, \dots, 0, t_{x,\alpha} \lambda_\alpha^l, 0, \dots, 0, 1, t_{x,\beta+1} t_{x,\beta+1}^{-1} \sigma_{\beta+1}^{-m}, 0, \dots, 0)}_{\beta-1} \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-\beta-1}$$

está bem definida e próxima de  $x^+ \in U_q$ . Ainda mais, os pontos  $f^k(f^{l\pi(p)}(r_{l,m})), k \in \{0, \dots, n_x\}$ , estão muito próximos do ponto  $f^k(x^-)$  e são disjuntos de  $D_y^+$ . Repetindo os mesmo argumento, mostra-se que, para  $l, m$  bastante grande  $f^k(T_x \circ f^{l\pi(p)}(r_{l,m})), k \in \{0, \dots, m\pi(q)\}$  estão muito próximos dos pontos de  $f^k(x^+)$  e disjuntos  $D_y^+$  e

$$f^{m\pi(q)}(T_x \circ f^{l\pi(p)}(r_{l,m})) = \underbrace{(0, \dots, 0, \sigma_\alpha^m t_{x,\alpha} \lambda_\alpha^l, 0, \dots, 0, \sigma_\beta^m, \sigma_\beta^m \sigma_\beta^{-m}, 0, \dots, 0)}_{\beta-1} \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-\beta-1}$$

e pertence a  $U_q$ . Observe que  $|\sigma_\beta|, |\sigma_\alpha|, |\lambda_\alpha| < 1$ , desta forma  $f^{m\pi(q)}(T_x \circ f^{l\pi(p)}(r_{l,m}))$  está muito próximo de

$$y^- = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\beta} \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-\beta-1}$$

para  $m$  bastante grande. Assim, os pontos

$$s_{l,m} = T_y(f^{m\pi(q)} \circ T_x \circ f^{l\pi(p)}(r_{l,m}))$$

estão bem definidos e lembrando que

$$T_y(\underbrace{0, \dots, 0}_\beta, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-\beta-1}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha-1}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-\alpha})$$

pela continuidade da transformação afim as coordenadas locais de  $s_{l,m}$  são:

$$s_{l,m} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha-1}, \underbrace{1 + t_{y,\alpha} t_{x,\alpha} \lambda_\alpha^l, 0, \dots, 0}_{\beta-1}, \underbrace{t_{y,\beta} \sigma_{y,\beta}^m, 0, \dots, 0}_{n-\beta})$$

logo está próximo de  $y^+$  e pertence a  $D_y^+ \subset U_p$ . Ainda mais, os intermediários pontos  $f^k(f^{m\pi(q)} \circ T_x \circ f^{l\pi(p)}(r_{l,m})), k \in \{0, \dots, n_y - 1\}$  estão próximos do pontos  $f^k(y^-)$  e não intersectam  $D_y^+$ . Como  $|\sigma_\beta|, |\sigma_\alpha|, |\lambda_\alpha| < 1$ , é fácil vê que quando  $m \rightarrow \infty$  a sequência  $(s_{l,m})$  converge para  $y^+ = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha-1}, 1, 0, \dots, 0)$ .  $\square$

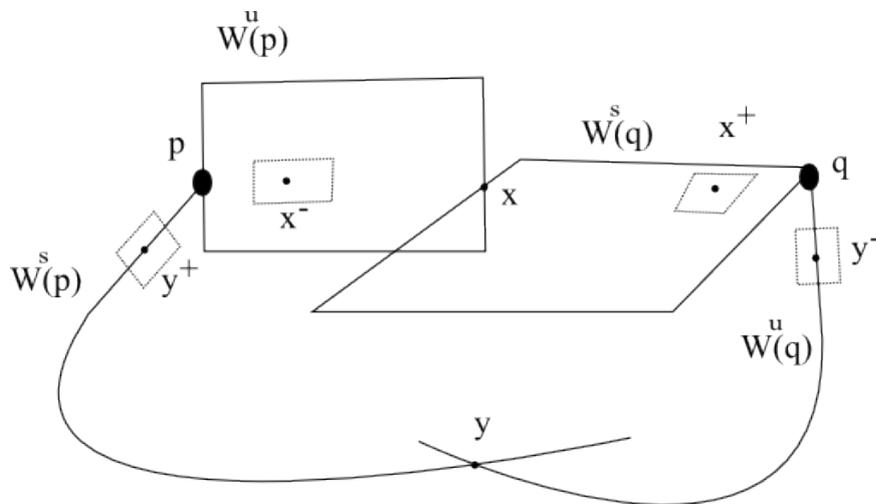


Figure 4.7: Órbita Heteroclínica

**Lema 4.3.2.** *Sejam  $\varphi(p)$  uma carta local definida numa vizinhança  $U_p$  de  $p$  e um vetor  $\theta_{l,m} \in \mathbb{R}^n$  com coordenadas em  $\varphi(p)$  definido por  $r_{l,m} = s_{l,m} + \theta_{l,m}$  e ainda um difeomorfismo local  $\Theta_{l,m}$  definido em  $D_y^+$  cuja expressão em coordenadas locais de  $U_p$  é  $\Theta_{l,m}(z) = z + \theta_{l,m}$  e uma vizinhança  $V_y$  de  $y^+$  relativamente compacta no interior de  $D^+$ . Para qualquer  $C^1$ -vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $f$  e para todo  $l, m$  bastante grande, existe um difeomorfismo  $h_{l,m}$  coincidindo com  $\Theta_{l,m}$  em  $V_y$  e com a identidade fora de  $D_y^+$ , tal que o difeomorfismo  $g_{l,m} = h_{l,m} \circ f$  pertence a  $\mathcal{U}$ .*

*Proof.* De fato para  $l, m$  tendendo ao infinito  $\theta_{l,m}$  vai para  $\bar{0}$  e pelo lema de Frank's temos a prova do lema.  $\square$

O lema anterior assegura a existência de um sequência  $(g_{l,m})$  de  $C^1$ -perturbação local de  $f$ ,  $g_{l,m} \rightarrow f$  quando  $l, m \rightarrow \infty$ , cada uma fechando a órbita do correspondente ponto  $r_{l,m}$  anunciado na proposição abaixo.

**Proposição 4.3.3.** *Para todo  $l, m$  bastante grande, o ponto  $r_{l,m}$  né periódico de  $g_{l,m}$  cujo período é  $\pi_{l,m}$ . Ainda mais, a derivada  $Dg^{\pi_{l,m}}(r_{l,m})$  é*

$$Dg^{\pi_{l,m}}(r_{l,m}) = \mathcal{T}_y \circ (Df^{\pi(q)}(q))^m \circ \mathcal{T}_x \circ (Df^{\pi(p)}(p))^l.$$

Isto é,  $Dg^{\pi_{l,m}}(r_{l,m})$  é aplicação diagonal linear cuja  $k$ -ésima entrada diagonal é

$$t_{y,k} \sigma_k^m t_{x,k} \lambda_k^l.$$

*Proof.* Para  $l$  e  $m$  bastante grande, os pontos  $r_{l,m}$  e  $s_{l,m}$  pertencem a  $V_y$  tal que  $\Theta_{l,m}(s_{l,m}) = r_{l,m} - \theta_{l,m} + \theta_{l,m} = r_{l,m}$ . Como  $r_{l,m}$  e  $s_{l,m} = f^{\pi_{l,m}}(r_{l,m})$  são dois pontos do segmento de órbita  $r_{l,m}, f(r_{l,m}), \dots, f^{\pi_{l,m}}(r_{l,m})$  no suporte  $D_y^+$  da perturbação  $h_{l,m}$ , tem-se que  $h_{l,m} \circ f^{\pi_{l,m}}(r_{l,m}) = h_{l,m}(s_{l,m}) = r_{l,m}$ . Logo o ponto  $r_{l,m}$  é periódico de período  $\pi_{l,m}$  para  $g_{l,m}$ . Observe que a órbita de  $r_{l,m}$  foi construída sobre a estrutura do ciclo heterodimensional afim que por sua vez apresenta um cociclo linear periódico com transição isto nos permite olhar a derivada  $Df^{\pi_{l,m}}(r_{l,m})$  como composição de aplicações lineares em diferentes pontos, isto é,

$$Df^{\pi_{l,m}}(r_{l,m}) = \mathcal{T}_y \circ (Df^{\pi(q)}(q))^m \circ \mathcal{T}_x \circ (Df^{\pi(p)}(p))^l.$$

Em coordenadas de  $V_y \subset U_p$ , a aplicação  $h_{l,m}$  é uma translação, então obtém-se a mesma expressão para a derivada  $Dg^{\pi_{l,m}}(r_{l,m})$ .  $\square$

**Corolário 4.3.4.** *Para qualquer  $\tau \in \{\alpha, \dots, \beta\}$ , existe uma sequência  $(l_k, m_k)$ , onde  $\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k = +\infty$  tal que para todo  $k$ , o ponto  $r_{l_k, m_k}$  é uma sela hiperbólica de  $g_{l_k, m_k}$  tendo índice  $\tau$ .*

*Proof.* Dado  $\tau \in \{\alpha + 1, \dots, \beta\}$  vemos que  $\alpha + 1$  é o menor valor que  $\tau$  pode ser de tal forma que  $\lambda_\tau > 1$  e para todo  $\tau$  em  $\{\alpha + 1, \dots, \beta\}$  tem-se que  $\sigma_\tau < 1$ . Dessa forma  $|\sigma_\tau| < 1 < |\lambda_\tau|$ . Escolhendo-se cuidadosamente  $l$  e  $m$  arbitrariamente grande ( $m$  muito maior do que  $l$ ) tal que o módulo do  $\tau$ -ésimo autovalor de  $r_{l,m}$  que é igual a

$|t_{y,\tau}\sigma_\tau^m t_{x,\tau}\lambda_\tau^l|$ , pertença ao intervalo  $[|\sigma_\tau^2|, |\sigma_\tau|]$ , em particular é menor que um. Por outro lado a razão entre os módulos do  $\tau + 1$ -ésimo e  $\tau$ -ésimo autovalores de  $r_{l,m}$  é

$$\frac{|t_{y,\tau+1}\sigma_{\tau+1}^m t_{x,\tau+1}\lambda_{\tau+1}^l|}{|t_{y,\tau}\sigma_\tau^m t_{x,\tau}\lambda_\tau^l|} = \frac{|t_{y,\tau+1}t_{x,\tau+1}|}{|t_{y,\tau}t_{x,\tau}|} \left(\frac{|\lambda_{\tau+1}|}{|\lambda_\tau|}\right)^l \left(\frac{|\sigma_{\tau+1}|}{|\sigma_\tau|}\right)^m.$$

Uma vez que  $|\lambda_{\tau+1}| > |\lambda_\tau|$  e  $|\sigma_{\tau+1}| > |\sigma_\tau|$ , se  $l$  e  $m$  são bastante grande, a razão entre  $\tau + 1$ -ésimo e  $\tau$ -ésimo autovalores acima são estritamente maior que  $|\sigma_\tau^{-3}|$ . Isto implica que o módulo de  $\tau + 1$ -ésimo autovalor de  $r_{l,m}$

$$\frac{|t_{y,\tau+1}t_{x,\tau+1}|}{|t_{y,\tau}t_{x,\tau}|} \left(\frac{|\lambda_{\tau+1}|}{|\lambda_\tau|}\right)^l \left(\frac{|\sigma_{\tau+1}|}{|\sigma_\tau|}\right)^m > |\sigma_\tau^{-3}|.$$

Implicando em

$$|t_{y,\tau+1}t_{x,\tau+1}||\lambda_{\tau+1}|^l |\sigma_{\tau+1}|^m > |t_{y,\tau}t_{x,\tau}||\lambda_\tau|^l |\sigma_\tau|^m |\sigma_\tau^{-3}|$$

Como  $|t_{y,\tau}\sigma_\tau^m t_{x,\tau}\lambda_\tau^l| \geq |\sigma_\tau^2|$ . Logo

$$|t_{y,\tau+1}t_{x,\tau+1}||\lambda_{\tau+1}|^l |\sigma_{\tau+1}|^m > |\sigma_\tau^{-1}|$$

Por outro lado sabemos  $|\sigma_\tau^{-1}| > 1$  e o corolário está demonstrado. Na hipótese  $\tau = \alpha$  segue-se de forma similar.  $\square$

#### 4.4 Controle das interseções heteroclínicas

Dados  $l$  e  $m$  bastante grande, denote por  $\Delta_{l,m}^s$  o  $\alpha$ -dimensional disco contido em  $U_p$  definido na correspondente coordenada local por

$$\Delta_{l,m}^s = [-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]^\alpha \times (\lambda_{\alpha+1}^{-l}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\beta-\alpha-1}, \lambda_{\beta+1}^{-l} t_{\beta+1}^{-1} \sigma_{\beta+1}^{-m}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\beta-1}).$$

Similarmente, considere o  $(n - \beta)$ -dimensional cubo  $\Delta_{l,m}^u$  definido em coordenadas locais de  $U_q$  por

$$\Delta_{l,m}^u = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha-1}, t_{x,\alpha} \lambda_\alpha^l \sigma_\alpha^m, \underbrace{0, \dots, 0}_{\beta-\alpha-1}, \sigma_\beta^m) \times [-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]^{n-\beta}.$$

Observe que  $r_{l,m} \in \Delta_{l,m}^s$  e  $f^{m\pi(q)} \circ T_x \circ f^{l\pi(q)}(r_{l,m}) = T_y^{-1}(r_{l,m}) \in \Delta_{l,m}^u$ .

**Lema 4.4.1.** Para todo  $l, m$  bastante grande,

- $\Delta_{l,m}^s \subset W^s(r_{l,m}, g_{l,m})$ ;

$$\bullet \Delta_{l,m}^u \subset W^u(T_y^{-1}(r_{l,m}))$$

*Proof.* Observe que o  $\alpha$ -dimensional disco  $\Delta_{l,m}^s$  está contido em  $U_p$  e como  $D_y^+ \subset U_p$  então para todo  $k$  não múltiplo de  $\pi(p)$  tem-se  $f^k(\Delta_{l,m}^s) \cap D_y^+ = \emptyset$ , quando  $k$  é um múltiplo de  $\pi(p)$  a imagem é um disco contido no cubo  $f^{\pi(p)}([-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]^n) \subset U_p$  por outro lado sabemos que  $g_{l,m} = h_{l,m} \circ f$  e que  $h_{l,m}$  coincide com a identidade fora de  $D_y^+$  por isso  $g_{l,m}^{l\pi(p)}$  coincide com  $f^{l\pi(p)}$  em  $\Delta_{l,m}^s$  e  $g_{l,m}^{l\pi(p)}(\Delta_{l,m}^s)$  é um  $\alpha$ -dimensional disco contido em  $U_x^-$  onde  $f^{l\pi(p)}(r_{l,m}) = g_{l,m}^{l\pi(p)}(r_{l,m}) \in g_{l,m}^{l\pi(p)}(\Delta_{l,m}^s)$  de lado menor que  $|(\lambda_\alpha)^l(1 + \varepsilon)|$  uma vez que  $\lambda_\alpha$  é o maior dos autovalores de  $p$  menores 1. Por (A4) em um ciclo heterodimensional afim,  $T_x$  está definido em  $U_x^-$  e como o diâmetro do disco  $g_{l,m}^{l\pi(p)}(\Delta_{l,m}^s)$  tende a zero quando  $l$  vai para  $\infty$ , tem-se que o disco está contido em  $U_x^-$  e  $T_x \circ g_{l,m}^{l\pi(p)}(\Delta_{l,m}^s) = g_{l,m}^{l\pi(p)+n_x}(\Delta_{l,m}^s)$  é um arbitrário pequeno disco contendo o ponto  $T_x \circ g_{l,m}^{l\pi(p)}(r_{l,m}) \in U_x^+$ . De um modo similar  $g_{l,m}^{m\pi(q)} \circ T_x \circ g_{l,m}^{l\pi(p)}(\Delta_{l,m}^s)$  é um disco muito pequeno em  $U_y^-$  que contém  $g_{l,m}^{m\pi(q)} \circ T_x \circ g_{l,m}^{l\pi(p)}(r_{l,m})$ . De sorte que  $T^{-1}(V_y)$  é uma pequena vizinhança de  $y^-$  e para  $l, m$  bastante grande  $g_{l,m}^{m\pi(q)} \circ T_x \circ g_{l,m}^{l\pi(p)}(\Delta_{l,m}^s)$  está contido nesta pequena vizinhança  $T^{-1}(V_y)$  de  $y^-$ . Como consequência,  $g_{l,m}^{n_y}$  coincide com  $\Theta_{l,m} \circ T_y$  em  $g_{l,m}^{m\pi(q)} \circ T_x \circ g_{l,m}^{l\pi(p)}(\Delta_{l,m}^s)$ . O prévio argumento mostra  $g_{l,m}^{\pi_{l,m}}(\Delta_{l,m}^s)$  é o  $\alpha$ -dimensional disco contendo  $r_{l,m} = g_{l,m}^{\pi_{l,m}}(r_{l,m})$  e cujo diâmetro tende a zero quando  $l, m$  tende a  $+\infty$ . Assim para  $l, m$  bastante grande, a aplicação  $g_{l,m}^{\pi_{l,m}}$  aplica  $\Delta_{l,m}^s$  em si mesmo e é uma contração linear no disco, tendo  $r_{l,m}$  como ponto fixo. De maneira análoga seja  $(n - \beta)$ -dimensional disco  $\Delta_{l,m}^u$  está contido em  $U_q$ . Vê-se que  $g_{l,m}^{-m\pi(q)}$  coincide com  $f^{-m\pi(q)}$  em  $\Delta_{l,m}^u$  e que o  $g_{l,m}^{-m\pi(q)}(\Delta_{l,m}^u)$  é um  $(n - \beta)$ -dimensional disco contido em  $U_x^+$  de lado menor que  $|(\sigma_{n-\beta})^{-m}(1 + \varepsilon)|$  contendo  $g_{l,m}^{-m\pi(q)} \circ f^{m\pi(q)} \circ T_x \circ f^{l\pi(q)}(r_{l,m}) = T_x \circ f^{l\pi(q)}(r_{l,m})$ . Como o diâmetro do disco tende a zero quando  $m$  vai para  $+\infty$ , tem-se que  $T_x \circ f^{l\pi(q)}(r_{l,m}) \subset U_x^+$ , tal que  $(T_x)^{-1}$  está definido em  $g_{l,m}^{-m\pi(q)}(\Delta_{l,m}^u)$  e  $(T_x)^{-1} \circ g_{l,m}^{-m\pi(q)}(\Delta_{l,m}^u) = g_{l,m}^{-m\pi(q)-n_x}(\Delta_{l,m}^u)$  é um arbitrário pequeno disco contendo o ponto  $f^{l\pi(p)}(r_{l,m})$  em  $U_x^-$ . Analogamente verifica-se que  $g_{l,m}^{-l\pi(p)} \circ (T_x)^{-1} \circ g_{l,m}^{-m\pi(q)}(\Delta_{l,m}^u)$  é um disco muito pequeno que contém  $r_{l,m}$ . Assim para  $l, m$  bastante grande  $g_{l,m}^{-l\pi(p)} \circ (T_x)^{-1} \circ g_{l,m}^{-m\pi(q)}(\Delta_{l,m}^u)$  está contida numa pequena vizinhança de  $y^+$ . Logo  $(T_y)^{-1} \circ g_{l,m}^{-l\pi(p)} \circ (T_x)^{-1} \circ g_{l,m}^{-m\pi(q)}(\Delta_{l,m}^u)$  é um  $(n - \beta)$ -dimensional disco contendo  $T_y^{-1}(r_{l,m})$  e cujo diâmetro tende a zero quando  $l, m$  tende a infinito. Como  $g_{l,m}^{\pi_{l,m}} = T_y \circ f^{\pi(q)} \circ T_x \circ f^{\pi(p)}$  então  $f^{\pi(q)} \circ T_x \circ f^{\pi(p)}(r_{l,m})$  é um ponto fixo para  $T_y^{-1}(r_{l,m})$ . Isso então conclui o lema.  $\square$

**Proposição 4.4.2.** *Para  $l$  e  $m$  bastante grande, o difeomorfismo  $g_{l,m}$  satisfaz*

$$p <_{us} r_{l,m} <_{us} q$$

*Proof.* De fato, quando  $l, m \rightarrow +\infty$  na topologia  $C^1$  o disco  $\Delta_{l,m}^s$  converge para o disco

$$\Delta_p^s = [-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]^\alpha \times \{0\}^{n-\alpha}$$

onde é uma variedade estável local de  $p$ . No contexto de classe homoclínica não trivial a variedade estável de  $p$  intersecta transversalmente a variedade instável de  $p$  isso nos sugere que para  $l, m$  bastante grande  $\Delta_{l,m}^s$  intersecta transversalmente a variedade instável de  $p$ . Pelo lema 4.4.1 visto anteriormente a variedade instável de  $p$  intersecta transversalmente a transversal de  $r_{l,m}$ , assim  $p <_{us} r_{l,m}$ . Do mesmo modo, temos que a variedade instável de  $q$  intersecta transversalmente a variedade estável de  $q$  e como disco  $\Delta_{l,m}^u$  converge para variedade instável local de  $q$  quando  $l, m$  vão para o infinito e o ponto  $f^{\pi(q)} \circ T_x \circ f^{\pi(p)}(r_{l,m}) = T_y^{-1}(r_{l,m})$  pertence ao disco  $\Delta_{l,m}^u$  então a variedade estável de  $q$  intersecta transversalmente  $\Delta_{l,m}^u$ . Dessa forma  $r_{l,m} <_{us} q$  e a prova da proposição está completa.  $\square$

**Teorema 4.4.3.** *Seja  $f$  um difeomorfismo tendo um ciclo heterodimensional associado as selas periódicas  $p_f$  e  $q_f$ , de índice  $\alpha$  e  $\beta$  com  $\alpha < \beta - 1$ , com autovalores reais. Então, para qualquer  $C^1$ -vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $f$  a para qualquer inteiro  $\tau$  com  $\alpha \leq \tau \leq \beta$ , existe  $g \in \mathcal{U}$  tendo um ponto periódico  $r_g$  de índice  $\tau$  tal que  $p_g <_{us} r_g <_{us} q_g$ .*

*Proof.* Com adicional hipótese  $H(p_f, f) = H(q_f, f)$  se temos um ciclo heterodimensional associado as selas periódicas  $p_f$  e  $q_f$  de índices distintos pelo lema 4.2.1 existe uma  $g \in \mathcal{U}$  para qualquer  $C^1$ -vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $f$  com um ciclo heterodimensional afim associado a continuação das selas para  $g$ . Pelo corolário 4.3.4 para qualquer  $\tau$  com índice intermediário entre  $\alpha$  e  $\beta$  existe uma sela  $r_g$  de  $g$  com índice  $\tau$  e finalmente pela proposição 4.4.2  $p_g <_{us} r_g <_{us} q_g$  encerrando a prova do teorema.  $\square$

#### 4.5 Ciclos heterodimensionais e pontos periódicos. Prova do teorema principal

**Lema 4.5.1.** *Seja  $f \in \mathcal{U}$  um subconjunto aberto de  $\mathcal{G}_3$  (o residual subconjunto de  $\text{Diff}^1(M)$  no lema 3.4.2) tal que para todo  $f \in \mathcal{U}$  existem selas  $p_f$  e  $q_f$  de índice  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$ , dependendo continuamente de  $f$  tal que  $H(p_f, f) = H(q_f, f)$ . Então para todo  $\tau \in (\alpha, \beta) \cap \mathbb{N}$  existe um aberto e denso subconjunto  $\mathcal{V}_\tau$  tem um sela  $r_g$  de índice  $\tau$  com  $H(p_g, g) = H(q_g, g) = H(r_g, g)$ .*

*Proof.* Seja  $f \in \mathcal{U}$  suponha  $p_f$  e  $q_f$  sejam selas perfeitas, caso contrário pela proposição 3.3.3 podemos trocar as iniciais sela por selas perfeitas homoclinicamente relacionadas a elas, isto é  $p_f \in \text{Per}_{\mathbb{R}}(H(p_f, f))$  e  $q_f \in \text{Per}_{\mathbb{R}}(H(q_f, f))$ . Pelo lema 3.4.3 sabemos que para todo  $f$  em nosso residual  $\mathcal{G}_3$   $W^u(p_f, f)$  e  $W^s(q_f, f)$  tem alguma interseção transversal não-vazia. Esta propriedade persiste para toda  $g$  próxima de  $f$  e é possível também obter uma  $h$  próxima de  $f$  onde  $W^u(p_h, h)$  e  $W^s(q_h, h)$  tem uma interseção não exatamente transversa que é frágil por perturbações. Isto nos dá um ciclo heterodimensional associado a selas  $p_h$  e  $q_h$ . Fixado  $\tau \in (\alpha, \beta) \cap \mathbb{N}$  o teorema 4.4.3 garante existir alguma  $g$  próxima de  $h$  que por sua vez é próxima de  $f$  tendo sela  $r_g$  de índice  $\tau$  onde  $p_g <_{us} r_g <_{us} q_g$ . Como esta propriedade é persistente por  $C^1$ -perturbações isto nos dá um aberto e denso subconjunto  $\mathcal{V}_\tau$  de  $\mathcal{U}$  tal que para todo  $g \in \mathcal{V}_\tau$  tem selas  $r_g$  de índice  $\tau$  tal que  $p_g <_{us} r_g <_{us} q_g$ . Nosso objetivo agora é mostrar que para todo  $g \in \mathcal{V}_\tau$  e todo  $\varepsilon > 0$  existe uma  $\varepsilon$ -pseudo órbita periódica contendo  $p_g, q_g$  e  $r_g$ . Isto nos será útil pelo fato de que em nossas boas propriedades genérica uma classe homoclínica é igual a uma classe de cadeia recorrentes e se  $p_g, q_g$  e  $r_g$  estão na mesma classe de cadeia recorrente  $\Lambda$  de  $g$

$$\Lambda = H(p_g, g) = H(q_g, g) = H(r_g, g)$$

Assim as três classes homoclínicas coincidem. Com esta explicação em mãos agora iremos mostrar a existência desta  $\varepsilon$ -pseudo órbita periódica. De fato fixado qualquer  $\varepsilon > 0$  existe um finito segmento  $S_{q,p}$  de  $\varepsilon$ -pseudo órbita indo de  $q_g$  a  $p_g$ , isto se deve ao fato de que uma classe homoclínica é transitiva então ela é  $\omega$ -limite de algum ponto  $z$  em  $H(p_g, g) = H(q_g, g)$ . De outro modo temos a interseção não-vazia de  $W^u(p_g, g)$  e  $W^s(r_g, g)$  e pelo lema de conexão de Hayashi existe uma órbita indo de  $p_g$  a  $r_g$ . Assim existe um finito segmento  $S_{p,r}$  de  $\varepsilon$ -pseudo órbita indo de  $p_g$  a  $r_g$ . De maneira análoga por  $W^u(r_g, g)$  e  $W^s(q_g, g)$  existe um finito segmento  $S_{r,q}$  de  $\varepsilon$ -pseudo órbita indo de  $r_g$  a  $q_g$ . Ligando os segmentos de  $\varepsilon$ -pseudo órbitas  $S_{q,p}, S_{p,r}$  e  $S_{r,q}$  temos a  $\varepsilon$ -pseudo órbita periódica anunciada.  $\square$

**Proposição 4.5.2.** *Existe um residual subconjunto  $\mathcal{G}_4$  de  $\text{Diff}^1(M)$  com a seguinte propriedade: para todo  $f \in \mathcal{G}_4$  e todo par de sela  $p_f$  e  $q_f$  tendo índice  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$ , dependendo continuamente em  $f$  tal que  $H(p_f, f) = H(q_f, f)$ , dado qualquer  $\tau \in (\alpha, \beta) \cap \mathbb{N}$  existe uma sela periódica hiperbólica  $r_f$  de índice  $\tau$  tal que*

$$H(p_f, f) = H(q_f, f) = H(r_f, f).$$

*Proof.* Fixado  $N$  em  $\mathbb{N}$  sejam  $p_f^{N_i}$  uma sela período  $N_i$  nas mesmas condições de  $p_f$  e  $q_f^{N_j}$  uma sela período  $N_j$  nas mesmas condições de  $q_f$  com  $N_i \leq N_j \leq N$  do lema anterior. Para alguma vizinhança  $\mathcal{U}_f$  de  $f$  o subconjunto  $\mathcal{H}_N(f)$  dos difeomorfismos que satisfazem as hipóteses do lema para as selas  $p_f^{N_i}$  e  $q_f^{N_j}$  é aberto e denso em  $\mathcal{U}_f$ . Seja  $\mathcal{H}_N$  a reunião dos  $\mathcal{H}_N(f)$  para todo  $f$  em  $\mathcal{G}_3$  logo  $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_N$  é denso.  $\square$

## REFERÊNCIAS

- [1] F. Abdenur, C. Bonatti, S. Crovisier, L. J. Díaz, and L. Wen. Periodic points and homoclinic classes. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 27(1):1–22, 2007.
- [2] C. Bonatti and S. Crovisier. Récurrence et genericité. *Invent. Math.*, 158(1):33–104, 2004.
- [3] C. Bonatti, L. J. Díaz, and E. R. Pujals. A  $C^1$ -generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources. *Ann. of Math. (2)*, 158(2):355–418, 2003.
- [4] C. Bonatti, L. J. Díaz, E. R. Pujals, and J. Rocha. Robustly transitive sets and heterodimensional cycles. *Astérisque*, (286):xix, 187–222, 2003. Geometric methods in dynamics. I.
- [5] C. Bonatti, L. J. Díaz, and M. Viana. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, volume 102 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. A global geometric and probabilistic perspective, Mathematical Physics, III.
- [6] C. M. Carballo, C. A. Morales, and M. J. Pacifico. Homoclinic classes for generic  $C^1$  vector fields. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(2):403–415, 2003.
- [7] C. Conley. *Isolated invariant sets and the Morse index*, volume 38 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.
- [8] S. Crovisier. Periodic orbits and chain-transitive sets of  $C^1$ -diffeomorphisms. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (104):87–141, 2006.
- [9] L. J. Díaz. Persistence of cycles and nonhyperbolic dynamics at heteroclinic bifurcations. *Nonlinearity*, 8(5):693–713, 1995.
- [10] L. J. Díaz. Robust nonhyperbolic dynamics and heterodimensional cycles. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 15(2):291–315, 1995.
- [11] J. Franks. Necessary conditions for stability of diffeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 158:301–308, 1971.
- [12] S. Hayashi. Connecting invariant manifolds and the solution of the  $C^1$  stability and  $\Omega$ -stability conjectures for flows. *Ann. of Math. (2)*, 145(1):81–137, 1997.
- [13] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

- [14] S. E. Newhouse. Hyperbolic limit sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 167:125–150, 1972.
- [15] S. E. Newhouse. Lectures on dynamical systems. In *Dynamical systems (Bressanone, 1978)*, pages 209–312. Liguori, Naples, 1980.
- [16] C. Robinson. *Dynamical systems*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 1999. Stability, symbolic dynamics, and chaos.
- [17] M. Shub. *Global stability of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 1987. With the collaboration of Albert Fathi and Rémi Langevin, Translated from the French by Joseph Christy.
- [18] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.