PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

FABIANO PABLO LISBOA PEREIRA

Algumas Aplicações de Fórmulas Tipo Simons para Subvariedades Completas Tipo Espaço em Formas Espaciais Semi-Riemanianas

São Luís

2013

FABIANO PABLO LISBOA PEREIRA

Algumas Aplicações de Fórmulas Tipo Simons para Subvariedades Completas Tipo Espaço em Formas Espaciais Semi-Riemanianas

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Maxwell Mariano de Barros**.

São Luís

2013

FABIANO PABLO LISBOA PEREIRA

Algumas Aplicações de Fórmulas Tipo Simons para Subvariedades Completas Tipo Espaço em Formas Espaciais Semi-Riemanianas

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Maxwell Mariano de Barros**.

Dissertação aprovada em 08 de fevereiro de 2013, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(Orientador) Dr. Maxwell Mariano de Barros (UFMA)

Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório (UFAL)

Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo (UFMA)

A minha família.

A meus professores.

A meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus. Agradeço aos meus pais Sebastião Conceição Pereira e Hildenê Lisboa Pereira, a minha esposa, Márcia Joina Matos Pereira, que me acompanha e me da mais forças para continuar em meus projetos.

Agradeço aos meus amigos e a todos os meus professores, que sem os quais não seria possível chegar onde cheguei.

RESUMO

Neste trabalho obtemos uma desigualdade tipo Simons para o tensor

$$\phi = \sum_{\alpha,i,j} \phi_{ij}^{\alpha} w_i w_j e_{\alpha}, \text{ onde } \phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} - H^{\alpha}\delta_{ij}$$

e vamos aplicá-la, a fim de obter alguns resultados que caracterizam subvariedades umbílicas em uma forma espacial semi-Riemanniana.

Palavras-chave: Imersão tipo-espaço, Formas espaciais, Vetor curvatura média, Imersão umbílica, Fórmulas tipo Simons, Imersão totalmente geodésica.

ABSTRACT

In this paper we obtain an inequality for the tensor type Simons

$$\phi = \sum_{\alpha,i,j} \phi_{ij}^{\alpha} w_i w_j e_{\alpha}, \text{ onde } \phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} - H^{\alpha}\delta_{ij}$$

and we apply it in order to get some results that characterize submanifolds umbílicas in a semi-Riemannian space form.

Keywords: Immersion Type-Space, Shapes spatial, Mean curvature vector, Immersion umbílica, Simons type formulas, totally geodesic immersion.

SUMÁRIO

Capítulo 1
INTRODUÇÃO

Seja $\mathbb{S}^n(r)$ uma esfera n-dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$ com raio r e seja M^n uma subvariedade mínima imersa em $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Denote por B a segunda forma fundamental da imersão e por S o quadrado da segunda forma fundamental. Em seu trabalho pioneiro [12] J. Simons prova a seguinte inequação para o laplaciano de S:

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq S\left(n - \left(2 - \frac{1}{p}\right)S\right). \tag{1.1}$$

Como uma aplicação de (1.1), Simons [12] obteve o seguinte resultado:

Teorema 1.0.1. *Seja M^n uma subvariedade mínima fechada de $\mathbb{S}^{n+p}(1)$. Então M^n é totalmente geodésica, ou $S = \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$, ou $\sup S > \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$.*

Mais tarde S.S. Chern, M. do Carmo e S. Kobayashi, em um famoso paper [7], obtiveram uma desigualdade mais geral para ΔS e determinaram todas as subvariedades mínimas de $\mathbb{S}^{n+p}(1)$ satisfazendo $S = \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$. Mais precisamente, eles provaram os seguintes resultados:

Teorema 1.0.2. *Seja M^n uma subvariedade mínima imersa em um espaço (n+p)-dimensional de curvatura constante, então*

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq S\left(nc - \left(2 - \frac{1}{p}\right)S\right).$$

Teorema 1.0.3. *Seja M^n uma subvariedade mínima de $\mathbb{S}^{n+p}(1)$. Assuma que $S \leq \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$, então:*

(i) $S = 0$ *(e M^n é totalmente geodésica) ou* $S = \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$.

(ii) $S = \frac{n}{2-\frac{1}{p}}$ *se somente se:*

- *(a)* $p = 1$ *e M^n é localmente um toro de Clifford* $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$
- *(b)* $p = n = 2$ *e M^2 é localmente uma superfície Veronese em* $\mathbb{S}^4(1)$.

Para o caso de subvariedades M^n de $\mathbb{S}^{n+p}(1)$ com vetor curvatura média não nulo é conveniente modificarmos a segunda forma fundamental B e introduzirmos o tensor modificado $\phi = B - Hg$, onde $H =\mid h \mid$ é a curvatura média e g é a métrica induzida em M^n. Se $p = 1$, H. Alencar e M. do Carmo [2] obtiveram a seguinte desigualdade para $\Delta \mid \phi \mid^2$

$$\frac{1}{2}\Delta \mid \phi \mid^2 \geq \mid \phi \mid^2 \left(n(1+H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H \mid \phi \mid - \mid \phi \mid^2 \right). \tag{1.2}$$

Para cada $H \geq 0$, considere $p_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx - n(1+H^2)$ e seja B_H o quadrado da raiz positiva de $p_H(x)$. Por (1.2), Alencar e do Carmo [2] também mostram o seguinte resultado

Teorema 1.0.4. *Seja M^n uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ com curvatura média H constante. Assuma que $\mid \phi \mid^2 \leq B_H$, então*

(i) *Ou $|\phi|^2 = 0$ (e M^n é totalmente umbílica) ou $|\phi|^2 = B_H$.*

(ii) *$|\phi|^2 = B_H$ se somente se:*

(a) $H = 0$ e M^n é localmente um toro de Clifford.

(b) $H \neq 0$, $n \geq 3$, e M^n é localmente um produto em $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$, com $r^2 < \frac{n-1}{n}$.

(c) $H \neq 0$, $n = 2$, e M^2 é localmente um produto em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$, $0 < r^2 < 1$, $r^2 \neq \frac{1}{2}$.

Seja $\mathbb{R}^{n+p}_p$ um espaço vetorial (n+p)-dimensional com produto interno de índice p dado por $\langle x, y \rangle = -\sum_{i=1}^{p} x_i y_j + \sum_{j=p+1}^{n+p} x_i y_j$, existe um sistema de coordenadas natural $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+p})$ em $\mathbb{R}^{n+p}_p$. $\mathbb{R}^{n+p}_p$ é chamado de semi-espaço Euclidiano, esse espaço tem curvatura constante $c = 0$. Podemos definir as seguintes variedade semi-Riemanianas:

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^{n+p}_p(c) &= \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_{n+p+1}) \in \mathbb{R}^{n+p+1}_p \Big/ -\sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \sum_{j=p+1}^{n+p+1} x_j^2 = \frac{1}{c} \right\};\\
\mathbb{H}^{n+p}_p(c) &= \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_{n+p+1}) \in \mathbb{R}^{n+p+1}_{p+1} \Big/ -\sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 + \sum_{j=p+2}^{n+p+1} x_j^2 = -\frac{1}{c} \right\}.
\end{aligned}$$

onde para a primeira variedade acima temos $c > 0$ e para a segunda $c < 0$.

A partir de agora $Q_p^{n+p}(c)$ denotará os três espaços, vistos como variedades semi-Riemaniana completas de índice p e curvatura constante c. $\mathbb{S}_p^{n+p}(c)$ e $\mathbb{H}_p^{n+p}(c)$ são chamados de semi-esfera e semi-espaço hiperbólico, respectivamente. Seja M^n uma subvariedade tipo espaço (veja capítulo 5) de $Q_p^{n+p}(c)$ com vetor curvatura média h. Então M^n é máxima, isto é, $h = 0$. Ishihara [8] mostra a seguinte desigualdade para S

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq S\left(nc + \frac{S}{p}\right)$$

Ishihara [8] prova e mostra os seguintes resultados:

Teorema 1.0.5. *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço completa imersa em $Q_p^{n+p}(c)$, $c \geq 0$. Se M^n é máxima, então M^n é totalmente geodésica.*

Teorema 1.0.6. *Seja M^n uma subvariedade tipo-espaço completa imersa em $Q_p^{n+p}(c)$, $c < 0$. Se M^n é máxima, então $0 \leq S \leq -npc$.*

Seja M^n uma hipersuperfície tipo espaço de $Q_p^{n+1}(c)$ com vetor curvatura média constante H, no caso Riemaniano, é conveniente considerar o tensor ϕ. De acordo com Montiel [10], para M^n imersa em $\mathbb{S}_1^{n+1}(1)$, temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\phi|^2\left(|\phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| + n(1-H^2)\right)$$

Nesta dissertação, vamos usar algumas desigualdade do laplaciano do quadrado da norma do tensor ϕ, que serão usadas para provar teoremas de caracterização de subvariedades tipo espaço imersas em formas espaciais. Tais desigualdades são chamadas de desigualdades tipo Simons. Este trabalho basea-se em resultados obtidos por Chaves R.M.B e Sousa Jr.L.A.M [1].

Capítulo 2

PRELIMINARES

2.1 Variedades Diferenciáveis

Seja M um espaço topológico. Um *sistema de coordenadas* locais ou *carta local* em M é um homeomorfismo $\varphi : U \to \varphi(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que m é adimensão de $\varphi : U \to \varphi(U)$.

Para cada $p \in U$ tem-se $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots, \varphi_m(p))$. Os números $\varphi_i(p)$, $i = 1, \ldots, m$, são chamados as *coordenadas* do ponto $p \in U$ no sistema φ.

Um *atlas* de dimensão m é uma coleção $\mathfrak{U}$ de sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \to \varphi(U)$ em M, cujos domínios U dos sistemas de coordenadas cobrem M. Os domínios U dos sistemas de coordenadas $\varphi \in \mathfrak{U}$ são chamados vizinhanças coordernadas de $\mathfrak{U}$.

Um espaço topológico M no qual existe um atlas de dimesão m chama-se *variedade topológica* de dimensão m. Em outras palavras, M é uma variedade topológica de dimensão m se, e somente se, cada ponto de M tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^m$.

Dados dois sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \to \varphi(U)$ e $\beta : V \to \beta(V)$ no espaço topológico de dimensão m, tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenada $\varphi_i = \varphi_i(p)$ no sistema φ e coordenadas $\beta_i = \beta_i(p)$ relativo ao sistema β.

A correspondência $(\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots, \varphi_m(p)) \leftrightarrow (\beta_1(p), \beta_2(p), \ldots, \beta_m(p))$ estabelece um homeomorfismo $\Psi_{\varphi\beta} = \varphi \circ \beta : \varphi(U \cap V) \to \beta(U \cap V)$que é chamado de *mudança de coordenadas*. Se $z : W \to \mathbb{R}^m$ é outro sistema de coordenadas locais tal que $U \cap V \cap W \neq \emptyset$ então $\Psi_{\varphi z} = \Psi_{\beta z} \circ \Psi_{\varphi\beta} : \varphi(U \cap V \cap W) \to (U \cap V \cap W)$. Tem-se $\Psi_{\varphi\varphi} = id_{\varphi(U)}$ e $\Psi_{\varphi\beta} = \left(\Psi_{\varphi\beta}\right)^{-1}$.

Um atlas $\mathfrak{U}$ sobre o espaço topológico M diz-se *diferenciavel de classe* C^k $(k \geq 1)$, se todas as mudanças de coordenadas $\Psi_{\varphi\beta}$, com $\varphi, \beta \in \mathfrak{U}$ são aplicações de classe C^k. Em particular, se escrevemos

$$\Psi_{\varphi\beta} : (\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots, \varphi_m(p)) \leftrightarrow (\beta_1(p), \beta_2(p), \ldots, \beta_m(p))$$

então o determinante jacobiano $det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial\beta^i}\right)$ é não nulo em todo ponto de $\varphi(U\cap V)$.

Seja $\mathfrak{U}$ um atlas de demensão m e classe C^k num espaço topológico M. Um sistema de coordenadas $\varphi : U \to \varphi(U)$ diz-se *admissível relativamente ao atlas* $\mathfrak{U}$ se, para todo sistema de coordenadas $\beta : U \to \beta(U)$, pertencente a $\mathfrak{U}$, com $U \cap V \neq \emptyset$, a mudança de coordenadas $\Psi_{\varphi\beta}$ é um difeomorfismo de classe C^k. Dizemos que os sistemas $\varphi : U \to \varphi(U)$ e $\beta : U \to \beta(U)$ são *compatíveis*.

Um atlas $\mathfrak{U}$, de dimensão m e de classe C^k em M, diz-se *máximo* quando contém todos os sistemas de coordenadas locais admissíveis em relação a $\mathfrak{U}$. Todo atlas de classe C^k em M está contido em um único atlas máximo de classe C^k. De fato, seja $\mathfrak{A}$ um atlas em M de dimensão m. Se $\mathfrak{U}$ é o conjunto de todos os sistemas de coordenadas de classe C^k m-dimensionais em M tal que cada sistema em $\mathfrak{U}$ é compatível com cada sistema em $\mathfrak{A}$.

1. $\mathfrak{U}$ é obviamente um atlas (isso por definição)

2. Temos que mostra que $\mathfrak{U}$ é máximo.

Para isso basta mostrar que dados dois sistemas de coordenadas quaisquer φ,β em $\mathfrak{U}$ numa vizinhaça de um ponto $p \in M$ que pertença à intersecção dos domínios desses sistemas de coordenadas, são compatíveis. Consideremos um atlas máximo Γ em M e seja $\xi \in \Gamma$ tal que seu domínio esteja contido em $(\beta(p))^{-1}$. A composição $\left(\varphi \circ \xi^{-1}\right) \circ \left(\xi \circ \beta^{-1}\right)$ é diferenciável, pois trata-se de uma composição de aplicações diferenciáveis. Logo $\varphi \circ \beta^{-1}$ é diferenciável numa vizinhaça de p, analogamente prova-se que $\varphi^{-1} \circ \beta$ é diferenciável. Portanto $\mathfrak{U}$ é máximo.

3. $\mathfrak{U}$ é único. Como ξ é compatível com φ,β quaisquer numa vizinhaça de p, então $\xi \in \mathfrak{U} \supset \mathfrak{A}$, assim $\Gamma \subset \mathfrak{U}$. Mas com Γ é máximo temos que $\Gamma \supset \mathfrak{U}$ e portanto, $\Gamma = \mathfrak{U}$, finalmente provando a unicidade.

Definição 2.1.1. Uma *variedade diferenciável*, de dimensão m e classe C^k é um par $(M, \mathfrak{U})$ onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathfrak{U}$ é um atlas máximo de dimensão m de classe C^k sobre M. As vezes dizemos que $\mathfrak{U}$ é uma *estrutura diferenciável* de M.

A exigência de que o atlas seja máximo não é essecencial mas é conveniente. Em outros contextos admitem-se veriedades não-hausdorff ou sem base enumerável. Note que para todo $r \leq k$, uma variedade de classe C^k pode ser olhada como uma variedade de classe C^r, pois qualquer atlas de classe C^k está contido em um único atlas de classe C^r.

Exemplo 2.1.2 (Os espaços Euclidianos)**.** Consideremos em $\mathbb{R}^m$ o atlas $\mathfrak{U}$ contendo o único sistema de coordenadas $\varphi = id : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. É claro que $\mathfrak{U}$ é uma atlas de classe C^∞ e de dimensão m em R^m. Para cada $k = 0, 1, 2, \ldots \infty$ seja $\mathfrak{U}_k$ o atlas máximo de classe C^k em R^m que contem $\mathfrak{U}$. O par $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{U}_k)$ é uma variedade de dimensão m e classe C^k.

De agora em diante, indicaremos uma variedade de dimensão m apenas por M^m ou simplesmente M.

Definição 2.1.3. Sejam M^m uma variedade diferenciável e $U \subset M$ uma vizinhança aberta de p. Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in U$ se dado um sistema de coordenadas $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$, a função $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em p. A função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em M se for diferenciável em todos os pontos de M. Vamos denotar o conjunto de todas as funções diferenciáveis de M por $\mathfrak{F}(M)$.

Definição 2.1.4. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\phi : M^m \rightarrow N^n$ é diferenciável em $p \in M$ se dado um sistema de coordenadas $\beta : V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^m$em $\phi(p)$ existe um sistema de coordenadas $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ em p tal que $\phi\left(\varphi^{-1}(U)\right) \subset (\beta(V))^{-1}$ e aplicação

$$\beta \circ \phi \circ \varphi^{-1} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset R^n \tag{2.1}$$

é diferenciável em $\varphi^{-1}(p)$.

Dizemos que ϕ é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos desse aberto. A aplicação (2.1) é chamada a *expressão* de ϕ nas coordenadas φ e β. As definições independem da escolha do sistema de coordenadas.

2.2 Vetores tangentes

Definição 2.2.1. Seja p um ponto na variedade M. Um vetor tangente a M em p é uma função de valores reais $v : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que é

1. $\mathbb{R}$-linear: $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$, e

2. Leibniziniana: $v(fg) = v(f)\, g(p) + f(p)\, v(g)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

Para cada ponto $p \in M$, o conjunto de todos os vetores tangentes a M em p será denotado por T_pM.

As definições usuais de adição de funções e multiplicação por escalar fazem do T_pM um espaço vetorial sobre o conjunto dos números reais. $(v+w)(f) = v(f) + v(f)$ $(av)(f) = av(f)$ para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$ e $a \in \mathbb{R}$ e T_pM é chamado de espaço tangente a M em p.

Definição 2.2.2. Seja $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ um sistema de coordenadas para $p \in M$. Se $f \in \mathfrak{F}(M)$, então $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f\circ\xi^{-1})}{\partial u_i}(\xi(p))$, $(1 \le i \le m)$ onde $u_1, u_{2,} \ldots, u_m$ são funções coordenadas do $\mathbb{R}^m$. A seguinte função

$$\partial_i \mid_p = \frac{\partial}{\partial x_i} : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$$

associa cada função $f \in \mathfrak{F}(M)$ ao número real $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, e este é um vetor tangente a M em p. Podemos imaginar $\partial_i \mid_p$ como sendo o vetor tangente da i-ézima curva coordenada passando por p.

Lema 2.2.3. *Seja $v \in T_pM$.*

1. *Se $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ são iguais numa vizinhança de p, então $v(f) = v(g)$.*

2. *Se $h \in \mathfrak{F}(M)$ é constante numa vizinhança de p, então $v(h) = 0$.*

Demonstração. 1. Sejam $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, tais que $f(U) = g(U)$, onde U é uma vizinhança de $p \in M$. Considere $h = fg$, então em U temos: $v(h) = v(f)\, g + v(g)\, f$, por outro lado temos que $v(h) = 2fv(f)$. Portanto, $2v(f) = v(f) + v(g) \Rightarrow v(f) = v(g)$.

2. Seja $f \in \mathfrak{F}(M)$ tal que em U, $f(U) = 1$, então $v(f(U)) = v(1) = v(1\,.\,1) = v(1)\,1 + 1v(1) = 2v(1)$. Portanto $v(1) = 0$.

Agora consideremos $h \in \mathfrak{F}(M)$, tal que em U, $h(U) = c$, onde c é uma constante, então $v(h) = v(c) = v(c\,.\,1) = cv(1) = 0$. □

Teorema 2.2.4. *Se $\xi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ um sistema de coordenadas de M em p, então os vetores coordenados $\partial_1 \mid_p$, $\partial_2 \mid_p, \ldots, \partial_m \mid_p$ formam uma base do espaço T_pM, e $v = \sum_i^m v(x_i)\, \partial_i \mid_p$ para todo $v \in T_pM$.*

Demonstração. Podemos trabalhar apenas numa vizinhança coordenada $\mathfrak{U}$ de ξ.

Uma vez que $v(c) = 0$ sem perda de generalidade podemos assumir que $\xi(p) = 0 \in \mathbb{R}$. Escolhendo se necessário $\mathfrak{U}$ de modo que $\xi(\mathfrak{U}) = \{q \in \mathbb{R}^m : |\, q \,| < \varepsilon\}$para algum $\varepsilon > 0$.

Seja g uma função diferenciável em $\xi(\mathfrak{U})$ tal que, para cada $1 \leq i \leq m$ definimos $g_i(q) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u_i}(tq)\, dt$ para todo $q \in \xi(\mathfrak{U})$.

Mostra-se pelo teorema fundamental do cálculo que $g = g(0) + \sum g_i u_i$ em $\xi(\mathfrak{U})$.

Assim se $f \in \mathfrak{F}(M)$, podemos fazer $g = f \circ \xi^{-1}$, então $f = f(p) + \sum f_i x_i$ em $\mathfrak{U}$.

Aplicando v em f, temos

$$v(f) = 0 + \sum v(f_i)\, x_i(p) + \sum f_i(p)\, v(x_i) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\, v(x_i).$$

Isto vale para toda $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Então os vetores tangentes v e $\sum_i^m v(x_i)\, \partial_i \mid_p$ são iguais.

Resta mostramos que os vetores $\partial_i \mid_p$ são linearmente independentes. Mais se $\sum_i^m a_i \partial_i \mid_p = 0$, então aplicando em x_i, temos $0 = \sum a_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) = a_i$.

Em particular, a dimensão (espaço vetorial) de T_pM é a mesma dimensão de M. □

Definição 2.2.5. Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Em cada ponto $p \in M$ a função $d\phi : T_pM \to T_{\phi p}N$ que associa o vetor $v \in T_pM$ ao vetor $v_\phi = d\phi_p(v)(g) \in T_{\phi(p)}N$, onde $g \in \mathfrak{F}(N)$, é chamada *diferencial da função* ϕ em p. Assim $d\phi$ é caracterizada pela equação $d\phi_p(v)(g) = v(g \circ \phi)$ para todo $v \in T_pM$ e $g \in \mathfrak{F}(N)$.

Mostra-se que a diferencial de uma aplicação é linear.

Lema 2.2.6. *Seja $\phi : M \to N$ uma função diferenciável. Se $\xi = (x_1, \ldots, x_m)$ é um sistema de coordenadas de M em p, e $\eta = (y_1, \ldots y_n)$ é um sistema de coordenadas de N em $\phi(p)$, então*

$$d\phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (y_j \circ \phi)}{\partial x_i}(p)\, \frac{\partial}{\partial y_j}$$

para $(1 \leq i \leq m)$, $(1 \leq j \leq n)$.

Demonstração. Seja $w \in T_{\phi(p)}N$ a parte esquerda dessa equação. Podemos escrever w em funçao da base do $T_{\phi(p)}N$ da seguinte forma $w = \sum w(y_i)\, \frac{\partial}{\partial y_i} \mid_{\phi(p)}$.

Pela definição de diferencial de uma aplicação,

$$w(y_i) = d\phi_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (y_j \circ \phi)}{\partial x_i}(p)\, \frac{\partial}{\partial y_j} \mid_{\phi(p)}$$

para $(1 \leq i \leq m)$. □

Assim a matriz de $d\phi$ com respeito as bases coordenadas é

$$\left(\frac{\partial\left(y_j \circ \phi\right)}{\partial x_i}(p)\right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

chamada de matriz Jacobiano de ϕ relativo a ξ e η.

Lema 2.2.7. *Se $\phi : M \rightarrow N$ e $\psi : N \rightarrow P$ são aplicações diferenciávies, então para cada $p \in M$,*

$$d\left(\psi \circ \phi\right)_p = d\psi_p \circ d\phi_p.$$

Demonstração. Se $v \in T_pM$ e $g \in \mathfrak{F}(p)$, então

$$d\left(\psi \circ \phi\right)(v)(g) = v\left(g \circ \psi \circ \phi\right) = d\phi(v)\left(g \circ \psi\right) = \left(d\psi \circ d\phi(v)\right)(g).$$

□

Definição 2.2.8. Seja $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação. Dizemos que ϕ é um *difeomorfismo* se é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva e sua inversa ϕ^{-1} é diferenciável. A aplicação ϕ é um *difeomorfismo local* em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\phi(p)$ tais que $\phi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

Teorema 2.2.9. *Seja $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. A diferencial $d\phi$ em $p \in M$ é um* isomorfismo linear *se somente se, existe uma vizinhança V de um ponto $p \in M$ tal que $\phi \mid V$ é um difeomorfismo de V em uma vizinhança $\phi(V)$ de $\phi(p)$ em N.*

2.3 Curvas

Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma *curva* (diferenciável) em M.

Definição 2.3.1. Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva. O vetor velocidade de α em $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ é dado por

$$\alpha'(t) = d\alpha\left(\frac{d}{du}\big|_t\right) \in T_{\alpha(t)}(M).$$

Algumas propriedades:

1. *Derivada direcional.* Pela defimção de $d\alpha$, o vetor tangente $\alpha'(t)$ aplicado numa função $f \in \mathfrak{F}(M)$ fica definido por $\alpha'(t) f = \frac{d(f \circ \alpha)}{du}(t)$.

   Assim se α é uma curva qualquer tal que $\alpha'(0) = v$, então $v(f) = \left(\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right)(0)$.

2. *Expressão coordenada.* Seja $x_1, \ldots, x_m$ uma sistema de coordenadas em M no ponto $\alpha(t)$ de α. Então $\alpha' = \sum_i \frac{d(x_i \circ \alpha)}{du}(t)\, \partial_i$.

   onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

3. *Reparametrização.* Se $\alpha : I \to M$ (I intervalo aberto) é uma curva e $h : J \to I$ (J intervalo aberto) uma função diferenciável no intervalo J, então $\beta = \alpha(h) : J \to M$ é uma curva chamada *reparametrização* de α. Então $\beta' = \left(\frac{dh}{du}\right)(s)\, \alpha'(h(s))$

Definição 2.3.2. Para todo $s \in J$, sejam $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $\alpha : I \to M$ uma curva em M, então $\phi \circ \alpha : I \to N$ é uma curva em N. E

$$d\phi\left(\alpha'(t)\right) = (\phi \circ \alpha)'(t)$$

para todo $t \in I$. Se $\alpha'(t) \neq 0$, a curva α é dita *regular*.

2.4 Campos de Vetores

Um campo de vetores V em uma variedade M é uma função que associa cada ponto $p \in M$ a um vetor tangente $V_p \in T_pM$.

Se V é um campo de vetores e $f \in \mathfrak{F}(M)$, então Vf denota a função com valores reais em M dada por $(Vf)(p) = V_p(f)$ para todo $p \in M$. Dizemos que V é diferenciável se Vf é diferenciável para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Vamos denotar o conjunto de todos os campos diferenciáveis por $\mathfrak{X}(M)$.

Campos de vetores podem ser somados entre si, ou multiplicados por funções $f \in \mathfrak{F}(M)$, de maneira óbvia:

$(fV)_p = f(p)\, V_p$, $(V + W)_p = V_p + W_p$ pata todo $p \in M$.

Se V e W são diferenciáveis, então os campos $V + W$ e fV também o são.

Estas duas operações sobre o conjunto $\mathfrak{X}(M)$ fazem de $\mathfrak{X}(M)$ um módulo sobre o anel $\mathfrak{F}(M)$.

Se $\xi = (x_1, \ldots, x_m)$ é um sistema de coordenadas em $\mathfrak{U} \subset M$, então para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ o campo de vetores ∂_i em $\mathfrak{U}$ que associa cada $p \in \mathfrak{U}$ ao vetor tangente $\partial_i\,|_p$ é chamado de *campo de vetor coordenado* em ξ. Estes campos de vetores são diferenciáveis, pois $\partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ o são.

Segue-se imediatamente pelo teorema da base que para cada campo de vetor V temos $V = \sum V(x_i)\, \partial_i$ em $\mathfrak{U}$.

A derivada em $\mathfrak{F}(M)$ é a função $\mathfrak{D} : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ tal que

1. $\mathbb{R}$-linear: $\mathfrak{D}(af + bg) = a\mathfrak{D}(f) + b\mathfrak{D}(g)$, $(a, b \in \mathbb{R})$, e

2. Leibniziana: $\mathfrak{D}(fg) = \mathfrak{D}(f)g + f\mathfrak{D}(g)$.

A definição de vetor tangente mostra que para um campo de vetor $V \in \mathfrak{X}(M)$ a função $f \to Vf$ é uma derivação em $\mathfrak{F}(M)$. Por outro lado, cada derivação $\mathfrak{D}$ em $\mathfrak{F}(M)$ vem de um campo vetorial.

De fato, cada ponto $p \in M$ define $V_p : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ por $V_p(f) = \mathfrak{D}(f)(p)$. As propriedades (1) e (2) a cima implicam que V_p é um vetor tangente a M em p; assim V é um campo de vetor bem definido em M. Mais $Vf = \mathfrak{D}(f) \in \mathfrak{F}(M)$ para toda $f \in \mathfrak{F}(M)$, então V é diferenciável e determina a derivada $\mathfrak{D}$.

Quando conveniente vamos considerar um campo de vetor como uma derivada de $\mathfrak{F}(M)$ e vice-versa. Esta interpretação leva a uma operação crucial para campos de vetores.

Se $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ seja $[V, W] = VW - WV$. Esta função de $\mathfrak{F}(M)$ em $\mathfrak{F}(M)$ associa cada f a $V(Wf) - W(Vf)$.

Um cáculo simples mostra que $[V, W]$ é uma derivação em $\mathfrak{F}(M)$, portanto é um campo de vetores em M. A derivação $[V, W]$ é chamada *colchete* de V em W.

Em um ponto p, temos $[V, W]_p(f) = V_p(Wf) - W_p(Vf)$.

Lema 2.4.1. *Se X, Y e Z são campos de vetores diferenciáveis de vetores em M, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g : M \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutativa)

2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ e $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$(R-bilinearidade)

3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$. (identidade de Jacobi)

Demonstração. $[X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X]$;

$$\begin{aligned} [aX + bX, Z] &= (aX + bY)Z - Z(aX + bY) \\ &= aXZ + bYZ - aZX - bZX \\ &= a[X, Z] + b[Y, Z]; \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
[[X, Y], Z] &= [X, Y]Z - Z[X, Y] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX; \\
[[Y, Z], X] &= [Y, Z]X - X[Y, Z] = YZX - ZYX - XYZ + XZY; \\
[[Z, X], Y] &= [Z, X]Y - Y[Z, X] = ZXY - XZY - YZX + YXZ;
\end{aligned}$$

Somando as três parcelas acima obtemos a identidade de Jacobi.

A operação colchete que é R-bilinear, não $\mathfrak{F}(M)$-bilinear.

De fato, $[fX, gY] = (fX)(gY) - (gY)(fX)$

Considerando um sistema de coordenadas qualquer no aberto $U \subset M$, podemos escrever $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, onde cada a_i, b_j funções diferenciáveis de U em $\mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
(fX)(gY) &= \sum_i fa_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j gb_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_i fa_i \left(\sum_j gb_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_j \frac{\partial gb_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_i fa_i \left(\sum_j gb_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_j \left(b_j \frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{i,j} fa_i g b_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j} fa_i \left(b_j \frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j} fa_i g b_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j} fa_i b_j \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j} fa_i g \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j} fa_i g b_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(\sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i,j} fa_i g \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j} fa_i g b_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(\sum_i a_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\left(\sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i,j} fa_i g \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j};
\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
(gY)(fY) &= \sum_j gb_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i fa_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_j gb_j \left(\sum_i fa_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} a_i + f\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{j,i} gb_j fa_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{j,i} \frac{\partial f}{\partial x_j} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,i} gb_j f \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{j,i} gb_j fa_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} + g\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \sum_{j,i} gb_j f \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Logo, $[fX, gY] = (fX)(gY) - (gY)(fX)$

$$\sum_{i,j} g a_i f b_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + g\left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{j,i} g a_i f \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j,i} f b_j g a_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$-f\left(\sum_j b_j \frac{\partial g}{\partial x_j}\right)\left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \sum_{j,i} f b_j g \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= gX(f)Y + gf\sum_{i,j}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - fY(g)X$$

$$= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

□

2.5 K-Formas

Dado um espaço vetotrial V denotemos por $\Lambda^k(V)$ o conjunto das aplicações k-lineares alternadas $w : V \times \cdots \times V \longrightarrow R$, onde $V \times \cdots \times V$ tem exatamente k fatores. Alternadas no sentido de

$$w(u_1, \cdots, u_k) = -w(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_j, \cdots, u_{j-1}, u_i, \cdots, u_k), \qquad j > i.$$

Definição 2.5.1 (forma exterior)**.** Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma k-forma exteriror w em M é uma escolha, para cada $p \in M$, de um $w(p) \in \Lambda^k(T_pM)$.

Dada uma k-forma exterior w e uma parametrização $x_\alpha : U \longrightarrow M$ em uma vizinhaça de $p \in M$, dizemos que a k-forma exterior w_α, em $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, dada por $w_\alpha(q)(v_1, \cdots, v_k) = w(x_\alpha(q))\left(d(x_\alpha)_q(v_1), \cdots, d(x_\alpha)_q(v_k)\right), \qquad v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ é a representação de w na parametrização

Notação: $w_\alpha(v_1, \cdots, v_k) = w(d(x_\alpha)(v_1), \cdots, d(x_\alpha)(v_k)), \qquad v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$

Observação . Se mudarmos o sistema de coordenadas para (x_β, U_β), obtemos que

$$\left(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha\right)^* w_\beta = w_\alpha,$$

onde

$$(f^*w)(p)(v_1, \cdots, v_k) = w(f(q))\left(df_q(v_1), \cdots, df_q(v_k)\right) \qquad v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n,$$

Uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma k-forma w em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.5.2. Uma forma diferenciável de ordem k (ou k-forma diferenciável) na variedade M^n é uma k-forma exterior cuja representação em um sistema de coordenadas (logo em todos) é diferenciável.

É interessante notar que todas as operações definidas para formas diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$, como diferencial e integral, podem ser extendidas as formas em M^n através de sua representação local.

Dada uma forma diferenciável w em uma variedade M, dw é a forma em M cuja representação local é dw_α. Obviamente, dw está bem definida, pois

$$dw_\alpha = d\left(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha\right)^* w_\beta = \left(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha\right)^* dw_\beta.$$

Seja w uma 1-forma diferenciável em uma variedade diferenciável M e, sejam X e Y campos vetoriais diferenciáveis em M. É possível mostrar que

$$dw\,(X, Y) = X\,(w\,(Y)) - Y\,(w\,(X)) - w\,([X, Y])\,.$$

Mais geralmente, se $X_1, \cdots, X_{k+1}$ são campos diferenciáveis e w é uma k-forma, então

$dw\,(X_1, \cdots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i w\,(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_{k+1}) +$
$\sum_{i<1}^{k+1} (-1)^{i+j} w\left(\left[X_i, X_j\right], X_1 \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_{k+1}\right).$

Definição 2.5.3. O produto exterior de duas 1-formas lineares w_1 e w_2 em um espaço vetorial V é a forma bilinear alternada

$$w_1 \wedge w_2 = w_1\,(v_1)\,w_2\,(v_2) - w_1\,(v_2)\,w_2\,(v_1)\,, \qquad v_1, v_2 \in V.$$

Além disso, se $w_1, \cdots, w_n$ é uma base do espaço das formas lineares V^*, então $w_i \wedge w_j$, $i, j = 1, \cdots, n$, formam uma base para o espaço vetorial $\Lambda^2\left(V^*\right)$ das formas bilineares de $V \times V$.

As *1-formas* de uma variedade diferenciável M são objetos do dual do campo de vetores.

Em um ponto p de M o espaço dual $T_pM^\star$ do espaço T_pM é chamado de *espaço contangente* de M em p. Elementos do $T_pM^\star$ as vezes são chamados de *covetores* e são funções diferenciáveis de T_pM em $\mathbb{R}$.

Definição 2.5.4. Uma *1-forma* θ em uma variedade M é uma função que associa cada ponto p a um elemento θ_p do espaço cotangente $T_pM^\star$. Se θ é uma 1-forma em M e X é um campo de vetores em M, então θX é uma a função de valores reais em M cujo valor em cada ponto p é o valor de θ_p em X_p.

A 1-forma θ é diferenciável se θX é diferenciável em todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

O conjunto de todas as 1-formas de M será denotado por $\mathfrak{X}^\star(M)$.

Podemos munir $\mathfrak{X}^\star(M)$ com uma estrutura de módulo, isto é

$$(\theta+\omega)_p = \theta_p + \omega_p, \qquad (f\theta)_p = f(p)\,\theta_p$$

para todo $p \in M$. Assim $\mathfrak{X}^\star(M)$ é um módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$.

Definição 2.5.5. A diferencial de $f \in \mathfrak{F}(M)$ é uma 1-forma df tal que $(df)(v) = v(f)$ para cada vetor tangente v de M. Claramente df é uma 1-forma uma vez que em cada ponto p a função $(df)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ é linear, e se $V \in \mathfrak{X}(M)$ a função $(df)(V) = Vf$ é diferenciável.

Se $x_1, \ldots, x_m$ é um sistema de coordenadas em $U \subset M$ temos as 1-formas coordenadas $dx_1, \ldots, dx_m$ em U.

Para cada ponto em U as 1-formas coordenadas fornecem uma base dual para os campos de vetores coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_m$ uma vez que $dx_i\left(\partial_j\right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$. Mostra-se que para cada 1-forma θ,

$$\theta = \sum \theta(\partial_i)\, dx_i, \textit{ em } U,$$

Lema 2.5.6. *O diferencial tem as seguintes propriedades:*

1. $d : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{X}^\star(M)$ *é R-linear.*
2. *Regra do produto: Se* $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, *então* $d(fg) = gdf + fdg$.
3. *Se* $f \in \mathfrak{F}(M)$ *e* $h \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$, *então* $d(h(f)) = h'(f)\, df$.

2.6 Subvariedades

Definição 2.6.1. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\phi : M \to N$ é uma *imersão* se $d\phi : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, ϕ é um homeomorfismo sobre $\phi(M) \subset N$, onde $\phi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que ϕ é um *mergulho*.

Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma *subvariedade* de N.

Observa-se que se $\phi : M^m \to N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$; a diferença $n - m$ é chamada *codimensão* da imersão ϕ. Observa-se facilmente que M é um subespaço topológico de N, cuja topologia é induzida por N pelo mergulho ϕ.

Se P é uma subvariedade de M e $\phi : M \to N$ uma função diferenciável, então a restrição de ϕ em P denotada por $\phi\ |_P$ é uma aplicação diferenciável, onde $\phi\ |_P$ é apenas $\phi \circ j$, onde $j : P \to M$ é um mergulho.

Em particular, se $f \in \mathfrak{F}(M)$, então $f\ |_P \in \mathfrak{F}(P)$. Uma vez que $dj : T_pP \to T_pM$ é injetiva para todo p, ignoramos dj e consideramos T_pP um subespaço vetorial de T_pM.

Sejam P uma subvariedade de M de dimensão k ($k \leq m$) e $\xi : U \to \mathbb{R}^m$ um sistema de cooredenadas em M. Podemos definir uma *restrição* de ξ em P (denota-se ξ_P) escolhendo-se as k primeiras funções cooredenadas de ξ e mantendo as $m - k$ coordenadas constantes.

Então, $\xi_P : U \cap P \to \mathbb{R}^k$ é uma restrição de ξ em $U \cap P$.

Prova-se que ξ_P é um sistema de coordenadas em P, e prova-se também que para cada ponto de P existe um sistema de coordenadas em M que pode ser restrito a P dando origem a sistema coordenado em P. Dizemos que ξ_P é um *sistema de coordenadas adaptada* a P por ξ.

Proposição 2.6.2. *Um subconjunto P de uma variedade diferenciável M pode ser transformado em uma subvariedade de M de uma uma única forma.*

Demonstração. Por definição a P deve ser dada uma topologia induzida. Suponha dois atlas associados ao espaço P, produzindo assim duas variedades P_1 e P_2. Essas varidades são subvariedades de M, pois, as identidades $id_1 : P_1 \to M$ e $id_2 : P_2 \to M$ são mergulhos. Como P_1 e P_2 possem os mesmos elementos, então as identidades $P_1 \to P_2$ e $P_2 \to P_1$ são difeomorfismos inversos. Daqui resulta que os atlas máximos de P_1 e P_2 são idênticos. $\square$

Proposição 2.6.3. *Um subconjunto P de uma variedade M é uma subvariedades k-dimensional se (e somente se) em cada ponto $p \in P$ existe um sistema de coordenadas de M que pode ser adaptado para P k-dimensionalmente (ou seja, o sistema coordenado adaptado tem dimensão k).*

O campo de vetores X sobre M é tangente a subvariedade P de M sempre que $X_p \in$

T_pP para todo $p \in P$. (Lembre-se que para uma subvariedade, T_pP é um subespaço de T_pM).

Proposição 2.6.4. *Seja P é uma subvariedade de M.*

1. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é tangente a P, então a restrição $X \mid P$ de P é um campo de vetores diferenciável em P.

2. Além disso, se $Y \in \mathfrak{X}(M)$ também é tangente a P, então o colchete $[X, Y]$ é tangente a P e $[X, Y] \mid P = [X \mid P, Y \mid P]$.

2.7 O Fibrado Tangente

Seja M uma varidade diferenciável e seja $TM = \left\{(p, v)\,; p \in M, v \in T_pM\right\}$. Munindo TM de uma estrutura diferenciável (dimensão $2n$) TM será chamado de *fibrado tangente* de M.

2.8 Orientabilidade

Definição 2.8.1. Uma variedade M é orientável desde que exista uma coleção $\mathcal{O}$ de sistemas coordenados em M cujos domínios cobrem M e tal que para cada $\xi, \eta \in \mathcal{O}$ o determinante da função jacobiano $J(\xi, \eta) = det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ é positivo. ($\mathcal{O}$ é chamado *atlas da orientação* de M.)

2.9 Tensores

Definição 2.9.1. Para inteiros $r \geq 0$, $s \geq 0$, a função K-multilinear $A : (V^\star) \times V^s \to K$ é chamado de tensor (r, s) ao longo de V.

O conjunto $\mathfrak{T}_s^r(V)$ de todos os tensores do tipo (r, s) sobre V é um módulo sobre K, com as definições usuais de adição de funções e multiplicações por elemento de K.

O tensor do tipo (0, 0) sobre V é simplesmente um elemento de K.

Campo de Tensores

Um campo de tensores em uma variedade M é um tensor sobre $\mathfrak{X}(M)$. Assim, o tensor A do tipo (r, s) é uma função $\mathfrak{F}(M)$-multilinear

$$A : \mathfrak{X}^\star(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^r \to \mathfrak{F}(M).$$

Então, A é uma máquina que quando alimentada de r 1-formas $\theta_1, \ldots, \theta_r$ e s campos de vetores $X_1, \ldots, X_s$ produz uma função real de $\mathfrak{F}(M)$. Os θ_i são as *entradas contravariantes*, e X_j são as *entradas covariantes* de A.

O conjunto $\mathfrak{T}^r_s(M)$ de todos os tensores do tipo (r, s) sobre V é uma módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$. Para o caso de $r = 0$, $s = 0$, o campo de tensores do tipo (0, 0) é uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$; ou seja, $\mathfrak{T}^0_0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

Se ω é uma 1-forma numa variedade diferenciável M, então a função $X \to \omega(X)$ é $\mathfrak{F}(M)$-linear de $\mathfrak{X}(M)$ para $\mathfrak{F}(M)$, portanto é um campo de tensor (0, 1).

Cada campo de tensor (0, 1) é conseguido dessa forma aparte de uma única 1-forma, de forma que podemos escrever

$$\mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^\star(M).$$

Se V é um campo de vetores diferenciável em M, define

$$V(\theta) = \theta(V)$$

para todo $\theta \in \mathfrak{X}^\star(M)$. A função $V : \mathfrak{X}^\star(M) \to \mathfrak{F}(M)$ é $\mathfrak{F}(M)$-linear, portanto é um campo de tensores (1, 0). Cada campo de tensor (1, 0) é conseguido dessa forma apartir de um único campo de vetor, logo

$$\mathfrak{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M).$$

Um tensor T é um objeto pontual. Fixe $p \in M$ e seja U uma vizinhança de p em M onde é possível definir campos $E_1, \ldots, E_m \in \mathfrak{X}(M)$, tais que em cada $q \in U$, os vetores $\{E_i\}$, $i = 1, \ldots, m$, formam uma base de T_qM; diremos, neste caso que $\{E_i\}$ é um *referencial móvel* em U. Sejam

$$Y_1 = \sum_{i1} y_{i1}E_{i1}, \ldots Y_r = \sum_{ir} y_{ir}E_{ir},\ i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, m,$$

as restrições a U dos campos $Y_1, \ldots, Y_r$, expressas no referencial móvel $\{E_i\}$.

Por linearidade,

$$T(Y_1, \ldots, Y_r) = \sum_{i_1, \ldots, i_r} y_{i1} \ldots y_{ir} T(E_1, \ldots, E_m).$$

As funções $T(E_1, \ldots, E_m) = T_{i_1, \ldots, i_r}$ em U são chamadas as componentes de T no referencial $\{E_i\}$.

2.10 Formas Bilineares Simétricas

Definição 2.10.1. Uma *forma bilinear simétrica* em um espaço vetrorial sobre os reais V é uma função R-bilinear $b : V \times V \to \mathbb{R}$, e a consideramos simétrica quando: $b\,(v.w) = b\,(w, v)$ para todo $v, w \in V$.

Definição 2.10.2. Uma forma bilinear simétrica b em V é

1. *Definida positiva (negativa)* se para $v \neq 0$ temos $b\,(v, v) > 0$ (< 0),

2. *Semidefinida positiva (negativa)* se $b\,(v, v) \geq 0$ (≤ 0) para todo $v \in V$,

3. *Não-degenerada* se $b\,(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implica $v = 0$.

   Se b é uma forma bilinear e simétrica em V, então para qualquer subespaço W de V a restrição $b \mid (W \times W)$ denotada por $b \mid W$, é simétrica e bilinear.

Se b é (semi-) definida, isso vale para $b \mid W$ também.

Definição 2.10.3. O *índice* ν de uma forma bilinear simétrica b em V é o maior inteiro positivo que é dimensão de um subespaço $W \subset V$ em que $b \mid W$ é definida negativa. Assim $0 \leq \nu \leq dimV$, e $\nu = 0$ se somente se b é semidefinida positiva.

Então a função $q : V \to \mathbb{R}$ dada por $q\,(v) = b\,(v, v)$ é uma *forma quadrática associada* à forma bilinear simétrica b.

Com a forma quadrática q não perdemos nemhuma informação, pois podemos reconstruir b apartir de q com a seguinte identidade:

$$b\,(v, w) = \frac{1}{2}\left[q\,(v + w) - q\,(v) - q\,(w)\right].$$

Se $e_1, \ldots, e_m$ é uma base de V, então a matriz $\left(b_{ij}\right)_{n\times n} = b\left(e_i, e_j\right)$é chamada de *matriz de b relativa a base* $e_1, \ldots, e_m$. Portanto se b é simétrica, então a matriz relativa é simétrica.

Claramente o determinante de b é dado por

$$b\left(\sum v_i e_i, \sum w_j e_j\right) = \sum b_{ij} v_i w_j.$$

Lema 2.10.4. *Uma forma bilinear simétrica é não degenerada se, e somente se a matriz relativa a uma base (portanto para todas) for invertível.*

Demonstração. Seja $e_1, \ldots, e_m$ uma basa de V. Se $v \in V$, então $b\,(v,\, w) = 0$ para todo $w \in V$ se, e somente se $b\,(v,\, e_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, m$. Mais isto equivale a dizer que as colunas de $\left(b_{ij}\right)$ dependem linearmente, ou seja, $\left(b_{ij}\right)$ é singular. Portanto, se b é não degenerada, a matriz $\left(b_{ij}\right)$ é invertível. $\square$

2.11 Produto Escalar

Definição 2.11.1. Um *produto escalar* g em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica não degenerada em V.

Um *produto interno* define um produto escalar, um exemplo canônico é produto do $\mathbb{R}^m$, dador por $v \cdot w = \sum v_i w_i$.

Muitas propriedades dos produtos internos são transferidas para produtos escalares, porém alguns novos fenômenos surgem quando g é indefinida.

Os vetores $v,\, w \in V$ são *ortogonais*, denota-se $v \perp w$, se $g\,(v,\, w) = 0$.

Subconjuntos A e B de V são *ortogonais*, denota-se por $A \perp B$, se $v \perp w$ para todo $v \in A$ e todo $w \in B$.

A norma de uma vetor $v \in V$, denotada por $\mid v \mid$, é definida por $\mid g\,(v,\, v) \mid^{\frac{1}{2}}$, pois, $g\,(v,\, v)$ pode ser negativo.

Um *vetor unitário* u é um vetor de norma 1, tal que, $g\,(u,\, u) = \pm 1$.

Como de costume, um conjunto de vetores unitários mutuamente ortogonais é dito *ortonormal*, e para $m = dimV$, qualquer conjunto de m vetores ortonormais em V é necessariamente uma base para V, esta base é chamada de *base ortonormal*.

Lema 2.11.2. *Um espaço V com produto escalar possui uma base ortonormal.*

A matriz de g relativa a base ortonormal $e_1, \ldots . e_m$ de V é diagonal; de fato,

$$g\left(e_i,\, e_j\right) = \delta_{ij}\varepsilon_j, \qquad \varepsilon_j = g\left(e_j,\, e_j\right) = \pm 1 \qquad e \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Chamamos ε_j de *sinal*.

Lema 2.11.3. *Sejam $e_1, \ldots, e_m$ uma base ortonormal de V, e $\varepsilon_i = g\,(e_i,\, e_i)$. Então, cada $v \in V$ tem uma expressão única*

$$v = \sum \varepsilon_i g\,(v,\, e_i)\, e_i.$$

Demonstração. Façamos $h = v - \sum \varepsilon_i g(v, e_i) e_i$, então $g(h, e_j) = g(v - \sum \varepsilon_i g(v, e_i) e_i, e_j)$. Mas,

$$g\left(v - \sum \varepsilon_i g(v, e_i) e_i, e_j\right) = g(v, e_j) - g\left(\sum \varepsilon_i g(v, e_i) e_i, e_j\right) = g(v, e_j) - g(v, e_j) = 0$$

$$g(h, e_j) = 0$$

para todo $j = 1, \ldots, m$. □

2.12 *Variedades Semi-Riemanianas*

Definição 2.12.1. Uma *métrica semi-Riemaniana* ou uma *estrutura semi-Riemaniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa cada $p \in M$ a um produto escalar $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, essa correspondência varia diferencialmente no seguinte sentido: se $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é um sistema de coordenadas para $p \in U \subset M$, então

$$g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\,|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\,|_p\right)$$

é diferenciável em U para cada $i, j = 1, \ldots, m$.

Uma maneira equivalente de exprimir a diferenciabilidade de uma métrica semi-Riemaniana é dizer que para cada par de campos de vetores diferenciáveis X, Y numa vinhança V de M, a função $g(X, Y) : V \to \mathbb{R}$ é diferenciável.

Entendemos por *índice da métrica* g no ponto $p \in M$, como o maior inteiro que é dimensão de um subespaço $V \subset T_pM$ com $g_p \mid V$ definida negativa. Se o índice de g independe do ponto $p \in M$ dizemos que esse índice é o da métrica semi-Riemaniana g (índice da estrutura semi-Riemaniana).

Caso o índice seja nulo diremos que g é uma *métrica Riemaniana*, caso o índice seja igual a 1 diremos que a *métrica é Lorentziana.* Se o índice da métrica depende do ponto p dizemos que a métrica é *indefinida*.

Usaremos $<,>$ como notação alternativa para g, escrevendo $g(v, w) = \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ para vetores tangentes, e $g(V, W) = \langle V, W\rangle \in \mathfrak{F}(M)$ para campos de vetores.

Se $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é um sistema de coordenadas em $U \subset M$, e $\partial_1, \ldots, \partial_m$ são os campos de vetores coordenados, vamos denotar $g(\partial_i, \partial_j)$ por g_{ij}, ou seja,

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$$

Assim para os campos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$g(V, W) = \langle V, W \rangle = \left\langle \sum V(x_i)\,\partial_i, \sum W(x_j)\,\partial_j \right\rangle = \sum \left\langle V(x_i)\,\partial_i, W(x_j)\,\partial_j \right\rangle =$$
$$\sum g_{ij} V(x_i)\, W(x_j)\,.$$

Como g é não degenerado, em cada ponto $p \in U$ a matriz $\left(g_{ij}(p)\right)$ é invertível, e sua inversa será denotada por $\left(g^{ij}(p)\right)$.

A forma usual de obtenção da matriz inversa mostra que as funções $\left(g^{ij}(p)\right)$ são diferenciáveis em U.

Como g é simétrica temos que $g^{ij} = g^{ji}$ para $1 \leq i, j \leq m$.

Definição 2.12.2. Uma variedade diferenciável munida da métrica semi-Riemaniana é chamada de *variedade semi-Riemaniana*. Assim estritamente falando, uma variedade semi-Riemaniana é um par ordenado (M, g): duas métricas diferentes associada a uma mesma variedade diferenciável gera duas variedades semi-Riemanianas distintas.

O índice ν da métrica semi-Riemaniana g é chamado de índice da variedade semi-Riemaniana (M, g): $0 \leq \nu \leq m = dimM$. Por questões de praticidade vamos denotar a variedade semi-Riemaniana (M, g) simplesmente por M.

Se a métrica é Riemanaiana a variedade é dita *variedade Riemaniana,* se a métrica é Lorentziana, então a variedade é dita *variedade Lorentziana.*

Consideremos o produto escalar canônico do $\mathbb{R}^m$, isto é

$$g(v, w) = \sum v_i w_i$$

onde v_i, w_i são as coordenadas de v e w em $\mathbb{R}^m$.

O $\mathbb{R}^m$ munido com o atlas máximo identidade é uma variedade. Logo,

$$g(v, w) = \sum v_i w_i$$

define uma uma métrica Riemaniana em $\mathbb{R}^m$, e portanto o par $(\mathbb{R}^m, g)$ é uma variedade Riemaniana, chamado de *m-espaço Euclidiano.* Seja a função de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$h(v, w) = -\sum_{i=1}^{\nu} v_i w_i + \sum_{j=\nu+1}^{m} v_j w_j.$$

Prova-se facilmente que esta função define um produto escalar em $\mathbb{R}^m$, cujo índice é ν. O par $(\mathbb{R}^m, h)$ é uma variedade semi-Riemaniana de índice ν. Denota-se esta variedade por $\mathbb{R}^m_\nu$.

Obeserve que o índice ν de uma variedade semi-Riemaniana é constante. Usaremos a seguinte notação

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1\, se & 1 \leq i \leq m \\ \\ +1\, se & \nu + 1 \leq i \leq m \end{cases}.$$

Definição 2.12.3. Um vetor tangente v em M é

1. Tipo espaço se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$,

2. *Null* se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$,

3. *Tipo Tempo* se $\langle v, v \rangle < 0$.

O conjunto de todos os vetores null é chamado de *cone de luz* em $p \in M$. No caso de variedades de Lorentz, vetores null são também chamados *tipo luz*.

Seja $q(v) = \langle v, v \rangle$ para cada vetor tangente v de M. Em cada ponto p de M, q uma forma quadrática associada do produto escalar em p.

Definição 2.12.4. Sejam M e N variedades semi-Riemanianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é chamado uma *isometria* se :

$$\langle v, u \rangle_p = \left\langle df_p(v), df_p(u) \right\rangle_{f(p)}$$

para todo $p \in M$, $u, v \in T_pM$.

Definição 2.12.5. Sejam M e N variedades semi-Riemanianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ é uma *isometria local* em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \to f(U)$ é uma difeomorfismo satisfazendo (1).

2.13 Imersões Isométricas

Seja $f : M^m \to N^{m+k}$ uma imersão. Se N tem uma estrutura semi-Riemaniana, f induz uma estrutura semi-Riemaniana em M por

$$\langle v, u \rangle_p = \left\langle df_p(v), df_p(u) \right\rangle_{f(p)}$$

Para $u, v \in T_pM$.

A métrica de M é chamada *métrica induzida* por f, e f é uma *imersão isométrica.* Portanto, se P é uma subvariedade da variedade semi-Riemaniana M, P torna-se uma subvariedade semi-Riemaniana de M, cuja métrica é induzida pelo mergulho $i : P \to M$.

2.14 Conexão de Levi-Civita

Definição 2.14.1. Sejam $u_1, \ldots, u_m$ coordenadas naturais em $\mathbb{R}^m_\nu$. Se V e $W = \sum W_i \partial_i$ são campos de vetores em $\mathbb{R}^m_\nu$, então o campo de vetores

$$\nabla_V W = \sum V\,(W_i)\,\partial_i$$

é chamado *derivada covariante natural* de W com respeito a V.

Definição 2.14.2. Uma conexão ∇ em uma variedade diferenciável M é uma função $\nabla : \mathfrak{X}\,(M) \times \mathfrak{X}\,(M) \to \mathfrak{X}\,(M)$ tal que

1. $\nabla_V W$ é $\mathfrak{F}\,(M)$-linear em V,

2. $\nabla_V W$ é $\mathbb{R}$-linear em W,

3. $\nabla_V\,(fW) = (Vf)\,W + f\nabla_V W$ para $f \in \mathfrak{F}\,(M)$. Onde $\nabla_V\,(fW)$ é chamada de derivada covariante de W com respeito a conexão ∇.

Proposição 2.14.3. *Seja M uma variedade semi-Riemaniana. Se $V \in \mathfrak{X}\,(M)$, seja $V^\star$ uma 1-forma de M tal que*

$$V^\star\,(X) = \langle V,\, X\rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{X}\,(M)$. Então a função $V \to V^\star$ é um isomorfismo

$\mathfrak{F}\,(M)$-linear de $\mathfrak{X}\,(M)$ para $\mathfrak{X}\,(M)$.

Teorema 2.14.4. *Em uma variedade semi-Riemaniana M existe apenas uma conexão ∇ tal que*

4. $[V,\, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$, e

5. $X\,\langle V,\, W\rangle = \langle \nabla_X V,\, W\rangle + \langle V,\, \nabla_X W\rangle$,

para todo $X,\, V,\, W \in \mathfrak{X}\,(M)$.

Demonstração. Suponhamos que a conexão ∇ satisfaz (4) e (5). Então

(a) $W\,\langle V,\, X\rangle = \langle \nabla_W V,\, X\rangle + \langle V,\, \nabla_W X\rangle$

(b) $V\,\langle X,\, W\rangle = \langle \nabla_V X,\, W\rangle + \langle X,\, \nabla_V W\rangle$

(c) $X\langle W, V\rangle = \langle \nabla_X W, V\rangle + \langle W, \nabla_X V\rangle$

Somando *a* e *b* e subtraindo de *c*, teremos

$$\begin{aligned} W\langle V, X\rangle + V\langle X, W\rangle - X\langle W, V\rangle &= \langle \nabla_W V, X\rangle + \langle V, \nabla_W X\rangle \\ &+ \langle \nabla_V X, W\rangle + \langle X, \nabla_V W\rangle \\ &- \langle \nabla_X W, V\rangle - \langle W, \nabla_X V\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W\langle V, X\rangle + V\langle X, W\rangle - X\langle W, V\rangle &= \langle D_W V, X\rangle + \langle V, \nabla_W X - \nabla_X W\rangle \\ &+ \langle W, \nabla_V X - \nabla_X V\rangle + \langle X, \nabla_V W\rangle \end{aligned}$$

$$W\langle V, X\rangle + V\langle X, W\rangle - X\langle W, V\rangle = \langle X, \nabla_W V + \nabla_V W\rangle + \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [V, X]\rangle$$

$$\begin{aligned} W\langle V, X\rangle + V\langle X, W\rangle - X\langle W, V\rangle &= \langle X, [W, V] + \nabla_V W + \nabla_V W\rangle \\ &+ \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [V, X]\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W\langle V, X\rangle + V\langle X, W\rangle - X\langle W, V\rangle &= \langle X, [W, V]\rangle + 2\langle X, \nabla_V W\rangle \\ &+ \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [V, X]\rangle \end{aligned}$$

$$2\langle \nabla_V W, X\rangle = V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle\,\langle X, [V, W]\rangle\,.$$

A última igualdade mostra que a conexão ∇ é única. ∇ é chamado de *conexão de Levi-Civita* de M, e é caracterizada pela *fórmula de Koszul*

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_V W, X\rangle &= V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle \\ &- \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle\,. \end{aligned}$$

$\square$

Definição 2.14.5. Seja $x_1, \ldots, x_m$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de uma variedade semi-Riemaniana M. Os símbolos de Christoffel neste sistema de coordenadas, são as funções de valores reais Γ_{ij}^k em U tal que

$$D_{\partial_i}\partial_j = \sum \Gamma_{ij}^k \partial_k \qquad (1 \leq i,\, j \leq n)\,.$$

Uma vez que $\left[\partial_i,\, \partial_j\right] = 0$, mostra-se de (4) que $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$, protanto $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Proposição 2.14.6. *Para um sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_m$ em U,*

1. $\nabla_{\partial_i}\left(\sum W_j \partial_j\right) = \sum_k \left\{\frac{\partial W_k}{\partial x_i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W_j\right\} \partial_k$*, Onde os símbolos de Christoffel são dados por*

2. $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m g^{km}\left\{\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\right\}$.

Demonstração. (1) é uma consequência imediata de (3). Da fórmula de Koszul, temos

$$2\left\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j,\, \partial_m \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{jm}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(g_{im}\right) - \frac{\partial}{\partial x_m}\left(g_{ij}\right).$$

Da definição dos simbolos de Christoffel, temos

$$2\left\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j,\, \partial_m \right\rangle = 2\sum_a \Gamma_{ij}^a g_{am}.$$

Assim chegamos facilmente ao resultado desejado fazendo alguns cálculos simples nas duas últimas equações. □

Definição 2.14.7. Seja V um campo de vetores em uma variedade semi-Riemaniana M. A (Levi-Civita) derivada covariante ∇_V é o único tensor derivada em M talque

$$\nabla_V f = Vf$$

para $f \in \mathfrak{F}(M)$ e $\nabla_V W$ é derivada covariante de Levi-Civita para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.14.8. A derivada covariante de um tensor A (r, s) em M é o tensor ∇A (r, s+1) tal que

$$(\nabla A)\left(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s, V\right) = (\nabla_V A)\left(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s\right)$$

para todo V, $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ e $\theta^j \in \mathfrak{X}^\star(M)$.

Quando nos referirmos a tensores de do tipo $(0, r)$ diremos apenas tensores de ordem r

Definição 2.14.9. Sendo T um tensor de ordem r, a diferencial covariante ∇T de T é um tensor (r+1) dado por

$\nabla T\left(Y_1, ...Y_r, Z\right) = Z\left(T\left(Y_1, ..., Y_r\right)\right) - T\left(\nabla_Z Y_1, ..., Y_r\right) - \cdots - T\left(Y_1, ...Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r\right).$

As componentes de ∇T no referencial ortonormal local $\{e_1, ..., e_m\}$ serão denotadas por

$T_{i_1 \cdots i_r j} = \nabla T\left(e_{i_1}, ..., e_{i_r}, e_j\right)$

Definição 2.14.10. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇. Um campo vetorial V ao longo da curva $\alpha : I \to M$ é chamado paralelo quando $\nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} V = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 2.14.11. *Seja M uma variedade com uma conexão ∇. Seja $\alpha : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 uma vetor tangente a M em $\alpha\left(t_0\right)$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelos V ao longo de α, tal que $V_0\left(t_0\right) = V_0$, ($V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de α)*

2.15 Geodésicas

Agora podemos generalizar a noção euclidiana de linha reta.

Uma *geodésica* em um variedade semi-Riemanniana M é uma curva $\gamma : I \to M$ cujo campo vetorial γ' é paralelo. Equivalentemente, geodesicas são curvas cuja aceleração é zero: $\gamma'' = 0$. Se $\gamma : I \to M$ é uma geodésica e $[a, b] \subset I$ a restriçaõ de γ a $[a, b]$ é chamada de (segmento de) geodésica ligando $\gamma\left(a\right)$ a $\gamma\left(b\right)$.

Proposição 2.15.1. *Seja $x_1, \ldots, x_n$ um sistema de coordenadas em $U \subset M$. Uma curva γ em U é uma geodésica de M se somente se as funções coordenadas $x_k \circ \gamma$ satisfazem*

$$\frac{d^2\left(x_k \circ \gamma\right)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k\left(\gamma\right) \frac{d\left(x_i \circ \gamma\right)}{dt} \frac{d\left(x_j \circ \gamma\right)}{dt} = 0$$

para $1 < k < n$. Por questões de coveniência vamos escrever $x_k \circ \gamma$ simplesmente como x_k. Portanto, a equação acima será escrita como

$$\frac{d^2\left(x_k\right)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0$$

A existência e o teorema de unicidade para equações diferenciais ordinárias dá o seguinte resultado local.

Lema 2.15.2. *Se $v \in T_pM$, então existe um intervalo I contendo 0 e uma única geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma'(0) = v$. A última equação implica, naturalmente, que $\gamma(0) = p$; dizemos que γ é um geodésica a partir de p, com velocidade inicial v.*

Lema 2.15.3. *Sejam $\alpha, \beta : I \to M$ geodésicas. Se existe um número $a \in I$ tal que $\alpha'(a) = \beta'(a)$, então $\alpha = \beta$.*

Proposição 2.15.4. *Dado qualquer vetor tangente $v \in T_pM$ existe uma única geodésica γ_v em M tal que*

1. A velocidade inicial de γ_v é v; isto é, $\gamma_v'(0) = v$.

2. O domínio de I_v de γ_v é o maior possível.

Portanto, se $\alpha : J \to M$ é uma geodésica com velocidade inicial v, então $J \subset I$ e $\alpha = \gamma_v \mid J$.

Lema 2.15.5. *Seja v um campo tangente de M, isto é, um elemento do fibrado tangente TM. Então existe uma vizinhança N de v em TM e um intervalo I em torno de zero tal que $(w, s) \to \gamma_w(s)$ é uma função bem definida e diferenciável de $N \times I$ em M.*

2.16 Curvatura

Definição 2.16.1. A curvatura R de uma variedade semi-Riemaniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z - [X, Y] Z,\ Z \in \mathfrak{X}(M)$$

onde ∇ é a conexão semi-Riemaniana de M.

Observação. Se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(R^n)$. De fato, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(R^n)$, considere a base canônica $e_1, ..., e_n$, do R^n, e escreva

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i e_i,\ Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i e_i,\ Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i e_i,$$

então,

$$\nabla_X Z = \nabla_X \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i e_i \right)$$

$$= \sum Z_i \nabla_X e_i + \sum \nabla_X Z_i e_i$$

$$= \sum Z_i \nabla_X e_i + \sum X (Z_i) e_i$$

$$= \sum X (Z_i) e_i$$

Pois, sendo e_i uma campo constante, a sua derivada covariante, na direção de qualquer vetor, é nula. Segue-se que

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_Y \left\{ \sum X (Z_i) e_i \right\}$$

$$= \sum X (Z_i) \nabla_Y e_i + \sum \nabla_Y X (Z_i) e_i$$

$$= \sum X (Z_i) \nabla_Y e_i + \sum Y [X (Z_i)] e_i$$

$$= \sum Y [X (Z_i)] e_i.$$

Analogamente temos,

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \sum X [Y (Z_i)] e_i.$$

Portanto,

$$\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z = \sum Y [X (Z_i)] e_i - \sum X [Y (Z_i)] e_i$$

$$= \sum \{[Y, X] (Z_i)\} e_i$$

$$= \sum \{[Y, X] (Z_i)\} e_i + \sum Z_i \nabla_{[Y,X]} e_i$$

$$= \nabla_{[Y,X]} Z$$

Daí,

$$R (X, Y) Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z = \nabla_{[Y,X]} Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$R\,(X,\,Y)\,Z = -\nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_{[X,Y]}Z = 0$$

Com base nisso, pode-se interpretar R como uma maneira de medir o quanto M deixa de ser euclidiana.

Proposição 2.16.2. *A curvatura R, de uma variedade Riemanniana M, tem as seguintes propriedades:*

1. *R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2,\, Y) = fR(X_1,\, Y) + gR(X_2,\, Y),$$

$$R(X,\, fY_1 + gY_2) = fR(X,\, Y_1) + gR(X,\, Y_2),$$

para todo $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, $X,\ X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

2. Para todo par $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

para todo $f \in \mathfrak{F}(M)Z$ e $Z,\ W \in \mathfrak{X}(M)$.

De agora em diante vamos escrever por conveniência $R(X,Y)Z = R_{XY}Z$ e $R(x,y)z = R_{xy}z$ quando os campos X, Y e Z estiverem restritos ao ponto $p \in M$.

Se $x,\ y \in T_pM$ operador linear

$$R_{xy} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que leva cada z à $R_{xy}z$ é chamado de *operador curvatura.*

Proposição 2.16.3. *Sejam $x,\ y,\ z,\ v,\ w \in T_pM$, então*

1. $R_{xy} = -R_{yx}$,

2. $\left\langle R_{xy}v,\, w\right\rangle = -\left\langle R_{xy}w,\, v\right\rangle$,

3. $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx} = 0$, (primeira identidade de Bianchi)

4. $\left\langle R_{xy}v,\, w \right\rangle = \langle R_{vw}x,\, y\rangle$.

Proposição 2.16.4 (Segunda identidade de Bianchi). *Sejam $x,\, y,\, z \in T_pM$, então*

$$(\nabla_z R)\,(x,\, y) + (\nabla_x R)\,(y,\, z) + \left(\nabla_y R\right)\,(z,\, x) = 0.$$

Lema 2.16.5. *Em uma vizinhança de um sistema de coordenadas $x_1, \cdots, x_n$,*

$$R_{\partial_k \partial_l}\partial_j = \sum R^i_{jkl},$$

e as componentes de R são dadas por

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}.$$

Demonstração. Para campos de vetores coordenados, temos

$$R_{\partial_k \partial_l}\partial_j = \nabla_{\partial_l}\left(\nabla_{\partial_k}\partial_j\right) - \nabla_{\partial_k}\left(\nabla_{\partial_l}\partial_j\right).$$

$$\nabla_{\partial_l}\left(\sum \Gamma^m_{kj}\partial_m\right) = \sum_m \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^m_{kj}\partial_m + \sum \Gamma^m_{kj}\Gamma^r_{lm}\partial_r.$$

$$= \left\{\sum_i \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^i_{kj} + \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj}\right\}\partial_i.$$

Desenvolvendo de forma analoga a outra parcela da diferença e subtraindo as duas expressões conseguidas chega-se ao resultado procurado. □

2.16.1 Curvatura seccional

Podemos relacionar ao tensor curvatura R uma função com valores reais que determina completamente R. Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional não degenerado em T_pM e sejam $v, w \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então,

$$K\,(v, w) = \frac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{\langle v, v\rangle\,\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $v, w \in \sigma$, e é chamado de *curvatura seccional* $K(\sigma)$ de σ. A importância da curvatura $K(\sigma)$ vem do fato de que se a conhecermos para todo σ a curvtura R fica totalmente determinada.

Lema 2.16.6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão ≥ 2, munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Sejam $R : V \times V \times V \to V$ e $R' : V \times V \times V \to V$ aplicações trilineares satisfazendo o Teorema 2.16.3. Se x, y são dois vetores linearmente independentes, escrevamos,*

$$K(\sigma) = \frac{\langle R_{xy}x, y \rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2} \quad , \quad K'(\sigma) = \frac{\left\langle R'_{xy}x, y \right\rangle}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2}$$

onde σ é o subespaço bidimensional gerado por x e y. Se para todo $\sigma \subset V$, $K(\sigma) = K'(\sigma)$, então $R = R'$.

Demonstração. Basta provar que $\langle R_{xy}z, t \rangle = \left\langle R'_{xy}z, t \right\rangle$ para quaisquer $x, y, z, t \in V$. Observemos que por hipótese, temos que $\langle R_{xy}x, y \rangle = \left\langle R'_{xy}x, y \right\rangle$, para todo $x, y \in V$. Façamos $\langle R_{xy}z, t \rangle = (x, y, z, t)$ e $\left\langle R'_{xy}z, t \right\rangle = (x, y, z, t)'$, então

$$(x+z, y, x+z, y) = (x+z, y, x+z, y)'$$

onde

$(x, y, x, y) + 2(x, y, z, y) + (z, y, z, y) = (x, y, x, y)' + 2(x, y, z, y)' + (z, y, z, y)'$

e portanto

$$(x, y, z, y) = (x, y, z, y)',$$

para todo $x, y, z \in V$.

Usando o que acabamos de provar, temos

$$(x, y+t, z, y+t) = (x, y+t, z, y+t)',$$

onde

$$(x, y, z, t) + (x, t, z, y) = (x, y, z, t)' + (x, t, z, y)',$$

que ainda pode ser escrita como

$$(x, y, z, t) - (x, y, z, t)' = (y, z, x, t)' - (y, z, x, t)'.$$

Ou seja, a expressão $(x, y, z, t) - (x, y, z, t)'$ é invariante por permutação cíclica dos primeiros três elementos. Portanto, por (3) da Proposiçao 2.16.3, temos

$$3\left[(x,y,z,t)-(x,y,z,t)^{'}=0\right],$$

Dessa forma obtemos

$$(x,y,z,t)=(x,y,z,t)^{'}$$

para todo $x,y,z,t\in V$. $\square$

As variedades Riemanianas que possuem curvatura seccional constante desempenharam um papel muito importante no desenvolvimento da Geometira Riemaniana.

O lema anterior nos permite obter uma caracterização de tais variedades por meio das componentes R_{ijkl} da curvatura em uma base ortonormal. Isto decorre do lema abaixo.

Lema 2.16.7. *Sejam M uma variedade Riemaniana e p um ponto de M. Defina uma aplicação trilinear $Q: T_pM\times T_pM\times T_pM\times T_pM\to T_pM$ por*

$Q(X,Y,W,Z)=\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle-\langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle$, *para todo $X,Y,W,Z\in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_o se e só se $R=K_oQ$, onde R é a curvatura de M.*

Demonstração. Admita que $K(\sigma)=K_o$ para todo $\sigma\in T_pM$. Observe que Q satisfaz o Teorema 2.16.3. Como

$$Q(X,Y,W,Z)=\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2,$$

temos que, para todo par de vetores $X,Y\in T_pM$,

$$\langle R_{XY}X,Y\rangle=K_o\left(|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2\right)=K_oQ(X,Y,X,Y),$$

Pelo lema 2.16.6, isto implica que, para todo X,Y,Z,W,

$$\langle R_{XY}W,Z\rangle=K_oQ(X,Y,W,Z)$$

onde $R=K_oQ(X,Y,W,Z)$. A recíproca é imediata. $\square$

Corolário 2.16.8. *Sejam M uma variedade Riemaniana, p um ponto de M e $\{e_1,\cdots,e_n\}$, $n=\dim M$, uma base ortonormal de T_pM. Escreva $R_{ijkl}=\left\langle R_{e_ie_j}e_k,e_l\right\rangle$, $i,j,k,l=1,\cdots,n$. Então $K(\sigma)=K_o$ para todo $\sigma\subset T_pM$, se e só se*

$$R_{ijkl} = K_o \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right),$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad i = j \\ 0, & se \quad i \neq j \end{cases}$$

Em outras palavras, $K(\sigma) = K_0$ *para todo* $\sigma \subset T_pM$ *se e só se* $R_{ijij} = -R_{ijji} = K_o$ *para todo* $i \neq j$, *e* $R_{ijkl} = 0$ *nos outros casos.*

2.16.2 Curvatura de Ricci e curvatura escalar

Definição 2.16.9. O tensor curvatura de Ricci (Ric) relativo ao referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é dado por

$$Ric(X,Y) = \sum_m \langle R_{Xe_m}Y, e_m \rangle,$$

Definição 2.16.10. A curvatura escalar S de M é definida por

$$S = \sum_{i \neq j} K(e_i, e_j) = 2 \sum_{i<J} K(e_i, e_j).$$

Prova-se que as curvaturas de Ricci e escalar não dependem da escolha do referencial.

Definição 2.16.11. Uma variedade é dita (geodesicamente) completa quando toda sequência de Cauchy da variedade é convergente. Ou equivalentemente, as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \boldsymbol{I}$.

Capítulo 3
IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão, de uma variedade diferenciável M em uma variedade Riemaniana $\overline{M}$. A métrica Riemaniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemaniana em M^n: se v_1 e $v_2 \in T_pM$, define-se $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle$. Assim f passa a ser uma imersão isométrica. Para qualquer $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f|_U$ é um mergulho, isto é, $f(U)$ subvariedade de M. Em outras palavras, existe uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ num aberto de $\mathbb{R}^k$ tal que φ aplica $f(U) \cap \overline{U}$ num aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$.

Vamos identificar U e $f(U)$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_{f(p)}\overline{M}$ decompõe $T_{f(p)}\overline{M}$ na soma direta

$$T_{f(p)}\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp},$$

onde $T_pM = df_p\left(T_pM\right)$ e $T_pM^{\perp} = \left(df_p\left(T_pM\right)\right)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_{f(p)}\overline{M}$.

Se $v \in T_{f(p)}\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \qquad v^T \in T_pM \qquad e \qquad v^N \in T_pM^{\perp}.$$

Denominamos v^T *componente tangencial* de v e v^N a *componente normal* de v. Tal decomposição é evidentimente diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \to \left(p, v^T\right) \qquad e \qquad (p, v) \to \left(p, v^N\right)$$

são diferenciávies.

A partir da decomposição acima, obtemos o *fibrado normal* em M

$$TM^{\perp} = \bigcup_{p \in M} T_pM^{\perp}.$$

Neste caso, As projeções

$$()^T : T\overline{M}\mid_{f(M)} \to TM$$

e

$$()^N : T\overline{M}\mid_{f(M)} \to TM^T$$

são ditas tangencial e normal, respectivamente. A conexão Riemaniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M e suas respectivas extensões locais a M são $\overline{X}$ e $\overline{Y}$, definimos a conexão em M por

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T.$$

3.1 Segunda forma fudamental

Seja $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ o conjunto dos campos de vetores em U normais a $F(U) \approx U$.

A aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é denominada *segunda forma fundamental* de f e independe das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.

Proposição 3.1.1. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é blinear e simétrica.

A aplicação

$$\begin{array}{rccl} H_\eta : & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \nabla^{\perp}_X \eta = \; H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle \end{array}$$

é uma forma bilinear simétrica. Onde $x = X(p)$ e $y = Y(p)$.

Definição 3.1.2. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é denominada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η.

A aplicação H_η é bilinear e simétrica no espaço vetorial T_pM. Portanto existe uma única aplicação autoadjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$ associada a H_η satisfazendo

$$\left\langle A_\eta x, y \right\rangle = H_\eta(x,y)$$

Proposição 3.1.3. *(Fórmula de Weingartem) Sejam $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então,*

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T$$

Demonstração. Dados $x, y \in T_pM$, denotemos por X e Y as extensões locais, respectivamente, de x e y tangentes a M e por $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ as estensões locais de X e Y, respectivamente, tangentes a $\overline{M}$, então

$$\begin{aligned}
\langle A_\eta(x), y\rangle &= H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y, N\rangle(p) \\
&= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, N\rangle(p) - \langle \nabla_X Y, N\rangle(p) = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, N\rangle(p) \\
&= -\langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}} N\rangle(p) = -\langle \overline{Y}, (\overline{\nabla}_X N)^T\rangle(p) = \langle y, -(\overline{\nabla}_X N)^T\rangle(p).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A_\eta = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

□

Definição 3.1.4. (Imersão totalmente geodésica) Uma imersão $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ é geodésica em p se, para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$, a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão f é totalmente geodésica se for geodésica em todo ponto de M.

Definição 3.1.5. (Imersão mínima) Uma imersão $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ é mínima se, para todo $p \in M$ e todo $\eta \in T_pM$, tem-se, $trA_\eta = 0$.

Escolhendo um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de vetores em $\mathfrak{X}(U)^\perp$, onde U é uma vizinhança de p na qual f é uma mergulho e tomando $H_{e_i} = H_i$, podemos escrever

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{m} H_i(x,y)e_i(p), \forall x, y \in T_pM.$$

O vetor normal
$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(trA_i)e_i$$
onde $A_i = A_{e_i}$, é denominado vetor curvatura média de f e não depende da escolha do referencial. Além disso, f é mínima se, e somente se, $H \equiv 0$.

Definição 3.1.6. (Imersão umbílica) Uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ é dita umbílica em $p \in M$ quando $A_\eta = \rho(p)I$, para todo $\eta \in T_pM$, onde $\rho(p) \in \mathbb{R}$ e I é a identidade emT_pM. Uma imersão é umbílica quando é umbílica em todo ponto de M.

Proposição 3.1.7. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) f *é umbílica em* $p \in M$*;*

(ii) $A_\eta = \langle H(p), \eta\rangle I$*,para todo* $\eta \in T_pM^\perp$*;*

(iii) $B(x,y) = \langle x,y\rangle H(p)$*, para quaisquer* $x, y \in T_pM$*.*

Demonstração. Consideremos um referencial ortonormal $E_1, \cdots, E_m$ em $\mathfrak{X}(U)^\perp$ e seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ a base de T_pM formada por autovetores de A_η.

$(i) \Rightarrow (ii)$ De fato, dado $\eta \in \left(T_pM\right)^\perp$, temos que $\eta = \sum_{i=1}^m a_ie_i\,(p)$, onde
$$a_i = \langle \eta, e_i\,(p)\rangle \qquad \text{e} \qquad A_\eta = \rho\,(p)\,I.$$

Então
$$B\,(x,y) = \sum_{i=1}^{m} H_i\,(x,y)\,e_i\,(p)\,.$$
Em outras palavras,
$$H_i\,(x,y) = \langle B\,(x,y)\,, e_i\,(p)\rangle = \langle A_i\,(x)\,, y\rangle\,, \qquad A_i = A_{e_i(p)}.$$
Daí
$$trA_i = \sum_{k=1}^{n}\langle A_i\,(e_k)\,, e_k\rangle = n\rho_i, \qquad \rho_i = \rho\,(e_i\,(p))\,.$$

Logo

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(trA_i)\, e_i(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n\rho_i e_i(p) = \sum_{i=1}^{m}\rho_i e_i(p).$$

Concluímos que

$$\langle H(p), e_i\rangle = \rho_i.$$

Como

$$\langle \eta, H(p)\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i\rho_i.$$

e

$$\left\langle A_\eta(x), y\right\rangle = \langle B(x,y), \eta\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i \langle B(x,y), e_i(p)\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i \langle A_i(x), y\rangle,$$

obtemos $A_\eta(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i A_i(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i\rho_i x$ e, portanto,

$$\rho(\eta) = \sum_{i=1}^{m} a_i\rho_i = \langle \eta, H(p)\rangle.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Visto que $A_\eta = \langle H(p), \eta\rangle I$, para todo $\eta \in T_pM^\perp$, temos que

$\langle B(x,y), \eta\rangle = \left\langle A_\eta(x), y\right\rangle = \langle\langle H(p), \eta\rangle x, y\rangle = \langle H(p), \eta\rangle \langle x, y\rangle = \langle H(p)\langle x,y\rangle, \eta\rangle$, $\forall \eta \in T_pM$.

Logo

$$B(x,y) = \langle x,y\rangle H(p).$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Suponhamos que $B(x,y) = \langle x,y\rangle H(p)$, para todo $x, y \in T_pM$.

Daí obtemos

$\left\langle A_\eta(x), y\right\rangle = \langle B(x,y), \eta\rangle = \langle\langle x,y\rangle H(p), \eta\rangle = \langle H(p), \eta\rangle\langle x,y\rangle = \langle\langle H(p), \eta\rangle x, y\rangle$.

Portanto

$$A_\eta = \langle H(p), \eta\rangle I, \qquad \forall \eta \in T_p(M).$$

□

Se $X \in TM$ e $\eta \in TM^\perp$, vimos na proposição 3.1.3, que

$$\left(\overline{\nabla}_X\eta\right)^T = -A_\eta(X).$$

Agora vamos estudar a componente normal de $\overline{\nabla}_X\eta$, que denominamos a *conexão normal* $\nabla^{\perp}$ da imersão f, isto é,

$$\begin{array}{rlcl} \nabla^{\perp}: & \mathfrak{X}(U)\times\mathfrak{X}(U)^{\perp} & \longrightarrow & \mathfrak{X}(U) \\ & (X,\eta) & \longmapsto & \nabla^{\perp}_X\eta = \overline{\nabla}_X\eta - \left(\overline{\nabla}_X\eta\right)^T = \overline{\nabla}_X\eta + A_\eta(X). \end{array}$$

Observação. $\nabla^{\perp}$ é linear em X, aditiva em η e

$$\nabla^{\perp}_X(g\eta) = g\nabla^{\perp}_X(\eta) + X(g)\eta, \qquad \forall g\in\mathfrak{F}(U).$$

A partir de $\nabla^{\perp}$ introduz-se uma noção de curvatura no fibrado normal que é dita *curvatura normal* $R^{\perp}$ da imersão f e é definda por

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = \nabla^{\perp}_Y\eta\nabla^{\perp}_X\eta - \nabla^{\perp}_X\eta\nabla^{\perp}_Y\eta - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\eta$$

Proposição 3.1.8. *São verificadas as seguintes equações:*

(a) Equação de Gauss

$$\langle\overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle.$$

(b) Equação de Ricci

$$\langle\overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle[A_\eta,A_\zeta]X,Y\rangle.$$

onde $[A_\eta,A_\zeta] = A_\eta\circ A_\zeta - A_\zeta\circ A_\eta$

Teorema 3.1.9. *(Gauss) Sejam x,y vetores ortonormais em $T_pM\subset T_{f(p)}\overline{M}$ e $p\in M$. As curvaturas seccionais $K(x,y)$ e $\overline{K}(x,y)$, respectivamente, de M e $\overline{M}$ no plano gerado por x e y satisfazem*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x),B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2.$$

Definição 3.1.10. Dizemos que um fibrado normal de uma imersão é plano (ou flat) se $R^{\perp}\equiv 0$.

Suponhamos $\overline{K}$ constante em $\overline{M}$, então pelo lema 2.16.7, obtemos

$$\langle\overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = K_o\{\langle X,\eta\rangle\langle Y,\zeta\rangle - \langle Y,\eta\rangle\langle X,\zeta\rangle\} = 0,$$

para quaisquer $X,Y\in\mathfrak{X}(U)$ e todo $\eta,\zeta\in\mathfrak{X}(U)^{\perp}$. Assim, a equação de Ricci é equivalente a

$$\langle\overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = -\langle[A_\eta,A_\zeta]X,Y\rangle$$

Portanto, $R^{\perp} = 0$ se, e somente se, $[A_\eta, A_\zeta] = 0$ para todo η, ζ e todo $p \in M$. Em outros termos, existe uma base de T_pM, para qualquer $p \in M$, que diagonaliza simultaneamente todos os A_η. Seja $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M. A segunda forma fundamental pode ser considerada como um tensor $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U)^{\perp} \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$, definido por

$$B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle.$$

A noção de derivada covariante deste tensor se estende de maneira natural:

$$(\overline{\nabla}_Z B)(X, Y, \eta) = Z(B(X, Y, \eta)) - B(\nabla_Z X, Y, \eta) - B(X, \nabla_Z Y, \eta) - B(X, Y, \nabla_Z^{\perp} \eta).$$

Proposição 3.1.11. *(Equação de Codazzi) Com a notação acima, temos*

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Observação. Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante a equação de Codazzi se reduz a

$$(\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) = (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta)$$

Consideremos a imersão $f : M^n \longrightarrow M^{n+m=k}$. Vimos que $T_{f(p)}\overline{M} = T_pM \bigoplus T_pM^{\perp}$, dessa forma vamos escolher um referencial $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_k\}$ tal que, os n primeiros vetores geram T_pM e o restante geram $(T_pM)^{\perp}$. Seja $\{w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_k\}$ o correferencial associado ao referencial $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_k\}$. A segunda forma fundamental pode ser considerada como o tensor dado por

$$B(X, Y) = \sum_{i=\beta}^{k} \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, e_\beta \rangle e_\beta, \qquad n+1 \leq \beta \leq k, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Assim em $f(p)$, temos

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \sum_{\alpha} \left\langle \overline{\nabla}_x y - \nabla_x y, e_\alpha \right\rangle e_\alpha = \sum_{\alpha} H_\alpha (x, y)\, e_\alpha \\ &= \sum_{\alpha} H_\alpha \left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j \right) e_\alpha = \sum_{\alpha, i, j} x_i y_j H_\alpha \left(e_i, e_j\right) e_\alpha \\ &= \sum_{\alpha, i, j} h_{ij}^{\alpha} w_i (x)\, w_j (y)\, e_\alpha \end{aligned}$$

Ou seja, podemos escrever a segunda forma como

$$B = \sum_{\alpha, i, j} h_{ij}^{\alpha} w_i w_j e_\alpha.$$

$$1 \leq i, j \leq n, \qquad n+1 \leq \alpha, \beta \leq n+p, \qquad h_{ij}^{\alpha} = H_\alpha \left(e_i, e_j\right) = \left\langle B\left(e_i, e_j\right), e_\alpha \right\rangle$$

Capítulo 4

MÉTODO DO REFERENCIAL MÓVEL

Lema 4.0.12 (Cartan)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Sejam $w_1, \cdots, w_r : V \to R$, $r \leq n$, formas lineares de V linearmente independentes.*

Suponhamos que existam formas lineares $\theta_1, \cdots, \theta_r$ satisfazendo a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^{r} w_i \wedge \theta_i = 0.$$

Então, exitem números reais a_{ij} tais que

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} w_j, \qquad i, j = 1, \cdots, r, \qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n munida com uma conexão de Levi-Civita ∇. Um referencial ortonormal $\{e_1, \cdots . e_n\}$ sobre um aberto $U \subset M$ é chamado um *referencial móvel*. Existe um único correferencial $\{w_1, \cdots, w_n\}$ satisfazendo $w_i\left(e_j\right) = \delta_{ij}$.

As formas de conexão w_{ij} no referencial $\{e_1, \cdots . e_n\}$ são as 1-formas diferenciáveis em U dadas para $X \in \mathfrak{X}(M)$ por

$$w_{ij}(X) = \left\langle \nabla_X e_i, e_j \right\rangle.$$

Segue imediatamente das propriedades da conexão de Levi-Civita que w_{ij} são, de fato, 1-formas diferenciáveis e

$$w_{ij} + w_{ji} = 0$$

para todos $1 \leq i, j \leq n$. Em particular, $w_{ii} = 0$ para todo i.

As *formas de curvatura* no referencial $\{e_1, \cdots . e_n\}$, são as 2-formas Ω_{ij} em U dadas, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ por

$$\Omega_{ij}(X, Y) = \left\langle R\left(e_i, e_j\right) X, Y \right\rangle.$$

As simetrias do operador de curvatura garantem, imediatamente, que as Ω_{ij} são de fato 2-formas em U, tais que $\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0$ Note que

$$\Omega_{ij}\left(e_k, e_l\right) = \left\langle R\left(e_i, e_j\right) e_k, e_l \right\rangle = R_{ijkl}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\Omega_{ij}(X,Y) &= \left\langle R\left(e_i,e_j\right)X,Y\right\rangle = \left\langle R\left(e_i,e_j\right)\sum_k X^k e_k, \sum_l Y^l e_l\right\rangle \\ &= \sum_{l,k} X^k Y^l \left\langle R\left(e_i,e_j\right)e_k,e_l\right\rangle = \sum_{l,k} w_k(X)\,w_l(Y)\left\langle R\left(e_i,e_j\right)e_k,e_l\right\rangle\end{aligned}$$

Logo, segue que

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{l,k} R_{ijkl} w_k \wedge w_l.$$

O ponto fundamental no método do referencial móvel é que as formas w_i, w_{ij} e Ω_{ij} satisfazem as chamadas equações de estruturas de Elie Cartan.

As duas proposições seguintes apresentam, respectivamente, a primeira e a segunda equações de estruturas.

Proposição 4.0.13. *As formas de conexão satisfazem*

$$dw_i = \sum_j w_{ij} \wedge w_j. \tag{4.1}$$

Demonstração. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned}dw_i(X,Y) &= X(w_i(Y)) - Y(w_i(X)) - w_i([X,Y]) \\ &= X\langle Y,e_i\rangle - Y\langle X,e_i\rangle - \langle [X,Y],e_i\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, e_i\rangle + \langle Y, \nabla_X e_i\rangle - \langle \nabla_Y X, e_i\rangle \\ &- \langle X, \nabla_Y e_i\rangle - \langle [X,Y],e_i\rangle \\ &= \langle Y, \nabla_X e_i\rangle - \langle X, \nabla_Y e_i\rangle \\ &= \sum_k \left(\langle Y,e_k\rangle \langle e_k, \nabla_x e_i\rangle - \langle X,e_k\rangle\langle e_k,\nabla_Y e_i\rangle\right) \\ &= \sum_k \left(w_k(Y)\,w_{ik}(X) - w_k(X)\,w_{ik}(Y)\right) \\ &= \sum_k w_k \wedge w_{ik}(X,Y).\end{aligned}$$

□

Proposição 4.0.14. *Nas notações acima, temos, para todo* $1 \leq i, j \leq n$

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} + \Omega_{ij}. \tag{4.2}$$

Demonstração. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned}
dw_{ij}(X,Y) &= X\left(w_{ij}(Y)\right) - Y\left(w_{ij}(X)\right) - w_{ij}([X,Y]) \\
&= X\left\langle \nabla_Y e_i, e_j \right\rangle - Y\left\langle \nabla_X e_i, e_j \right\rangle - \left\langle \nabla_{[X,Y]} e_i, e_j \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_X \nabla_Y e_i, e_j \right\rangle + \left\langle \nabla_Y e_i, \nabla_x e_j \right\rangle - \left\langle \nabla_Y \nabla_X e_i, e_j \right\rangle \\
&- \left\langle \nabla_X e_i, \nabla_Y e_i \right\rangle - \left\langle \nabla_{[X,Y]} e_i, e_j \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_X \nabla_Y e_i - \nabla_Y \nabla_X e_i - \nabla_{[X,Y]} e_i, e_j \right\rangle \\
&+ \left\langle \nabla_Y e_i, \nabla_x e_j \right\rangle - \left\langle \nabla_X e_i, \nabla_Y e_i \right\rangle \\
&= \left\langle R(X,Y) e_i, e_j \right\rangle \\
&+ \sum_k \left(\left\langle \nabla_Y e_i, e_k \right\rangle \left\langle e_k, \nabla_x e_j \right\rangle - \left\langle \nabla_X e_i, e_k \right\rangle \left\langle e_k, \nabla_Y e_i \right\rangle \right) \\
&= \left\langle R(X,Y) e_i, e_j \right\rangle + \sum_k \left(w_{ik}(Y) w_{jk}(X) - w_{ik}(X) w_{jk}(Y) \right) \\
&= \Omega_{ij}(X,Y) + \sum_k w_{ik} \wedge w_{jk}(X,Y).
\end{aligned}$$

□

A proposição a seguir mostra que as formas de conexão são únicas e inteiramente determinadas pela anti-simetria em relação aos seus índices e pela primeira equação de estrutura.

Proposição 4.0.15. *Seja $\{e_1, \cdots .e_n\}$ uma referencial ortonormal sobre um aberto $U \subset M$ e sejam W_{ij} e θ_{ij} dois conjuntos de formas diferenciávies em U, anti-simétricas ($w_{ij} = -w_{ji}$) e satisfazem 3.1. Então $w_{ij} = \theta_{ij}$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.*

Demonstração. Segue de 3.1 que, para $1 \leq i, j \leq n$,

$$\sum_j \left(w_{ij} - \theta_{ij} \right) \wedge w_j = 0.$$

Potanto, pelo lema de Cartan, tem-se para cada p em U

$$w_{ij}|_p - \theta_{ij}|_p = \sum_k h_{ij}^k(p)\, w_k|_p.$$

Assim, ficam definidas as funções $h_{ij}^k : U \to R$, tais que $h_{ij}^k = h_{ik}^j$ e $w_{ij} - \theta_{ij} = \sum_k h_{ij}^k w_k$ para todo i, j. Obeserve que

$\sum_k h_{ji}^k w_k = w_{ji} - \theta_{ji} = -\left(w_{ij} - \theta_{ij} \right) = -\sum_k h_{ij}^k w_k.$

Logo,

$$h_{ij}^{k} = -h_{ji}^{j} = h_{ik}^{i} = h_{ki}^{j} = -h_{ik}^{j} = -h_{ij}^{k}.$$

□

A idéia básica do método do referencial móvel pode ser descrita da seguinte maneira. Seja $x : M \to N^{n+q}$ uma imersão de uma variedade diferencial de dimensão n em uma variedade Riemaniana N^{n+q}. É uma consequência do teorema da função inversa que para todo p em M existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição $x|U$ de x a U é injetiva. Seja $V \subset N^{n+q}$ uma vizinhança de $x(p)$ em N^{n+q} de tal modo que $V \supset x(U)$. Admitamos V suficientemente pequeno para que exista um referencial móvel $\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}\}$ em V com a propriedade que quando restrito a $x(U)$, os vetores $e_1, \cdots, e_n$ sejam tangentes a $x(U)$ e os vetores $e_{n+1}, \cdots, e_{n+p}$ sejam normais a $x(U)$. Um tal referencial é dito um *referencial adaptado* a x.

A existência de um referencial adaptado pode ser provada da seguinte maneira. Se V é suficientemente pequeno, existe um difeomorfismo $g : V \to V$ tal que $g \circ x(U)$ é um aberto de uma subvariedade de dimensão n de N^{n+q}. A existência de um referencial $\{f_1, \cdots, f_n, f_{n+1}, \cdots, f_{n+p}\}$ adaptado a $g \circ x(U)$ em $g(V)$ é imediata. A inversa $g^{-1}(f_1), \cdots, g^{-1}(f_{n+p})$ de um tal referencial pode não ser ortonormal. Podemos utilizar o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt em cada ponto de V. Observando que os vetores obtidos de um tal processo variam diferencialmente com os vetores dados, obteremos em V um referencial ortonormal adaptado a $x(U)$.

Em V estão definidas as formas w_i do correferncial de$\{e_i\}$ e as formas de conexão w_{ij} que satisfazem as equações de estrutura (3.1) e (3.2). A aplicação $x : U \subset M \to V \subset N^{n+p}$ induz formas diferenciais $x^*(w_i)$, $x^*(w_{ij})$ em U. Como x^* comuta a derivação exterior e com o produto exterior, tais formas em U satisfazem as equações de estrutura (3.1) e (3.2). Acontece que toda geometria métrica local da imersão x está contida nestas equações de estrutura.

4.1 Aplicações às superfícies em $\mathbb{R}^3$

Seja S uma variedade de dimensão 2 e $x : S \to \mathbb{R}^3$ uma imersão. Para cada ponto $p \in S$ fica então definido um produto interno $\langle , \rangle_p$ em T_pS pela regra: se $v_1, v_2 \in T_pS$,

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle dx_p(v_1), dx_p(v_2) \rangle,$$

Onde no segundo membro aparece o produto interno usual do R^3. É fácil ver que $\langle , \rangle_p$ é diferenciável e define, portanto uma métrica Riemaniana em S, chamada de métrica induzida pela imersão x.

Seja$U \subset S$ uma vizinhança de p em S tal que a restrição $x|U$ seja injetiva. Seja V uma vizinhaça de $x(p) \in \mathbb{R}^3$ tal que $V \supset x(U)$. tomando V e U suficientemente pequenos, podemos escolher em V um referencial ortonormal móvel e_1, e_2, e_3 adaptado a x, isto é, quando restrito a $x(U)$, e_1, e_2 sejam tangentes a $x(U)$ e e_3 seja normal a $x(U)$.

Em V estão definidas as formas w_i do correferencial de $\{e_i\}$, $i = 1, 2, 3$ e as formas de conexão $w_{12} = -w_{21}$, $w_{32} = -w_{23}$, $w_{13} = -w_{31}$. Tais formas satisfazem em V as equações de estrutura:

$$dw_1 = w_2 \wedge w_{21} + w_3 \wedge w_{31,}$$

$$dw_2 = w_1 \wedge w_{12} + w_3 \wedge w_{32,}$$

$$dw_3 = w_1 \wedge w_{13} + w_2 \wedge w_{23,}$$

$$dw_{12} = w_{13} \wedge w_{32},$$

$$dw_{13} = w_{12} \wedge w_{23},$$

$$dw_{23} = w_{21} \wedge w_{13},$$

A imersão $x : U \subset S \to V \subset \mathbb{R}^3$ induz em U formas $x^*(w_i)$, $x^*\left(w_{ij}\right)$, $i, j = 1, 2, 3$. Como x^* comuta com d e $\wedge$, tais formas satisfazem as mesmas equações acima. Observando-se que $x^*(w_3) = 0$, pois todo q em U e todo v em T_pS, teremos $dx(v) = a_1e_1 + a_2e_2$, e portanto

$(x^*w_3)(v) = w_3(dx(v)) = w_3(a_1e_1 + a_2e_2) = 0.$

Por comodidade convecionaremos

$$x^*w_i = w_i, \qquad x^*w_{ij} = w_{ij}.$$

Tais formas satisfazem portanto as equações de estrutura, com a relação adicional $w_3 = 0$.

Dessa forma, temos que

$dw_3 = w_1 \wedge w_{13} + w_2 \wedge w_{23} = 0$

e pelo lema de Cartan,

$$w_{13} = h_{11}w_1 + h_{12}w_2$$

$$w_{23} = h_{21}w_1 + h_{22}w_2$$

onde $h_{ij} = h_{ji}$, $i, j = 1, 2$, são funções diferenciáveis em U.

Observe que

$$w_{13}(e_1) = h_{11}w_1\left(e_1\right) + h_{12}w_2\left(e_1\right) = h_{11},$$

$$w_{13}(e_2) = h_{12},$$

$$w_{23}(e_1) = h_{21},$$

$$w_{23}(e_2) = h_{22}.$$

Por outro lado, como $de_i = \sum_j w_{ij}e_j$,

$$de_3\left(x\right) = w_{31}\left(v\right)e_1 + w_{32}\left(v\right)e_2,$$

para todo q em U e todo v em T_pS. Portanto, escrevendo $v = a_1e_1 + a_2e_2$, obtemos

$$de_3\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_{11} & -h_{12} \\ -h_{21} & -h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

Isto é, $(-h_{ij})$ é a matriz da diferencial da aplicação $e_3 : U \to \mathbb{R}^3$ na base $\{e_1, e_2\}$ com $|e_3| = 1$, esta aplicação tem valores na esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

A aplicação $e_3 : U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é chamada de aplicação *normal de Gauss* em U.

Portanto $(-h_{ij})$ é a matriz da diferencial da aplicação normal de Gauss na base $\{e_1, e_2\}$.

Como h_{ij} é uma matriz simétrica, concluímos que a diferencial da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta, portanto, tal aplicação pode ser diagonalizada, com auto-valores $-\lambda_1, -\lambda_2$ reais e auto-vetores ortogonais.

É usual definir *curvatura Gaussiana* K de S em p por

$$K = \det\left(de_3\right)_p = \lambda_1\lambda_2 = h_{11}h_{22} - h_{12}^2,$$

onde as funções envolvidas são calculadas em p. Decorre da definição de K que

$dw_{12} = w_{13} \wedge w_{32} = -\left(h_{11}w_1 + h_{12}w_2\right) \wedge \left(h_{21}w_1 + h_{22}w_2\right) = \left(h_{11}h_{22} + h_{12}^2\right) w_1 \wedge w_2 = -Kw_1 \wedge w_2.$

A expressão $dw_{12} = -Kw_1 \wedge w_2$ permite demonstrar um dos teoremas mas importantes da teoria das superfícies, descoberto por Gauss.

Teorema 4.1.1 (Gauss). *A curvatura Gaussiana K depende apenas da métrica induzida de S, isto é, se $x, x' : S \to \mathbb{R}^3$ são duas imersões de S cujas métricas induzidas em S coincidem, então $K(p) = K'(p)$, $p \in S$, onde K e K' indicam as curvaturas Gaussianas de x e x', respectivamente. (veja [5], pagina 15)*

O teorema de Gauss signifca que a curvatura Gaussiana, embora tenha sido definida usando o espaço ambiente $\mathbb{R}^3$, só depende de medidas feitas sobre a superfície.

Em geral, entidades geométricas em S que podem ser calculadas a partir de w_1, w_2 e w_{12} dependem apenas da métrica induzida de S e devem poder ser definidas sem fazer mensão a alguma à imersão.

4.1.1 *Formas qudráticas em S*

A primeira forma quadrática I_p é simplesmente a forma quadrática associada à forma bilinear $\langle , \rangle_p$, isto é,

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle, \quad v \in T_pS.$$

Em um referencial adaptado local e_1, e_2, e_3 a primeira forma quadrática se escreve $I_p(v) = \left\langle \sum_i v^i e_i, \sum_i v^i e_i \right\rangle = \sum_i \left(v^i\right)^2 = \sum_i \left(w_i(v)\right)^2 = \left(w_1^2 + w_2^2\right)(v)$

$$I_p(v) = \left(w_1^2 + w_2^2\right)(v) \tag{4.3}$$

Portanto a primeira forma quadrática se escreve

$$I_p = w_1^2 + w_2^2.$$

A segunda forma quadrática II_p é definada em um referencial local adaptado e_1, e_2, e_3 por

$II_p(v) = \left(w_{13}w_1 + w_{23}w_2\right)(v) = \sum_{i,j} h_{ij} w_i w_j(v), \qquad i, j = 1, 2.$

$II_p(v) = \sum_{i,j} h_{ij} w_i(v) w_j(v) = -\langle de_3(v), v \rangle_p$

$$II_p(v) = -\langle de_3(v), v \rangle_p, \qquad v \in T_pS$$

Um fato interessante é que as formas quadrátrica I e II determinam a imersão $x : S \to \mathbb{R}^3$ a menos de um movimento rígido de $\mathbb{R}^3$. Assim, podemos dizer que a geometria local da imersão x está inteiramente contida nas formas quadráticas e portanto, nas equações de estrutura que lhes deram origem.

Capítulo 5

IMERSÕES TIPO-ESPAÇO EM VARIEDADES COM CURVATURA CONSTANTE

Vamos denotar por $Q_p^{n+p}(c)$ uma variedade completa com conexão semi-Riemaniana de índice p e com curvatura constante c. Tais variedades são chamadas de *formas espaciais*.

Seja M^n uma variedade Riemaniana e seja $\Psi : M^n \longrightarrow Q_p^{n+p}(c)$ uma imersão. A imersão é dita *tipo-espaço*, se a métrica induzida em M é definida positiva.

Seja M^n uma variedade Riemaniana imersa em $Q_p^{n+p}(c)$. Como a métrica indefinida de $Q_p^{n+p}(c)$ induz uma métrica Riemaniana em M^n, a imersão é chamada *tipo-espaço*. Podemos escolher um referencial móvel ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_{n+p}\}$ em $\widetilde{U} \subset Q_p^{n+p}(c)$ tal que, em cada ponto de M^n o conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ gera o espaço tangente de $U = \widetilde{U} \cap M$. Esse referencial é um *referencial adaptado* à imersão. Usaremos as seguintes convenções de índices

$1 \leq A, B, C, ..., \leq n+p, \qquad 1 \leq i, j, k, ..., \leq n, \qquad n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, ..., \leq n+p.$

Associado a esse referencial temos o correferencial $\{w_1, w_2, .., w_{n+p}\}$ de modo que a métrica semi-Riemaniana de $Q_p^{n+p}(c)$ é dada por

$d\bar{s}^2 = \sum_A \varepsilon_A w_A^2, \ \varepsilon_i = 1, \ \varepsilon_\alpha = -1, \ 1 \leq i \leq n, \ n+1 \leq \alpha \leq n+p$

Assim, as equações de estrutura de $Q_p^{n+p}(c)$ são dadas por

$$dw_A = \sum_B \varepsilon_B w_{AB} \wedge w_B \qquad w_{AB} + w_{BA} = 0 \tag{5.1}$$

$$dw_{AB} = \sum_C \varepsilon_C w_{AC} \wedge w_{CB} - \frac{1}{2} \sum_{C,D} \varepsilon_C \varepsilon_B K_{ABCD} w_C \wedge w_D \tag{5.2}$$

$$K_{ABCD} = c\varepsilon_A \varepsilon_B \left(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}\right) \tag{5.3}$$

Se $X \in \mathfrak{X}(U)$, então $w_\alpha(X) = \langle X, e_\alpha \rangle = 0$, pois, $e_\alpha \in \mathfrak{X}(U)^\perp$.

$$w_\alpha(X) = 0, \qquad n+1 \leq \alpha \leq n+p \tag{5.4}$$

A métrica Riemaniana em M^n é dada por $d\bar{s}^2 = \sum_i w_i^2$.

Desde que $0 = dw_\alpha = \sum_\alpha w_{\alpha i} \wedge w_i$, pelo *lema de Cartan*, temos

$$w_{\alpha i} = \sum_j h_{ij}^\alpha w_j, \qquad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha \tag{5.5}$$

onde, $h_{ij}^\alpha : U \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, uma vez que $w_{\alpha i}$ são diferenciáveis.

Logo, concluimos que para todo ponto em U e campos em $\mathfrak{X}(U)$

$$dw_i = \sum_C w_{iC} \wedge w_C = \sum_j w_{ij} \wedge w_i + \sum_\alpha w_{i\alpha} \wedge w_\alpha = \sum_j w_{ij} \wedge w_j$$

ou seja, a restrição destas formas satisfazem a equação de estrutura dada acima.

Assim as equações de estrutura de M^n são dadas por

$$dw_i = \sum_j w_{ij} \wedge w_j, \qquad w_{ij} + w_{ji} = 0 \tag{5.6}$$

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj} - \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl} w_k \wedge w_l \tag{5.7}$$

Vamos defenir a *segunda forma fundamental* de M^n por $B = \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^\alpha w_i w_j e_\alpha$ e denotar por $h = \frac{1}{n}\sum_\alpha \left(\sum_i h_{ii}^\alpha\right) e_\alpha$ e por $H = |h| = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_\alpha \left(\sum_i h_{ii}^\alpha\right)^2}$ o vetor *curvatura média* e a norma do vetor curvatura média, que será chamada apenas de *curvatura média* de M^n respectivamente.

Se $\{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, ..., \widetilde{e}_{n+p}\}$ for um outro referencial ortonormal adaptado à imersão em $\widetilde{U} \subset Q_p^{n+p}(c)$ com $\widetilde{e}_\alpha = e_\alpha$ e $\widetilde{e}_j = \sum_k a_j^k e_k$. Vamos omitir a somatória, ou seja, usaremos a convenção de Einstein, em que índices subscritos e sobrescritos repetidos naturalmente indicam soma, então $\widetilde{w}_j = a_j^k w_k$.

$$\widetilde{w}_{\alpha i}(X) = \langle \widetilde{\nabla}_X \widetilde{e}_\alpha, \widetilde{e}_i \rangle = \langle \widetilde{\nabla}_X e_\alpha, a_i^k e_k \rangle = a_i^k \langle \widetilde{\nabla}_X e_\alpha, e_k \rangle = a_i^k w_{\alpha k}(X)$$

Daqui temos que

$$\widetilde{h}_{ij}^\alpha = \widetilde{w}_{\alpha i}(e_j) = a_i^k w_{\alpha k}(\widetilde{e}_j) = a_i^k w_{\alpha k}\left(a_j^k e_l\right) = a_i^k a_j^k w_{\alpha k}(e_l) = a_i^k a_j^k h_{kl}^\alpha.$$

Portanto

$$\widetilde{B} = \sum_{\alpha,i,j} \widetilde{h}_{ij}^\alpha \widetilde{w}_i \widetilde{w}_j \widetilde{e}_\alpha = \sum_{\alpha,i,j} a_i^k a_j^k h_{kl}^\alpha a_i^r w_r a_j^s w_s e_\alpha$$

Como $\widetilde{w}_j = a_j^k w_k$, temos que

$$1 = \widetilde{\delta}_{jj} = \widetilde{w}_j\left(\widetilde{e}_j\right) = a_j^k w_k\left(\widetilde{e}_j\right) = a_j^k a_j^s w_k\left(e_s\right) = a_j^k a_j^s \delta_{ks} a_j^k a_j^s = \delta^{ks}.$$

Logo,

$$\widetilde{B} = \sum_{\alpha} \delta^{kr}\delta^{ls} h_{kl}^{\alpha} w_r w_s e_{\alpha} = \sum_{\alpha,k,l} h_{kl}^{\alpha} w_r w_s e_{\alpha} = B$$

Ou seja, B não depende da escolha do referencial ortonormal. Analogamente prova-se que h também independe do referencial ortonormal.

Usando as equações de estrutura, podemos obter a *equação de Gauss*.

$$R_{ijkl} - K_{ijkl} = \langle B\left(e_i, e_k\right), B\left(e_j, e_l\right)\rangle - \langle B\left(e_i, e_l\right), B\left(e_j, e_k\right)\rangle$$

onde

$$R_{ijkl} = \langle R\left(e_i, e_j\right) e_k, e_l\rangle, \qquad K_{ijkl} = c\left(\delta_{ik}\delta_{jk} - \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

$$B\left(e_i, e_k\right) = \sum_{\alpha,i,k} h_{ik}^{\alpha} w_i\left(e_i\right) w_k\left(e_k\right) e_{\alpha} = \sum_{\alpha,i,k} h_{ik}^{\alpha} e_{\alpha}$$

Portanto,

$$R_{ijkl} - c\left(\delta_{ik}\delta_{jk} - \delta_{il}\delta_{jk}\right) = -\sum_{\alpha}\left(h_{ik}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}\right)$$

$$R_{ijkl} = c\left(\delta_{ik}\delta_{jk} - \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \sum_{\alpha}\left(h_{ik}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}\right) \tag{5.8}$$

As componentes dos tensor curvatura de Ricci (Ric) e a curvatura escalar R são dadas respectivamente por:

$$R_{jk} = c\left(n-1\right)\delta_{jk} - \sum_{\alpha}\left(\sum_i h_{ii}^{\alpha}\right) h_{jk}^{\alpha} + \sum_{\alpha,i} h_{ik}^{\alpha} h_{ji}^{\alpha} \tag{5.9}$$

$$R = cn\left(n-1\right) - n^2H^2 + S \tag{5.10}$$

de fato,

$$R_{jk} = \sum_i \langle R\left(e_j, e_i\right) e_k, e_i\rangle = \sum_i R_{jiki} = \sum_i\left[c\left(\delta_{jk}\delta_{ii} - \delta_{ji}\delta_{ik}\right) - \sum_{\alpha}\left(h_{jk}^{\alpha}h_{ii}^{\alpha} - h_{ji}^{\alpha}h_{ik}^{\alpha}\right)\right]$$

$$R_{jk} = c\delta_{jk}\left(n-1\right) - \sum_{\alpha}\left(\sum_i h_{ii}^{\alpha}\right) h_{jk}^{\alpha} + \sum_{\alpha,i} h_{ik}^{\alpha} h_{ji}^{\alpha}$$

e,

$$R = \sum_{i,j} \langle R\left(e_j, e_i\right) e_j, e_i\rangle = \sum_j R_{jiji} = \sum_{i,j}\left[c\left(\delta_{jj}\delta_{ii} - \delta_{ji}\delta_{ij}\right) - \sum_{\alpha}\left(h_{jj}^{\alpha}h_{ii}^{\alpha} - h_{ji}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}\right)\right]$$

Desenvolvendo a primeira parcela de da equação acima, temos

$$\sum_{i,j} c\left(\delta_{jj}\delta_{ii} - \delta_{ji}\delta_{ij}\right) = \sum_j c\,(n-1) = cn\,(n-1)$$

Desenvolvendo segunda parcela

$$\sum_{\alpha,i,j}\left(h^\alpha_{jj}h^\alpha_{ii} - h^\alpha_{ji}h^\alpha_{ij}\right) = \sum_\alpha\left(\sum_j h^\alpha_{jj}\right)\left(\sum_i h^\alpha_{ii}\right) - \sum_{\alpha,i,j}\left(h^\alpha_{ji}\right)^2 = \sum_\alpha\left(\sum_i h^\alpha_{ii}\right)^2 - \sum_{\alpha,i,j}\left(h^\alpha_{ji}\right)^2$$

Como $H^2 = \frac{1}{n^2}\sum_\alpha\left(\sum_i h^\alpha_{ij}\right)^2$, chamando $\sum_{\alpha,i,j}\left(h^\alpha_{ji}\right)^2$ de S obtemos

$$R = cn\,(n-1) - n^2H^2 + S$$

Note que S denota o quadrado do comprimento da segunda forma fundamental da imersão.

Podemos também obter as equações de estrutura do *fibrado normal* de M^n.

$$dw_\alpha = \sum_\beta w_{\alpha\beta} \wedge w_\beta, \qquad w_{\alpha\beta} + w_\beta = 0 \tag{5.11}$$

$$dw_{\alpha\beta} = \sum_\gamma w_{\alpha\gamma} \wedge w_{\gamma\beta} - \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{\alpha\beta ij} w_i \wedge w_j \tag{5.12}$$

onde

$$R_{\alpha\beta ij} = \sum_l \left(h^\alpha_{il}h^\beta_{lj} - h^\alpha_{jl}h^\beta_{li}\right) \tag{5.13}$$

Lembremos que a diferencial covariante ∇T de um tensor T de ordem r é um tensor (r+1) dado por

$\nabla T\,(Y_1,...Y_r,Z) = Z\,(T\,(Y_1,...,Y_r)) - T\,(\nabla_Z Y_1,...,Y_r) - \cdots - T\,(Y_1,...Y_{r-1},\nabla_Z Y_r)\,.$

As componentes de ∇T no referencial ortonormal local $\{e,...,e\}$ serão denotadas por $T_{i_1\cdots i_r j} = \nabla T\left(e_{i_1},...,e_{i_r},e_j\right)$.

Proposição 5.0.2. *Nas notações acima, temos*

$\sum_j T_{i_1\cdots i_r j} w_j = dT_{i_1\cdots i_r j} + \sum_j T_{ji2\cdots i_r} w_{ji_1} + \sum_j T_{i_1 ji_3\cdots i_r} w_{ji_2} + \cdots + \sum_j T_{i_1\cdots i_{r-1}j} w_{ji_r}$

Demonstração. $\sum_j T_{i_1 ji_3\cdots i_r j} w_{ji_2}\,(e_i) = \sum_j T\left(e_{i_1}...e_{i_r}\right)\langle\nabla_{e_i}e_j, e_{i_2}\rangle$ onde $i = 1,...,n$. Como T é linear e $\langle\nabla_{e_i}e_j, e_{i_2}\rangle = \langle\nabla_{e_i}e_{i_2}, e_j\rangle$,

$\sum_j T_{i_1 j i_3 \cdots i_r j} w_{j i_2}(e_i) = -T\left(e_{i_1}, \sum_j \langle \nabla_{e_i} e_{i_2}, e_j \rangle e_j, e_{i_3}, ..., e_{i_r}\right) = -T\left(e_{i_1}, \nabla_{e_i} e_{i_2}, e_{i_3}, ..., e_{i_r}\right)$
Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_j T_{i_1 j i_3 \cdots i_r j} w_{j i_2}(e_i) &= \sum_j T_{i_1 \cdots i_r j} \delta_{ij} = T_{i_1 \cdots i_r j} = \nabla T\left(e_1, ... e_{i_r}, e_i\right) \\
&= e_i\left(T\left(e_1, ... e_{i_r}\right)\right) - T\left(\nabla_{e_i} e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_r}\right) \\
&- T\left(e_{i_1}, \nabla_{e_i} e_{i_2}, e_{i_3}, ..., e_{i_r}\right) - \cdots - T\left(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, ..., \nabla_{e_i} e_{i_r}\right) \\
&= dT_{i_1 \cdots i_r j}(e_i) + \sum_j T_{j i 2 \cdots i_r} w_{j i_1}(e_i) \\
&+ \sum_j T_{i_1 j i_3 \cdots i_r} w_{j i_2}(e_i) + \cdots + \sum_j T_{i_1 \cdots i_{r-1} j} w_{j i_r}(e_i).
\end{aligned}$$

□

Da proposição acima temos que as componentes de ∇h_{ij}^{α} satisfazem

$$\sum_k h_{ijk}^{\alpha} w_k = dh_{ij}^{\alpha} + \sum_k h_{ik}^{\alpha} w_{kj} + \sum_k h_{jk}^{\alpha} w_{ki} - \sum_\beta h_{ij}^{\beta} w_{\beta\alpha} \tag{5.14}$$

Aplicando a derivada exterior em (5.5) obtemos a *equação de Codazzi*

$$h_{ijk}^{\alpha} = h_{ikj}^{\alpha} \tag{5.15}$$

De fato,

$$dw_{\alpha i} = \sum_j dh_{ij}^{\alpha} \wedge w_j + \sum_j h_{ij}^{\alpha} dw_j$$

Substituindo a equação 5.14 obtemos

$$dw_{\alpha i} = \sum_{k,j} h_{ijk}^{\alpha} w_k \wedge w_j + \sum_{k,j} h_{ik}^{\alpha} w_{jk} \wedge w_j + \sum_{k,j} h_{jk}^{\alpha} w_{ik} \wedge w_j + \sum_{\beta,j} h_{ij}^{\beta} w_{\beta\alpha} \wedge w_j + \sum_{k,j} h_{ij}^{\alpha} w_{jk} \wedge w_k$$

Obeserve que

$$\sum_{k,j} h_{ik}^{\alpha} w_{jk} \wedge w_j = -\sum_{k,j} h_{ij}^{\alpha} w_{jk} \wedge w_k$$

e

$$\sum_{\beta,j} h_{ij}^{\beta} w_{\beta\alpha} \wedge w_j = 0$$

Portanto

$$dw_{\alpha i} = \sum_{k,j} h_{ijk}^{\alpha} w_k \wedge w_j + \sum_{k,j} h_{jk}^{\alpha} w_{ik} \wedge w_j \tag{5.15.1}$$

Por outro lado temos das equações de estrutura que

$$dw_{\alpha i} = \sum_{C} w_{\alpha C} \wedge w_{\mathrm{Ci}} - \frac{1}{2}\sum_{C,D} \varepsilon_C \varepsilon_B K_{\alpha i CD} w_C \wedge w_D$$

$$K_{\alpha i CD} w_C = c\varepsilon_\alpha \varepsilon_i \left(\delta_{\alpha C}\delta_{iD} - \delta_{\alpha D}\delta_{iC}\right) = 0$$

Assim $dw_{\alpha i} = \sum_C w_{\alpha C} \wedge w_{\mathrm{Ci}} = \sum_j w_{\alpha j} \wedge w_{ji} + \sum_\beta w_{\alpha\beta} \wedge w_{\beta i}$.

Para campos $X, Y \in \mathfrak{X}(U) \subset M$ temos que

$$\sum_{\beta} \left(w_{\alpha\beta} \wedge w_{\beta i}\right)(X,Y) = \sum_{\beta} w_{\alpha\beta}(X) \wedge w_{\beta i}(Y) = 0,$$

pois, $w_{\beta i}(Y) = \langle \nabla_Y e_\beta, e_i \rangle = -\langle \nabla_Y e_i, e_\beta \rangle = 0$

Logo, temos

$$dw_{\alpha i} = \sum_{j} w_{\alpha j} \wedge w_{ji} = \sum_{k,j} h^{\alpha}_{jk} w_k \wedge w_{ji} = \sum_{k,j} h^{\alpha}_{jk} w_{ij} \wedge w_k \tag{5.15.2}$$

Comparando (5.15.1) e (5.15.2) concluimos que

$$0 = \sum_{k,j} h^{\alpha}_{ijk} w_k \wedge w_j = \sum_{k<j} \left(h^{\alpha}_{ijk} - h^{\alpha}_{ikj}\right) w_k \wedge w_j.$$

resultando assim na equação de Codazzi.

De maneira análoga a (5.14) prova-se que a derivada covariante segunda de h^{α}_{ij} satisfaz a seguinte igualdade

$$\sum_{l} h^{\alpha}_{ijlk} w_l = dh^{\alpha}_{ijk} + \sum_{l} h^{\alpha}_{ijk} w_{li} + \sum_{l} h^{\alpha}_{ilk} w_{lj} + \sum_{l} h^{\alpha}_{ijl} w_{lk} - \sum_{\beta} h^{\beta}_{ijk} w_{\beta\alpha}$$

Derivando exteriormente 5.14 temos a equação de Ricci

$$h^{\alpha}_{ijkl} - h^{\alpha}_{ijlk} = \sum_{m} h^{\alpha}_{im} R_{mjkl} + \sum_{m} h^{\alpha}_{jm} R_{mikl} + \sum_{b} h^{\beta}_{ij} R_{\alpha\beta kl} \tag{5.16}$$

De fato,

$\sum_k d\left(h^{\alpha}_{ijk} w_k\right) = d\left(dh^{\alpha}_{ij}\right) + \sum_k d\left(h^{\alpha}_{ik} w_{kj}\right) + \sum_k d\left(h^{\alpha}_{jk} w_{ki}\right) - \sum_\beta d\left(h^{\beta}_{ij} w_{\beta\alpha}\right)$.

$$\sum_k \left(dh^{\alpha}_{ijk} \wedge w_k + h^{\alpha}_{ijk} dw_k\right) = \sum_k \left(dh^{\alpha}_{ik} \wedge w_{kj} + h^{\alpha}_{ik} dw_{kj}\right) + \sum_k \left(dh^{\alpha}_{jk} \wedge w_{ki} + h^{\alpha}_{jk} dw_{ki}\right)$$

$$- \sum_{\beta} \left(dh^{\beta}_{ij} \wedge w_{\beta\alpha} + h^{\beta}_{ij} dw_{\beta\alpha}\right). \tag{5.16.1}$$

Resolvendo cada termo separadamente, temos

$$\begin{aligned}\sum_k dh^\alpha_{ijk}\wedge w_k &= \sum_{k,l}\Big(h^\alpha_{ijkl}w_l\wedge w_k - h^\alpha_{ljk}w_{lj}\wedge w_k - h^\alpha_{ilk}w_{li}\wedge w_k - h^\alpha_{ijl}w_{lk}\wedge w_k\Big)\\ &+ \sum_{k,\beta} h^\beta_{ijk}w_{\beta\alpha}\wedge w_k.\end{aligned}$$

$\sum_k h^\alpha_{ijk}dw_k = \sum_k h^\alpha_{ijk}\left(\sum_l w_{kl}\wedge w_l\right).$
$\sum_k dh^\alpha_{ik}\wedge w_{kj} = \sum_k\left(\sum_l h^\alpha_{ikl}w_l\wedge w_{kj} - h^\alpha_{il}w_{lk}\wedge w_{kj} - h^\alpha_{kl}w_{li}\wedge w_{kj}\right) + \sum_{k,\beta} h^\beta_{ik}w_{\beta\alpha}\wedge w_{kj}.$
$\sum_k h^\alpha_{ik}dw_{kj} = \sum_{k,l} h^\alpha_{ik}w_{kl}\wedge w_{lj} - \frac{1}{2}\sum_{k,l,m} h^\alpha_{ik}R_{kjlm}w_l\wedge w_m.$
$\sum_k dh^\alpha_{kj}\wedge w_{ki} = \sum_{k,l}\left(h^\alpha_{kjl}w_l\wedge w_{ki} - h^\alpha_{kl}w_{lj}\wedge w_{ki} - h^\alpha_{lk}w_{lk}\wedge w_{ki}\right) + \sum_{k,\beta} h^\beta_{kj}w_{\beta\alpha}\wedge w_{ki}.$
$\sum_k h^\alpha_{kj}dw_{ki} = \sum_{k,l} h^\alpha_{kj}w_{kl}\wedge w_{li} - \frac{1}{2}\sum_{k,l,m} h^\alpha_{kj}R_{kilm}w_l\wedge w_m.$
$\sum_{k,\beta} dh^\alpha_{ij}\wedge w_{\beta\alpha} = 0.$
$\sum_\beta h^\alpha_{ij}dw_{\beta\alpha} = \sum_\beta h^\beta_{ij}R_{\beta\alpha kl}.$
Substituindo cada termo acima em (5.16.1), temos

$$\left[\sum_{k,l}\left(h^\alpha_{ijkl}w_l\wedge w_k - \underbrace{h^\alpha_{ljk}w_{li}\wedge w_k}_{1} - \underbrace{h^\alpha_{ilk}w_{lj}\wedge w_k}_{2} - \underbrace{h^\alpha_{ijl}w_{lk}\wedge w_k}_{3}\right) + \sum_{k,\beta} h^\beta_{ijk}w_{\beta\alpha}\wedge w_k\right] +$$

$$\left[\underbrace{\sum_k h^\alpha_{ijk}\left(\sum_l w_{kl}\wedge w_l\right)}_{3}\right] =$$

$$\left[\sum_k\left(\underbrace{\sum_l h^\alpha_{ikl}w_l\wedge w_{kj}}_{2} - \underbrace{h^\alpha_{il}w_{lk}\wedge w_{kj}}_{4} - \underbrace{h^\alpha_{kl}w_{li}\wedge w_{kj}}_{5}\right) + \sum_{k,\beta} h^\beta_{ik}w_{\beta\alpha}\wedge w_{kj}\right] +$$

$$\left[\underbrace{\sum_{k,l} h^\alpha_{ik}w_{kl}\wedge w_{lj}}_{6} - \frac{1}{2}\sum_{k,l,m} h^\alpha_{ik}R_{kjlm}w_l\wedge w_m\right] +$$

$$\left[\sum_{k,l}\left(\underbrace{h^\alpha_{kjl}w_l\wedge w_{ki}}_{1} - \underbrace{h^\alpha_{kl}w_{lj}\wedge w_{ki}}_{5} - \underbrace{h^\alpha_{lk}w_{lk}\wedge w_{ki}}_{6}\right) + \sum_{k,\beta} h^\beta_{kj}w_{\beta\alpha}\wedge w_{ki}\right] +$$

$$\left[\underbrace{\sum_{k,l} h^\alpha_{kj}w_{kl}\wedge w_{li}}_{6} - \frac{1}{2}\sum_{k,l,m} h^\alpha_{kj}R_{kilm}w_l\wedge w_m\right] - \left[\frac{1}{2}\sum_\beta h^\beta_{ij}R_{\beta\alpha kl}w_k\wedge w_l\right]$$

Usando as equações de estrutura e observando que as somas com mesmo número se anulam, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k,l} h^{\alpha}_{ijkl} w_l \wedge w_k + \sum_{k,\beta} h^{\beta}_{ijk} w_{\beta\alpha} \wedge w_k &= \sum_{k,\beta} h^{\beta}_{ik} w_{\beta\alpha} \wedge w_{kj} - \frac{1}{2} \sum_{k,l,m} h^{\alpha}_{ik} R_{kjlm} w_l \wedge w_m \\ &+ \sum_{k,\beta} h^{\beta}_{kj} w_{\beta\alpha} \wedge w_{ki} - \frac{1}{2} \sum_{k,l,m} h^{\alpha}_{kj} R_{kilm} w_l \wedge w_m \\ &- \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij} R_{\beta\alpha kl} w_k \wedge w_l.\end{aligned}$$

Para vetores em $\mathfrak{X}(U) \subset M$ as parcelas

$$\sum_{k,\beta} h^{\beta}_{ijk} w_{\beta\alpha} \wedge w_k, \sum_{k,\beta} h^{\beta}_{ik} w_{\beta\alpha} \wedge w_{kj} e \sum_{k,\beta} h^{\beta}_{kj} w_{\beta\alpha} \wedge w_{ki}$$

se anulam. Assim

$$\begin{aligned}\sum_{k,l} h^{\alpha}_{ijkl} w_l \wedge w_k &= -\frac{1}{2} \sum_{k,l,m} h^{\alpha}_{ik} R_{kjlm} w_l \wedge w_m - \frac{1}{2} \sum_{k,l,m} h^{\alpha}_{kj} R_{kilm} w_l \wedge w_m \\ &- \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij} R_{\beta\alpha kl} w_k \wedge w_l.\end{aligned}$$

Com base na equação acima analisemos a diferença $h^{\alpha}_{ijkl} - h^{\alpha}_{ijlk}$.

$$h^{\alpha}_{ijkl} - h^{\alpha}_{ijlk} = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{r,s} h^{\alpha}_{ijrs} w_s \wedge w_r (e_k, e_l) =$$
$$\left(-\tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{r,s,m} h^{\alpha}_{im} R_{rjsm} w_s \wedge w_m - \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{r,s,m} h^{\alpha}_{mj} R_{rism} w_s \wedge w_m - \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{\beta} h^{\beta}_{ij} R_{\beta\alpha kl} w_k \wedge w_l\right) (e_k, e_l)$$

$$h^{\alpha}_{ijkl} - h^{\alpha}_{ijlk} = \left(\sum_{m} h^{\alpha}_{im} R_{kjlm} + \sum_{m} h^{\alpha}_{mj} R_{kilm} + \sum_{\beta} h^{\beta}_{ij} R_{\alpha\beta kl} \right)$$

5.1 O Gradiente, o Divergente e o Laplaciano

O *grandiente* ($\text{grad}\, f$ ou ∇f) de uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ é um campo de vetores metricamente equivalente ao diferencial $df \in \mathfrak{X}(U)$, que satisfaz

$$\langle \text{grad}\, f, X \rangle = df(X) = Xf, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(U)$$

Seja X um campo vetorial suave em M^n. A *divergência* de X é a função

$\text{div}\, X : M^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$(\text{div}\, X)(p) = tr\{Y_p \to (\nabla_Y X)_p\}$$

em que *tr* denota o traço da aplicação linear

O *laplaciano* Δf de uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ é o divergente do gradiente

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \in \mathfrak{F}(M)$$

Sejam $f \in \mathfrak{F}(M)$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M^n$. Então em U, temos

1. $\nabla f = \sum_i e_i(f) e_i$;
2. $\operatorname{div} X = \sum_i \{e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle\}$, onde $X = \sum_i a_i e_i$;
3. $\Delta f = \sum_i \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f\}$

Proposição 5.1.1. *Sejam $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, então*

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;
2. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$
3. $\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$;
4. $\operatorname{div}(fX) f \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$
5. $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \Delta f, \Delta g\rangle$

Em particular temos,
$$\frac{1}{2}\Delta f^2 = f\Delta f + |\nabla f|^2$$

O laplaciano Δh^α_{ij} é definido por $\Delta h^\alpha_{ij} = \sum_k h^\alpha_{ijkk}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\Delta h^\alpha_{ij} &= \sum_k h^\alpha_{ijkk} = \sum_k h^\alpha_{kijk} = \sum_k \left(h^\alpha_{kijk} - h^\alpha_{kikj} + h^\alpha_{kkij}\right) \\
&= \sum_k \left(\sum_m h^\alpha_{km} R_{mikj} + \sum_m h^\alpha_{im} R_{mkjk}\right) + \sum_k h^\alpha_{kkij} + \sum_{k,\alpha} R_{\alpha\beta jk} \\
&= \sum_k h^\alpha_{kkij} + \sum_{m,k} h^\alpha_{km} R_{mikj} + \sum_{m,k} h^\alpha_{im} R_{mkjk} + \sum_{k,\alpha} R_{\alpha\beta jk}
\end{aligned}$$

$$\Delta h^\alpha_{ij} = \sum_k h^\alpha_{kkij} + \sum_{m,k} h^\alpha_{km} R_{mikj} + \sum_{m,k} h^\beta_{im} R_{mkjk} + \sum_{k,\alpha} h^\beta_{ik} R_{\alpha\beta jk} \tag{5.17}$$

Seja, $H \neq 0$.Vamos escolher $e_{n+1} = \frac{h}{H}$, ou seja

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= \frac{h}{H} = \frac{1}{H}\cdot h = \frac{1}{\frac{1}{n}\sqrt{\sum_\alpha \left(\sum_i h_{ii}^{\alpha}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}\sum_\alpha\left(\sum_i h_{ii}^{\alpha}\right)e_\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sum_\alpha \left(\sum_i h_{ii}^{\alpha}\right)^2}}\cdot\sum_\alpha\left(\sum_i h_{ii}^{\alpha}\right)e_\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(\sum_i h_{ii}^{n+1}\right)^2+\left(\sum_i h_{ii}^{n+2}\right)^2+\cdots+\left(\sum_i h_{ii}^{n+p}\right)^2}}\cdot[\sum_i h_{ii}^{n+1}e_{n+1}+ \\
&\quad \sum_i h_{ii}^{n+2}e_{n+2}+\cdots+\sum_i h_{ii}^{n+p}e_{n+p}] \\
e_{n+1} &= \frac{\sum_i h_{ii}^{n+1}}{\sqrt{\left(\sum_i h_{ii}^{n+1}\right)^2+\left(\sum_i h_{ii}^{n+2}\right)^2+\cdots+\left(\sum_i h_{ii}^{n+p}\right)^2}}e_{n+1} \\
&+ \frac{\sum_i h_{ii}^{n+2}}{\sqrt{\left(\sum_i h_{ii}^{n+1}\right)^2+\left(\sum_i h_{ii}^{n+2}\right)^2+\cdots+\left(\sum_i h_{ii}^{n+p}\right)^2}}e_{n+2}+\cdots \\
&+ \frac{\sum_i h_{ii}^{n+p}}{\sqrt{\left(\sum_i h_{ii}^{n+1}\right)^2+\left(\sum_i h_{ii}^{n+2}\right)^2+\cdots+\left(\sum_i h_{ii}^{n+p}\right)^2}}e_{n+p}
\end{aligned}$$

Como $e_{n+1}, e_{n+2}, \cdots, e_{n+p}$ são linearmente independentes, temos que $\sum_i h_{ii}^{\alpha} = 0$, para $\alpha \geq n+2$.

Denotando a matriz $\left[h_{ij}^{\alpha}\right]$ por h^α e $\frac{1}{n}trh^\alpha$ por H^α, temos
$H^{n+2} = \frac{1}{n}trh^{n+2} = 0$

Assim, apenas H^{n+1} é não nulo, e portanto faremos

$$H^{n+1} = H \tag{5.18}$$

Mostra-se usando 5.8, 5.13,5.17 e 5.18 que

$$\begin{aligned}
\Delta h_{ij}^{n+1} &= nH_{ij} + cnh_{ij}^{n+1} - cnH\delta_{ij} + \sum_{\beta,k,m} h_{km}^{n+1}h_{mk}^{\beta}h_{ij}^{\beta} \\
&- 2\sum_{\beta,k,m} h_{km}^{n+1}h_{mj}^{\beta}h_{ik}^{\beta} + \sum_{\beta,k,m} h_{mi}^{n+1}h_{mk}^{\beta}h_{kj}^{\beta} - nH\sum_m h_{mi}^{n+1}h_{mj}^{n+1} \\
&+ \sum_{\beta,k,m} h_{jm}^{n+1}h_{mk}^{\beta}h_{ki}^{\beta}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta h_{ij}^{\alpha} &= nH_{ij}^{\alpha} + cnh_{ij}^{\alpha} + \sum_{\beta,k,m} h_{km}^{\alpha} h_{mk}^{\beta} h_{ij}^{\beta} - 2\sum_{\beta,k,m} h_{km}^{\alpha} h_{mj}^{\beta} h_{ik}^{\beta} + \sum_{\beta,k,m} h_{mi}^{\alpha} h_{mk}^{\beta} h_{kj}^{\beta} \\ &- nH\sum_{m} h_{mi}^{\alpha} h_{mj}^{n+1} + \sum_{\beta,k,m} h_{jm}^{\alpha} h_{mk}^{\beta} h_{ki}^{\beta}, \qquad \forall \alpha \geq n+2. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Seja M^n uma variedade tipo-espaço imersa em $Q_p^{n+p}(c)$. Se o vetor curvatura média for não nulo, então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h_{ijk}^{\alpha}\right)^2 + n\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha} H_{ij}^{\alpha} + c\left(nS - n^2H^2\right) - nH\sum_{\alpha} tr\left(h^{n+1}\left(h^{\alpha}\right)^2\right) \\ &+ \sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)\right]^2 + \sum_{\alpha,\beta} N\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Demonstração. Temos que

$\frac{1}{2}\Delta S = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,i,j}\Delta\left(h_{ij}^{\alpha}\right)^2 = \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} + \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h_{ijk}^{\alpha}\right)^2$

Lembrando que

$\Delta h_{ij}^{\alpha} = \sum_k h_{kkij}^{\alpha} + \sum_{m,k} h_{km}^{\alpha} R_{mijk} + \sum_{m,k} h_{mi}^{\alpha} R_{mkjk} + \sum_{k,\beta} h_{ik}^{\beta} R_{\alpha\beta jk}$

substituindo igualdade acima em

$\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h_{ijk}^{\alpha}\right)^2 \\ &+ \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\left(\sum_{k} h_{kkij}^{\alpha} + \sum_{m,k} h_{km}^{\alpha} R_{mijk} + \sum_{m,k} h_{mi}^{\alpha} R_{mkjk} + \sum_{k,\beta} h_{ik}^{\beta} R_{\alpha\beta jk}\right) \\ &= \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h_{ijk}^{\alpha}\right)^2 + \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\left(\sum_{k} h_{kkij}^{\alpha}\right) + \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\left(\sum_{m,k} h_{km}^{\alpha} R_{mijk}\right) \\ &+ \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\left(\sum_{m,k} h_{mi}^{\alpha} R_{mkjk}\right) + \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\left(\sum_{k,\beta} h_{ik}^{\beta} R_{\alpha\beta jk}\right) \\ &= \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h_{ijk}^{\alpha}\right)^2 + \sum_{\alpha,i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} + \sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} R_{mijk} \\ &+ \sum_{\alpha,i,j,km} h_{ij}^{\alpha} h_{mi}^{\alpha} R_{mkjk} + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{ik}^{\beta} R_{\alpha\beta jk}. \end{aligned}$$

Vamos calcular as parcelas da soma acima separadamente

(i) $\sum_{\alpha,i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{kkij}^{\alpha} = \sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}\left(nH\right)_{ij}.$

(ii) $\sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha} h_{km}^{\alpha} R_{mijk} = cS - cn^2H^2 + \sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)\right]^2 - \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)^2.$

(iii) $\sum_{\alpha,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{mi} R_{mkjk} = cnS - cS + \sum_{\alpha,\beta} \left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}h^{\beta}h^{\alpha}\right)\right]^2 - n\sum_{\alpha} tr\left(\left(h^{\alpha}\right)^2 h^{n+1}\right).$

(iv) $\sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h^{\alpha}_{ij} h^{\beta}_{ik} R_{\alpha\beta jk} = \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}h^{\beta}h^{\alpha}\right) - \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)^2.$

(v) $2\sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}h^{\beta}h^{\alpha}\right) - 2\sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\beta}h^{\alpha}\right)^2 = \sum_{\alpha,\beta} N\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right).$

Demonstração (i) Com o referencial adotado temos $\sum_k h^{\alpha}_{kk} = 0, \forall \alpha \in \{n+2, \cdots, n+p\}$, assim temos

$$\sum_{\alpha,i,j,k} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{kkij} = \sum_{i,j,k} h^{n+1}_{ij} h^{n+1}_{kkij} = \sum_{i,j} h^{n+1}_{ij} \left(\sum_{k} h^{n+1}_{kkij}\right),$$

Além disso, como $nH = \sum_k h^{n+1}_{kk}$ segue que

$$(nH)_{ij} = \left(h^{n+1}_{11} + \cdots + h^{n+1}_{nn}\right)_{ij},$$

Portanto,

$$\sum_{\alpha,i,j,k} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{kkij} = \sum_{i,j} h^{n+1}_{ij} (nH)_{ij},$$

Demonstração (ii) Por (5.8), temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{km} R_{mijk} &= \sum_{\alpha,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{km} \left(c\left(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}\right) - \sum_{\beta}\left(h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{ik} - h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{ij}\right)\right) \\
&= c\sum_{\alpha,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{km} \delta_{mj}\delta_{ik} - c\sum_{\alpha,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{km} \delta_{mk}\delta_{ij} \\
&- \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{km} h^{\beta}_{mj} h^{\beta}_{ik} + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{km} h^{\beta}_{mk} h^{\beta}_{ij} \\
&= c\sum_{\alpha,i,m} h^{\alpha}_{im} h^{\alpha}_{im} - c\sum_{\alpha,i,m} h^{\alpha}_{ii} h^{\alpha}_{mm} + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{km} h^{\beta}_{mk} h^{\beta}_{ij} \\
&- \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij} h^{\alpha}_{km} h^{\beta}_{mj} h^{\beta}_{ik}.
\end{aligned}$$

É fácil ver que

$$c\sum_{\alpha,i,m}(h_{im}^{\alpha})^2 - c\sum_{\alpha,i,m}h_{ii}^{\alpha}h_{mm}^{\alpha} = cS - cn^2H^2.$$

Para concluir esse item basta provar as seguintes desigualdades:

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}h_{mk}^{\beta}h_{ij}^{\beta} = \sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)\right]^2,$$

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}h_{mj}^{\beta}h_{ik}^{\beta} = \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)^2.$$

Temos, que

$$tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right) = \sum_{i}\left(\sum_{k}h_{ik}^{\alpha}h_{ki}^{\beta}\right) = \sum_{i,k}h_{ik}^{\alpha}h_{ki}^{\beta}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)\right]^2 &= \left(\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}h_{ji}^{\beta}\right)\left(\sum_{m,k}h_{mk}^{\alpha}h_{km}^{\beta}\right) = \sum_{i,j,mk} h_{ij}^{\alpha}h_{ji}^{\beta}h_{mk}^{\alpha}h_{km}^{\beta} \\ &= \sum_{i,j,mk} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}h_{mk}^{\beta}h_{ij}^{\beta},\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)\right]^2 = \sum_{\alpha,\beta,i,j,m,k} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}h_{mk}^{\beta}h_{ij}^{\beta}.$$

Vamos denotar cada elemento da matriz $h^{\alpha}h^{\beta}$ por $\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)_{ij}$. Então

$$\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)_{ij}^2 = \sum_{m,k,r} h_{ik}^{\alpha}h_{km}^{\beta}h_{mr}^{\alpha}h_{rj}^{\beta}.$$

Logo,

$$tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)^2 = \sum_{i,m,j,k} h_{ij}^{\alpha}h_{jm}^{\beta}h_{mk}^{\alpha}h_{ki}^{\beta} = \sum_{i,m,j,k} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}h_{m}^{\beta}h_{ik}^{\beta}.$$

$$\sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)^2 = \sum_{\alpha,\beta,i,m,j,k} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{m}h^{\beta}_{ik}.$$

Portanto,

$$\sum_{\alpha,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{km}R_{mijk} = cS - cn^2H^2 + \sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)\right]^2 - \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right).$$

Demonstração (iii) Por 5.8 temos,

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}R_{mkjk} &= \sum_{\alpha,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}\left(c\left(\delta_{mj}\delta_{kk} - \delta_{mk}\delta_{kj}\right) - \sum_{\beta}\left(h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{kk} - h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj}\right)\right) \\
&= cn\sum_{\alpha,i,j}\left(h^{\alpha}_{ij}\right)^2 - c\sum_{\alpha,i,j}\left(h^{\alpha}_{ij}\right)^2 \\
&- \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}\left(h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{kk} - h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj}\right) \\
&= cnS - cS + \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj} \\
&- \sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{kk}.
\end{aligned}$$

A última parcela da igualdade acima pode ser escrita por

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mj}h^{\beta}_{kk} &= \sum_{\alpha,i,j,k,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{n+1}_{mj}h^{n+1}_{kk} = \left(\sum_{k} h^{n+1}_{kk}\right)\left(\sum_{\alpha,i,j,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{n+1}_{mj}\right) \\
&= nH\sum_{\alpha,i,j,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{n+1}_{mj}.
\end{aligned}$$

Agora vamos desenvolver o termo $\sum_{\alpha,i,j,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{n+1}_{mj}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,i,j,m} h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{n+1}_{mj} &= \sum_{\alpha,i,m,k} h^{\alpha}_{ki}h^{\alpha}_{mk}h^{n+1}_{mi} = \sum_{\alpha,i,m,k} h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{km}h^{n+1}_{mi} \\
&= \sum_{i}\left(\sum_{m,k} h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{km}\right)h^{n+1}_{mi} = \sum_{i}\left(\sum_{m}\left(\sum_{k} h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{km}\right)\right)h^{n+1}_{mi} \\
&= \sum_{i}\left(\sum_{m}\left(h^{\alpha}\right)^2_{im}\right)\left(h^{n+1}\right)_{mi} \\
&= \sum_{i}\left(\sum_{m}\left(h^{\alpha}\right)^2_{im}\left(h^{n+1}\right)_{mi}\right)\sum_{i}\left(\left(h^{\alpha}\right)^2 h^{n+1}\right)_{ii} \\
&= tr\left(\left(h^{\alpha}\right)^2 h^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$tr\left((h^{\alpha})^{2}h^{n+1}\right)=\sum_{\alpha,i,j,m}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{n+1}_{mj}$,

e

$nH\sum_{\alpha,i,j,m}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{n+1}_{mj}=nHtr\left((h^{\alpha})^{2}h^{n+1}\right)$.

Por outro lado, vale a seguinte igualdade

$$\sum_{\alpha,\beta}tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}h^{\beta}h^{\alpha}\right)=\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}h^{\beta}_{mk}h^{\beta}_{kj}.$$

Portanto, concluímos que

$\sum_{\alpha,i,j,k,m}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{mi}R_{mkjk}=cnS-cS+\sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}h^{\beta}h^{\alpha}\right)\right]^{2}-n\sum_{\alpha}tr\left((h^{\alpha})^{2}h^{n+1}\right)$.

Demonstração (iv) Agora vamos mostrar que

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ik}R_{\alpha\beta jk}=\sum_{\alpha,\beta}tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}h^{\beta}h^{\alpha}\right)-\sum_{\alpha,\beta}tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)^{2}.$$

Lembremos que

$$R_{\alpha\beta ij}=\sum_{m}\left(h^{\alpha}_{im}h^{\beta}_{mj}-h^{\alpha}_{jm}h^{\beta}_{mi}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta,i,j,k}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ik}R_{\alpha\beta jk}&=\sum_{\alpha,\beta,i,j,k}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ik}\left(\sum_{m}\left(h^{\alpha}_{jm}h^{\beta}_{mk}-h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}\right)\right)\\&=\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{jm}h^{\beta}_{mk}-\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}.\end{aligned}$$

Pode-se verificar facilmente as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{jm}h^{\beta}_{mk}&=\sum_{\alpha,\beta}tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}h^{\beta}h^{\alpha}\right),\\\sum_{\alpha,\beta,i,j,k,m}h^{\alpha}_{ij}h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{km}h^{\beta}_{mj}&=\sum_{\alpha,\beta}tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)^{2}.\end{aligned}$$

Portanto, o item (iv) está provado.

Agora, a partir das igualdades (i), (ii), (iii) e (iv), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h^{\alpha}_{ijk}\right)^2 + \sum_{i,j} h^{n+1}_{ij}\,(nH)_{ij} + cS - cn^2H^2 + \sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)\right]^2\\
&- \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)^2 + cn^2S - cS + \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}h^{\beta}h^{\alpha}\right)\\
&- nH\sum_{\alpha} tr\left((h^{\alpha})^2\,h^{n+1}\right) + \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}h^{\beta}h^{\alpha}\right) - \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right).
\end{aligned}$$

podemos reescrever a expressão anterior como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h^{\alpha}_{ijk}\right)^2 + \sum_{i,j} h^{n+1}_{ij}\,(nH)_{ij} + cnS - cn^2H^2 - nH\sum_{\alpha,\beta} tr\left((h^{\alpha})^2\,h^{n+1}\right)\\
&+ \sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)\right]^2 + 2\sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}h^{\beta}h^{\alpha}\right) - 2\sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)^2.
\end{aligned}$$

Assim, pela igualdade (v), obtemos a expressão desejada, ou seja, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h^{\alpha}_{ijk}\right)^2 + \sum_{i,j} h^{n+1}_{ij}\,(nH)_{ij} + cnS - cn^2H^2 + \sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)\right]^2\\
&+ \sum_{\alpha,\beta} N\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right) - nH\sum_{\alpha} tr\left((h^{\alpha})^2\,h^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Demonstração (v) Pela definição de N, segue que:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta} N\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right) &= \sum_{\alpha,\beta} tr\left(\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right)\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right)^t\right)\\
&= \sum_{\alpha,\beta} tr\left(\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right)\left(\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)^t - \left(h^{\beta}h^{\alpha}\right)^t\right)\right)\\
&= \sum_{\alpha,\beta} tr\left(\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right)\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right)\right)\\
&= \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}h^{\beta}h^{\alpha}\right) - \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\beta}h^{\alpha}\right)^2\\
&- \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)^2 + \sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\beta}h^{\alpha}h^{\alpha}h^{\beta}\right)\\
&= 2\sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\beta}h^{\alpha}h^{\alpha}h^{\beta}\right) - 2\sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\beta}h^{\alpha}\right)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$2\sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\beta}h^{\alpha}h^{\alpha}h^{\beta}\right) - 2\sum_{\alpha,\beta} tr\left(h^{\beta}h^{\alpha}\right)^2 = \sum_{\alpha,\beta} N\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right).$

Dos itens acima chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h^{\alpha}_{ijk}\right)^2 + n\sum_{\alpha,i,j} h^{\alpha}_{ij}H^{\alpha}_{ij} + c\left(nS - n^2H^2\right) - nH\sum_{\alpha} tr\left(h^{n+1}\left(h^{\alpha}\right)^2\right)\\ &+ \sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(h^{\alpha}h^{\beta}\right)\right]^2 + \sum_{\alpha,\beta} N\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right).\end{aligned}$$

□

Onde $N(A) = tr\left(AA^t\right)$, para toda matriz $A = \left[a_{ij}\right]$.

Recordemos que M^n é uma subvariedade com vetor curvatura paralelo se $\nabla^{\perp}h \equiv 0$, onde $\nabla^{\perp}$ é a conecção normal de M^n em $Q^{n+p}(c)$. Note que essa condição implica em $H = |h|$ constante e

$$\sum_k h^{\alpha}_{kki} = 0, \qquad \forall i, \alpha. \tag{5.22}$$

O lema seguinte é devido a Omori e Yau

Lema 5.1.2 (Princípio do máximo). *Seja M^n uma variedade Riemaniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente e seja $F : M^n \to R$ uma função C^2-função também limitada inferiormente em M^n. Então existe uma sequência de pontos $\{p_k\}$ em M^n tal que*

$$\lim_{k\to\infty} F(p_k) = \inf(F),\ \lim_{k\to\infty} |\nabla F(p_k)| = 0 \text{ e } \lim_{k\to\infty} \inf \Delta F(p_k) \geq 0.$$

Lema 5.1.3. *Sejam $A, B : R^n \to R^n$ transformações lineares tais que $AB - BA = 0$ e $trA = trB = 0$. Então*

$$|trA^2B| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} N(A)\sqrt{N(B)}. \tag{5.23}$$

O lema 5.1.3 é devido a W. Santos (ver[13])

Seja $f : M^n \to Q^{n+p}_p(c)$ uma imersão. Defina agora a aplicação linear auto adjunta

$$\begin{aligned}\varphi^{\alpha} : \ T_pM &\to T_pM\\ x &\mapsto H^{\alpha}x - A_{\alpha}x\end{aligned}$$

Onde H^{α} é a curvatura média com respeito a direção α de f em p, e A_{α} é o *operador de Weingarten* na direção α. A aplicação linear φ^{α} está associada uma forma bilinear simétrica T^{α} dada por

$$T^{\alpha}(x, y) = \langle \varphi^{\alpha}(x), y\rangle, \qquad \forall x, y \in T_pM.$$

Denotemos, $T^{\alpha}\left(e_i, e_j\right)$ por ϕ^{α}_{ij} e a matriz (ϕ^{α}_{ij}) por ϕ^{α}.

O traço de ϕ^α é nulo. De fato,

$$\phi_{ij}^\alpha = \left\langle \varphi^\alpha\left(e_i\right), e_j \right\rangle = \left\langle H^\alpha e_i - A_\alpha e_i, e_j \right\rangle = \left\langle \left(H^\alpha - k_i^\alpha\right) e_i, e_j \right\rangle = \left(H^\alpha - k_i^\alpha\right) \delta_{ij},$$

logo

$$tr\phi^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ii}^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \varphi^\alpha\left(e_i\right), e_i \right\rangle = \sum \left(H^\alpha - k_i^\alpha\right) \delta_{ii} = nH^\alpha - \sum_{i=1}^{n} k_i^\alpha = 0$$

Note como k_i^α é auto valor de A associado a e_i então $k_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \delta^{ij}$.Pois,

$\left\langle A_\alpha e_i, e_j \right\rangle = \left\langle B\left(e_i, e_j\right), e_\alpha \right\rangle = \sum_{\beta,r,s} \left\langle h_{rs}^\beta w_r\left(e_i\right) w_s\left(e_j\right) e_\beta, e_\alpha \right\rangle = \sum_\beta \left\langle h_{ij}^\beta e_\beta, e_\alpha \right\rangle = h_{ij}^\alpha$

Como sabemos que $A_\alpha e_i = k_i^\alpha e_i$, obtemos

$$k_i^\alpha \delta_{ij} = h_{ij}^\alpha \Rightarrow k_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \delta^{ij}$$

Assim,

$$\phi_{ij}^\alpha = \left(H^\alpha - k_i^\alpha\right) \delta_{ij} = \left(H^\alpha - h_{ij}^\alpha \delta^{ij}\right) \delta_{ij} = H^\alpha \delta_{ij} - h_{ij}^\alpha.$$

Podemos considerar o seguinte tensor simétrico

$$\phi = \sum_{\alpha,i,j} \phi_{ij}^\alpha w_i w_j e_\alpha$$

A forma bilinear ϕ é denominada *segunda forma bilinear sem traço.*

$$N\left(\phi^\alpha\right) = tr\left(\phi^\alpha\right)^2$$

Como $\left(\phi^\alpha\right)_{ij}^2 = \sum_k \phi_{ik}^\alpha \cdot \phi_{kj}^\alpha$ e $tr\left[\left(\phi^\alpha\right)^2\right]_{ij} = \sum_i \left[\left(\phi^\alpha\right)^2\right]_{ii}$, temos que o traço de ϕ é dado por

$$tr\left(\phi^\alpha\right)^2 = \sum_{i,k} \phi_{ik}^\alpha \cdot \phi_{ki}^\alpha = \sum_{i,k} \left(\phi_{ik}^\alpha\right)^2$$

Assim

$$\left(\phi_{ik}^\alpha\right)^2 = \left(H^\alpha \delta_{ik} - h_{ik}^\alpha\right)^2 = \left(H^\alpha \delta_{ik}\right)^2 - 2H^\alpha \delta_{ik} h_{ik}^\alpha + \left(h_{ik}^\alpha\right)^2.$$

$$\begin{aligned}
tr\left(\phi^\alpha\right)^2 &= \sum_{i,k} \left[\left(H^\alpha \delta_{ik}\right)^2 - 2H^\alpha \delta_{ik} h_{ik}^\alpha + \left(h_{ik}^\alpha\right)^2\right] \\
&= n\left(H^\alpha\right)^2 - \underbrace{\sum_i 2H^\alpha h_{ii}^\alpha}_{=-2n\left(H^\alpha\right)^2} + \sum_{i,k} \left(h_{ik}^\alpha\right)^2 \\
&= n\left(H^\alpha\right)^2 - 2n\left(H^\alpha\right)^2 + N\left(h^\alpha\right).
\end{aligned}$$

$tr\left(\phi^\alpha\right)^2 = N\left(h^\alpha\right) - n\left(H^\alpha\right)^2$

Portanto,

$|\phi|^2 = \sum_\alpha tr\,(\phi^\alpha)^2 = \sum_\alpha [N\,(h^\alpha) - n\,(H^\alpha)^2] = \sum_{\alpha,i,k} \left(h^\alpha_{ik}\right)^2 - n \sum_\alpha (H^\alpha)^2 = S - nH^2$

$$\begin{cases} N\,(\phi^\alpha) = N\,(h^\alpha) - n\,(H^\alpha)^2\,, \\ |\phi|^2 = \sum_\alpha N\,(\phi^\alpha) = S - nH^2, \end{cases} \tag{5.24}$$

onde ϕ^α denota a matriz $\left[\phi^\alpha_{ij}\right]$.

Teorema 5.1.4. *Seja M^n uma subvariedade tipo espaço imersa em $Q^{n+p}\,(c)$ com curvatura média não nula não nula e fibrado normal flat (plano). Se $|\nabla^2 H^\alpha|^2$ denota o quadrado da norma do Hessiano de $H^\alpha = \frac{1}{n}\sum_i h^\alpha_{ii}$, então, a seguinte desigualdade é obtida*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \;\; &\geq \;\; -n\sum_\alpha |\nabla H^\alpha|^2 + |\phi| \left(\frac{|\phi|^3}{p} - \frac{n\,(n-2)}{\sqrt{n\,(n-1)}} H|\phi|^2 \right. \\ &\left. + n\left(c - H^2\right)|\phi| - n\sqrt{\sum_\alpha |\nabla^2 H^\alpha|^2} \right). \end{aligned}$$

Demonstração. Uma vez que $H \neq 0$ independe do referencial, podemos escolher um referncial móvel ortonormal $\{e_1, \cdots, e_{n+p}\}$ tal que $e_{n+1} = \frac{h}{H}$. Esta escolha implica em

$$\begin{aligned} \phi^{n+1}_{ij} &= h^{n+1}_{ij} - H\delta_{ij}, \\ N\left(\phi^{n+1}\right) &= tr\left(\phi^{n+1}\right)^2 = tr\left(h^{n+1}\right)^2 - nH^2 = N\left(h^{n+1}\right) - nH^2, \\ tr\left(h^{n+1}\right)^3 &= tr\left(\phi^{n+1}\right)^3 + 3HN\left(\phi^{n+1}\right) + nH^3. \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\phi^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ij}, \qquad N\,(\phi^\alpha) = N\,(h^\alpha)\,, \qquad \alpha \geq n+2, \tag{5.26}$$

$$\Delta S = \Delta\left(|\phi|^2 + nH\right). \tag{5.27}$$

.

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,i,j} h^\alpha_{ij} H^\alpha_{ij} &= \sum_{\alpha,i,j} \phi^\alpha_{ij} H^\alpha_{ij} + \sum_{\alpha,i,j} H^\alpha H^\alpha_{ij}\delta_{ij} = \sum_{\alpha,i,j} \phi^\alpha_{ij} H^\alpha_{ij} + \sum_{\alpha,i} H^\alpha H^\alpha_{ii} \\ &= \sum_{\alpha,i,j} \phi^\alpha_{ij} H^\alpha_{ij} + \sum_\alpha H^\alpha \Delta H^\alpha. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Uma vez que $\Delta H^2 = \sum_\alpha \Delta\,(H^\alpha)^2 = 2\sum_\alpha H^\alpha \Delta H^\alpha + 2\sum_\alpha |\nabla H^\alpha|^2$, substituindo (5.25), (5.26), (5.27) e (5.28) em (5.21) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\left(|\phi|^2+nH^2\right) \quad &= \sum\left(h^\alpha_{ijk}\right)^2+n\left(\sum\phi^\alpha_{ij}H^\alpha_{ij}\right.\\ &\left.+\sum H^\alpha\Delta H^\alpha\right)+cn|\phi|^2-nH\sum tr\left(\phi^{n+1}\left(\phi^\alpha\right)^2\right)\\ &+\sum\left(tr\phi^\alpha\phi^\beta\right)^2+\sum N\left(\phi^\alpha\phi^\beta-\phi^\beta\phi^\alpha\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2+n\left[\sum H^\alpha\Delta H^\alpha+\sum|\nabla H^\alpha|^2\right] \quad &= \quad \sum\left(h^\alpha_{ijk}\right)^2+n\sum\phi^\alpha_{ij}H^\alpha_{ij}+n\sum H^\alpha\Delta H^\alpha+cn|\phi|^2\\ &- \quad nH\sum tr\left(\phi^{n+1}\left(\phi^\alpha\right)^2\right)+\sum\left(tr\phi^\alpha\phi^\beta\right)^2\\ &+ \quad \underbrace{\sum N\left(\phi^\alpha\phi^\beta-\phi^\beta\phi^\alpha\right)}_{=0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \quad &= \quad \sum\left(h^\alpha_{ijk}\right)^2+n\sum\phi^\alpha_{ij}H^\alpha_{ij}+n\sum H^\alpha\Delta H^\alpha+cn|\phi|^2-nH\sum tr\left(\phi^{n+1}\left(\phi^\alpha\right)^2\right)\\ &+ \quad \sum\left[tr\left(\phi^\alpha\phi^\beta\right)\right]^2-n\sum H^\alpha\Delta H^\alpha-n\sum|\nabla H^\alpha|^2\end{aligned}$$

Como $\sum\left(h^\alpha_{ijk}\right)^2\geq -nH^2|\phi|^2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \quad &\geq \quad -n\sum_\alpha|\nabla H^\alpha|^2+n\sum_{\alpha,i,j}\phi ij^\alpha H^\alpha_{ij}+n\left(c-H^2\right)|\phi|^2\\ &- \quad nH\sum_\alpha tr\left(\phi^{n+1}\left(\phi^\alpha\right)^2\right)+\sum_{\alpha,\beta}\left(tr\phi^\alpha\phi^\beta\right)^2. \qquad (5.29)\end{aligned}$$

Como em M^n o fibrado normal é flat, portanto as matrizes h^{n+1} e h^α comutam, pois, $R_{\alpha\beta ij}=\sum_l\left(h^\alpha_{il}h^\beta_{lj}-h^\alpha_{jl}h^\beta_{li}\right)$, e as matrizes de traço nulo ϕ^α e ϕ^{n+1} também comutam, para todo α. Portanto aplicando o lema 5.1.3 obtemos

$$\sum_\alpha tr\left(\phi^{n+1}\left(\phi^\alpha\right)^2\right)\leq\frac{n-2}{\sqrt{n\left(n-1\right)}}\sqrt{N\left(\phi^{n+1}\right)}|\phi|^2\leq\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi|^3. \qquad (5.30)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$-\left|\sum_{\alpha,i,j}\phi^\alpha_{ij}H^\alpha_{ij}\right|\geq-\sqrt{\sum_{\alpha,i,j}\left(\phi^\alpha_{ij}\right)^2}\sqrt{\sum_{\alpha,i,j}\left(H^\alpha_{ij}\right)^2}=-|\phi|\sum_\alpha\sqrt{\sum_\alpha|\nabla^2H^\alpha|^2}. \qquad (5.31)$$

E a desigualdade $|\phi|^4 \leq p\sum_\alpha N^2(\phi^\alpha) \leq p\sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(\phi^\alpha\phi^\beta\right)\right]^2$. De fato,

$$\begin{aligned}
\left[tr\left(\phi^\alpha\phi^\beta\right)\right]^2 &\geq (tr\phi^\alpha)^2\left(tr\phi^\beta\right)^2 = |\phi^\alpha|^2|\phi^\beta|^2 \Rightarrow \sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(\phi^\alpha\phi^\beta\right)\right]^2 \\
&\geq \sum_{\alpha,\beta}|\phi^\alpha|^2|\phi^\beta|^2 \geq \sum_\alpha|\phi^\alpha|^4 = \sum_\alpha N^2(\phi^\alpha) \geq |\phi|^4 \geq \frac{1}{p}|\phi|^4
\end{aligned}$$

$$p\sum_{\alpha,\beta}\left[tr\left(\phi^\alpha\phi^\beta\right)\right]^2 \geq p\sum_\alpha N^2(\phi^\alpha) \geq |\phi|^4 \tag{5.32}$$

Note que

$$|\phi|^2 = \sum_\alpha|\phi^\alpha|^2 = \sum_\alpha tr(\phi^\alpha)^2$$

Com as equações 5.29, 5.30, 5.31 e 5.32 provamos o teorema. □

Teorema 5.1.5. *Seja M^n uma subvariedade tipo espaço imersa em $Q_p^{n+p}(c)$ com curvatura média paralelo. Então a seguinte desigualdade é verdadeira*

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\phi|^2\left(\frac{|\phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| + n\left(c - H^2\right)\right).$$

Demonstração. Observe que devido as condições deste teorema temos $\nabla^\perp h = 0$, se $H \neq 0$, a curvatura média H é constante e h^{n+1} e h^α comutam, para todo α. Como $\nabla^2 H^\alpha = \nabla H^\alpha = 0$ as matrizes de traço nulo ϕ^{n+1} e ϕ^α comutam para todo α.

Portanto podemos seguir exatamente o padrão da prova do teorema 5.1.4 chegando assim no resultado esperado.

Se $H = 0$, temos por (5.21) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + cnS + \sum_{\alpha\beta}\left[tr(h^\alpha h^\beta)\right]^2 + \sum_{\alpha\beta}N(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha). \\
\frac{1}{2}\Delta S &\geq cnS + \sum_{\alpha\beta}\left[tr(h^\alpha h^\beta)\right]^2. \\
\frac{1}{2}\Delta S &\geq cnS + \sum_\alpha N^2(h^\alpha).
\end{aligned}$$

De (5.32), temos $\sum_\alpha N^2(\phi^\alpha) \geq \dfrac{|\phi|^4}{p} = \dfrac{S^2}{p}$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta S &\geq cnS + \frac{S^2}{p} \\
\frac{1}{2}\Delta S &\geq S\left(cn + \frac{S}{p}\right)
\end{aligned}$$

Isto completa a prova do teorema. □

Teorema 5.1.6. *Seja M^n uma subvariedade tipo espaço conexa em $Q_p^{n+p}(c)$ com vetor curvatura média h paralelo e curvatura seccional não-negativa. Se M^n tem curvatura escalar constante R, então M^n é totalmente umbílica ou é um produto $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k$, onde cada M_i é uma subvariedade totalmente unbílica em $Q_p^{n+p}(c)$ e os M_i's são mutuamente perpendiculares ao longo das interseções.*

Demonstração. Uma vez que o vetor cuvatura média h é paralelo e

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j,k} h_{ij}^{\alpha} h_{ki}^{\beta} R_{\alpha\beta jk} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} N\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right),$$

A partir de (5.17) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta S &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,i,j}\Delta\left(h_{ij}^{\alpha}\right)^2 = \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h_{ij}^{\alpha}\right)^2 + \sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha} = \sum_{\alpha,i,j}\left(h_{ij}^{\alpha}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} N\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right) + \sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\beta}R_{mijk} + \sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{mi}^{\beta}R_{mkjk}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Em seguida, vamos obter uma estimativa pontual para os dois últimos termos. Para α fixo, seja λ^{α} um autovalor de h^{α}, isto é, $h_{ij}^{\alpha} = \lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}$, e denote por $\inf K$ o ínfimo das curvaturas seccionais em um ponto p de M^n. Então

$$\begin{aligned} 2\left(\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}R_{mijk} + \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk}\right) &= 2\sum_{i,j,k,m}\lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}\lambda_k^{\alpha}\delta_{km}R_{mijk} \\ &+ 2\sum_{i,j,k,m}\lambda_i^{\alpha}\delta_{ij}\lambda_m^{\alpha}\delta_{mi}R_{mkjk} \\ &= 2\sum_{i,,k}\lambda_i^{\alpha}\lambda_k^{\alpha}R_{kiik} + 2\sum_{i,k}(\lambda_i^{\alpha})^2 R_{ikik} \\ &= \sum_{i,,k}(-2\lambda_i^{\alpha}\lambda_k^{\alpha})R_{ikik} + 2\sum_{i,k}(\lambda_i^{\alpha})^2 R_{ikik} \\ &= \sum_{i,,k}(-2\lambda_i^{\alpha}\lambda_k^{\alpha})R_{ikik} \\ &+ \sum_{i,k}\left[(\lambda_i^{\alpha})^2 + (\lambda_k^{\alpha})^2\right]R_{ikik} \\ &= \sum_{i,k}(\lambda_i^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha})^2 R_{ikik} \\ &\geq (\inf K)\sum_{i,k}(\lambda_i^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha})^2 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
(\lambda_i^\alpha - \lambda_k^\alpha)^2 &= (\lambda_i^\alpha)^2 - 2\lambda_i^\alpha\lambda_k^\alpha + (\lambda_k^\alpha)^2 = \left(h_{ij}^\alpha\delta^{ij}\right)^2 - 2\left(h_{ij}^\alpha\delta^{ij}\right)\left(h_{kj}^\alpha\delta^{kj}\right) + \left(h_{kj}^\alpha\delta^{kj}\right)^2 \\
&\Rightarrow \sum_{i,k}(\lambda_i^\alpha - \lambda_k^\alpha)^2 = \sum_{i,k}\left(h_{ij}^\alpha\delta^{ij}\right)^2 - 2\sum_{i,k}\left(h_{ij}^\alpha\delta^{ij}\right)\left(h_{kj}^\alpha\delta^{kj}\right) + \sum_{i,k}\left(h_{kj}^\alpha\delta^{kj}\right)^2 \\
&= n\sum_i (h_{ii}^\alpha)^2 - 2\sum_i (h_{ii}^\alpha)\sum_k (h_{kk}^\alpha) + n\sum_k (h_{kk}^\alpha)^2 = nN\left(h^\alpha\right) - 2n^2H^2 \\
&+ nN\left(h^\alpha\right) = 2nN\left(h^\alpha\right) - 2n^2\left(H^\alpha\right)^2 = 2n\left(N\left(h^\alpha\right) - n\left(H^\alpha\right)^2\right) \\
&= 2nN\left(\phi^\alpha\right).
\end{aligned}$$

ouja,

$$\sum_{i,k}(\lambda_i^\alpha - \lambda_k^\alpha)^2 = 2nN\left(\phi^\alpha\right)$$

Assim,

$$\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^\alpha h_{km}^\alpha R_{mijk} + \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^\alpha h_{mi}^\alpha R_{mkjk} \geq n\left(\inf K\right)N\left(\phi^\alpha\right) = n\left(\inf K\right)|\phi|^2. \tag{5.35}$$

Uma vez que h é paralelo, temos H constante, portanto, de 5.10 podemos ver que $S = R + n^2H^2 - cn\left(n-1\right)$ também é constante, assim $\Delta S = 0$.

Como $R_{ijij} \geq 0$, de 5.35 e 5.35, temos

$$0 = \frac{1}{2}\Delta S \geq \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h_{ijk}^\alpha\right)^2 + n\left(\inf K\right)|\phi|^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} N\left(h^\alpha h^\beta - h^\beta h^\alpha\right) \geq 0 \tag{5.36}$$

Acontece que;

(i) $h^\alpha h^\beta = h^\beta h^\alpha\ \forall\alpha,\beta$, assim o fibrado normal de M^n é flat (plano). Portanto, as matrizes h^α são simultaneamente diagonalizaveis;

(ii) $h_{ijk}^\alpha = 0\ \forall i,j,k$ assim a segunda forma fundamental B é paralela. Em particular, λ_i^α é constante para todo i e todo α.

De i, ii, 5.33 e 5.34, podemos escrever $0 = \sum_{i,k}\left(\lambda_i^\alpha - \lambda_k^\alpha\right)^2 R_{ijij}$ e, uma vez que $R_{ijij} \geq 0$, teremos $\left(\lambda_i^\alpha - \lambda_k^\alpha\right)^2 R_{ijij} = 0$. Consequentemente podemos aplicar o *método de Ishihara* (veja [8], lemas 5.1, 5.2 e Teorema 1.3]) e concluir que M^n é totalmente umbílica ou o produto $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k$, tem algum subvariedade M_i totalmente umbílica em $Q_p^{n+p}\left(c\right)$ e os $M_i's$ são mutuamente perpendiculares terminando assim a prova desse Teorema $\square$

Teorema 5.1.7. *Seja M^n uma subvariedade tipo espaço conexa em $Q_p^{n+p}(c)$ com vetor curvatura média paralelo. Se $\sup K$ denota a função que associa cada ponto de M^n ao supremo da curvatura seccional nesse ponto, existe uma constante $\beta(c,n,p,H)$ tal que se $\sup K \leq \beta(c,n,p,H)$, então:*

(i) $n = 2$ *e* M^2 *é* totalmente umbílica *ou,*

(ii) $n \geq 3$ *e* M^n totalmente geodésica.

Demonstração. Temos de 5.17

$\Delta h_{ij}^{\alpha} \geq \sum_{m,k} h_{km}^{\alpha} R_{mikj} + \sum_{m,k} h_{im}^{\alpha} R_{mkjk}$

Assim,

$$\tfrac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = \tfrac{1}{2}\Delta S \geq \textstyle\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}$$

$$\tfrac{1}{2}\Delta S \geq \textstyle\sum_{\alpha,i,j,m,k} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}R_{mikj} + \sum_{\alpha,i,j,m,k} h_{ij}^{\alpha}h_{im}^{\alpha}R_{mkjk}$$

Na prova do teorema 5.1.4 foi usada a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,i,j,m,k} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}R_{mikj} + \sum_{\alpha,i,j,m,k} h_{ij}^{\alpha}h_{im}^{\alpha}R_{mkjk} \quad &\geq |\phi|^2\left(\frac{|\phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|\right. \\ &\left. + n\left(c - H^2\right)\right). \qquad (5.37)\end{aligned}$$

De 5.35 podemos observar a seguinte desigualdade

$$\sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}R_{mijk} + \sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk} \leq n(\sup K)N(\phi^{\alpha}) = n(\sup K)|\phi|^2 \qquad (5.38)$$

é fácil ver que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S \quad &\geq \quad (1-a)\left(\sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}R_{mijk} + \sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk}\right) \\ &+ \quad a\left(\sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{km}^{\alpha}R_{mijk} + \sum_{\alpha,i,j,k,m} h_{ij}^{\alpha}h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk}\right). \qquad (5.39)\end{aligned}$$

Lembrando que h é paralelo, de 5.37, 5.38, e 5.39 se $a \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \quad &= \quad \frac{1}{2}\Delta S \geq (1-a)\left(n(\sup K)|\phi|^2\right) \\ &+ \quad a|\phi|^2\left(\frac{|\phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| + n\left(c - H^2\right)\right) \\ &= \quad a|\phi|^2\left(\frac{|\phi|^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| + n\left[c - H^2 + \left(\frac{1-a}{a}\right)\sup K\right]\right) \qquad (5.40)\end{aligned}$$

Consideremos a função diferenciável positiva $F : M^n \to \mathbb{R}$ dfinida por $F = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\phi|^2}}$.

$$\nabla F = -\frac{\nabla|\phi|^2}{2\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^3} \Rightarrow |\nabla F|^2 = \frac{\left(\nabla|\phi|^2\right)^2}{4\left(1+|\phi|^2\right)^3},$$

$$\begin{aligned}
\Delta F &= \nabla^2 F = -\frac{2\Delta|\phi|^2\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^3 - 3\nabla|\phi|^2\sqrt{1+|\phi|^2}\nabla|\phi|^2}{4\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^6} \\
&= -\frac{2\Delta|\phi|^2\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^2 - 3\left(\nabla|\phi|^2\right)^2}{4\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^5} \\
&= -\frac{\Delta|\phi|^2\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^2}{2\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^5} + \frac{3\left(\nabla|\phi|^2\right)^2}{4\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^5} \\
&= -\frac{\Delta|\phi|^2}{2\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^3} + \frac{3\left(\nabla|\phi|^2\right)^2}{4\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^5},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F\Delta F &= \frac{1}{\sqrt{1+|\phi|^2}} \cdot \left(-\frac{\Delta|\phi|^2}{2\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^3} + \frac{3\left(\nabla|\phi|^2\right)^2}{4\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^5}\right) \\
&= -\frac{\Delta|\phi|^2}{2\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^4} + \frac{3\left(\nabla|\phi|^2\right)^2}{4\left(\sqrt{1+|\phi|^2}\right)^6} \\
&= -\frac{\Delta|\phi|^2}{2\left(1+|\phi|^2\right)^2} + \frac{3\left(\nabla|\phi|^2\right)^2}{4\left(1+|\phi|^2\right)^3} \\
&= -\frac{\Delta|\phi|^2}{2\left(1+|\phi|^2\right)^2} + 3|\nabla F|^2.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\nabla F|^2 = \frac{\left(\nabla|\phi|^2\right)^2}{4\left(1+|\phi|^2\right)^3} \tag{5.41}$$

$$F\Delta F = -\frac{\Delta|\phi|^2}{2\left(1+|\phi|^2\right)^2} + 3|\nabla F|^2. \tag{5.42}$$

Das propriedades do Laplaciano, temos

$$-F\Delta F + 3|\nabla F|^2 = \frac{\Delta|\phi|^2}{2\left(1+|\phi|^2\right)^2} - 3|\nabla F|^2 + 3|\nabla F|^2 = \frac{\Delta|\phi|^2}{2\left(1+|\phi|^2\right)^2}$$

Pelo teorema 5.1.4 e por 5.42, temos

$$-F\Delta F + 3|\nabla F|^2 \geq \frac{|\phi|^2}{2\left(1+|\phi|^2\right)^2}\left(\frac{|\phi|^2}{p} - \frac{n\,(n-2)}{\sqrt{n\,(n-1)}}H|\phi| + n\left(c - H^2\right)\right) \tag{5.43}$$

Seja λ_i^{n+1} um autovalor de h^{n+1}. Por 5.9 podemos ver que

$$\begin{aligned} Ric\,(e_i) &= R_{ii} = c\,(n-1) - \left(\sum_i h_{ii}^{n+1}\right) h_{ii}^{n+1} + \sum_k \left(h_{ik}^{n+1}\right)^2 \\ &= c\,(n-1) - nHh_{ii}^{n+1} + \sum_k \left(h_{ik}^{n+1}\right)^2 \\ &= c\,(n-1) - nH\lambda_i^{n+1} + \left(\lambda_i^{n+1}\right)^2 \\ &= c\,(n-1) - nH\lambda_i^{n+1} + \left(\lambda_i^{n+1}\right)^2 + \frac{n^2H^2}{4} - \frac{n^2H^2}{4}. \end{aligned}$$

$$Ric\,(e_i) = c\,(n-1) + \left(\lambda_i^{n+1} - \frac{nH}{2}\right)^2 - \frac{n^2H^2}{4}.$$

Portanto, $Ric\,(e_i) \geq c\,(n-1) - \dfrac{n^2H^2}{4}$, ou seja a curvatura de Ricc de M^n é limitada inferiormente. Dessa forma temos as condições para aplicar o Lema 5.1.2 na função F. Assim, é possível encontrar uma sequência de pontos $\{p_k\}$ em M^n tal que

$$\lim_{k\to\infty} F\,(p_k) = \inf F, \qquad \lim_{k\to\infty} |\phi|^2\,(p_k) = \sup|\phi|^2 = \left(\sup|\phi|\right)^2,$$

$$\lim_{k\to\infty} |\nabla F\,(p_k)| = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \inf \Delta F\,(p_k) \geq 0. \tag{5.44}$$

substituindo 5.44 em 5.43, obtemos

$$\frac{\left(\sup|\phi|\right)^2}{2\left(1+\left(\sup|\phi|\right)^2\right)^2}\left(\frac{\left(\sup|\phi|\right)^2}{p} - \frac{n\,(n-2)}{\sqrt{n\,(n-1)}}H\sup|\phi| + n\left(c-H^2\right)\right) \leq 0,$$

com isso mostramos que $\sup|\phi| \leq \infty$. Portanto, podemos aplicar o Lema 5.1.2 na função $|\phi|^2$ obtendo assim uma sequências de pontos $\{p_k\}$ em M^n tal que

$$\lim_{k\to\infty} |\phi|^2\,(p_k) = \sup|\phi|^2 = \left(\sup|\phi|\right)^2,$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\nabla|\phi|^2\right| = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup \Delta|\phi|^2\,(p_k) \leq 0. \tag{5.45}$$

Através da aplicação de desigualdade (5.40) no p_k, tomando o limite, e usando (5.45) obtemos

$0 \geq \frac{1}{2a} \lim\limits_{k\to\infty} \sup \Delta|\phi|^2 \geq$

$$(\sup|\phi|)^2 \left(\frac{(\sup|\phi|)^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H \sup|\phi| + n \left[c - H^2 + \left(\frac{1-a}{a} \right) \sup K \right] \right). \tag{5.46}$$

Resolvendo a equação $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx + n \left[c - H^2 + \left(\dfrac{1-a}{a} \right) supK \right]$, obtemos

$$x = \left[\frac{n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}} \pm n \sqrt{\frac{aH^2\left[p(n-2)^2 + 4(n-1)\right] - 4(n-1)[ac + (1-a)supK]}{pna(n-1)}} \right] \frac{p}{2}.$$

Façamos

$$\beta(c,n,p,H) = \frac{a}{4(a-1)(n-1)} \left(4c(n-1) - \left[p(n-2)^2 + 4(n-1) \right] H^2 \right).$$

Se $\sup K \leq \beta(c,n,p,H)$ teremos

$$\frac{(\sup|\phi|)^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H \sup|\phi| + n \left[c - H^2 + \left(\frac{1-a}{a} \right) \sup K \right] \geq 0,$$

pois $\Delta \leq 0$. A igualdade só é obtida se $\sup K = \beta(c,n,p,H)$ e $\sup|\phi| = \dfrac{pn(n-2)H}{2\sqrt{n(n-1)}}$. Assim, se $\sup K < \beta(c,n,p,H)$, de 5.46 conclui-se que $\sup|\phi| = 0$ e M^n é totalmente umbílica.

Se $\sup K = \beta(c,n,p,H)$, podemos supor que M^n não é totalmente umbílica. Primeiro vamos provar que $p = 1$. Note que

$$(\sup|\phi|)^2 \left(\frac{(\sup|\phi|)^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H \sup|\phi| + n \left[c - H^2 + \left(\frac{1-a}{a} \right) \sup K \right] \right) = 0$$

mostra todas as estimativas usadas para fazer 5.46 se tornar uma igualdade. Mais precisamente 5.30 e 5.32 podem ser escritas como

$$\sqrt{N(\phi^{n+1})}|\phi|^2 = |\phi|^3, \tag{5.47}$$

$$|\phi|^4 = p \sum_\alpha N^2(\phi^\alpha). \tag{5.48}$$

Por 5.45, podemos chegar a uma sequência $\{p_k\}$ em M^n tal que

$$\lim_{k\to\infty} N\left(\phi^{\alpha}\right)\left(p_k\right) = C^{\alpha}, \qquad \alpha \geq n+1. \tag{5.49}$$

De 5.47, temos em p_k

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{N\left(\phi^{n+1}\right)}|\phi|^2\right) = \lim_{k\to\infty}|\phi|^3 \Rightarrow \sqrt{C^{n+1}}\left(\sup|\phi|\right)^2 = \left(\sup|\phi|\right)^3. \tag{5.50}$$

Uma vez que $\sup|\phi| > 0$, podemos ver que em p_k, temos

$$\begin{aligned} C^{n+1} &= \left(\sup|\phi|\right)^2 = \sup|\phi|^2 = \sup\sum_{\alpha} tr\left(\phi^{\alpha}\right)^2 = \sum_{\alpha}\sup tr\left(\phi^{\alpha}\right)^2 \\ &= \sum_{\alpha}\sup N\left(\phi^{\alpha}\right) = \sum_{\alpha}\lim_{k\to\infty} N\left(\phi^{\alpha}\right)\left(p_k\right) = \sum_{\alpha} C^{\alpha}. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Ou seja, $C^{\alpha} = 0$, para $\alpha \geq n+2$.

Por 5.48 e 5.51 temos em p_k que

$$\lim_{k\to\infty}|\phi|^4 = \lim_{k\to\infty} p\sum_{\alpha} N^2\left(\phi^{\alpha}\right) = p\left(C^{n+1}\right)^2 = p\left(\sup|\phi|\right)^4,$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty}|\phi|^4 = \left(\sup|\phi|\right)^4$, vemos facilmente que $p=1$.

Em seguida, vamos provar que $\sup K = 0$. Como h é paralelo e mantém a igualdade em (5.38) e (5.39), chegamos a

$$0 = \lim_{k\to\infty}\sup\tfrac{1}{2}\Delta|\phi|^2\left(p_k\right) = \lim_{k\to\infty}\sup\tfrac{1}{2}\Delta S\left(p_k\right) = n(\sup K)(\sup|\phi|^2) = \\ n\sup K\left(\sup|\phi|\right)^2.$$

Portanto, $\sup K = 0$.

Agora estamos em condições de provar que M^n é totalmente umbílica. Observa-se que $\sup K = 0$ e $p = 1$ implicando em

$$0 = \sup K = \beta\left(c,n,p,H\right) = \frac{a}{4\left(a-1\right)\left(n-1\right)}\left(4c\left(n-1\right) - n^2H^2\right).$$

Portanto $H^2 = \dfrac{4c\left(n-1\right)}{n^2}$, o que não ocorre quando $c < 0$. Se $c = 0$, M^n é máxima e pelo teorema 1.5, M^n é totalmente geodésica. No caso $c = 1$, de acordo com Montiel (cf., [10,Proposição 2]), M^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica ou $n > 2$ e o supremo da curvatura escalar de M^n é igual a $\left(n-2\right)^2$. Como M^n não é totalmente umbílica, podemos concluir que o supremo da curvatura escalar de M^n é igual a $\left(n-2\right)^2$, o que contradiz o fato de que $\sup K = 0$. Portanto, M^n é totalmente umbílica. Como a é arbitrário, tendo o limite $a \to \infty$ em

$$\sup K \leq \beta(c,n,p,H) = \frac{a}{4(a-1)(n-1)}\left(4c(n-1) - \left[p(n-2)^2 + 4(n-1)\right]H^2\right)$$

Temos

$$\sup K \leq \beta(c,n,p,H) = \frac{1}{4(n-1)}\left(4c(n-1) - \left[p(n-2)^2 + 4(n-1)\right]H^2\right).$$

Além disso, uma vez que M^n é totalmente umbílica, se $n \geq 3$ temos

$$\frac{(\sup|\phi|)^2}{p} - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H\sup|\phi| + n\left[c - H^2 + \left(\frac{1-a}{a}\right)\sup K\right] = 0 \Rightarrow \sup K = c - H^2$$

Logo,

$$c - H^2 = \sup K \leq \frac{1}{4(n-1)}\left(4c(n-1) - \left[p(n-2)^2 + 4(n-1)\right]H^2\right),$$

$$c - H^2 \leq c - \frac{\left[p(n-2)^2 + 4(n-1)\right]}{4(n-1)}H^2 \Rightarrow \frac{\left[p(n-2)^2 + 4(n-1)\right]}{4(n-1)}H^2 \leq H^2 \Rightarrow p(n-2)^2 \leq 0.$$

Isso implica que $H = 0$ mostranto assim que M^n é totalmente geodésica. Encerrando finalmente a prova do teorema. □

Teorema 5.1.8. *Seja M^n uma subvariedade tipo espaço pseudo-umbílica e conexa em $Q_\alpha^{n+p}(c)$. Suponha que:*

(i) $c = 1$ e $0 \leq H^2 \leq 1$ ou,

(ii) $c \leq 0, 0 \leq H^2 \leq \infty$, $p \leq n$ e $R \geq 0$.

Então M^n é totalmente geodésica.

Demonstração. Denote por $\langle , \rangle$ o produto escalar em $Q_p^{n+p}(c)$. Uma subvariedade M^n em $Q_p^{n+p}(c)$ é chamada pseudo-umbílica, se existe uma função λ em M^n tal que

$$\langle B(X,Y), h\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle, \tag{5.52}$$

para quaisquer campos de vetores X, Y em M^n.

Lembrando que:

$$h = \frac{1}{n}\sum_\alpha\left(\sum_i h_{ii}^\alpha\right)e_\alpha = He_{n+1}$$

e

$$B(X,Y) = \sum_{\alpha,k,l} h_{kl}^\alpha w_k(X) w_l(Y) e_\alpha$$

Logo

$$\begin{aligned}\left\langle B\left(e_i,e_j\right),h\right\rangle &= \left\langle B\left(e_i,e_j\right),He_{n+1}\right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{\alpha kl} h_{kl}^{\alpha} w_k\left(e_i\right) w_l\left(e_j\right) e_\alpha, He_{n+1}\right\rangle \\ &= h_{ij}^{n+1}H\end{aligned}$$

De 5.52 temos,

$$\left\langle B\left(e_i,e_j\right),He_{n+1}\right\rangle = \lambda\delta_{ij}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lambda\delta_{ij} = h_{ij}^{n+1}H \ &\Rightarrow\ \sum_{ij}\lambda\delta_{ij} = \sum_{ij} h_{ij}^{n+1}H \\ &\Rightarrow\ n\lambda = \sum_{ii} h_{ii}^{n+1}H \\ &\Rightarrow\ \lambda = \frac{1}{n}\sum_{ii} h_{ii}^{n+1}H = H^2\end{aligned}$$

Assim,

$$h_{ij}^{n+1}H = \lambda\delta_{ij} = H^2\delta_{ij} \Rightarrow h_{ij}^{n+1} = H\delta_{ij}$$

Ou seja,

$$\left\langle B\left(e_i,e_j\right),He_{n+1}\right\rangle = h_{ij}^{n+1}H, \qquad h_{ij}^{n+1} = H\delta_{ij}$$

De 5.24 obtemos

$$N\left(\phi^{n+1}\right) = 0 \qquad e \qquad |\phi|^2 = \textstyle\sum_{\alpha\geq n+2} N\left(h^\alpha\right).$$

$$\begin{aligned}\left\langle B\left(e_i,e_j\right),He_{n+1}\right\rangle = h_{ij}^{n+1}H, \qquad h_{ij}^{n+1} = H\delta_{ij} \\ N\left(\phi^{n+1}\right) = 0 \qquad e \qquad |\phi|^2 = \textstyle\sum_{\alpha\geq n+2} N\left(h^\alpha\right).\end{aligned} \tag{5.53}$$

De 5.18, 5.19 e 5.53 chega-se a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta N\left(h^{n+1}\right) &= \sum_{i,j,k}\left(h_{ijk}^{n+1}\right)^2 + n\sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}H_{ij}^{n+1} + nc\sum_{i,j}\left(h_{ij}^{n+1}\right)^2 - n^2c^2H^2 \\ &- nHtr\left(h^{n+1}\right)^3 + \sum_{\beta\geq n+2}\left[tr\left(h^{n+1}h^\beta\right)\right]^2 + \left[tr\left(h^{n+1}\right)^2\right]^2 \\ &+ \sum_{\beta\geq n+2} N\left(h^{n+1}h^\beta - h^\beta h^{n+1}\right) \geq \sum_{i,j,k}\left(h_{ijk}^{n+1}\right)^2 + n\sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}H_{ij}^{n+1}.\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\Delta N\left(h^{n+1}\right) \geq \sum_{i,j,k}\left(h_{ijk}^{n+1}\right)^2 + n\sum_{i,j} h_{ij}^{n+1}H_{ij}^{n+1}. \tag{5.54}$$

Para $\alpha \geq n+2$, e por 5.20 e 5.53, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta \sum_{\alpha \geq n+2} N\left(h^{\alpha}\right) &= \sum_{\alpha \geq n+2,i,j,k} \left(h_{ijk}^{\alpha}\right)^2 + n\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} H_{ij}^{\alpha} + nc|\phi|^2 \\
&+ \sum_{\alpha \geq n+2,\beta} N\left(h^{\alpha}h^{\beta} - h^{\beta}h^{\alpha}\right) + \sum_{\alpha \geq n+2,i,j,m} h_{km}^{n+1} h_{mk}^{n+1} h_{ij}^{n+1} h_{mj}^{\alpha} \\
&\geq \sum_{\alpha \geq n+2,i,j,k} \left(h_{ijk}^{\alpha}\right)^2 H_{ij}^{\alpha} + \sum_{\alpha \geq n+2} N^2\left(h^{\alpha}\right) + n\left(c - H^2\right)|\phi|^2.
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\Delta \sum_{\alpha \geq n+2} N\left(h^{\alpha}\right) \geq \sum_{\alpha \geq n+2,i,j,k} \left(h_{ijk}^{\alpha}\right)^2 H_{ij}^{\alpha} + \sum_{\alpha \geq n+2} N^2\left(h^{\alpha}\right) + n\left(c - H^2\right)|\phi|^2. \tag{5.55}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right)\right]^2 &= \sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right) \sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right) = N\left(h^{n+2}\right) \sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right) \\
&+ N\left(h^{n+3}\right) \sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right) + \cdots + N\left(h^{n+p}\right) \sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right) \\
&= \sum_{\alpha} N\left(h^{n+2}\right) N\left(h^{\alpha}\right) + \sum_{\alpha} N\left(h^{n+3}\right) N\left(h^{\alpha}\right) \\
&+ \cdots + \sum_{\alpha} N\left(h^{n+p}\right) N\left(h^{\alpha}\right) \leq \sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right) N\left(h^{\alpha}\right) \\
&+ \sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right) N\left(h^{\alpha}\right) + \cdots + \sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right) N\left(h^{\alpha}\right) \\
&= (p-1) \sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right)^2.
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right)^2 \geq \frac{1}{p-1}\left[\sum_{\alpha} N\left(h^{\alpha}\right)\right]^2 = \frac{1}{p-1}|\phi|^4. \tag{5.56}$$

Combinando 5.56 com 5.54 e 5.55 teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta S &= \frac{1}{2}\Delta\left(N\left(h^{n+1}\right)\right) + \frac{1}{2}\Delta \sum_{\alpha \geq n+2}\left(N\left(h^{\alpha}\right)\right) \geq \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h_{ijk}^{\alpha}\right)^2 \\
&+ n\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} H_{ij}^{\alpha} + |\phi|^2\left(n\left(c - H^2\right) + \frac{1}{p-1}|\phi|^2\right).
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq \sum_{\alpha,i,j,k}\left(h_{ijk}^{\alpha}\right)^2 + n\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha} H_{ij}^{\alpha} + |\phi|^2\left(n\left(c - H^2\right) + \frac{1}{p-1}|\phi|^2\right). \tag{5.57}$$

Além disso, devido a (5.53), pode ser facilmente verificado que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,i,j,k}\left(h_{ijk}^{\alpha}\right)^2 + n\sum_{\alpha,i,j} h_{ij}^{\alpha} H_{ij}^{\alpha} &\geq \sum_{i,j,k}\left(h_{ijk}^{n+1}\right)^2 + nH\Delta H \\
&= n\left(|\nabla H|^2 + H\Delta H\right) = \frac{1}{2}n\Delta H^2.
\end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha,i,j,k}\left(h^{\alpha}_{ijk}\right)^2+n\sum_{\alpha,i,j}h^{\alpha}_{ij}H^{\alpha}_{ij}\geq\frac{1}{2}n\Delta H^2. \tag{5.58}$$

As fórmulas (5.57) e (5.58) implicam em

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= \frac{1}{2}\Delta\left(S-nH^2\right)\geq|\phi|^2\left[n\left(c-H^2\right)+\frac{1}{p-1}|\phi|^2\right]\\ &\geq |\phi|^2\left[n\left(c-\sup H^2\right)+\frac{1}{p-1}|\phi|^2\right].\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2\geq|\phi|^2\left[n\left(c-\sup H^2\right)+\frac{1}{p-1}|\phi|^2\right]. \tag{5.59}$$

Seja λ_i^{n+1} um autovalor de h^{n+1}. Na prova do teorema anterior mostramos a seguinte igualdade

$$Ric(e_i)=(\lambda_i^{n+1}-\frac{nH}{2})^2+c(n-1)-\frac{n^2H^2}{4},$$

por (5.53) temos

$H=\lambda_i^{n+1}\Longrightarrow Ric(e_i)=(n-1)(c-H^2)$. Portanto $H^2<\infty$, e a curvatura de Ricci é limitada inferiormente, portanto podemos usar o mesmo argumento usado no teorema anterior para obtermos a sequência de pontos P_k em M^n satisfazendo (5.45)

Aplicando a desigualdade (5.59) em P_k, e tomando o limite em (5.45) obtemos

$$0\geq(sup\mid\phi\mid^2)[n(c-supH^2)+\frac{1}{p-1}(sup\mid\phi\mid^2)]. \tag{5.60}$$

Se $c=1$, teremos $supH^2\leq 1$, (5.60) mostra que $sup\mid\phi\mid=0$, protanto M^n é totalmente umbílica.

Se $c\leq 0$, para $p\leq n$, $0\leq R=n(n-1)(c-H^2)+\mid\phi\mid^2$ de (5.60) obtemos

$$0\geq\frac{\mid\phi\mid^2}{p-1}[n(p-1)(c-H^2+\mid\phi\mid^2]\geq\frac{\mid\phi\mid^2}{p-1}(R+\mid\phi\mid^2)\geq\frac{\mid\phi\mid^4}{p-1}. \tag{5.61}$$

De (5.61), podemos deduzir que $sup\mid\phi\mid=0$. □

REFERÊNCIAS

[1] Chaves R.M.B., Sousa Jr. L.A.M., Some applications of a Simons' type formula for complete spacelike submanifolds in a semi-Riemannian space form, Differential geometry and its Applications **25**(2007) 419-432.

[2] H. Alencar, do Carmo M.P.,Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres, Proc. AMS **120**(1994) 1223-1229.

[3] do Carmo M.P., Differential Geometry of curvas and surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[4] do Carmo M.P., Geometria Riemaniana, Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[5] do Carmo M.P., O método do referencial móvel, 2 ed., Rio de Janeiro, 2009.

[6] do Carmo M.P., Formas e aplicações diferenciais, 8º Colóquio Brasileiro de matemática, IMPA, 1971.

[7] S.S. Chern, do Carmo M.P., S. Kobayashi, Minimal submanifolds of the sphere with second fundamental form of constant length, in: F. Browder (ed.), Function analysis and Related Fields, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[8] T. Ishihara, Maximal spacelike submanifolds of pseudo-Riemannian space of constant curvature, Mich. Math. J.**35**(1988)345-352.

[9] H. Li, Complete spacelike submanifolds in de Sitter space with parallel mean curvature vector satisfying $H^2 = \frac{4(n-1)}{n^2}$, Ann. Global Anal. Geom. **15**(1996)335-345

[10] S. Montiel, A Characterization of hyperbolic cylinders in the de Sitter space, Tohoku Mth. J. **48**(1996)23-31.

[11] H. Omori, Isometric Immersions of Riemannian manifolds, J. Math Soc. Japan **19**(1967) 205-214

[12] J. Simons, Minimal varieties in Riemnnian manifolds, Ann, of Mth. **88**(1968)62-105.

[13] W. Santos, Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres, Tohoku Math. J. **46**(1994)403-415.

[14] H. Xu, A rigidity theorem for submanifolds with parallel mean curvature vector in a sphere, Arch. Math. 61(1993)277-284.

[15] K. Yano, S. Ishihara, submanifolds with parallel mean curvature vector, J. Differential Geom. **6**(1971)95-118.

[16] S. T. Yau, Submanifolds with constant mean curvature II, Amer. J. Math. **97**(1975) 78-100.

[17] S. T. Yau, Harmonic functions on complet Riemannian manifolds, Comm. Pure Appl. Math. **28**(1975) 201-228.

[18] Lima E. L., Variedades Diferenciáveis, IMPA, Rio de Janeiro, Setembro de 1973.

[19] O'Neill Barret, Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity, Academic Press, New York, 1983.