PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Ronaldo José Sousa Ferreira

Fluxos Hamiltonianos e Campos Globais.

São Luís - MA

2013

Ronaldo José Sousa Ferreira

Fluxos Hamiltonianos e Campos Globais.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Fabiano Borges da Silva**.

São Luís - MA

2013

Ronaldo José Sousa Ferreira

Fluxos Hamiltonianos e Campos Globais.

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Fabiano Borges da Silva**.

Dissertação aprovada em 1 de fevereiro de 2013, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(ORIENTADOR) Dr. Fabiano Borges da Silva (UFMA)

Dr. Maxwell Mariano de Barros (UFMA)

Dr. Lino Anderson da Silva Grama (UNICAMP)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais Julio Raimundo Ferreira e Isabel Sousa Ferreira, aos meus irmãos, familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Incialmente agradeço aos meus pais Júlio Raimundo Ferreira e Isabel Sousa Ferreira por todo apoio, compreensão e encorajamento. Aos meus irmãos Álvino, Antônio de Jesus, Jose Ronaldo (Gêmeos comigo), Josenildes, Josete e Rosalina pelo incentivo e por estarem sempre do meu lado nos momentos difíceis.

Ao professor Fabiano Borges da Silva pela amizade, orientação e principalmente, por toda paciência e disposição que teve, a qual foi essencial para a realização deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática-PPGMat e do Departamento de Matemática da UFMA pelo apoio, incentivo e pela contribuição na minha formação acadêmica de forma direta ou indireta.

Aos meus amigos da graduação Antônio Evaldo, Guedes e Mariano pela amizade pelo incentivo que sempre me deram. Aos meus amigos da pós-graduação Ermerson, Jadevilson, Jailson Calado, Leonardo, Marcos Azevedo, Marlon, Paulo, Santana por terem contribuído de alguma forma para meu crescimento profissional e pessoal, pelo incentivo, encorajamento, companheirismo e amizade que me proporcionaram durante esses dois anos.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Numa primeira parte deste trabalho estamos interessados com a dinâmica dos fluxos hamiltonianos em variedades simpléticas, mais precisamente, em caracterizar as integrais primeiras do sistema via colchete de Poisson. Numa segunta etapa, apresentamos um teorema mais geométrico, que garante que campos hamiltonianos locais são globais, se, e somente se, o primeiro grupo de Cohomologia de De Rham da variedade simplética é zero.

Palavras-chave: Variedade Simplética, Fluxos Hamiltonianos, Campos de vetores simpléticos, Campos de vetores hamiltonianos, Cohomologia de De Rham.

ABSTRACT

In the first part of this work we are interested with the dynamic of hamiltonian flows on symplectic manifolds, more precisely, to characterize the conserved quantity of the system by Poisson brackets. In the second part, we presented a geometric theorem, which says that Hamiltonian vector fields are global if, and only if, the first de Rham cohomology group of symplectic manifold is trivial.

Keywords: Symplectic Manifolds, Hamiltonian Flows, Symplectic vector fields, hamiltonian vector fields and De Rham cohomology. .

SUMÁRIO

Page

Introdução 9

Capítulo 1: Noções Preliminares 12
1.1 Formas Diferenciáveis 14
1.2 Derivada exterior e produto interior. 17
1.3 Grupo de Cohomologia de De Rham 22

Capítulo 2: Variedade Simplética 26
2.1 Espaços Vetoriais Simpléticos 26
2.1.1 Subespaço 27
2.1.2 Bases Simpléticas 28
2.2 Variedade Simplética. 31
2.3 Teorema de Darboux 33
2.4 Obstruções 34

Capítulo 3: Fluxos Hamiltonianos. 36
3.1 Integrais primeiras e Colchete de Poisson. 37
3.2 Campos Simpléticos e Hamiltonianos Globais. 41
3.3 Primeiro grupo de cohomologia de De Rham e campos hamiltonianos globais. 42

Referências 46

INTRODUÇÃO

Os sistemas hamiltonianos são estudados na mecânica clássica, mais especificamente na mecânica hamiltoniana, a qual foi elaborada pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton em 1833. Os sistemas hamiltonianos são um caso especial de sistemas dinâmicos, onde suas equações diferenciais podem ser escritas na forma de equações de Hamilton. Com o desenvolvimento da teoria de variedades diferenciáveis, principalmente no que diz respeito as variedades simpléticas, temos uma generalização de tais equações em variedades simpléticas, ou seja, uma "geometrização" para os campos hamiltonianos. Esta geometrização será abordada neste trabalho no último capítulo.

Boa parte dos fenomenos importantes na natureza são modelados por sistemas dinâmicos que deixam invariante alguma medida interessante. Fluxos gerados por sistemas hamiltonianos preservam, ao longo do tempo, volume, ou seja, a medida de Liouville. Mas, apesar de preservar uma medida, nem todos sistemas hamiltonianos são ergódicos. A ergodicidade de sistemas hamiltonianos não foi explorado ao longo deste trabalho, mas poderia ser um conteúdo sequêncial desta dissertação, uma vez que tais sistemas foram importantes na história do desenvolvimento da Teoria Ergódica. Um estudo mais aprofundado com relação a geometria simplética, também pode ser uma motivação para um estudo futuro. Apesar do surgimento da geometria simplética ter raízes históricas na formulação geométrica da mecânica clássica, a geometria simplética é hoje uma área de pesquisa independente da mecânica clássica e tem diversas aplicações.

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo de dois aspectos gerais para sistemas hamiltonianos. Numa primeira parte estamos interessados com a dinâmica dos fluxos hamiltonianos em variedades simpléticas, mais precisamente, em caractarizar as integrais primeiras via colchete de Poisson, ou seja, a partir de uma estrutura algébrica, no espaço vetorial das funções diferenciáveis, herdada da variedade simplética. Numa segunta etapa, apresentamos um teorema mais geométrico, que garante que campos hamiltonianos locais ou simpléticos são globais se, e somente se, o primeiro grupo de

Cohomologia de De Rham da variedade simplética é zero. Mais precisamente, as duas partes deste trabalho são direcionadas aos Teoremas 3.1.5 e 3.3.1.

No capítulo 1 apresentamos alguns noções preliminares que darão suporte aos capítulos posteriores. A Fórmula de Cartan que relaciona a derivada de Lie, derivada exterior e o produto interior (i_X) com relação a uma forma diferencial ω e um campo X, i.e.,

$$\mathcal{L}_X\omega = d\imath_X\omega + \imath_X d\omega,$$

será uma das ferramentas centrais no decorrer das demonstrações dos teoremas principais. Ainda estaremos apresentando alguns resultados e propriedades das formas diferenciais fechadas e exatas, como por exemplo o Lema de Poincaré que diz que toda forma fechada é exata localmente. Por fim, definimos o primeiro grupo de Cohomologia de De Rham $H^1_{dR}(M)$ e apresentamos alguns resultados que serão úteis na demonstração de resultados do capítulo 3.

No capítulo 2, damos uma introdução a variedade simplética. Dizemos que uma variedade M é simplética quando admite uma 2-forma fechada e não-degenerada ω, ou seja, uma condição analítica e algébrica, respectivamente para a 2-forma. Neste capítulo destacamos ainda o Teorema de Darboux que garante que toda variedade simplética é localmente simplectomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^{2n}$ munida da forma simplética canônica. Da Fórmula de Cartan e mais o fato que ω é fechada, segue que $\mathcal{L}_X\omega = d\imath_X\omega$ para campo de vetor X na variedade simplética. E dizemos que um campo é simplético se $\mathcal{L}_X\omega = 0$, ou seja, se $i_X\omega$ é fechada. E analogamente, um campo X é hamiltoniano global, se $i_X\omega$ é uma forma exata, ou seja, existe $h : M \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $i_X\omega = dh$, e neste caso denotamos o campo por X_h.

Como todo forma exata é fechada, temos que todo campo hamiltoniano global é simplético. No capítulo 3, mostraremos que todo campo localmente hamiltoniano, isto é, o campo é hamiltoniano apenas numa vizinhança de um ponto da variedade, é simplético. E também mostraremos que campos hamiltonianos locais, são hamiltonianos globais se, e somente se, $H^1_{dR}(M) = \{0\}$. Neste último capítulo, ainda estaremos interessados na dinâmica dos fluxos hamiltonianos, i.e., nas integrais primeiras para a equação diferencial $x' = X_h(x)$. Veremos que a propria função h, chamada de função hamiltoniana, é uma integral primeira para o sistema. Por fim, apresentaremos um resultado que garante que uma função f é integral primeira para o sistema se, e somente

se, $\{h, f\} = 0$, onde $\{,\}$ denota o colchete de Poisson herdado da estrutura simplética da variedade.

Nos trabalhos mais recentes a nível de pesquisa em fluxos hamiltonianos, destacamos a Conjectura de Arnold sobre a existência de pontos fixos para simpleticomorfismos em variedades compactas. Daremos aqui uma breve ideia sobre esta conjectura.

Seja (M, ω) uma variedade simplética compacta. Considere uma família de funções suaves $h_t : M \to \mathbb{R}$ tal que $h_t = h_{t+1}$, isto é, h_t é 1-periódica. Associada a cada função h_t temos um campo hamiltoniano v_t que satisfaz a equação

$$\omega(v_t, \cdot) = dh_t.$$

Considere agora a família a 1-parâmetro de difeomorfismos $\rho : M \times \mathbb{R} \to M$, gerada pela família de campos hamiltonianos v_t, isto é,

$$\frac{d\rho_t}{dt} = v_t \circ \rho_t, \quad \rho_0 = id.$$

Para o tempo $t = 1$ consideremos o difeomorfismo $\varphi = \rho_1 : M \to M$. Quando todos os ponto fixos são não-degenerados chamamos φ de não-degenerada. A conjectura diz então que para φ não-degenerada temos

$$\#\{\text{pontos fixos de } \varphi\} \geq \sum_{i=0}^{2n} \dim H^i_{dR}(M)$$

O leitor interessado nesta conjectura e trabalhos de pesquisa relaconados pode ver detalhes, por exemplo, em Arnold [1], Ana Cannas [3] e Bursztyn e Macarini [2].

Capítulo 1
NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo introduziremos os conceitos e notações pertinentes para o entendimento deste trabalho. Ao longo do texto estaremos sempre supondo que nossa variedade é diferenciável e sem bordo. O leitor não familiarizado com variedades, pode procurar, por exemplo, conceitos e propriedades de tal assunto nas referências [5, 7, 8, 10, 11, 12]

Sendo N e M variedades de dimensão n e m, respectivamente, dizemos que a aplicação $F : N \to M$ é *diferenciável em um ponto* $p \in N$, se existem cartas (V, ψ) sobre $F(p) \in M$ e (U, ϕ) sobre $p \in N$ tais que a aplicação composição $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$, definida do subconjunto aberto $\phi(F^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$, é diferenciável em $\phi(p)$ (veja a figura 1.1). A aplicação $F : N \to M$ é diferenciável, se F é diferenciável em cada ponto de N.

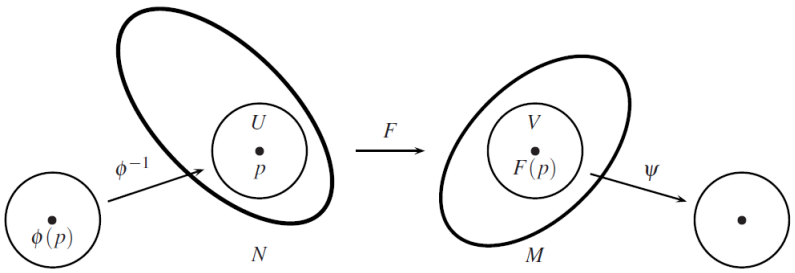

Figura 1.1: Aplicação diferenciável em um ponto

Para qualquer variedade diferenciável M, definimos o *fibrado tangente* de M, denotando por TM, a união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos de M:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Os elementos de TM são escritos como pares ordenados (p, X), onde $p \in M$ e $X \in T_pM$. O fibrado tangente possui uma aplicação projeção natural $\pi : TM \to M$, que cada vetor em T_pM associa o ponto p em que é tangente: $\pi(p, M) = p$.

Seja M uma variedade diferenciável, um *campo vetorial* em M é uma seção da aplicação $\pi : TM \to M$. Mais pricisamente, um campo vetorial é uma aplicação diferenciável $X : M \to TM$, definida por $p \mapsto X_p$, com a seguinte propriedade

$$\pi \circ X = Id_M,$$

ou equivalentemente, $X_p \in T_pM$ para cada $p \in M$.

Se $X : M \to TM$ é um campo vetorial e $(U, (x_i))$ é uma carta coordenada de M, podemos escrever o valor de X em qualquer ponto $p \in U$ como combinação linear dos vetores da base $\{\partial/\partial x_i|_p\}$ do espaço tangente T_pM, isto é,

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p .$$

onde os coeficienter X_i são funções em U, chamadas *funções componentes* de X na carta associada.

Dessa forma dados $X : M \to TM$ um campo vetorial e $(U, (x_i))$ uma carta coordenada qualquer em M, então X é diferenciável em U se, e somente se, as funções componentes com respeito a carta são diferenciáveis

O conjunto de todos campos vetoriais na variedade M, denotado por $\mathfrak{X}(M)$, é um espaço vetorial (ou melhor um *módulo*) sobre a adição e a muiltiplicação por escalar $(aX + bY)_p = aX_p + bY_p$. Também podemos multiplicar um campo por uma função, ou seja, se $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos um novo campo $fX : M \to TM$ por

$$(fX)_p = f(p)X_p.$$

Se X é um campo vetorial diferenciável em M e f uma função diferenciável, definimos a fanção Xf em M por

$$Xf(p) = X_pf,$$

para todo $p \in M$. Assim, um campo vetorial X na variedade M induz uma aplicação linear $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ na álgebra $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M, tal que para cada $f \in C^\infty(M)$ temos $Xf \in C^\infty(M)$.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e f e g são funções diferenciáveis em M, então $X(fg)$ satisfaz a regra do produto

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

O espaço $\mathfrak{X}(M)$ é uma álgebra de Lie com o colchete dado por

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X.$$

Em coordenadas local, se $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ então

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Se M, N são variedades diferenciáveis e $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Para cada ponto $p \in M$ definimos o *Pushforward* da F, como sendo a aplicação $F_* T_p M \to T_{F(p)} N$ dada por

$$(F_* X)(f) = X(f \circ F).$$

Para cada função $f : N \to \mathbb{R}$ diferenciável. Se $f \in C^\infty(N)$, então $f \circ F \in C^\infty(M)$ portanto $X(f \circ F)$ esta bem definido.

Podemos observar que a aplicação $F_* X$ é uma derivação em $F(p) \in N$. A prova desta condição pode ser encontrado em Lee [7].

1.1 Formas Diferenciáveis

Sejam M uma variedade diferenciável n-dimensional e $T^k M$ o conjunto dos k-tensores definidos na variedade. O subconjunto de $T^k M$ que consiste dos k-tensores alternados é denotado por $\Lambda^k M$:

$$\Lambda^k M = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p M), \quad \text{para k=1 temos } \Lambda^1 M = T^* M.$$

Uma seção de $\Lambda^k M$ é chamada uma *k-forma diferenciável*, ou simplesmente uma *k-forma*; isto é, uma *k-forma* é um campo tensorial ω que associa cada ponto p da varidade M um k-tensor alternado $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p M)$. O número inteiro k é chamado de grau da forma. Denotaremos o espaço das k-formas por $\Omega^k(M)$. Observe que se $k > n$ então a k-forma $\omega(p) = 0$ para todo $p \in M$. Assim, $\Omega^k(M) = \{0\}$ para $k > n$.

Dada uma carta suave qualquer, uma k-forma ω pode ser escrita localmente como

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_I \omega_I dx_I,$$

onde os coeficientes ω_I são funções diferenciável definidas na carta associada, $I = \{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n\}$ são os multi-indices de comprimento k e $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ é a base dual

para cada espaço tangente T_pM. Assim, temos que formas diferenciais como se segue:

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) = \delta^I_J.$$

Portanto, as funções ω_I de ω são determinadas por

$$\omega_I = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right).$$

Por definnição uma 0-forma é apenas uma função definida na variedade. O produto exterior de duas formas diferenciáveis é definido em cada ponto por $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$. Assim, o produto exterior de uma k-forma ω por uma l-forma η é uma (k+l)-forma. Se f é uma 0-forma e η é uma k-forma, o produto exterior $f \wedge \eta$ é dado pelo produto ordinário $f\eta$.

Uma *forma de volume* em uma variedade n-dimensional M é uma forma diferencial ω de grau n sobre M tal que $\omega(p) \neq 0, \ \forall p \in M$.

Se $F : M \to N$ é uma aplicação e ω é uma forma diferenciável em N, o pullback $F^*\omega$ é uma forma diferenciável em M, definida por

$$(F^*\omega)_p(X_1, \ldots, X_k) = \omega_{(F(p))}(F_*X_1, \ldots, F_*X_k),$$

para cada $p \in M$ e cada $X_i \in T_pM$.

Proposição 1.1.1. *Seja $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Então*

(a) *$F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ é linear.*

(b) *$F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$, para todo $\omega, \ \eta \in \Omega^k(N)$.*
Em particular, se $f \in C^\infty(N)$ e $\omega \in \Omega^k(N)$, então

$$F^*(f\,\omega) = (f \circ F)F^*\omega$$

(c) *Em qualquer carta coordenada*

$$F^* \left(\sum_I \omega_I dy_I \right) = \sum_I (\omega_I \circ F) d(y_{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y_{i_k} \circ F).$$

Um caso interessante de pullback é quando a aplicação F citada na proposição acima é uma curva diferenciável $\varphi : [a,b] \to M$. Escrevendo em coordenadas $\varphi(t) = (\varphi^1(t), ..., \varphi^n(t))$ e a forma diferencial $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$, onde ω_i é uma função para cada $i = 1, ..., n$, temos que

$$\begin{aligned}(\varphi^*\omega)_t &= \sum_{i=1}^{n}(\omega_i \circ \varphi)(t)d(\varphi^i)_t \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\omega_i(\varphi(t))(\varphi^i)'(t)dt. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Exemplo 1.1.2 (1-Forma "elemento de ângulo")**.** Consideremos a 1-forma α sobre $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ dada por

$$\alpha(x,y) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Seja $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ uma aplicação diferenciável definida por

$$\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Dessa forma, por (1.1) segue que

$$\begin{aligned}(\varphi^*\alpha)(t) &= (-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t)dt + (\cos t)(\cos t)dt \\ &= 1dt. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Justificativas para chamar esta 1-forma de "elemento de ângulo", é que dado $p \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, que existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ de p, que não contem um círculo com centro na rigem, tal que $\theta : V \to \mathbb{R}$ é uma função angulo (ver Elon [8] p.191) tal que $d\theta = \alpha$. Mas, notemos que a função θ não está definida em todo o $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.

Proposição 1.1.3. *Seja $F : M \to N$ uma aplicação entre variedades n-dimensional. Se (x_i) e (y_j) são cartas coordenadas nos abertos $U \subset M$ e $V \subset N$, respectivamente, e f uma função diferenciável em V. Então para $U \cap F^{-1}(V)$ temos que*

$$F^*(f\,dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n) = (f \circ F)(\det DF)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{1.3}$$

Em particular, se $(U, (x_i))$ e $(\widetilde{U}, (\widetilde{x}_j))$ são cartas em M, então para $U \cap \widetilde{U}$ temos

$$d\widetilde{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\widetilde{x}_n = \left(\frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Demonstração. Para cada ponto $p \in M$ o tensor $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ representa um gerador para $\Lambda^k(T_pM)$. Então, dado $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ temos pela proposição 1.1.1

$$F^*(f\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n) = (f \circ F) dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_n.$$

Onde obtemos,

$$dF_1 \wedge \cdots \wedge dF_n \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \det\left(dF_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) = \det\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right).$$

Partanto, o lado esquerdo da equação 1.3 é dado por $(f \circ F) \det DF$ quando aplicado em $(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$. Do lado direito da equação 1.3 temos o mesmo resultado, pois $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\,(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n) = 1$. □

1.2 Derivada exterior e produto interior.

Se $f \in C^\infty(M)$, onde M é uma variedade de dimensão n, a diferencial df_p é uma aplicação linear definida em cada espaço tangente da variedade. E denotamos por df a diferencial (ou derivada) da função f, que é uma 1-forma, $df : M \to T^*M$, diferenciável em todo ponto da variedade. A 1-forma df também pode ser vista como a *derivada exterior* da uma 0-forma f e o operador derivada exterior d pode ser extendido para álgebra das formas diferenciáveis $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$ dada a seguir.

Seja M uma variedade, a *derivada exterior* é uma aplicação linear $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ tal que

1. $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ para todo $k \geq 0$

2. $d \circ d = d^2 = 0$

Como para cada ponto $p \in M$ temos uma carta coordenada $(U, x_1, \ldots, x_n)$, com $p \in U$, então, qualquer k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$ é escrita localmente como combinação linear $\omega = \sum a_I dx_I$, onde $a_I \in C^\infty(M)$.
Se d é uma derivada exterior em U então

$$d\omega = \sum da_I \wedge dx_I = \sum_{j,I} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I.$$

Dada a derivada exterior temos as seguintes propriedades:

1. $d(a\omega + b\eta) = ad\omega + bd\eta$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$.

2. $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$, $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$

3. Seja $F : N \to M$ uma aplicação diferenciável entre variedades. Se ω é uma k-forma em M, então $d(F^*\omega) = F^*(d\omega)$.

Daremos agora um exemplo que é apenas uma aplicação direta dos resultados referentes a derivada exetrior e pullback, e não será utilizado nos capítulos posteriores. O leitor familiarizado com estes assuntos pode pular exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.1. Seja U o conjunto aberto $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ no plano $\mathbb{R}^2$ com coordenada polares (r, θ). Defina $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$F(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta).$$

Se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ são coordenadas canônicas, e ω a 2-forma $dx \wedge dy$ em $\mathbb{R}^2$, então temos que

$$\begin{aligned} F^*dx &= d(F^*x) = d(x \circ F) \\ &= d(r\cos\theta) \\ &= \cos\theta\, dr - r \operatorname{sen}\theta\, d\theta \end{aligned} \qquad \vdots \qquad \begin{aligned} F^*dy &= d(F^*y) = d(y \circ F) \\ &= d(r \operatorname{sen}\theta) \\ &= \operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{aligned}$$

Calculando o pullback $F^*\omega$ temos

$$\begin{aligned} F^*(dx \wedge dy) &= (F^*dx) \wedge (F^*dy) \\ &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)\ , \\ &= r\cos^2\theta dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta d\theta \wedge dr, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $dr \wedge dr = d\theta \wedge d\theta = 0$ (anti-comutatividade). Dessa forma, $d\theta \wedge dr = -dr \wedge d\theta$, portanto

$$F^*(dx \wedge dy) = rdr \wedge d\theta.$$

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, o *produto interior* é a aplicação $\iota_X : \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)$ definida por

$$(\iota_X\omega)(v_1, \ldots, v_n) = \omega(X, v_1, \ldots, v_n).$$

Quando $\omega \in \Omega^0(M)$ temos que $\iota_X\omega = 0$ por definição.

Se $\omega \in \omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$, $f \in C^\infty(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$ então

1. $\iota_X(\omega \wedge \eta) = (\iota_X\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (\iota_X\eta)$,

2. $\iota_{fX}\omega = \iota_X(f\omega) = f(\iota_X\omega)$.

Como uma ilustração de como aplicar os resultados anteriores, podemos calcular o produto interior $i_X\omega$, quando $X = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$ e $\omega = dx \wedge dy$ a 2-forma definida no plano $\mathbb{R}^2$. Calculando o produto interior das 1-formas dx e dy temos que

$$\iota_X(dx) = dx(X) = dx\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) = x, \ e$$

$$\iota_X(dy) = dy(X) = dy\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) = y$$

E portanto

$$\iota_X\omega = \iota_X(dx \wedge dy) = \iota_X(dx) \wedge dy - dx \wedge (\iota_X(dy)) = xdy - ydx.$$

Um *fluxo* numa variedade M é uma aplicação $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ tal que para cada $p \in M$ e $t, s \in \mathbb{R}$ temos:

1. $\phi(0, p) = p$

2. $\phi(t + s, p) = \phi(t, \phi(s, p))$

Para qualquer campo vetorial diferenciável X em M e $p \in M$, pelo Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias em Variedades (ver Lee [7] ou Lopes [6] por exemplo), existe uma vizinhança U de p em que o campo vetorial possui um *fluxo local* associado, ou seja, existem um numero real $\varepsilon > 0$ e uma aplicação

$$\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$$

tal que se o conjunto $\phi_t(q) = \phi(t, q)$, então

$$\frac{d}{dt}\phi_t(q) = X(\phi_t(q)), \ \ \phi_0(q) = q \ \text{ para cada } \ q \in U.$$

Ou seja, para cada ponto $q \in U$, $\phi_t(q)$ é uma curva integral de X com ponto inicial q. Consequentemente, para cada t a aplicação $\phi_t : U \to \phi_t(U)$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. E pela propriedade de fluxo (ou cociclo), temos que a inversa de ϕ_t é a aplicação ϕ_{-t}, uma vez que

$$\phi_{-t} \circ \phi_t = \phi_{-t+t} = \phi_{t+(-t)} = \phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_0 = id.$$

Para mais detalhes sobre equações diferenciais e fluxos gerados pelas equações diferenciais veja, por exemplo, Lopes [6].

Definição 1.2.2. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, chamamos a *Derivada de Lie* do campo Y com respeito a X em p ao vetor $(\mathcal{L}_X Y)_p$ dado por:

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_{-t*}(Y_{\phi_t(p)}) - Y_p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\phi_{-t*}Y)_p - Y_p}{t} = \frac{d}{dt}(\phi_{-t*}Y)_p\Big|_{t=0}$$

onde ϕ_t é o fluxo asssociado ao campo vetorial X.

Quando os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são diferenciáveis, então $(\mathcal{L}_X Y)_p$ existe para cada $p \in M$ e a aplicação $p \mapsto (\mathcal{L}_X Y)_p$ define um campo na variedade diferenciável M. A demonstração desta afirmação pode ser encontrada, por exemplo, em Lee [7].

Exemplo 1.2.3. Tomemos os campos $X(x,y) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$ e $Y(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ e o ponto $p = (1,0)$. Calculando o fluxo do campo X obtemos

$$\varphi_t(x,y) = (x\cos t - y\,\mathrm{sen}\, t, x\,\mathrm{sen}\, t + y\cos t),$$

e seu inverso é dado por

$$\varphi_{-t}(x,y) = (x\cos t + y\,\mathrm{sen}\, t, -x\,\mathrm{sen}\, t + y\cos t).$$

E assim temos

$$\varphi_{-t*} = J\varphi_{-t} = \begin{bmatrix} \cos t & \mathrm{sen}\, t \\ -\mathrm{sen}\, t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\varphi_{-t*}Y)_p &= \varphi_{-t*}(Y_{\varphi_t(p)}) = \varphi_{-t*}(Y(\cos t, \mathrm{sen}\, t)) \\ &= \varphi_{-t*}(\cos t, \mathrm{sen}\, t) \\ &= (\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t, -\mathrm{sen}\, t\cos t + \cos t\,\mathrm{sen}\, t) = (1,0) \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Lie do campo Y com respeito ao campo X em $p = (1,0)$ será

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt}(\varphi_{-t*}Y)_p = \frac{d}{dt}(1,0) = (0,0).$$

Proposição 1.2.4. *Sejam X, Y campos vetoriais em uma variedade M, então a derivada de Lie $\mathcal{L}_X Y$ coincide com o colchete de Lie $[X,Y]$, ou seja*

$$\mathcal{L}_X Y = \sum_{i,j}\left(a_j\frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} = [X,Y]$$

onde $X = \sum_i a_i \partial/\partial x_i$ e $Y = \sum_i b_i \partial/\partial x_i$.

Definição 1.2.5. Dados o campo vetorial X e a k-forma ω, chamamos de Derivada de Lie da forma ω com respeito ao campo X em p a forma $\mathcal{L}_X\omega$ dada por

$$\mathcal{L}_X\omega = \lim_{t\to 0}\frac{\phi_t^*(\omega_{\phi_t(p)}) - \omega_p}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(\phi_t^*\omega)_p - \omega_p}{t} = \frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega)_p\Big|_{t=0}$$

Daremos agora alguns resultados sobre Derivada de Lie que serão úteis nos próximos capítulos. As demonstrações de tais resultados podem ser encontrados em Lee [7].

Proposição 1.2.6. *Seja X um campo vetorial na variedade M.*

1. *se f é uma função diferenciável, então $\mathcal{L}_X f = Xf$.*
2. *se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^l(M)$, então $\mathcal{L}_X(\omega\wedge\eta) = (\mathcal{L}_X\omega)\wedge\eta + \omega\wedge(\mathcal{L}_X\eta)$.*
3. *a derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ comuta com derivada exterior d.*
4. *(**Formula de Cartan**) $\mathcal{L}_X\omega = d\iota_X\omega + \iota_X d\omega$.*

Teorema 1.2.7. *Seja $\phi_t : M \to M$ o fluxo associado ao campo X. Então*

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega) = \phi_t^*(\mathcal{L}_X\omega)$$

para todo $\omega \in \Omega^k(M)$.

Corolário 1.2.8. *Se ϕ_t é o fluxo associado ao campo X, então para toda forma ω temos que*

$$\mathcal{L}_X\omega = 0 \;\Leftrightarrow\; \phi_t^*\omega = \omega, \quad \textit{para todo tempo } t.$$

Daremos agora um exemplo que é aplicação direta dos resustados anteriores.

Exemplo 1.2.9. Sejam ω a 1-forma $-ydx + xdy$ e X o campo vetorial tangente dado por $-y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$ no circulo S^1, então temos que

$$\mathcal{L}_X(-ydx) = -(\mathcal{L}_X y)dx - y(\mathcal{L}_X dx) = -(\mathcal{L}_X y)dx - y(d\mathcal{L}_X x) = -xdx + ydy.$$

Analogamente, $\mathcal{L}_X(xdy) = -ydy + xdx$. Portanto, $\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_X(-ydx + xdy) = 0$. E asssim, se ϕ_t é o fluxo associado ao campo X, temos que ϕ_t preserva a 1-forma ω, isto é, $\phi_t^*\omega = \omega$.

Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que uma k-forma ω é *fechada* em M se a derivada exterior desta é zero, ou seja, $d\omega = 0$. E dizemos que ω é exata em M se existe uma (k-1)-forma η tal que $\omega = d\eta$. A forma η é chamado de *forma potencial* ou *primitivo* para ω. Como $d^2 = d \circ d = 0$ segue que toda forma exata é fechada. Esta propriedade será útil ao longo deste trabalho.

Daremos agora um resultado que usaremos, num exemplo do Capítulo 3, para verificar que uma determinada 1-forma em S^1 não é exata. A demonstração deste resultado pode ser encontrado em livros básicos de variedades diferenciáveis.

Proposição 1.2.10. *Seja M uma variedade n-dimensional, compacta e orientada. Para toda n-forma exata ω temos que*

$$\int_M \omega = 0.$$

1.3 Grupo de Cohomologia de De Rham

Seja M uma variedade diferenciável. Como a derivada exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ é uma aplicação linear, seu núcleo e sua imagem são subespaços vetoriais lineares. Assim, definimos

$$\mathcal{Z}^k(M) := \ker[d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)] = \{ \text{ k-formas fechada em } M\};$$
$$\mathcal{B}^k(M) := \text{Im}[d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)] = \{ \text{ k-formas exata em } M\}.$$

Como toda forma exata é fechada, segue que $\mathcal{B}^k(M) \subset \mathcal{Z}^k(M)$. Portanto, faz sentido definirmos o *k-ésimo grupo de cohomologia de De Rham* de M, nome escolhido em homenagem ao matemático George De Rham, como sendo o espaço vetorial quociente

$$H^k_{dR}(M) = \frac{\mathcal{Z}^k(M)}{\mathcal{B}^k(M)}. \tag{1.4}$$

Assim $H^k_{dR}(M)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, e em particular um grupo com relação a adição de vetores. Sendo assim o nome mais apropriado seria "espaço de cohomologia de De Rham", porém usaremos o termo "grupo" como a maioria dos livros.

Seja ω uma forma fechada em M. Denotamos por $[\omega]$ a classe de equivalência de ω neste espaço quociente, onde chamaremos de classe de cohomologia de ω. Se $k < 0$ ou $k > \dim M$ então por convenção $\Omega^k(M) = 0$, o que implica em $H^k_{dR}(M) = 0$. Se $[\omega] = [\omega']$, isto é, se ω e ω' diferem por uma forma exata, $\omega = \omega' + d\eta$, dizemos que ω e ω' são *cohomólogos*.

Proposição 1.3.1. *Para qualquer aplicação diferenciável $G : M \to N$, o pullback $G^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ leva $\mathcal{Z}^k(N)$ em $\mathcal{Z}^k(M)$ e $\mathcal{B}^k(N)$ em $\mathcal{B}^k(M)$*

Demonstração. Se ω é uma forma fechada então

$$d(G^*\omega) = G^*(d\omega) = 0.$$

Portanto, $G^*\omega$ é fechada.

Se ω é uma k-forma exata então existe uma (k-1)-forma η tal que $\omega = d\eta$ o que implica em

$$G^*\omega = G^*(d\eta) = d(G^*\eta).$$

Logo, concluimos que $G^*\omega$ é exata. □

Assim, podemos definir a *aplicação de cohomologia induzida* $G^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$ dada por

$$G^*[\omega] = [G^*\omega],$$

para cada k-forma fechada ω.
Se $\omega' = \omega + d\eta$ então $[G^*\omega'] = [G^*\omega + G^*(d\eta)] = [G^*\omega]$. Ou seja, se $[\omega'] = [\omega]$ então $G^*[\omega'] = G^*[\omega]$. Portanto, a aplicação dada acima esta bem definida.

Proposição 1.3.2. *Sejam M, N e P variedades diferenciável e $G : M \to N$ diferenciável.*

a) *Se $F : N \to P$ é diferenciável, então $(F \circ G)^* = G^* \circ F^* : H^k_{dR}(P) \to H^k_{dR}(M)$.*

b) *Se Id_M é a aplicação identidade, então $(Id_M)^*$ é a aplicação identidade em $H^k_{dR}(M)$.*

Corolário 1.3.3. *Variedades difeomorfas possuem grupo de cohomologia de De Rham isomorfos.*

Mais geral ainda, em Lee [7] e Elon [9] pode verificar-se que a cohomologia de De Rham é uma *inveriante topológica*. Este resultado é supreendente, pois a definição de grupos de De Rham de M está relacionado com a estrutura diferenciável, e portanto não temos razão para esperar que estruturas diferenciáveis diferentes na mesma variedade topológica dêem o mesmo grupo de De Rham.

Proposição 1.3.4. *Se M é uma variedade diferenciável conexa, então $H^0_{dR}(M)$ é igual ao espaço das funções constantes.*

Demonstração. Como $\Omega^p(M) = 0$ para todo $p < 0$, temos que $\mathcal{B}^0 = \text{Im}[d : \Omega^{(-1)}(M) \to \Omega^0(M)] = 0$. Uma 0-forma fechada é uma função diferenciável, $f : M \to \mathbb{R}$, tal que $df = 0$. Como M é conexo, temos que se $df = 0$ então f é constante. Portanto, $H^0_{dR}(M) = \mathcal{Z}^0(M) = \{\text{funções constantes}\}$. □

Dizemos que um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ é estrelado se existe $q \in V$ tal que para todo $x \in V$ o segmento de reta de q a x está contido em V.

Proposição 1.3.5. *Seja U um subconjunto aberto estrelado de $\mathbb{R}^n$. Então $H^p_{dR}(U) = 0$ para $p \geq 1$.*

A demonstração desta proposição segue essencialmente do fato que todo conjunto estrelado é contrátil e do fato que a cohomologia de De Rham é a mesma para conjuntos homotopicamente invariantes. Todos os detalhes podem ser vistos em Lee [7].

Proposição 1.3.6 (Localmente toda forma fechada é exata)**.** *Sejam M uma variedade diferenciável e ω uma p-forma fechada em M, $p \geq 1$. Para cada $q \in M$, existe uma vizinhança U de q na qual ω é exata.*

A grosso modo, a demonstração desta proposição segue do fato que cada ponto $q \in M$ possui uma vizinhança V difeomorfa a uma bola aberta do $\mathbb{R}^n$, que é um conjunto estrelado do $\mathbb{R}^n$, pela carta (V, φ). E pela invariância difeomorfica da cohomologia induzida φ^* temos que

$$H^p_{dR}(V) \cong H^p_{dR}(\varphi(V)) = 0.$$

Daremos agora duas proposições que serão utilizadas nos próximos capítulos.

Proposição 1.3.7. *Se M é uma variedade simplesmente conexa, então $H^1_{dR}(M) = 0$.*

Este resultado segue do fato que toda curva fechada numa variedade simplesmente conexa é homotópica a uma curva constante. E assim, toda integral de linha de uma 1-forma fechada ω ao longo de uma curva fechada γ é conservativa, i.e., $\int_\gamma \omega = 0$, e portanto a 1-forma ω é exata.

Proposição 1.3.8 (Cohomologia da Esfera)**.** *Para $n \geq 1$, os grupos de cohomologia de De Rham de S^p são*

$$H^p_{dR}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0 \text{ ou } p = n, \\ 0 & \text{se } 0 < p < n. \end{cases} \tag{1.5}$$

A ideia da demonstração deste teorema é a seguinte. Como S^n é conexo temos pela proposição 1.3.4 que $H^0_{dR}(S^n) \cong \mathbb{R}$. Para $n = 1$ e $p > 1$, temos que $H^p_{dR}(S^1) = 0$, pois $p > \dim(S^1)$. Seja a 1-forma ângulo ω em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Defina a forma $\omega_0 = i^*\omega$, onde $i : S^1 \to \mathbb{R} - \{0\}$ é a aplicação inclusão. Como $\int_{S^1} \omega_0 = 2\pi \neq 0$, concluimos que ω_0 não é exata. Dada arbitrariamente a forma $\eta \in \Omega^1(S^1)$ (a forma η é fechada pois $d\eta \in \Omega^2(S^1)$), a forma $(\eta - c\omega_0)$, com $c = (1/2\pi)\int_{S^1} \eta$, é exata. Dessa forma, pela cohomologia de de Rham temos $[\eta] = c[\omega_0]$, o que implica em $H^1_{dR}(S^1) \cong \mathbb{R}$. Usamos aqui o fato que uma forma $\eta \in \Omega^n(S^n)$ é exata se, e somente se, $\int_{S^n} \eta = 0$. A parte final da demonstração segue por indução sobre n, com o uso da sequência de Mayer-Vietoris (ver por exemplo em Lee [7] ou Elon [9]).

Como as esferas são orientáveis admitem uma forma orientação, ou ainda, uma forma volume dV, que apesar da notação usada aqui, não são formas exatas, e portanto $\int_{S^n} dV > 0$. Além disso, $[dV]$ é o gerador de $H^n_{dR}(S^n)$.

Capítulo 2
VARIEDADE SIMPLÉTICA

Neste capítulo objetivo principal é definir variedade simplética, a qual será definida por meio de uma forma bilinear e anti-simétrica no espaço vetorial tangente da variedade. Portanto, faremos uma breve introdução sobre espaços vetoriais simpléticos. Para mais detalhes sobre o assunto veja as seguintes referência Cannas [4], Bursztyn e Macarini [2] e Arnold [1].

2.1 Espaços Vetoriais Simpléticos

Definição 2.1.1. Sejam V um espaço vetorial real e $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear anti-simétrica. Dizemos que a forma Ω é *não-degenerada*, ou *simplética*, se

$$\Omega(u, v) = 0, \ \ \forall v \in V \Rightarrow u = 0$$

Ou seja, a aplicação $\widetilde{\Omega} : V \to V^*$ definida por $v \mapsto \Omega(v, \cdot)$ é um isomorfismo linear.

Definição 2.1.2. Um *espaço vetorial simplético* (V, Ω) é um espaço vetorial V com uma forma (ou estrutura) simplética Ω.

Definição 2.1.3. Um *simplectomorfismo* A entre dois espaços vetoriais simpléticos (V_1, Ω_1) e (V_2, Ω_2) é um isomorfismmo linear $A : V_1 \to V_2$ tal que $A^*\Omega_2 = \Omega_1$, ou seja, $(A^*\Omega)(u, v) = \Omega(A(u), A(v))$, para todo $u, v \in V_1$.

Se existe um simplectomorfismo $A : V_1 \to V_2$, dizemos que (V_1, Ω_1) e (V_2, Ω_2) são *simplectomorfos*.

Exemplo 2.1.4. (a) O espaço $\mathbb{R}^{2n}$ com $\Omega_0(u, v) = \langle Ju, v\rangle$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, onde J é uma matriz, $2n \times 2n$, definida por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

e I é a matriz identidade em $n \times n$.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$. Então temos que

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y, -x)$$

Assim temos que J pode ser vista como uma rotação horária de $\pi/2$ e J é um operador ortogonal (suas colunas formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^{2n}$, no caso). Portanto, $J^* = J^T = -J = J^{-1}$. Com isso, obtemos que Ω_0 é não-degenerada e anti-simétrica. De fato, para vermos que é não-degenerado, consideremos $u \neq 0 \in \mathbb{R}^{2n}$, e tomemos $v = Ju$. Assim, $\Omega_0(u,v) = \langle Ju, Ju\rangle = \langle u, J^T Ju\rangle = \langle u, u\rangle = \|u\|^2 \neq 0$. A anti-simetria segue de $\Omega_0(u,v) = \langle Ju, v\rangle = \langle u, J^T v\rangle = -\langle u, Jv\rangle = -\langle Jv, u\rangle = -\Omega_0(v,u)$. $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é chamado de *espaço vetorial simplético canônico*.

(b) Seja W um espaço vetorial de dimenção n, e W^* seu dual. Então o espaço vetorial $V = W \oplus W^*$ possui uma estrutura simplética natural definida por

$$\Omega((u, z^*), (v, w^*)) = w^*(u) - z^*(v).$$

(c) Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão n sobre $\mathbb{C}$. Seja $h : V \times V \to \mathbb{C}$ um produto interno hermitiano e $\Omega = Im(h)$ a parte imaginária de h.

Dados $u, v \in V$ podemos escrever $h(u,v) = a(u,v) + ib(u,v)$. Como h é hermitiano, dados $u, v \in V$ temos $h(u,v) = \overline{h(v,u)}$ e portanto Ω é anti-simétrica. Fixado $u \in V$, se $h(u,v) = 0$ para $v \in V$ então $u = 0$. Daí temos que, $\Omega = Im(h)$ é não-degenerado. Portanto Ω define uma estrutura simplética em V, visto como espaço vetorial real, e qualqur transformação linear unitária é automaticamente um simplectomorfisma.

2.1.1 Subespaço

Daremos nesta subseção algumas definições para subespaços vetoriais que aparecem dentro do contexto do espaço vetorial simplético.

Seja (V, Ω) um espaço vetorial simplético. Dado um subespaço linear $W \subseteq V$, definimos o seu *ortogonal simplético* como subespaço linear.

$$W^\Omega := \{v \in V : \Omega(v,u) = 0,\ \forall u \in W\}.$$

Observação 2.1.5. **(a)** Note que embora $V \neq W + W^{\Omega}$, em termo de dimensões sempre temos que $dim(V) = dim(W) + dim(W^{\Omega})$.

Basta considerarmos o nucleo e imagem da aplicação

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega} : V &\rightarrow W^* \\ v &\mapsto \Omega(v, \cdot)\big|_W \end{aligned}$$

Temos que $ker(\widetilde{\Omega}) = W^{\Omega}$ e $Im(\widetilde{\Omega}) = W^*$. E assim obtemos,

$$\dim(V) = \dim ker(\widetilde{\Omega}) + \dim Im(\widetilde{\Omega}) = \dim(W^{\Omega}) + \dim(W)$$

(b) Para $W^{\Omega} \subseteq V$ temos que $W = (W^{\Omega})^{\Omega}$

Seja V um espaço vetorial simplético, o subespaço $W \subseteq V$ é chamado de

- *Simplético* se $W \cap W^{\Omega} = 0$, isto é, se $\Omega\big|_{W \times W}$ é não-degenerada.
- *Isotrópico* se $W \subseteq W^{\Omega}$, isto é, se $\Omega\big|_{W \times W} \equiv 0$.
- *Coisotrópico* se $W \supseteq W^{\Omega}$,
- *Lagrangiano* se W é isotrópico com $dim(W) = \frac{1}{2} dim(V)$, ou seja, $W = W^{\Omega}$.

Exemplo 2.1.6. Qualquer subespaço unidimensional é isotrópico. De forma análoga, todo subespaço de codimensão 1 é coisotrópico.

2.1.2 Bases Simpléticas

Seja (V, Ω) um espaço vetorial simplético. Chamamos de *base simplética* de V uma base com $2n$ vetores $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ para a qual valem as relações.

$$\begin{cases} \Omega(e_i, e_j) = 0, \\ \Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}. \qquad \forall i, j. \\ \Omega(f_i, f_j) = 0. \end{cases}$$

Com respeito a uma base simplética, temos

$$\Omega(u, v) = u^t \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} v$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$ e u, v são matrizes colunas.

Teorema 2.1.7. *Todo espaço vetorial simplético (V, Ω), com $\dim V = 2n$, admite uma base simplética.*

Demonstração. Escolha $e_1 \neq 0$. Como Ω é não-degenerada, existe $f_1 \in V$ tal que

$$\Omega(e_1, f_1) = 1.$$

Seja W_1 o subespaço gerado por $\{e_1, f_1\}$. Note que W_1 é simplético, e portanto $V = W_1 \oplus W_1^{\Omega}$.

Como W_1^{Ω} é simplético, podemos repetir a construção até obtermos uma decomposição

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

onde cada W_i é gerado por e_i, f_i tal que $\Omega(e_i, f_i) = 1$. Por construção, se $i < j$, então $W_j \subset W_i^{\Omega}$, portanto são satisfeitas as condições de base. □

Exemplo 2.1.8. Consideremos o espaço simplético canônico $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$. Os vetores $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, representado na base canônica do Teorema anterior, podem ser escritos como

$$u = \sum_{i=1}^{n}(x_i e_i + x_{n+i} f_{n+i}) \text{ e } v = \sum_{j=1}^{n}(y_j e_j + y_{n+j} f_{n+j}).$$

E assim temos que

$$\begin{aligned}
\Omega_0(u, v) &= \Omega_0\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i e_i + x_{n+i} f_{n+i}), \sum_{j=1}^{n}(y_j e_j + y_{n+j} f_{n+j})\right) \\
&= \sum_{i,j} x_i y_j \Omega_0(e_i, e_j) + \sum_{i,j} x_i y_{n+j} \Omega_0(e_i, f_j) + \sum_{i,j} x_{n+i} y_j \Omega_0(f_i, e_j) \\
&\quad + \sum_{i,j} x_{n+i} y_{n+j} \Omega_0(f_i, f_j) \\
&= \sum_{i,j}(x_i y_{n+j} - x_{n+i} y_j) \\
&= \langle J_0 u, v\rangle
\end{aligned}$$

onde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

Proposição 2.1.9. *Se (V_1, Ω_1) e (V_1, Ω_2) são dois espaços simpléticos de mesma dimensão, então existe um isomorfismo linear $A : V_1 \to V_2$ tal que $A^*\Omega_2 = \Omega_1$.*

Demonstração. Pelo teorema 2.1.7, escolhemos as bases simpléticas (e_i, f_i), em (V_1, Ω_1), e $(\hat{e}_i, \hat{f}_i)$, em (V_2, Ω_2). Definimos então a aplicação linear injetiva $A : V_1 \to V_2$ por $Ae_i =$

$\hat{e}_i$ e $Af_i = \hat{f}_i$, para $1 \leq i \leq n$. Para vermos que esta aplicação é um simplectomorfismo, basta verificarmos se $A^*\Omega_2 = \Omega_1$ nos elementos da base. Assim,

$$A^*\Omega_2(e_i, e_j) = \Omega_2(Ae_i, Ae_j) = \Omega_2(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = 0 = \Omega_1(e_i, e_j)$$

$$A^*\Omega_2(f_i, f_j) = \Omega_2(Af_i, Af_j) = \Omega_2(\hat{f}_i, \hat{f}_j) = 0 = \Omega_1(f_i, f_j)$$

$$A^*\Omega_2(e_i, f_j) = \Omega_2(Ae_i, Af_j) = \Omega_2(\hat{e}_i, \hat{f}_j) = \delta_{ij} = \Omega_1(e_i, f_j)$$

Portanto, $A^*\Omega_2 = \Omega_1$. □

Corolário 2.1.10. *Todo espaço simplético é simplectomorfo a* $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ *para algum* n.

Em particular, todo espaço vetorial simplético tem dimensão par.

Se V é um espaço vetorial real, uma *estrutura complexa* em V é um endomorfismo linear $J : V \to V$ tal que $J^2 = -I$. Note que fixar uma estrutura complexa J é equivalente a munir V de uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, já que podemos identificar o operador J com o multiplicação por $i = \sqrt{-1}$, isto é, $J(v) = i \cdot v$, para todo $v \in V$. O par (V, J) é chamado *espaço vetorial complexo*, e dizemos que (V, J) e (V', J') são *isomorfos* se existe um isomorfismo linear $\varphi : V \to V'$ tal que $\varphi \circ J = J' \circ \varphi$.

Seja (V, Ω) um espaço vetorial simplético. Uma estrutura complexa em V é *compatível* com Ω (ou simplesmente Ω-*compatível*) se, para $u, v \in V$,

$$g(u, v) := \Omega(u, Jv), \tag{2.1}$$

define um produto interno. Explicitamente, as condições de compatibilidade (simetria e positividade de g) são

$$\Omega(Ju, Jv) = g(Ju, v) = g(v, Ju) = \Omega(v, JJu) = -\Omega(v, u) = \Omega(u, v)$$
$$\text{e} \quad \Omega(u, Jv) > 0, \ u \neq 0.$$

Proposição 2.1.11. *Seja* (V, Ω) *um espaço vetorial simplético. Então cada produto interno* G *em* V *define, de forma canônica, uma estrutura complexa* $J : V \to V$ *que é* Ω*-compatível.*

Demonstração. Seja G um produto interno em V. Como $G^\# : V \to V^*$, $G^\#(u)(v) = G(u, v)$, é um isomorfismo, pois $G(u, v) = 0, \ \forall v \in V \Rightarrow u = 0$, segue que existe um único automorfismo linear $A : V \to V$ tal que

$$\Omega(u, v) = G(Au, v), \ \ \forall u, v \in V,$$

isto é, $A = (G^{\#})^{-1} \circ \widetilde{\Omega}$. Note que A é anti-simétrico com respeito a G, já que

$$G(A^t u, v) = G(u, Av) = \Omega(v, u) = -G(Au, v).$$

Como consequência, temos que, na decomposição polar de A,

$$A = J\,|A|\,, \text{ onde } |\mathrm{A}| = (\mathrm{A^t A})^{1/2} = (-\mathrm{A}^2)^{1/2},$$

o operador ortogonal J e o operador positivo-definido $|A|$ comutam. Então $A^2 = -J^2A^2$, e portanto $J^2 = -Id$. Note ainda que

$$\Omega(u, Jv) = G(Au, Jv) = -G(JAu, v) = G(|A|\,u, v)$$

define um produto interno, mostrando a compatibilidade de J e Ω. □

2.2 Variedade Simplética.

Nesta seção daremos a definição de variedade simplética e exemplos. O leitor não fimiliarizado com os conceitos de variedade e espaço vetorial tangente podem ver tais definições no Capítulo 1.

Seja ω uma 2-forma diferenciável numa veriedade M, isto é, para cada $p \in M$, a aplicação $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é bilinear e anti-simétrica no espaço tangente a M em p, e ainda ω_p varia suavemente em p.

Uma 2-forma diferenciável ω é dita **simplética** se ω é fechada e ω_p é não-degenerada para todo $p \in M$. Notemos que se ω for simplético, então $\dim T_pM = \dim M$ deverá ser par. Uma **variedade simplética** é um par (M, ω) onde M é uma variedade diferenciável e ω é uma forma simplética.

Exemplo 2.2.1. Seja $M = \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas lineares $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. A forma

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i \tag{2.2}$$

é simplética e o conjunto

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right), \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right) \right\}$$

é uma base simplética do espaço vetorial T_pM.

Exemplo 2.2.2. Seja $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária. Os vetores tangentes a S^2 em p podem então ser identificados como vetores ortogonais a p.
Assim, a forma simplética em S^2 é definido por

$$\omega_p(u,v) = \langle p, u \times v \rangle , \qquad \text{para } \ u, v \in T_p S^2 = \{p\}^{\perp}$$

Esta forma é fechada porque $d\omega$ é uma 3-forma na variedade de dimensão 2, e é não-degenerada, pois dado $u \neq 0$ se tomarmos $v = u \times p$ temos $\langle p, u \times v \rangle \neq 0$.

Exemplo 2.2.3. Um espaço vetorial simplético (V, ω) é uma variedade simplética. A condição $d\omega = 0$ é automaticamente satisfeita, pois ω é uma forma constante, uma vez que ω_p não depende de $p \in V$.

Se ω é uma forma simplética qualquer num espaço vetorial V de dimensão 2n, então, pelo teorema da base temos,

$$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n} \neq 0$$

pois, em termos do Teorema da Base 2.1.7, podemos escrever

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} e_i \wedge f_i.$$

Reciprocamente, dada uma 2-forma $\eta \in \Omega^2(V^*)$, se $\eta^n \neq 0$ então η é simplética.

Se tomarmos V como o espaço vetorial tangente de uma variedade 2n-dimensional, podemos notar que o produto exterior de ordem n de uma forma simplética ω é uma forma volume. Assim, qualquer variedade simplética (M, ω) é orientada canonicamente pela estrutura simplética. A forma $\dfrac{\omega^n}{n!}$ chama-se forma de Liouville (ou forma simplética de volume).

Daremos agora uma definição que busca de alguma maneira classicar as variedade simpléticas, ou seja, de certa forma dizer por exemplo quando duas variedade simpléticas são "iguais".

Definição 2.2.4. Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas $2n$-dimensional e $\varphi : M_1 \to M_2$ um difeomorfismo. Então φ é um ***simplectomorfismo*** se $\varphi^* \omega_2 = \omega_1$.

Daremos agora uma breve ideia de como construir forma simplética no fibrado cotangente de uma variedade qualquer. Ou seja, os fibrados cotangentes de variedades são exemplos de variedades simpléticas.

Seja Q qualquer variedade n-dimensional e $M = T^*Q$ seu fibrado cotangente. Se a estrutura da variedade Q é descrito pelas cartas coordenadas $(U, x_1, \ldots, x_n)$ com $x_i : U \to \mathbb{R}$, então em qualquer $x \in U$, as diferenciais $(dx_1)_x, \ldots, (dx_n)_x$ formam uma base de T_x^*Q. Se $\xi \in T_x^*Q$, então podemos escrever $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i (dx_i)_x$ para alguns coeficientes reais $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Isto induz a aplicação,

$$\begin{aligned} T^*U &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (x, \xi) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n). \end{aligned}$$

Segue que $(T^*U, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ é uma carta coordenada de T^*Q e suas coordenadas são chamadas de **coordenadas cotangentes** associadas as coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ em U. Podemos ainda notar que as funções de transição são diferenciáveis, pois dadas duas cartas $(U, x_1, \ldots, x_n)$, $(U', x_1', \ldots, x_n')$, e $x \in U \cap U'$, se $\xi \in T_x^*Q$ então

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i (dx_i)_x = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j'} \right) (dx_j')_x = \sum_{j=1}^n \xi_j' (dx_j')_x$$

onde $\xi_j' = \sum_i \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j'} \right)$ é diferenciável. Portanto, T^*Q é uma variedades 2n-dimensional. Além disso, podemos definir a 2-forma ω em T^*U por

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i.$$

Maiores detalhes que esta definição independe da escolha das coordenadas pode ser visto em Cannas [4].

Outros exemplos importantes de variedades simpléticas são as *variedades de Kähler* e as *órbitas coadjuntas de grupos de Lie*. O leitor interessado em tais exemplos pode ver, por exemplo, em Cannas [4].

2.3 Teorema de Darboux

Enunciaremos agora um teorema clássico de variedade simplética e útil para escrever os campos hamiltonianos em coordenadas locais no próximo capítulo.

Teorema 2.3.1 (Darboux)**.** *Seja (M, ω) uma variedade simplética 2n-dimensional e seja p um ponto qualquer em M. Então existe uma carta $(U, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ contendo p, tal que*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

A prova do Teorema de Darboux pode ser encontrada, por exemplo, em Arnold [1], Bursztyn e Macarini [2] e Cannas [4].

A carta $(U, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ mencionada no teorema acima é chamada de *Carta de Darboux* e as coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ de coordenadas canônicas(ou de Darboux). Assim, por exemplo, o espaço vetorial padrão dado no Exemplo 2.1.8 possui coordenadas de Darboux. As coordenadas cotangentes do fibrado Cotangente T^*M foram escritas em coordenadas de Darboux.

Notemos então que uma variedade simplética 2n-dimensional pode ser vista localmente como R^{2n}, com coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ e a forma simplética

$$\omega_0 = \sum_i dx_i \wedge dy_i.$$

2.4 Obstruções

Como podemos observar anteriormente, toda variedade simplética possui dimensão par e é orientável. Uma questão central em geometria simplética é se, dada uma variedade M satisfazendo essas condições, existe ou não alguma estrutura simplética em M.

Daremos agora um resultado, que pode ser visto em Bursztyn e Macarini [2], que garante uma obstrução para uma variedade ser simplética por meio da cohomologia de De Rham.

Proposição 2.4.1. *Seja M uma variedade compacta de dimensão $2n$. Se M admite alguma estrutura simplética, então existe um elemento $a \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$ tal que $a^n \neq 0$. Em particular, $H^{2k}_{dR}(M, \mathbb{R}) \neq 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Se $\omega \in \Omega^2(M)$ é uma forma simplética, seja $a = [\omega] \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$. Logo, $\omega^n \in \Omega^{2n}$ é uma forma volume e portanto temos que

$$\int_M \omega^n \neq 0$$

Por outro lado, se $a^n = [\omega]^n = [\omega^n] = 0$, então ω^n é exata, ou seja, existe uma (2n-1)-forma η tal que $\omega^n = d\eta$. Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\int_M \omega^n = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0.$$

o que contradiz o fato de ω^n ser uma forma volume. Potanto $a^n \neq 0$. □

Exemplo 2.4.2. Para $n > 1$ não existe estrutura simplética na esfera S^{2n}, pois para $0 < k < 2n$, $H^{2k}_{dR}(S^{2n}) = 0$, que pode ser visto pelo Teorema 1.3.8. O mesmo ocorre para $S^3 \times S^1$ uma vez que

$$H^2_{dR}(S^3 \times S^1) \cong H^2_{dR}(S^3) \times H^2_{dR}(S^1) \cong 0.$$

Outras obstruções, como por exemplo topológicas, podem ser encontradas em Bursztyn e Macarini [2, Cap. 3, p.40].

Capítulo 3

FLUXOS HAMILTONIANOS.

Uma das mais importante construções em variedades simplética é uma propriedade análoga ao gradiente para Variedade Riemanniana. Seja (M, ω) uma variedade simplética. Então para cada ponto $p \in M$, $\widetilde{\omega_p} : T_pM \to T_p^*M$ é um isomorfismo induzido por ω conforme vimos no capítulo anterior. E portanto, dada uma função $H \in C^\infty(M)$, definimos o *Campo Vetorial Hamiltoniano* da *função hamiltoniana H* sendo o campo vetorial X_H definido por

$$X_H := (\widetilde{\omega})^{-1}(dH). \tag{3.1}$$

Ou ainda, de maneira equivalente, existe um único campo vetorial X_H definido por

$$\iota_{X_H}\omega = dH. \tag{3.2}$$

Em coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, o campo X_H pode ser escrito localmente como uma combinação linear do tipo

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

onde $a_i, b_i \in C^\infty(M)$. Assim, calculando o produto interior da forma ω, escrita localmente em coordenadas de Darboux, para o campo X_H segue que

$$\begin{aligned} \iota_{X_H}\omega = \iota_{X_H}(\sum_j dx_j \wedge dy_j) &= \sum_j \left[(\iota_{X_H} dx_j) \wedge dy_j - dx_j \wedge (\iota_{X_H} dy_j) \right] \\ &= \sum_j (a_j dy_j - b_j dx_j). \end{aligned}$$

Por outro lado, para a função hamiltoniana H temos que

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial H}{\partial y_i} dy_i \right).$$

E como $dH = \iota_{X_H}\omega$, concluimos que $a_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}$ e $b_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$.
Portanto, o campo vetorial hamiltoniano pode ser escrito localmente como

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \right). \tag{3.3}$$

Fixado a base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right\}$ também podemos representar X_H como $X_H = J\nabla H$, onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Embora a definição do campo de vetores hamiltoniano seja análogo ao gradiente de uma função em uma Variedade Riemanniana, estes diferem em alguns aspectos, como pode ser observado na próxima seção.

Em $\mathbb{R}^{2n}$, ou numa variedade simplética (localmente neste caso), podemos por meio das coordenadas de Darboux para campos hamiltonianos (ver (3.3)), dada uma curva integral $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ do campo hamiltonino X_H, podemos escrever a equação diferencial $\alpha'(t) = X_H(\alpha_t)$ como

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}, \tag{3.4}$$

que são chamadas de *Equações de Hamilton*.

3.1 Integrais primeiras e Colchete de Poisson.

Dada a função hamiltoniana H, definimos o *fluxo hamiltoniano* $\phi_t : M \to M$ sendo o fluxo associado ao campo X_H, ou seja, para $x \in M$, $\phi_t(x)$ é solução para a equação diferencial $\dot{x} = X_H(x)$, com condição inicial $\phi_0(x) = x$. Aqui estamos supondo que o fluxo existe para todo tempo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, que o campo X_H é completo. Campos de vetores em variedades compactas, por exemplo, sempre são completos.

Veremos agora, por meio de duas proposições, que o fluxo hamiltoniano ϕ_t associado ao campo X_H preserva a forma simplética ω e a própria função hamiltoniana H.

Proposição 3.1.1. *Para todo t, o fluxo hamiltoniano ϕ_t preserva a forma ω.*

Demonstração. Dado o campo vetorial hamiltoniano X_H. Como a forma simplética ω é fechada e $\iota_{X_H}\omega$ é exata, segue da Formula de Cartan que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_H}\omega &= d(\iota_{X_H}\omega) + \iota_{X_H}(d\omega) \\ &= d(dH) = 0. \end{aligned}$$

□

Como o fluxo hamiltoniano preserva a forma simplética ω, segue que também preserva a forma volume de Liouville, $\frac{\omega^n}{n!}$, e portanto preserva volume. Uma outra propriedade particular dos fluxos hamiltonianos, é que suas órbitas "moram" nos conjuntos de níveis da função hamiltoniana associada ao campo hamiltoniano que gerou o fluxo. Mais especificamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.2. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética e $H \in C^\infty(M)$. O fluxo ϕ_t do campo vetorial hamiltoniano X_H deixa a função H invariante, ou seja, H é constante ao longo das curvas integrais de X_H.*

Demonstração. Seja $\alpha_x(t) = \phi_t(x)$ uma curva integral de X_H, onde $\alpha_x(0) = \phi_0(x) = x \in M$. Então,

$$\frac{d}{dt}H(\alpha_x(t)) = dH_{\alpha_x(t)}\alpha_x'(t) = dH_{\alpha_x(t)}X_H(\alpha_x(t)) = \omega(X_H(\alpha_x(t)), X_H(\alpha_x(t))) = 0.$$

Portanto, concluimos que $H(\phi_t(x)) = H(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou ainda, em termos de pullback, $\phi_t^* H = H$. □

Qualquer função $f \in C^\infty(M)$ que é constante em cada curva integral de X_H, mas não é constante em conjuntos abertos, é chamada uma *integral primeira* (ou *constante do movimento*, ou ainda *integral do movimento*) do sistema $\dot{x} = X_H(x)$. A proposição acima garante que a função hamiltoniana H é uma integral primeira para X_H.

Daremos agora uma definição de colchete para funções que será útil para encontrar, se existir, mais integrais primeiras para o campo X_H.

Definição 3.1.3. Sejam (M, ω) uma variedade simplética e $f, g \in C^\infty(M)$. O *colchete de Poisson* das funções f e g é definido por

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) = df(X_g) = X_g(f). \tag{3.5}$$

Geometricamente interpretamos o colchete de Poisson como sendo a taxa de variação da função f ao longo do fluxo hamiltoniano de g. Usando 3.3, podemos escrever o colchete de Poisson da seguinte forma

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

Proposição 3.1.4. *Sejam (M,ω) uma variedad simplética e $f,g,h \in C^\infty(M)$ então o colchete satisfaz as seguintes condições.*

(a) $\{f,g\} = -\{g,f\}$;

(b) $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$;

(c) $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$.

O colchete de Poisson definido numa variedade simplética, permite adicionarmos, com as condições acima, uma estrutura algébrica especial para o espaço vetorial das funções diferenciáveis $F(M)$. Não é difícil verificar que $(F(M),\{,\})$ é uma álgebra de Lie. Além disso, o item (c) acima, garante que o colchete $[,]$ de dois campos hamiltonianos também é um campo hamiltoniano. E verificando a identidade de Jacobi para campos hamiltonianos pode-se verificar que o conjunto de tais campos com o colchete $[,]$ também é uma álgebra de Lie. O estudo de Álgebras de Lie e Grupos de Lie não é o foco deste trabalho, mas o leitor interessado em tais assuntos para fluxos hamiltonianos e variedades simpléticas, pode encontrar maiores detalhes em Cannas [4] e Bursztyn e Macarini [2].

Dada uma variedade simplética (M,ω) munida como uma função $H \in C^\infty(M)$, como esta função gera um único campo hamiltoniano X_H, é comum chamar a tripla (M,ω,H) de *Sistema Hamiltoniano associado a H*, e a função H de hamiltoniana do sistema.

Daremos agora um resultado que relaciona integrais primeiras de um campo hamiltoniano com o colchete de Poisson de sua função hamiltoniana. O estudo deste resultado é um dos principais objetivos deste trabalho.

Teorema 3.1.5 (Principal 1)**.** *Seja (M,ω,H) uma sistema hamiltoniano. Uma função $f \in C^\infty(M)$ é constante ao longo de cada curva integral de X_H se, e somente se, $\{H,f\} = 0$.*

Demonstração. Suponha que f seja uma integral primeira então dado o campo X_H temos

$$0 = \mathcal{L}_{X_H} f = X_H(f) = df(X_H) = \omega(X_f, X_H) = \{f,H\}.$$

De forma analoga, supondo $\{H,f\} = 0$, concluimos que f é uma integral primeira. □

Dada a equação diferencial $x' = X_H(x)$ é interessante encontrar, se existir, um número suficiente de integrais primeiras, a ponto de poder especificar as curvas definidas pelas soluções da equação. E o teorema acima nos dá um mecanismo para procurar tais integrais primeiras em variedades simpléticas.

Um conjunto de funções $\{f_1, \ldots, f_n\}$ diz-se independentes quando suas diferenciais $(df_1)_p, \ldots, (df_n)_p$ são linearmente independentes em todos os pontos p de um aberto denso de M. Em $\mathbb{R}^{2n}$ isso significa verificar se os respectivos gradientes das funções são linearmente independentes. Um sistema Hamiltoniano (M, ω, H) é dito *(completamente) integrável* se possui $n = \frac{1}{2}\dim(M)$ integrais primeiras independentes, $f_1 = H, f_2, \ldots, f_n$, tais que

$$\{f_i, f_j\} = 0, \qquad \forall i, j = 1, ..., n. \tag{3.6}$$

A grosso modo falando, o sistema é completamente integrável se possui o máximo de integrais primeiras que comutam entre si em termos do colchete de Poisson. Como

$$\omega(X_{f_i}, X_{f_j}) = \{f_i, f_j\} = 0,$$

se $\{f_1, \ldots, f_n\}$ são linearmente independentes então, pela álgebra linear simplética e mais o fato que os campos X_{f_j}'s geram o subespaço isotrópico de T_pM, segue que n pode ser no máximo $\frac{1}{2}\dim(M)$.

Exemplo 3.1.6. Dado o sistema hamiltoniano $(\mathbb{R}^4, \omega, H)$ com coordenadas locais (x_1, x_2, y_1, y_2) e considere a hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1y_1 - x_2y_2 - ax_1^2 + bx_2^2.$$

A função $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1x_2$ é uma integral primeira para o campo hamiltoniano X_H. Pois, pelo Colchete de Poisson temos que

$$\begin{aligned} \{H, F\} &= \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \\ &= [(y_1 - 2ax_1) \cdot 0 - x_1 \cdot x_2] + [(-y_2 + 2bx_2) \cdot 0 - (-x_2)x_1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a função F é uma integral primeira para o sistema dado por $x' = X_H(x)$, onde neste caso $X_H = J\nabla H$. Não é difícil verificar que ∇H e ∇F são linearmente independentes em quase todo ponto do domínio $\mathbb{R}^4$.

Exemplo 3.1.7 (Pêndulo Simples)**.** Sejam θ o ângulo orientado entre a haste e a direção vertical, ξ a coordenada ao longo da fibra de T^*S^1 induzida pela coordenada ângulo padrão em S^1, l o comprimento da haste e m é a massa do corpo. A função hamiltoniana $H : T^*S^1 \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(\theta, \xi) = \frac{\xi^2}{2ml^2} + ml(1 - \cos\theta),$$

descreve o Pêndulo Simples em termo de energia (a constante universal foi omitida). Portanto, o pêndulo simples é um sistema integrável trivial, pois este é um sistema hamiltoniano de dimensão 2, (Para maiores detalhes ver Ana Cannas [3, Cap. 18, p.132]).

Exemplo 3.1.8 (Pêndulo Esférico)**.** Sejam m a massa, l o comprimento da haste e que $m = l = 1$. Tomando as coordenadas esféricas φ e θ para a haste e as coordenadas induzidas η e ξ em T^*S^2. A função hamiltoniana apropriada para este sistema é a função de energia $H : T^*S^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(\varphi, \theta, \eta, \xi) = \frac{1}{2}\left(\eta^2 + \frac{\xi^2}{\operatorname{sen}^2\varphi}\right) + \cos\varphi.$$

A função $F : T^*S^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(\varphi, \theta, \eta, \xi) = \xi$ é uma integral primeira do sistema independente da hamiltoniana (Para maiores detalhes ver Ana Cannas [3, Cap. 18, p.132]).

Seja (M, ω, H) um sistema completamente integrável $2n$-dimensional com as integrais primeiras $f_1 = H, f_2, \ldots, f_n$. Seja $c \in \mathbb{R}^n$ um valor regular para $f = (f_1, ..., f_n)$. Então a componente conexa de $f^{-1}(c)$ é difeomorfa a $\mathbb{R}^{n-k} \times T^k$, para algum $0 \leq k \leq n$, onde T^k é um toro k-dimensional. Quando esta componente é compacta, temos um toro chamado de Toro de Liouville. O leitor interessado em maiores detalhes sobre a dinâmica de sistemas integráveis, pode ver, por exemplo o Teorema de Arnold-Liouville em Ana Cannas [3].

3.2 Campos Simpléticos e Hamiltonianos Globais.

Definição 3.2.1. Seja (M, ω) uma variedade simplética. Um campo vetorial X é chamado *Campo Vetorial Simplético* se seu fluxo preserva a forma simplética ω, ou seja,

$$\mathcal{L}_X \omega = 0. \tag{3.7}$$

Pela formula de Cartan temos que $\mathcal{L}_X\omega = \iota_X d\omega + d(\iota_X\omega) = 0$. E como a forma simplética ω é fechada, segue que $d(\iota_X\omega) = 0$. Dessa forma, temos que X é simplético se, e somente se $\iota_X\omega$ é fechada. E analogamente, um campo Y é hamiltoniano se, e somente se $\iota_Y\omega$ é exata. Portanto, como toda forma exata é fechada, segue que todo campo vetorial hamiltoniano é simplético.

3.3 Primeiro grupo de cohomologia de De Rham e campos hamiltonianos globais.

Um campo vetorial X em uma variedade M é dito *globalmente hamiltoniano* (ou hamiltoniano) se existe uma função $f \in C^\infty(M)$ tal que $X = X_f$ e será dito *localmente hamiltoniano* se para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U de p, no qual o campo X é hamiltoniano, ou seja, neste caso $f \in C^\infty(U)$. Assim, todo campo hamiltoniano (global) é localmente hamiltoniano.

Daremos agora um teorema que pode ser encontrado em Lee [7]. Este resultado foi o segundo objetivo principal deste trabalho. Procuramos compreender o teorema e a sua demonstração, fazendo alguns detalhes omitidos pelo autor.

Teorema 3.3.1 (Principal 2)**.** *Seja (M, ω) um variedade simplético. Então:*

(a) *Um campo X em M é simplético se, e somente se, este for localmente hamiltoniano.*

(b) *Todo campo localmente hamiltoniano em M é globalmente hamiltoniano se, e somente se, $H^1_{dR}(M) = \{0\}$.*

Demonstração.

(a) Suponhamos que o campo X seja localmente hamiltoniano. Para que o campo X seja simplético é necessário e suficiente que $\mathcal{L}_X\omega = 0$. Pela formula de Cartan sabemos que

$$\mathcal{L}_X\omega = d(\iota_X\omega) + \iota_X(d\omega) = d(\iota_X\omega), \quad \text{(pois } \omega \text{ é fechada)}$$

Portanto, significa que X é simplético se, e somente se, $\iota_X\omega$ é fechada. Por outro lado temos que X é localmente hamiltoniano se para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança U_p e $f : U_p \to \mathbb{R}$, unicamente definida, tal que $X = X_f$. E assim

$$\iota_X\omega = \iota_{X_f}\omega = df.$$

Logo $\iota_X\omega$ é fechada (pois é exata) e X portanto é simplética. Reciprocamente, suponhamos que o campo X seja simplética. Pela Proposição 1.3.6, temos que cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U_p tal que a 1-forma fechada $\iota_X\omega$ é exata. Logo, existe uma função $f : U_p \to \mathbb{R}$ difarenciável tal que $\iota_X\omega = df$. Como ω é não-degenerada segue que $X = X_f$ em U_p (ou seja, $\omega(X, \cdot) = df = \omega(X_f, \cdot)$).

(b) Vamos supor que $H^1_{dR}(M) = 0$, então toda 1-forma fechada é exata. Pelo item (a) temos que qualquer campo locamente hamiltoniano X é simplético e portanto $\iota_X\omega$ é fechada. Como $H^1_{dR}(M) = 0$, segue que $\iota_X\omega$ é exata. Logo, existe uma função $f : M \to \mathbb{R}$ tal que $\iota_X\omega = df$. Como ω é não-degenerada, temos que $X = X_f$ e dessa forma X é globalmente hamiltoniana. Reciprocamente, seja η uma 1-forma fechada e X o campo definido por $X = \widetilde{\omega}^{-1}\eta$, onde $\widetilde{\omega} : TM \to T^*M$ é o isomorfismo definido por $\widetilde{\omega}(X) = \omega(X, \cdot)$. Como $\iota_X\omega = \omega(X, \cdot) = \widetilde{\omega}(X) = \eta$ é fechada, segue pela formula de Cartan que $\mathcal{L}_X\omega = 0$, e portanto X é um campo simplético, e pelo item (a) X é localmente hamiltoniano. Por hipótese, segue que $X = X_f$ onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.
Logo, $\eta = \widetilde{\omega}(X) = \widetilde{\omega}(X_f) = \omega(X, \cdot) = df$, onde concluimos que η é exata.

□

Daremos agora dois exemplos de campos vetoriais que são simpléticos mas não hamiltonianos globais. Vale ressaltar que não encontramos o primeiro exemplo em nossas referências bibliográficas. Construímos fazendo uma analogia com algumas propriedades de campos de vetores gradientes. Já o segundo exemplo, é encontrado em Bursztyn e Macarini [2], porém as contas não foram explicitadas pelo autor.

Exemplo 3.3.2. Dada a variedade $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ nas coordenadas (x, y) com estrutura simplética $\omega_0 = dx \wedge dy$. Seja o campo vetorial X definido por $X(x, y) = a(x, y)\partial/\partial x + b(x, y)\partial/\partial y$ para uma base fixada $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$. Calculando o produto interior de dx e dy para o campo X temos,

$$\iota_X dx = dx(X) = dx\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) = a, \qquad \iota_X dy = dy(X) = b$$

dessa forma,

$$\begin{aligned} \iota_X\omega_0 &= \iota_X(dx \wedge dy) \\ &= (\iota_X dx) \wedge dy - dx \wedge (\iota_X dy) \\ &= a(x,y)dy - b(x,y)dx. \end{aligned}$$

A forma $\iota_X\omega_0$ é fechada se $d(\iota_X\omega_0) = 0$, ou seja,

$$d(ady - bdx) = \frac{\partial a}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial b}{\partial y}dy \wedge dx = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) dx \wedge dy = 0$$

o que implica em $\partial a/\partial x = -\partial b/\partial y$.

Tomemos $a(x,y) = x/(x^2+y^2)$ e $b(x,y) = y/(x^2+y^2)$. Portanto a forma $\iota_X\omega_0$ é fechada pois,

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Como $\iota_X\omega_0$ é uma forma fechada para as funções a e b dadas acima, concluimos que o campo X assim definido é um campo simplético em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$ um aberto que contem uma circunferência C de raio $R > 0$ e centro na origem. Será que existe uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $X = -J_0\nabla f$? Ou seja, o campo X em U é hamiltoniano global em U?

Vamos supor por absurdo que o campo X é hamiltoniano em U. Como f é contínua e C é compacto temos que existe $p \in C$ tal que f assume seu valor máximo em C. Logo, $\nabla f(p)$ é normal a C. Como $\langle \nabla f(p), X(p)\rangle = \langle \nabla f(p), -J_0\nabla f(p)\rangle = 0$

Segue que $X(p)$ é perpendicular ao $\nabla f(p)$ o que é absurdo, uma vez que

$$X(p) = X(p_1,p_2) = \frac{1}{(p_1^2+p_2^2)}(p_1,p_2) = \lambda\nabla f(p)$$

Logo, o campo $X : U \to \mathbb{R}^2$ é simplético, mas não é globalmente hamiltoniano em U.

Exemplo 3.3.3. Considere o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ com coordenadas cilíndricas (θ, h) e a forma simplética dada por $\omega = d\theta \wedge dh$. O campo $X = \frac{\partial}{\partial h}$ é simplético pois

$\iota_X\omega = (\iota_X d\theta) \wedge dh - d\theta \wedge (\iota_X dh) = -d\theta$ é uma 1-forma fechada. Lembremos que $\theta : V \to \mathbb{R}$ é a função ângulo mencionada no Exemplo (1.1.2), e portanto ela está definida em um aberto V que não contém todo o S^1. A 1-forma $\iota_X\omega = -d\theta$ não é exata em S^1 e portanto X não é hamiltoniano (global).

Para provar que $\iota_X\omega = -d\theta$ não é exata em S^1, podemos tomar o caminho fechado em S^1 dado por

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\to S^1 \\ t &\mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

e verificar que $\int_\gamma d\theta \neq 0$. Como $\alpha = d\theta$ é a forma elemento ângulo, em coordenadas cartesianas podemos escrevê-la como

$$\alpha = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Ver por exemplo Elon [8] para maiores detalhes para esta expressão acima. Dessa forma, conforme o pullback obtido em (1.1) e a Fórmula para Mudança de Variáveis, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \alpha &= \int_{[0,2\pi]} \gamma^*\alpha \\
&= \int_0^{2\pi} \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\operatorname{sen} t \cdot (-\operatorname{sen} t) + \cos t \cdot (\cos t)}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\right] dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

[1] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 199? Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, Corrected reprint of the second (1989) edition.

[2] BURSZTYN, H., AND MACARINI, L. *Introdução à geometria simplética*. XIV Escola de Geometria Diferencial. [XIV School of Differential Geometry]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2006.

[3] CANNAS DA SILVA, A. *Lectures on symplectic geometry*, vol. 1764 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[4] CANNAS DA SILVA, A. *Introduction to symplectic and Hamiltonian geometry*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2003.

[5] DO CARMO, M. P. *Differential forms and applications*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Translated from the 1971 Portuguese original.

[6] DOERING, CLAUS I.; LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*, segunda ed. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2007.

[7] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*, second ed., vol. 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2013.

[8] LIMA, E. L. *Curso de análise. Vol. 2*, vol. 13 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.

[9] LIMA, E. L. *homologia básica*, vol. 2 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2012.

[10] NASH, C., AND SEN, S. *Topology and geometry for physicists*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1987. Reprint of the 1983 edition.

[11] SPIVAK, M. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*, second ed. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., 1979.

[12] TU, L. W. *An introduction to manifolds*, second ed. Universitext. Springer, New York, 2011.