PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Jailson Calado da Silva

Interseções de Classes Homoclínicas

São Luís - MA

2013

Jailson Calado da Silva

Interseções de Classes Homoclínicas

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Nivaldo Muniz**.

São Luís - MA

2013

Jailson Calado da Silva

Interseções de Classes Homoclínicas

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Nivaldo Muniz**.

Dissertação aprovada em 15 de julho de 2013, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(Orientador) Dr. Nivaldo Muniz (UFMA)

Dr. Fabiano Borges da Silva (UFMA)

Dr. Vanderlei Minori Horita (UNESP)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, a minha mãe Edi Calado Silva, aos meus irmãos, familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço aos meus irmãos Edna Calado da Silva,Jadson Calado da Silva por todo apoio, compreensão e encorajamento. A minha mãe Edi Calado Silva, por todo esforço que ela tenha feito por me, meus sinceros agradecimentos aos meus familiares, pelo incentivo e por estarem sempre do meu lado nos momentos difíceis.

Ao professor Nivado Muniz pela orientação e principalmente, por toda paciência e disposição que teve, a qual foi essencial para a realização deste trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática-PPGMAT, e do Departamento de Matemática da UFMA pelo apoio, incentivo e pela contribuição na minha formação acadêmica de forma direta ou indireta.

Aos meus amigos da pós-graduação Ermerson, Jadevilson, Leonardo, Ronaldo José, Marcos Azevedo, Marlon, Paulo,Valdir Mendes,Santana e todos os outros que não citei, por terem contribuído de alguma forma para meu crescimento profissional e pessoal, pelo incentivo, encorajamento, companheirismo e amizade que me proporcionaram durante esses dois anos.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Para campo de vetores C^1 em uma variedade compacta sem fronteira, provamos uma propriedade genérica sobre classes homoclínicas, sabemos por definição que classes homoclínicas $H(p)$ são o fecho dos pontos homoclínicos transversal associado a uma órbita periódica e hiperbólica. No entanto, nosso principal objetivo é provar que genericamente classes homoclínicas são iguais ou disjuntas. Sabemos que este resultado já é verdade para campo de vetor *axioma A*, no entanto queremos estender esta propriedade genericamente.

Palavras-chave: Variedade compacta, Campos de vetores C^1, classe homoclínica.

ABSTRACT

For vector field C^1 on a compact manifold without boundary, we prove an interesting property on homoclinic classes in a generic context, it is understood that homoclinic class $H(p)$ are the closure of the transverse homoclinic points associated to a periodic orbit and hyperbolic. However, Our main goal is to prove that generically homoclinic classes are equal or disjoint, we know that this result already true for vector field it A axiom, however we want to extend this property generically.

Keywords: Compact manifold, Vector fields C^1, homoclinic class.

SUMÁRIO

Pág.

INTRODUÇÃO

Nos estudos dos sistemas dinâmicos (sistemas dinâmico para nós é um difeomorfismo ou fluxo aplicado em uma variedade M) procuramos de certo modo umas boas propriedades em cada sistema, e depois tentamos generalizar tais resultados. No entanto, é possível classificar todos os campos de vetores e difeomorfismo, e muito mais além, encontrar propriedades genéricas? (a noção de genérico é um conjunto topologicamente relevante, também é chamado conjunto não magro). Tais objetivos nem sempre é possível, por exemplo, o sonho de encontrar um aberto e denso de difeomorfismo estruturalmente estáveis não se tornou realidade, pois na topologia C^1 difeomorfismo estruturalmente estáveis não são densos. No entanto, a primeira propriedade genérica que encontramos, são os campos de vetores provados por Kupka em [6], e Smale em [15], que enunciamos no teorema 1.2.5, onde todas as singularidades são hiperbólica juntamente com os pontos periódicos, além disso há interseção transversal da variedade estável e instável para cada duas singularidades e pontos periódicos distintos. Newhouse mostrou em [10] que essas interseções transversais determinam uma relação de equivalência, ao qual definimos as classes homoclínicas $H_X(p) = \overline{W^u(p) \pitchfork W^s(p)}$, como sendo o fecho dos pontos homoclínicos transversal. Todavia como Kupka-Smale são genéricos, é natural perguntar o que acontece com as classes homoclínicas no contexto genérico, e quais resultados obteremos.

Em [15] Smale prova um resultado que enunciamos no teorema 1.2.4, chamado decomposição espectral de Smale, o mesmo afirma que quando o campo de vetor é *axioma A*, as classes homoclínicas são finitas e para cada duas classes homoclínicas diferentes elas são disjuntas. Observando esse resultado nos perguntamos, o que acontece com as classes homoclínicas para campo de vetores que não são *axioma A*? Bom, este é o objetivo deste trabalho, estudar o comportamento das classes homoclínicas para campos de vetores que não são *axioma A*, e nosso principal objetivo é provar que classes homoclínicas ou coincidem, ou são disjuntas em um contexto genérico. No entanto, será necessário fazermos algumas definições e enunciar alguns resultados que serão úteis para provar nosso objetivo.

Estamos trabalhando com campos de vetores, e cada campo gera um fluxo, portanto antes de tudo no capítulo 1 fizemos nossas primeiras definições, definimos o que é um fluxo global, e com o que estamos trabalhando, ao longo de cada uma de nossas provas. Usaremos o conjunto crítico de cada campo assim como campo de vetores Kupka Smale, ambos fizemos as definições ainda no capítulo 1. Um importante resultado que usamos, é o teorema de Hatman-Grobman, junto com o lema da inclinação ao qual fizemos algumas considerações, mas neste capítulo temos como objetivo, apenas conhecer as definições e termos as noções básicas de cada resultado. Em relação às perturbações de um campo de vetor, temos um grande resultado ao qual usamos fortemente, que enunciamos no lema 3.0.19 e é conhecido como connecting lemma, fizemos uma pequena explanação para ficarem claro as ideias básicas.

No capítulo 2 introduzimos a clássica teoria de estabilidade no sentido de Lyapunov, no entanto, restringimos nossos resultados para conjuntos compacto, pois são mais úteis com relação com que estamos trabalhando, a estabilidade no sentido de Lyapunov pode ser vista de forma mais geral, no entanto só para título de conhecimento definimos a estabilidade para conjuntos quaisquer. Apresentamos neste capítulo algumas propriedades de estabilidade no sentido de Lyapunov, dentre tais propriedades enunciamos um lema 2.1.6 que é um resultado importante para o nosso objetivo. Neste capítulo já começamos a provar que classes homoclínicas ou coincidem, ou são disjuntas, para isso precisamos da definição de conjuntos *neutrais* onde é definido quando há interseção de conjuntos estáveis no sentido de Lyapunov, provamos isso para conjuntos *neutrais* no lema 2.1.7, este lema já é o início da prova do nosso resultado principal, restando para nós, só fazermos uma relação de classes homoclínicas com conjuntos *neutrais*.

No capítulo 3 definimos classes homoclínicas, apresentamos alguns resultados e enunciamos alguns teoremas, neste capítulo provamos nosso resultado principal, classes homoclínicas são iguais ou disjuntas, mas provar este resultado é provar que conjuntos *neutrais* satisfaz tal resultado, porém nosso trabalho neste capítulo é mostrar que classes homoclínicas genericamente são conjuntos *neutrais*.

Capítulo 1
NOÇÕES PRELIMINARES

Vamos considerar nesse trabalho uma variedade compacta sem fronteira de dimensão n, e estudar a dinâmica do fluxo associado ao um campo de vetor suave dado sobre M. Portanto antes de tudo vamos definir o que é um fluxo global.

Definimos um fluxo global sobre M como sendo uma ação de grupo a esquerda de $\mathbb{R}$ sobre M, que é uma aplicação contínua $\theta : \mathbb{R} \times M \to M$ satisfazendo as seguintes propriedades para todo $s, t \in \mathbb{R}$ e todo $p \in M$:

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p), \quad \theta\,(0, p) = p \tag{1.1}$$

Dado um fluxo global θ sobre M, podemos definir duas coleções de aplicações como segue: Para cada $t \in \mathbb{R}$, defina $\theta_t : M \to M$ por:

$$\theta_t(p) = \theta(t, p).$$

As propriedades definidas 1.1 são equivalentes para as leis de grupo

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s}, \qquad \theta_0 = Id_M$$

Como no caso de qualquer ação de grupo, cada aplicação $\theta_t : M \to M$ é um homeomorfismo, e se a ação é suave então θ_t é um difeomorfismo.

Para cada $p \in M$ defina uma curva $\theta^{(p)} : \mathbb{R} \to M$ por:

$$\theta^{(p)}(t) = \theta(t, p)$$

A imagem dessas curvas é justamente a orbita de p sobe a ação de grupo. Porque qualquer ação de grupo particiona a variedade em orbitas disjuntas, segue que M é a união disjunta da imagem dessas curvas.

Neste trabalho vamos provar algumas propriedades genéricas e antes precisamos fazer algumas notações. Denotamos $\mathcal{X}^1(M)$ o espaço de campo do vetores C^1 com a topologia C^1,e dado $X \in \mathcal{X}^1(M)$, denotamos $X_{t\in\mathbb{R}}$ o fluxo gerado por X.

1.1 Conjuntos estáveis, instáveis e elementos críticos

Uma singularidade para X é um ponto $p \in M$ tal que $X_t(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, um ponto fixo para todos os fluxos que corresponde um zero para o campo associado $X(p) = 0$. Denotamos por $S(X)$ o conjunto das singularidades para o campo de vetor X. Cada ponto da variedade que não é uma singularidade, que satisfaz $X(p) \neq 0$, é um ponto regular para X.

Uma orbita de X é um conjunto $\mathcal{O}(q) = \mathcal{O}_X(q) = \{X_t(q) : t \in \mathbb{R} \; para \; algum \; q \in M\}$. Por isso $\sigma \in M$ é uma singularidade se, e somente se, $\mathcal{O}_X(\sigma) = \{\sigma\}$. Uma orbita periódica de X é uma orbita $\mathcal{O}_X(q)$ tal que $X_t(q) = q$ para algum $t > 0$ mínimo (equivalentemente é compacta e $\mathcal{O}_X(q) \neq \{q\}$. Denotamos por $Per(X)$ o conjunto de orbitas periódicas para X.

Um elemento crítico de um campo de vetor X, é ou uma singularidade ou uma orbita periódica. O conjunto $Crit(X) = Per(X) \cup S(X)$ é o conjunto dos elementos críticos de X.

Dizemos que $p \in M$ é não errante a X, se para cada $T > 0$ e cada vizinhança U de p, existe um $t > T$ tal que $X_t(U) \cap U \neq \emptyset$. O conjunto de pontos *não errante* de X é denotado por $\Omega(X)$. Seja $q \in M$, agora vejamos os pontos em que a orbita $\{X_t(q) : t \geq 0\}$ positiva de q se acumula. Definimos como o conjunto $\omega_X(q)$, ou seja $\omega_X(q) = \{y \in M : X_{t_n}(q) \to y, \text{com } t_n \geq 0 \; e \; n \in \mathbb{N}\}$. Também definimos $\alpha_X(q) = \omega_{-X}(q)$(onde $-X$ é o tempo reverso do campo de vetor X), correspondendo o conjunto de pontos acumulados pela orbita negativa de q. É imediato que $\omega_X(q) \cup \alpha_X(q) \subset \Omega(X)$ para cada $q \in M$.

Se Λ é um conjunto invariante compacto de X, definimos o conjunto *estável* de Λ como

$$W^s_X(\Lambda) = \{q \in M : dist(X_t(q), \Lambda) \to 0, t \to +\infty\}$$

e o conjunto *instável* de Λ

$$W^u_X(\Lambda) = \{q \in M : dist(X_t(q), \Lambda) \to 0, t \to -\infty\},$$

onde *dist* é a métrica sobre M.

Denotemos por DX_t a derivada de X_t na variável q, e quando conveniente escreveremos $DX_t(q)$. Analogamente DX é a derivada do campo de vetor X na variável q, e escreveremos $DX(q)$.

Dizemos que um conjunto compacto X_t-invariante Λ é isolado (ou maximal) se existe uma vizinhança U de Λ tal que $\Lambda = \cap_{t\in\mathbb{R}} X_t(U) = \cap_{t\in\mathbb{R}} \overline{X_t(U)}$. Um conjunto compacto Λ invariante é transitivo se $\Lambda = \omega_X(q)$ para algum $q \in \Lambda$, e é atrator se $\Lambda = \Lambda_X(U) = \cap_{t\geq 0} X_t(U)$ para alguma vizinhança U de Λ satisfazendo $\overline{X_t(U)} \subset U$ para todo $t > 0$. Neste caso a vizinhança U é chamada vizinhança isolada de Λ. Note que $\Lambda_X(U)$ em geral é diferente de $\cap_{t\in\mathbb{R}} \overline{X_t(U)}$, mas para um atrator a condição $\overline{X_t(U)} \subset U$ para todo $t > 0$, garante que $X_{-t}(U) \supset U$, e assim temos

$$\Lambda \supset \bigcap\nolimits_{t\in\mathbb{R}} X_t(U) = \bigcap\nolimits_{t\leq 0} X_t(U) \cap \bigcap\nolimits_{t\geq 0} X_t(U) \supset U \cap \Lambda = \Lambda$$

assim cada conjunto atrator é isolado. Um atrator de X é um conjunto atrator transitivo para X, e um *repulsor* é um atrator para $-X$. Dizemos que Λ é um atrator ou repulsor próprio se $\emptyset \neq \Lambda \neq M$.

Uma *singularidade* σ *é hiperbólica* se os autovalores de $DX(\sigma)$(a derivada do campo de vetores em σ), tem parte real diferente de zero. Em particular um poço e uma fonte, são *singularidades hiperbólica*, onde todos os autovalores têm sua parte real negativa e parte real positiva respectivamente.

Um poço é uma *singularidade* de X que é também um atrator de X, é um atrator trivial para o campo X. Uma fonte é um *repulsor* trivial de X, ou seja, é uma *singularidade* que é um atrator para $-X$.

Uma *orbita periódica* $\mathcal{O}(p)$ é *hiperbólica* se os autovalores de $DX_t(p) : T_pM \to T_pM$, a derivada do difeomorfismo X_t, onde $t > 0$ é o período de p, são todos diferentes de 1.

Quando uma singularidade é *hiperbólica* seu conjunto estável e instável, tem uma estrutura de uma variedade (uma consequência do Teorema da Variedade Estável), e são chamadas variedades estável e instável. Ao longo do texto vamos encontrar essas definições, por isso a importância de defini-las.

Definimos um subconjunto $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}^r(M)$ como sendo *residual*, se $\mathcal{R}$ contém um interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos em $\mathcal{X}^r(M)$, ou seja, $\mathcal{R} \supset \cap_{n\geq 1}\mathcal{R}_n$ onde cada $\mathcal{R}_n$ é um subconjunto aberto e denso de $\mathcal{X}^r(M)$.

Dizemos que X é *axioma A* se o conjunto de pontos não errantes $\Omega(X)$ é hiperbólico e as *singularidades* e *orbitas periódicas* são densas, ou seja, $\Omega(X) = \overline{Crit(X)}$. Nosso objetivo é imitar esse fluxo *axioma A* em um contexto genérico no conjunto de campos de vetores, pois em *axioma A* acontecem umas boas propriedades, que enunciamos na próxima seção, por exemplo o teorema da decomposição espectral.

Vejamos o que é ser *genérico*, dizemos que um campo de vetor é *genérico* em $\mathcal{X}^r(M)$, se satisfaz uma propriedade (P), e se existe um subconjunto *residual* $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}^r(M)$, tal que (P) acontece para cada campo de vetor $X \in \mathcal{R}$.

Um conjunto transitivo Λ é transitivo maximal, se cada conjunto transitivo A de X satisfazendo $A \cap \Lambda \neq \emptyset$, implica $A \subset \Lambda$. Estamos definindo alguns conceitos necessários para provarmos nosso principal objetivo no entanto nos próximos teoremas provados usaremos todas essas definições. Em [2] foi respondido que classe homoclínica $H(p)$ de um difeomorfismo genérico f satisfazendo a propriedade que se A é conjunto transitivo de f e $p \in A$, então $A \subset H(p)$. Queremos estender esse resultado, queremos provar que genericamente qualquer conjunto transitivo A de um campo de vetor C^1, com interseção com a classe homoclínica, então A está contido na classe homoclínica.

Uma outra definição necessária faremos agora como segue:

Definição 1.1.1 (Secção transversal a um campo)**.** . Sejam $X : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe $C^k, k \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ também aberto. Uma aplicação diferenciável $f : A \to U$ de classe C^k chama-se *secção transversal local* a X quando $\forall a \in A$, $Df(a) \cdot \mathbb{R}^{n-1}$ e $X(f(a))$ geram o espaço $\mathbb{R}^n$.

Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida por U. Se $f : A \to \Sigma$ for um homeomorfismo, diz-se que Σ é uma *seção transversal* a X.

Exemplo 1.1.2. Seja $X : U \to \mathbb{R}^n$ um campo C^k, $k \geq 1$, $p \in U$ com $X(p) \neq 0$ e $\{v_1, ..., v_{n-1}, X(p)\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, devido a continuidade do campo X, a aplicação $f : B(0, \delta) \to U$ dada por $f(x_1, ..., x_{n-1}) := p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot v_i$ é uma seção transversal de X.

De fato, para ver isso em detalhes basta notar que a matriz Jacobiana J_f de f é justamente a matriz cujas colunas são $v_1, ..., v_{n-1}$ formam uma base do espaço vetorial $Df(x) \cdot \mathbb{R}^n$, qualquer que seja o ponto x fixado em $B(0, \delta)$. Considerando a função $g : B(0, \delta) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) := det\,(v_1, ..., v_{n-1}, X(f(x))) = det\,(J_f(x), X(f(x))),$$

temos que g é contínua, pois é composta de aplicações contínuas. Além disso, temos que $g(0) \neq 0$, o que pela continuidade de g implica que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq 0$, $\forall x \in B(0, \delta)$ geram o $\mathbb{R}^n$, e logo f é *secção transversal* (uma vez que é imediato de sua definição que f é um homeomorfismo).

1.1.1 Fluxos hiperbólicos

Na tentativa de identificar as propriedades que eram comuns entre os sistemas estáveis Stephen Smale introduziu a noção de Sistemas Dinâmicos hiperbólicos. Vamos ver essa noção e definir agora fluxos hiperbólicos.

Seja $X \in \mathcal{X}^r(M)$ um campo de vetor na variedade M compacta. Denote por $m(T) = inf_{\|v\|=1} \|T(v)\|$ o mínimo da norma do operador linear T. Um conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ para X_t é hiperbólico se

1. Admite uma decomposição contínua de fibras tangentes $DX - invariante\ T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^X_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$, que podemos escrever um espaço tangente T_xM com a soma direta $E^s_x \oplus E^X_x \oplus E^u_x$, onde E^X_x é o subespaço gerado por $X(x)$ satisfazendo,

- $DX_t(x) \cdot E^i_x = E^i_{X_t(x)}$ para todo $t \in \mathbb{R},\ x \in \Lambda$ e $i = s, X, u$;

2. existem constantes $\lambda, k > 0$ tal que

$$E^s_\Lambda \text{ é } (\lambda, k)-\textit{contração}\text{, ou seja, para todo } x \in \Lambda \text{ e cada } t \geq 0$$

$$\|DX_t(x) \mid E^s_x\| \leq k^{-1}\epsilon^{-\lambda t},$$

$$E^u_\Lambda \text{ é } (\lambda, k)-\textit{expanção}\text{, ou seja, para todo } x \in \Lambda \text{ e cada } t \geq 0$$

$$m(DX_t \mid E^u_x) \geq k\epsilon^{\lambda t}.$$

Pela teoria da variedade invariante segue que para cada $p \in \Lambda$ os conjuntos

$$W^{ss}_X(p) = \{q \in M : dist(X_t(p), X_t(q)) \longrightarrow_{t\to\infty} 0\}$$

e

$$W^{uu}_X(p) = \{q \in M : dist(X_t(p), X_t(q)) \longrightarrow_{t\to-\infty} 0\}$$

são variedades invariantes imersas C^r tagentes a $E^s(p)$ e $E^u(p)$ respectivamente em p. O $dist$ é a métrica induzida pela norma riemanniana. Se a orbita $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X(p) \subset \Lambda$ tem-se que

$$W^s_X(\mathcal{O}) = \cup_{t\in\mathbb{R}} W^{ss}_X(X_t(p)) \text{ e } W^u_X(\mathcal{O}) = \cup_{t\in\mathbb{R}} W^{uu}_X(X_t(p))$$

são variedades invariantes C^r tangentes a $E^s_p \oplus E^X_p$ e $E^X_p \oplus E^u_p$ em p respectivamente. Vamos denotar $W^s_X(p) = W^s_X(\mathcal{O}(p))$ e $W^u_X(p) = W^u_X(\mathcal{O}(p))$ por simplicidade.

Uma *singularidade* ou um ponto periódica é hiperbólica ao campo X se sua orbita é um conjunto hiperbólico a X. Note que $W^{ss}_X(\sigma) = W^s_X(\sigma)$ e $W^{uu}_X(\sigma) = W^u_X(\sigma)$ para cada singularidade hiperbólica σ de X. Um *poço* e uma *fonte* são ambas singularidades hiperbólicas, uma singularidade hiperbólica que não é *poço* e nem *fonte* é chamado *sela*.

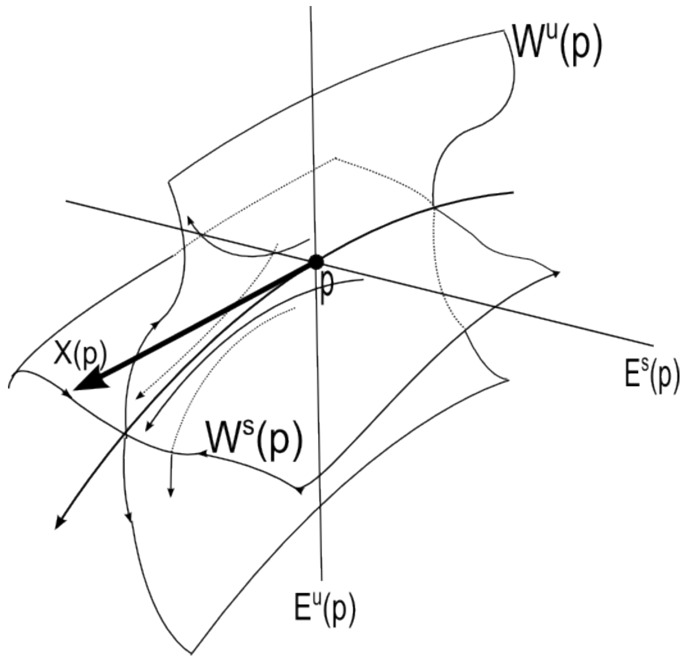

Figura 1.1: p é hiperbólico

1.2 O Teorema de Hartman-Grobman

O seguinte resultado devido a Hartman e Grobman mostra que um fluxo de um campo de vetor X é localmente equivalente para sua parte linear em uma singularidade hiperbólica. Uma vez que os fluxos linearmente hiperbólicos podem ser classificados pela equivalência topológica este resultado permite classificar o comportamento local do fluxo de qualquer campo vetorial suave perto de uma singularidade hiperbólica.

Teorema 1.2.1 (Hartman-Grobman). *Seja $X \in \mathcal{X}^r(M)$ e seja $p \in M$ uma singularidade hiperbólica de X. Seja $Y = DX_0 : T_pM \to T_pM$ o campo de vetor linear sobre T_pM dada pela transformação linear DX_0. Então existe uma vizinhança U de p em M, uma vizinhança V de 0 em T_pM. E um homeomorfismo $h : U \to V$ que leva trajetórias de X para trajetórias de Y, que é $X|U$ topologicamente equivalente com $Y|V$.*

Este teorema diz que perto de uma singularidade hiperbólica podemos ver o fluxo de forma linear a menos de um homeomorfismo, para uma vizinhança U da singularidade hiperbólica p. Pelo teorema de Hartman-Grobman entendemos que a vizinhança de p a menos de um homeomorfismo converge para a variedade instável de forma linear pela dinâmica do fluxo para tempos positivos. Veja a figura abaixo.

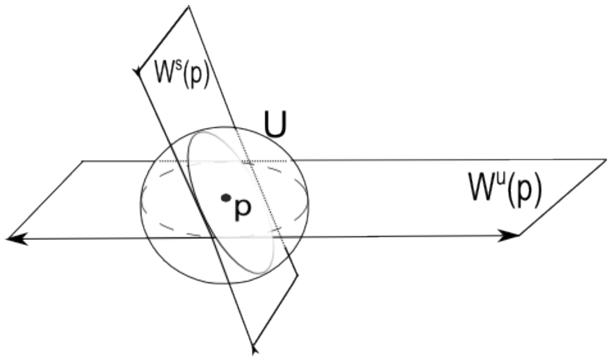

Figura 1.2: p é uma singularidade hiperbólica

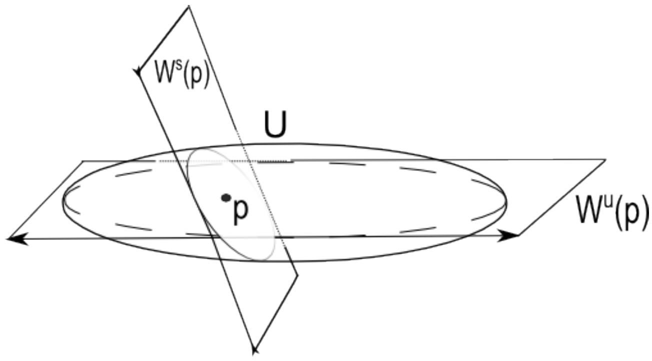

Figura 1.3: A região U converge para a variedade instável

1.2.1 O Lema da Inclinação

Seja $\sigma \in M$ uma singularidade hiperbólica a $X \in \mathcal{X}^r(M)$ para algum $r \geq 1$, com sua variedade estável e instável local, $W^s_{loc}(\sigma)$ e $W^u_{loc}(\sigma)$. Fixe um disco B em $W^u_{loc}(\sigma)$ que é uma vizinhança de σ em $W^u_{loc}(\sigma)$, e uma vizinhança V deste disco em M. Então seja D um disco transversal em $W^s_{loc}(\sigma)$ em z com a mesma dimensão de B, e escreva D^t a componente conexa de $X_t(D) \cap V$ que contém $X_t(z)$, para $t \geq 0$. Então temos o resulta que também é conhecido como $\lambda - lema$.

Lema 1.2.2 (lema da inclinação)**.** *Dado $\epsilon > 0$ existe um $T > 0$ tal que para todo $t > T$ o disco D^t está $\epsilon -$ perto de B na topologia C^r.*

O lema da inclinação será uma ferramenta útil, por exemplo, o seguinte corolário é usado para mostrar a relação de equivalência de transitividade das classes homoclínicas.

Corolário 1.2.3. *Seja $p_1, p_2, p_3 \in M$ pontos fixo hiperbólica de $f \in Diff^r(M)$. Se $W^u(p_1)$ tem um ponto de intersecção com $W^s(p_2)$, e $W^u(p_2)$ tem um ponto de intersecção com $W^s(p_3)$ então $W^u(p_1)$ tem um ponto de intersecção $W^s(p_3)$.*

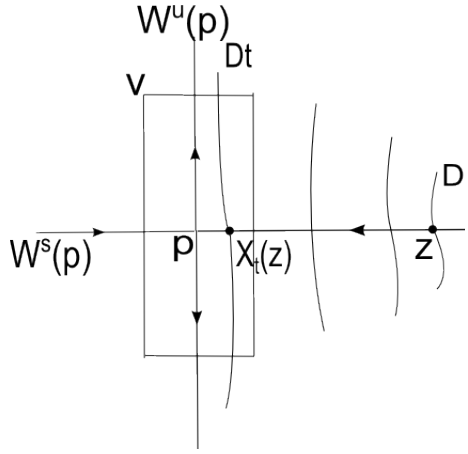

Figura 1.4: O λ-lema

Um conjunto básico é: compacto, invariante, localmente maximal, hiperbólico e transitivo. O seguinte teorema que já falamos anteriormente nos dar umas boas propriedades, e nosso resultado principal é imitar esse teorema em um contexto genérico, na propriedade que os conjuntos básicos são disjuntos, conjuntos esses que são as classes homoclínicas.

Teorema 1.2.4. *(Decomposição espectral) Se X é axioma A então Ω pode ser escrito de forma única como uma união disjunta de conjuntos básicos $\Omega = \Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_k$, onde cada Λ_i é fechado, invariante e $X_t : \Lambda_i \to \Lambda_i$ é topologicamente transitivo.*

1.2.2 Campo de vetor Kupka Smale

A primeira propriedade genérica que nós consideramos é a hiperbolicidade de pontos periódicos e a transversalidade das variedades estáveis e instáveis. Como a instrução e prova do teorema em [14] de Kupka-Smale pode ser expressa em termos do conjunto de todos os pontos periódicos e o conjunto de pontos periódicos hiperbólicos, damos algumas notações para estes conjuntos. Para qualquer difeomorfismo em M, denotamos $Per(n, f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos com período inferior ou igual a n,

$$Per(n, f) = \{p \in M : f^i(p) = p, \text{ para algum } i \leq n\}$$

$Per(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos,

$$Per(f) = \cup_{n=1}^{\infty} Per(n, f)$$

Seja $Per_h(n, f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos e hiperbólicos, com período menor ou igual a n,

$$Per_h(n,f) = \{p \in Per(n,f) : p \text{ é ponto periódico hiperbólico}\}$$

Veja que todos os pontos periódicos de período menor ou igual a n, são hiperbólicos, se e somente se, $Per(n,f) = Per_h(n,f)$. Usando este fato, definimos

$$H_n = \{f \in Diff^r(M) : Per(n,f) = Per_h(n,f)\} \text{ e,}$$
$$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$$

Portanto, $f \in H$, se e somente se, todos os pontos periódicos de f são hiperbólicos. A segunda metade do teorema em [14] trata da transversalidade da variedade estável e instável.

Seja $\mathcal{KS}(M) = \{f \in H : W^s(p,f) \text{ é transversal a } W^u(q,f) \text{ para todo } p,q \in Per(f)\}$.

Teorema 1.2.5. *Seja M uma variedade compacta e $1 \leq k \leq \infty$.*

(a) *O conjunto H_n definido acima é denso e aberto em $Diff^k(M)$, o conjunto H é residual em $Diff^r(M)$.*

(b) *O conjunto $\mathcal{KS}(M)$ é residual em $Diff^r(M)$.*

Observação: este teorema é também verdade para campos de vetores, na definição de $\mathcal{KS}(M)$, usamos as variedades estáveis e instáveis de órbitas periódicas, e não apenas as variedades estáveis e instáveis de pontos individuais da órbita periódica, e requeremos que $W^s(p)$ seja transversal a $W^u(q)$ onde p e q varia entre ponto fixo e órbitas periódicas. A ideia da prova é que um ponto periódico pode ser aproximado por um ponto periódico hiperbólico. Uma vez que a hiperbolicidade de um único ponto periódica é uma propriedade aberta, o conjunto H_n é simultaneamente denso e aberto. Da mesma forma, uma interseção que não é transversal de variedades estáveis e instáveis, pode ser aproximado por uma interseção transversal, o que implica que $\mathcal{KS}(M)$ é denso.

Definição 1.2.6. Um difeomorfismo (respectivamente um fluxo) que satisfaz as propriedades do conjunto $\mathcal{KS}(M)$ no teorema 1.2.5 é chamado difeomorfismo Kupka-Smale (respectivamente um fluxo).

Capítulo 2
TEORIA DE ESTABILIDADE

Veremos neste capítulo as noções da teoria de estabilidade no sentido de Lyapunov e consequentemente algumas propriedades, uma boa consulta para se verificar esta teoria está em N.P Bhatia [1]. Podemos trabalhar com teoria de estabilidade no sentido de Lyapunov de forma mais geral possível, definindo estabilidade para um conjunto $A \subset M$ qualquer, lembrando que M é um espaço euclidiano. Uma das principais dificuldades é o fato de que as propriedades das trajetórias vizinhas de A(onde A não é necessariamente compacto) não são mais caracterizáveis em termos de seus conjuntos limite, que agora pode ser vazio mesmo se as trajetórias vizinhas tendem a A. Além desta dificuldade para conjuntos não compactos, somos confrontados com um número muito grande de propriedades de estabilidade que degenera em algumas propriedades básicas para o caso de um conjunto fechado com uma vizinhança compacta. No entanto para o objetivo desse trabalho, iremos-nos restringir a estabilidade no sentido de Lyapunov para conjuntos compacto, e obter alguns resultados que serão úteis para usarmos na demonstração do teorema principal. Para consulta da teoria completa e ver mais resultados verifique em [1].

Enunciaremos a definição geral de estabilidade e para conjuntos compactos.

Na próxima definição usamos a notação $d(K,\epsilon)$, para uma vizinhança ϵ de K, que é $\{x \in d(K,\epsilon) : d(x,K) \leq \epsilon\}$.

Definição 2.0.7. Um conjunto $K \subset M$ é chamado de estável no sentido de Lyapunov, se dado qualquer $\epsilon > 0$, e para cada $x \in K$, existe um $\delta(x,\epsilon)$ tal que $X_t(d(x,\delta)) \subset d(K,\epsilon)$ para $t \geq 0$. Isto é equivalente que dado qualquer vizinhança U de K existe um aberto V de K tal que $X_t(V) \subset U$ para $t \geq 0$.

Definição 2.0.8. Um subconjunto compacto $A \subset M$ é *estável no sentido de Lyapunov* para X se para cada conjunto aberto U contendo A existe um conjunto aberto $V \subset U$ contendo A tal que $X_t(V) \subset U$ para cada $t \geq 0$.

Estamos interessados em conjuntos invariantes compactos $\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$, onde Λ^+ é um conjunto *estável de Lyapunov* a X e Λ^- é um conjunto *estável de Lyapunov* a $-X$. Tais conjuntos vão definir os conjuntos *neutrais*, estes conjuntos são de muitas utilidades para nosso trabalho.

Definição 2.0.9. Dado qualquer conjunto $K \subset M$,definimos os seguintes conjuntos $A_\omega(K) = \{x \in M : \omega(x) \cap K \neq \emptyset\}$, e $A(K) = \{x \in M : \omega(x) \neq \emptyset, e\ \omega(x) \subset K\}$. Os conjuntos $A_\omega(K)$,e $A(K)$ são chamados de região de fraca atração, e região de atração do conjunto K respectivamente.

Definição 2.0.10. Um conjunto compacto $K \subset M$(onde M é um espaço euclidiano) é chamado de *atrator fraco*, se existe um $\epsilon > 0$ tal que, $\omega(x) \cap K \neq \emptyset$ sempre que $x \in d(K, \epsilon)$.

Definimos um *atrator*, se existe um $\epsilon > 0$ tal que $\omega(x) \neq \emptyset$,e $\omega(x) \subset K$ para todo $x \in d(K, \epsilon)$. E se a região de atração $A(K) = M$ então K é chamado de atrator global.

Definimos um *atrator uniforme*, se K é um atrator e tal que dado qualquer $\delta > 0$, e um conjunto compacto B com a propriedade que $\omega(x) \neq \emptyset$, e $\omega(x) \subset K$ para todo $x \in B$, existe um $T(K, \epsilon) \geq 0$ e $X_t(B) \subset d(K, \delta)$ para todo $t > T$.

E *estável assintoticamente*, se K é estável e atrator; e finalmente *instável*, se K não é estável.

Observação: Os conceitos de atração e estabilidade são, em geral, independente um do outro. Contudo, sob certas condições de atração, e atração uniforme temos estabilidade. Além disso, se um conjunto estável é um atrator fraco, então é um atrator e, portanto, assintoticamente estável, e um conjunto assintoticamente estável é um atrator uniforme. Assim, a combinação de estabilidade com qualquer uma das propriedades de conjunto atrator produz estabilidade assintótica.

Note que $A(K) \subset A_\omega(K)$. Na próxima subseção iremos enunciar alguns teoremas, resultados que obtemos com a teoria estável no sentido de Lyapunov. Sabemos que a orbita de x $\{X_{t\in\mathbb{R}}(x)\}$ dar-nos informações somente sobre a órbita, às vezes nos questionamos sobre o que acontece na vizinhança da órbita de x, e queremos saber de propriedades relacionadas sobre uma vizinhança da trajetória de x, para suprir essas necessidades daremos um conceito sobre prolongamento, para podermos usar um resultado sobre este conceito.

Definição 2.0.11. Seja $x \in M$ definimos o primeiro prolongamento positivo $D^+(x)$ de x, como sendo o conjunto de todos os $y \in M$ tal que existem sequências $\{x_n : x_n \in M\}$ e $t_n \geq 0$ com $x_n \to x$ e $X_{t_n}(x_n) \to y$. Logo,

$$D^{+}(x) = \{y \in M : \exists x_n \in M \text{ e } t_n \geq 0 \text{ tal que } x_n \to x \text{ e } X_{t_n}(x_n) \to y\}$$

Similarmente definimos primeiro prolongamento negativo $D^{-}(x)$ de x como,

$$D^{-}(x) = \{y \in M : \exists x_n \in M \text{ e } t_n \leq 0 \text{ tal que } x_n \to x \text{ e } X_{t_n}(x_n) \to y\}$$

e também definimos prolongamento $D^{+}(K)$ de um conjunto K como sendo,

$$D^{+}(K) = \cup\{D^{+}(x) : x \in K\}.$$

2.1 Propriedades de Estável no Sentido de Lyapunov

Apresentaremos agora alguns resultados obtidos considerando a estabilidade no sentido de Lyapunov, para mais detalhes veja [1]. O teorema abaixo é um resultado de estabilidade para conjuntos quaisquer.

Teorema 2.1.1. *Se $K \subset M$ é fechado e estável, então ele é invariante positivamente.*

Demonstração. Veja que podemos obter o seguinte resultado, se $x \in K$ pela estabilidade no sentido de Lyapunov implica que $\{X_t(x)\} \subset U = (K, \epsilon)$, para toda vizinhança $U = (K, \epsilon)$ de K com $\epsilon > 0$, onde $t \geq 0$. Logo, $\{X_t(x)\} \subset \cap_{\epsilon > 0} U = (K, \epsilon) = \overline{K} = K$, já que K é fechado. Logo K é invariante positivamente. $\square$

Observação: depois vamos ver que invariante positivamente é uma condição para obter *estabilidade.*

Teorema 2.1.2. *Se $K \subset M$ é um atrator e ele é invariante positivamente, com a condição $x \in d(K, \eta) \backslash K$, implica que $\alpha(x) \cap K = \emptyset$, é equivalente para a condição que o conjunto K é estável.*

Demonstração. Seja $\eta > 0$ tal que $x \in d(K, \eta) \backslash K$ implica que $\alpha(x) \cap K = \emptyset$. Assuma que existe um $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe um $x \in d(K, \delta)$ tal que $\{X_t(x)\} \not\subset d(K, \epsilon)$ com $t \geq 0$, podemos assumir que $\epsilon < \eta$. Claramente existe uma sequência $\{x_n\}$, $x_n \to K$ e uma sequência $\{t_n\}$, $t_n > 0$, e $dist(X_{t_n}(x_n), K) = \epsilon$, a distância de um ponto para um conjunto é definida como $dist(x, K) = inf\,\{d(x, y) : y \in K\}$. Como K é compacto podemos assumir que $x_n \to x \in K$. Agora mostraremos que $\{t_n\}$ não é limitado, caso contrário teria uma subsequência convergente, e assim temos $t_n \to t \geq 0$. Agora já que $x_n \to x$ e $t_n \to t$ temos que $X_{t_n}(x_n) \to X_t(x)$, mas temos $x \in K$ e $X_t(x) \notin K$ com $t > 0$, isto contradiz a hipótese de K ser invariante positivamente, portanto a sequência $\{t_n\}$ não é limitada, podemos assumi então que $t_n \to +\infty$.

Fazendo $X_{t_n}(x_n) = y_n$, note que $x_n = X_{-t_n}(y_n)$, assim temos uma sequência $d(y_n, K) = \epsilon$. Já que o conjunto $\{y : dist(y, K) = \epsilon\}$ é compacto, podemos assumir que $y_n \to y$ com $dist(y, K)$, logo $y \in d(K, \eta)$. No entanto como $x_n = X_{-t_n}(y_n) \to x \in K$, onde temos $-t_n \to -\infty$,portanto veja que $x \in \alpha(y)$, assim temos $\alpha(y) \cap K \neq \emptyset$, que uma contradição. $\square$

Observação A condição que K é invariante positivamente é essencial, pois podemos ver no exemplo abaixo um atrator compacto que não é invariante positivamente e não satisfaz o teorema 2.1.2.

Exemplo 2.1.3. Considere o fluxo representado na figura abaixo. As trajetórias são uma família de retas passando pelo ponto singular x. Em cada ponto do espaço a direção da trajetória para o futuro é em sentido ao ponto x, assim todo $p \in M$ temos $\alpha(p) = \emptyset$ enquanto o x está no ω- limite de p sendo $\omega(p) = \{x\}$, considere o ponto $y \in M$ e $y \neq x$ e o conjunto compacto $K = \{x\} \cup \{y\}$, obviamente temos a propriedade que $\alpha(p) \cap K = \emptyset$ para todo $p \in M$ e K é um atrator compacto. Contudo o teorema 2.1.2 não é satisfeito porque K não é invariante positivamente, pois $X_t(y) \notin K$ para $t \geq 0$.

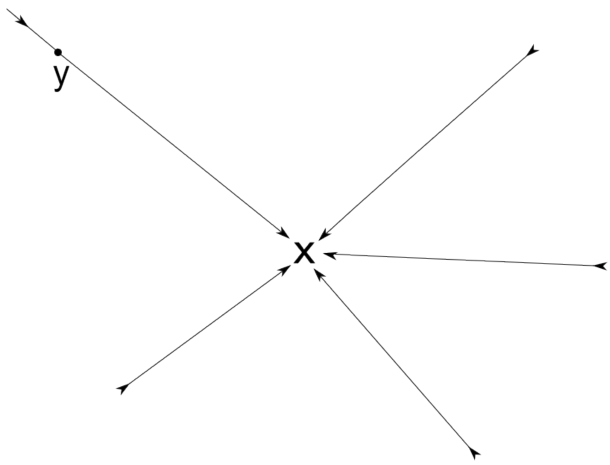

Figura 2.1:

Exemplo 2.1.4. O teorema 2.1.2 não é verdade se não assumirmos que K é atrator. De fato, não é verdade que se K é invariante positivamente e compacto, e $\alpha(x) \cap K = \emptyset$ para $x \notin K$, então K é estável. Isto pode ser mostrado no seguinte contra exemplo. Considere a seguinte sequência de pontos de singularidade sobre o eixo x com abcissas $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, e preencher o resto como mostrado na figura. Considere o ponto singular 0, claramente para todo elemento do complementar de 0, ou seja, $x \in C(\{0\})$, temos $\alpha(x) \cap \{0\} = \emptyset$, mas o conjunto $\{0\}$ não é estável.

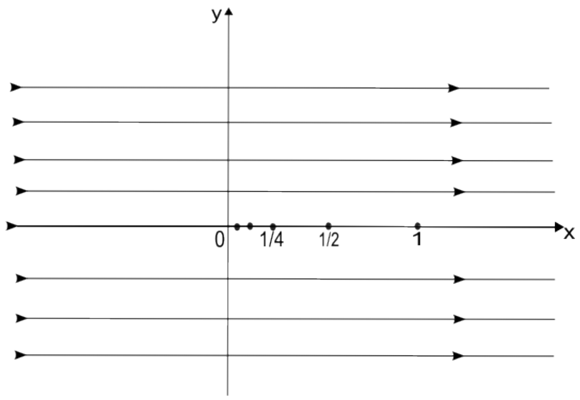

Figura 2.2:

Teorema 2.1.5. *Se um conjunto compacto $K \subset M$ é estável, então $D^+(K) = K$.*

Demonstração. Suponha que $D^+(K) \neq K$, então existe um ponto $y \in D^+(K)/K$. Seja $dist(y, K) = \epsilon > 0$, como $y \in D^+(K)$ existe um $x \in K$ com $y \in D^+(x)$, com sequências $x_n \to x$ e $X_{t_n}(x_n) \to y$ com $t_n \geq 0$. Como visto no teorema 2.1.1 podemos assumir que, $x_n \notin K$ e $x_n \in d(K, \frac{\epsilon}{2})$, com $X_{t_n}(x_n) \notin d(K, \frac{\epsilon}{2})$. Isto mostra que para cada δ, $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2}$ e $X_t(d(K, \delta)) \not\subset d(K, \frac{\epsilon}{2})$, ou seja, K não é estável. Isto prova o teorema. $\square$

Lema 2.1.6. *Seja Λ^+ um conjunto de estável no sentido de Lyapunov a X. Então*

(a) *se $x_n \in M$ e $t_n \geq 0$ satisfazendo $x_n \to x \in \Lambda^+$ e $X_{t_n}(x_n) \to y$, então $y \in \Lambda^+$;*

(b) *$W^u_X(\Lambda^+) \subset \Lambda^+$;*

(c) *se Γ é um conjunto transitivo de X e $\Gamma \cap \Lambda^+ \neq \emptyset$, então $\Gamma \subset \Lambda^+$.*

Demonstração. (a) Suponhamos que $y \notin \Lambda^+$ e seja $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B(y, \epsilon)} \cap \Lambda^+ = \emptyset$. Definimos $U = M - \overline{B(y, \epsilon)}$ e seja V segundo a definição de conjuntos *estável no sentido de Lyapunov* aplicado a Λ^+ no aberto U. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ $\forall n \geq n_0$, se tem então $X_{t_n}(x_n) \notin B(y, \epsilon)$ para todo $n \geq n_0$, logo é um absurdo pois temos $X_{t_n}(x_n) \to y$

(b) Novamente por absurdo suponhamos que exista $y \in W^u(\Lambda^+) - \Lambda^+$, e seja $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B(y,\epsilon)} \cap \Lambda^+ = \emptyset$. Defina $U = M - \overline{B(y,\epsilon)}$ e seja V como na definição de *estável no sentido de Lyapunov.* Como $y \in W^u(\Lambda^+)$ temos que $X_{-t}(y) \in V$ para $t \to +\infty$ logo $y \in X_t(V) \subset U$ para $t \geq 0$ portanto $X_t(y) \notin B(y,\epsilon)$ $\forall t \geq 0$ absurdo para $t = 0$.

(c) Análogo aos casos anteriores, suponhamos que exista um $y \in \Gamma - \Lambda^+$ e seja $\epsilon > 0$ e com $\overline{B(y,\epsilon)} \cap \Lambda^+ = \emptyset$. Definamos $U = M - \overline{B(y,\epsilon)}$ e seja V como na definição. Seja um $x \in \Gamma$ tal que $\omega(x) = \Gamma$, então em algum momento a orbita de x deve entrar em V, isto implica que ela nunca mais entrará em $B(y,\epsilon)$ quebrando a hipótese de transitividade de Γ logo um absurdo. $\square$

Lema 2.1.7. *Seja Λ um conjunto neutral de X. Então:*

(a) *Λ é saturado;*

(b) *Λ é transitivo a X se, e somente se, Λ é transitivo maximal a X. Em particular, diferentes conjuntos neutrais transitivos a X são disjuntos.*

Demonstração. Seja $\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$ com $\Lambda^{\pm}$ sendo *estável no sentido de Lyapunov* para $\pm X$. Claramente $W^u_X(\Lambda) \subset \Lambda^+$ pelo o lema 2.1.6 (b). Similarmente, $W^s_X(\Lambda) \subset \Lambda^-$. Por isso

$$W^u_X(\Lambda) \cap W^s_X(\Lambda) \subset \Lambda^+ \cap \Lambda^- = \Lambda.$$

Reciprocamente, $\Lambda \subset W^u_X(\Lambda) \cap W^s_X(\Lambda)$ já que Λ é invariante. Isto prova (a).

Agora pelo o lema 2.1.6 (c), se Γ é um conjunto transitivo intersectando Λ, então $\Gamma \subset \Lambda^+$ e $\Gamma \subset \Lambda^-$. Assim $\Gamma \subset \Lambda^+ \cap \Lambda^- = \Lambda$, e assim Λ é transitivo maximal. A volta é óbvia. Diferentes conjuntos neutrais transitivo de X são transitivo maximal, de modo que eles são necessariamente disjuntos. Isto finaliza a prova. $\square$

2.1.1 Atrator uniforme e estabilidade assintótica

Veremos as relações que temos entre atrator uniforme e estabilidade assintótica.

Teorema 2.1.8. *Seja K um conjunto compacto estável assintóticamente. Então K é atrator uniforme.*

Demonstração. Note que da definição de *atrator uniforme* é equivalente para o seguinte: um conjunto compacto K é um *atrator uniforme* se dado $\delta > 0$ e um conjunto compacto $B \subset A(K)$, existe um $T = (K, \delta)$ tal que, $X_t(B) \subset d(K, \delta)$ para $t > T$. Seja $\epsilon > 0$, já que K é estável existe $\delta > 0$ com $\delta < \epsilon$, tal que $X_t(d(K, \delta)) \subset d(K, \epsilon)$ para todo $t \geq 0$. Para qualquer $x \in B$, defina $\tau_x = inf\,\{t > 0 : X_t(x) \in d(K, \delta)\}$. Seja o conjunto $T = super\,\{\tau_x : x \in K\}$, afirmamos que T é finito. Caso contrário, existiria uma sequência $\{x_n\} \subset B$ tal que τ_{x_n} seria infinito. Como B é compacto, passamos a uma subsequência se necessário tal que $x_n \to y \in B$. Então existe um $t' > 0$ tal que $X_{t'}(y) \in d(K, \delta)$, como $d(K, \delta)$ é aberto existe uma vizinhança aberta $V \ni X_{t'}(y)$ tal que $V \subset d(K, \delta)$. A imagem inversa $W = X_{-t'}(V)$ de V é aberta, porque o fluxo é contínuo. Temos $X_{t'}(W) = V \subset d(K, \delta)$, e assim $X_t(W) \subset d(K, \epsilon)$ para todo $t \geq t'$. Como temos $x_n \in W$ para n suficientemente grande, temos que $\tau_{x_n} \leq t'$ para n grande, portanto isso contradiz de τ_{x_n} ser infinito, portanto $T < +\infty$. Note que $x \in B$ implica $X_T(x) \in d[K, \delta]$, e assim temos $X_t(B) \subset d(K, \epsilon)$ para todo $t \geq T$, ou seja, K é *atrator uniforme.*

□

Teorema 2.1.9. *Um conjunto compacto $K \subset M$ invariante positivamente, é assintóticamente estável se, e somente se, ele é atrator uniforme.*

Demonstração. Seja K invariante positivamente e *atrator uniforme.* Vamos provar que K é estável, vamos provar por contradição. Suponha que K não é estável, então existe sequências $\{x_n\}$, $x_n \to x \in K$, e $\{t_n\}$ com $t_n \geq 0$, tal que $X_{t_n}(x_n) \notin d(K, \epsilon)$ para algum $\epsilon > 0$. De fato, seja $\epsilon > 0$ pequeno o suficientemente tal que $d[K, \epsilon]$ é compacto, e $d[K, \epsilon] \subset A(K)$. Pela hipótese de *atrator uniforme* existe $T > 0$ tal que $X_t(d[K, \epsilon]) \subset d(K, \epsilon)$ para $t > T$, logo $t_n \leq T$. Existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$, tal que as subsequências correspondentes $\{t_{n_k}\}$ e $\left\{X_{t_{n_k}}(x_{n_k})\right\}$ converge. Seja $t_{n_k} \to t$, e $X_{t_{n_k}}(x_{n_k}) \to y$, então $X_t(x) = y \in K$ por K ser invariante positivamente, e também temos $y \notin K$ pois $X_{t_n}(x_{n_k}) \notin K$ entramos em contradição, logo K é estável, e já que K é atrator, então K é estável assintóticamente. A volta provamos no teorema anterior. □

Observação. Assumir que K é invariante positivamente é necessário. De fato considere o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1.10. A região hachurada da figura 2.3 representa o conjunto K. O ponto 0 é um ponto de singularidade, e para todo $x \in M$ temos, $\omega(x) = 0$. No entanto o comportamento das trajetórias são diferentes do conjunto K em relação ao seu complementar $C(K)$, pois se $x \in C(K)$, o $\alpha(x) = \emptyset$, enquanto se $x \in K$ temos $\alpha(x) = 0$.Temos que K não é invariante positivamente. É claro que dado qualquer compacto $B \subset M$ teremos $\omega(x) = 0$, $\forall x \in B$ logo K é um atrator uniforme com um tempo adequado, mas ele não é estável.

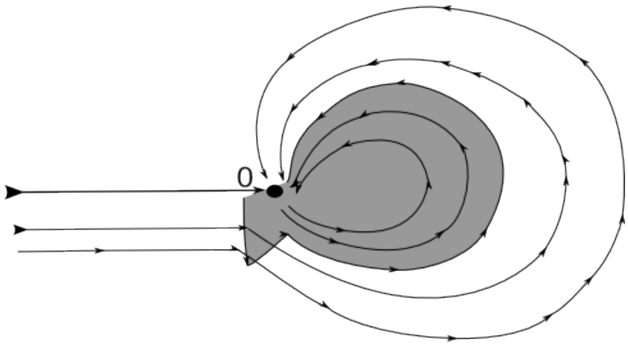

Figura 2.3:

O próximo exemplo nos mostra um atrator que não é *atrator uniforme* e nem estável.

Exemplo 2.1.11. Considere o sistema dinâmico planar definido pelas equações diferenciais em coordenadas polares.

$$r' = r(1-r)$$
$$\theta' = \sin^2(\tfrac{\theta}{2})$$

O retrato de fase consiste de dois pontos $p_1 = (0,0)$ e $p_2 = (1,0)$, uma trajetória γ que passa sobre o círculo unitário e sobre o ponto p_2, forma um caminho tal que $\omega(\gamma) = \alpha(\gamma) = \{p_2\}$. Para todo ponto x fora do círculo unitário temos p_2 como seu ponto limite positivo ($\omega(x) = p_2$), e o $\alpha(x) = \emptyset$. Para toda trajetória no interior do círculo temos p_2 como seu único ponto limite positivo(exceto p_1), e p_1 como seu único ponto limite negativo, conforme a figura 2.5. O ponto p_2 é um atrator com $A(p_2) = \mathbb{R}^2 - \{p_1\}$, ele não é atrator uniforme e nem estável.

O diagrama abaixo nos dar informação da dependência de cada conceito.

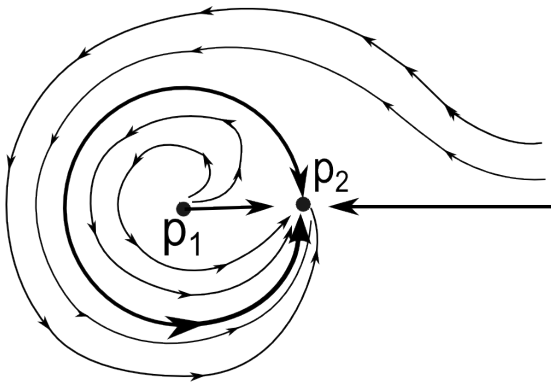

Figura 2.4: p_2 é um atrator

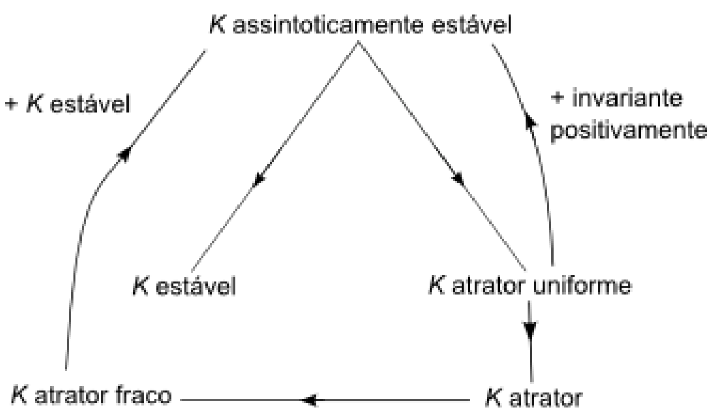

Figura 2.5: ilustração

Capítulo 3
CLASSES HOMOCLÍNICAS

Dado uma orbita periódica hiperbólica p do tipo sela para o fluxo X_t, dizemos que q é homoclínico com relação ao ponto p se $q \in W^u_X(p) \cap W^s_X(p)$. Se a interseção for transversal então q é um ponto homoclínico transversal, veja figura 3.1. Definimos uma classe homclínica $H_X(p)$ pelo o fecho do conjunto de interseções transversais entre a variedade instável e estável de p

$$H_X(p) = \overline{W^u(p) \pitchfork W^s(p)}$$

Vamos mostrar outra definição equivalente de classe homoclínica dada por S. Smale. Dados $p, q \in \mathrm{Per}(X)$ dizemos que $p \sim q$ se $W^s_X(p) \pitchfork W^u_X(q) \neq \emptyset$ e $W^s_X(q) \pitchfork W^u_X(p) \neq \emptyset$. Claramente esta relação é reflexiva e simétrica e pelo λ-lema 1.2.2 é transitiva.

Definição 3.0.12. Se $p \sim q$, dizemos que p e q estão *homoclinicamente relacionados* . Chamamos de *classe homoclínica*, $H(p, X) = \overline{\{q \in Per(X) : q \sim p\}}$, o fecho da classe de equivalência de p.

Exemplo 3.0.13. Uma órbita periódica tipo sela onde a única interseção da variedade instável e estável é a própria sela, é uma classe homoclínica, chamada de classe homoclínica trivial. As classes homoclínicas não triviais são aquela que possuem ponto homoclínico, há quem considere que classe homoclínica sempre tem ponto homoclínico, isto é, consideram apenas as não triviais. O exemplo mais famoso é a ferradura de Smale. A ferradura é uma classe homoclínica, outros exemplos não triviais podem ser encontrados no livro do Palis em [11].

Note que há casos em que $W^u_X(p)$ coincide com $W^s_X(p)$, neste caso temos $H_X(p) = \emptyset$, observe que uma classe homoclínica não vazia é sempre um subconjunto invariante pelo fluxo uma vez que a variedade instável e estável é invariante pelo fluxo. Temos outro resultado clássico das primeiras obras de Poincaré, a qual mostra que orbita homoclínica transversal é acumulada por pontos de outras orbitas homoclínica, e mostrado por Birkhoff que as orbitas homoclínicas transversais são acumuladas por pontos de orbitas periódica.

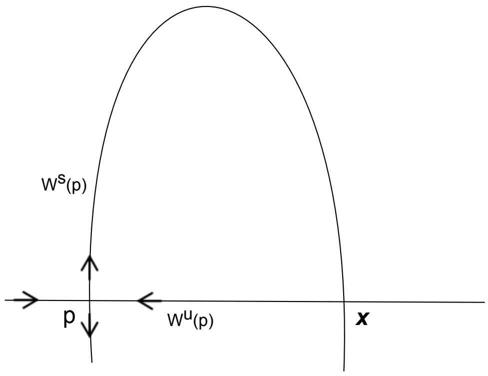

Figura 3.1: x ponto homoclínico transversal

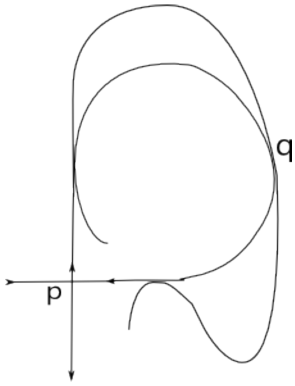

Figura 3.2: q é um ponto de tangência homoclínica

Teorema 3.0.14 (Birkoff-Smalle)**.** *Qualquer classe homoclínica não vazia tem orbitas densa e contém um conjunto denso, de orbitas periódicas.*

Veremos ainda neste capítulo que as classes homoclínicas genericamente são conjuntos transitivo, no entanto a transitividade da classe homoclínica é uma consequência deste último teorema e do $\lambda - lema$, ao qual apresentaremos uma prova.

Lema 3.0.15. *Cada classe homoclínica H de um fluxo X é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Seja $q, r \in H_X(p) = \overline{W^u(p) \pitchfork W^s(p)}$ pontos distintos e U e V vizinhanças disjuntas de q, r em H, respectivamente. Seja q_1, r_1 pontos de interseção entre a variedade estável e instável de p em U e V, respectivamente. Então para algum tempo futuro $t > 0$ muito grande e $s > 0$ perto do período de p, temos que $X_{t+s}(q_1)$ está sobre $W^s(p)$ muito perto de p e $X_{-t}(r_1)$ está sobre $W^u(p)$ muito perto de p também.

A invariância da variedade estável e instável e o lema da inclinação implica que existe um ponto z na interseção de $W^{uu}(X_{t_1}(q_1))$ e $W^{ss}(X_{-t_2}(r_1))$ para algum $t_1, t_2 > t$. Por isso $X_{t_1}(z)$ está no interior de U perto de q_1 e $X_{-t_2}(z)$ está no interior de V perto de r_1. Então $X_{t_1+t_2}(U) \cap V \neq \emptyset$. $\square$

3.0.2 Connecting lemma

Um das ferramentas mais importantes na dinâmica genérica são os lemas de perturbações. O primeiro, e certamente o mais famoso, é o closing lema de Pugh, o qual diz que a órbita de um ponto não errante pode ser fechada por pequenas perturbações na topologia C^1.

Este resultado foi provado em 1967 e está em [12]. Nessa mesma década surgiu um problema que alguns anos depois resultaram no connecting lemma de Hayashi.

Teorema 3.0.16 (Closin Lemma, Pugh)**.** *Seja f um difeomorfismo de uma variedade compacta M e seja $x \in M$ um ponto não errante de f. Então toda C^1-vizinhança $\mathcal{U}$ de f contem um difeomorfismo g tal que x é um ponto periódico de g.*

Na década de 60 surgiu um problema que obteve um bom resultado na teoria de sistemas dinâmicos, temos o seguinte questionamento: quando existe um ponto quase homoclínico, é possível criar pontos homoclínicos por uma pequena perturbação? Com algumas hipóteses e casos particulares houve boas respostas. O problema é formulado da seguinte maneira,(enunciaremos para campos de vetores mas vale para difeomorfismo também).

Problema A: Suponha que $X \in \mathcal{X}^r(M)$ tenha um ponto fixo hiperbólico p e $q \in \left(\left(\overline{W^u_X(p)} \cap W^s_X(p)\right) \cup \left(\overline{W^s_X(p)} \cap W^u_X(p)\right) - \{p\}\right)$. Existe um campo de vetor Y perto C^r de X e coincidindo com X em uma vizinhança de p e tendo um ponto homoclínico associado a p?

No caso de $r = 1$ em [5] Hayashi dar uma resposta positiva, e nosso interesse nesse problema é por que queremos conectar variedades estável e instável de p para uma pequena perturbação. Muitos autores têm feito importantes contribuição para este problema, em [13] Clark Robinson prova para o caso onde a variedade é a esfera, e quando a variedade é o toro Mañé em [8] prova o problema na topologia C^r para $r = 1, 2$, e assim outros autores deram contribuições e depois de mais de 30 anos Hayashi em [5] prova o problema ao qual usamos neste trabalho. Mas qual é a importância desse problema? Em 1970 Palis e Smale enunciaram a seguinte conjectura:

Conjectura da estabilidade estrutural:

- $f : M \to M$ é C^r estruturalmente estável, se e somente se, f é Axioma A e satisfaz a condição forte de transversalidade.

- f é C^r $\Omega-$estável, se e somente se, f é Axioma A sem ciclos.

A resposta que Mañé dá para o *problema A* em [8] é uma ferramenta útil para provar a conjectura da estabilidade estrutural para difeomorfismo em [9] na topologia C^1. Com o mesmo objetivo de provar a conjectura, Hayashi em [5] prova o connecting lemma para variedades provando o *problema A*, e usando o connecting lemma ele dá também sua contribuição para a conjectura, portando estendendo o resultado de Mañé, o Hayashi prova a $\Omega-$estabilidade para fluxos C^1.

Faremos agora algumas definições para podermos entender o próximo teorema. Chamamos $D^u \subset W^u \cap U$ e $D^s \subset W^s \cap U$ (onde U é a vizinhança isolada do conjunto Λ), de *domínio fundamental* se satisfaz

$$D^s = \overline{W^s_\epsilon(\Lambda) - X_1(W^s_\epsilon(\Lambda))}, \text{ e } D^u = \overline{W^u_\epsilon(\Lambda) - X_{-1}(W^u_\epsilon(\Lambda))}$$

para algum $\epsilon > 0$. Duas propriedades importantes de *domínio fundamental* que devemos saber, primeiro é que, para qualquer $q \in W^u(\Lambda) - \Lambda$ a orbita de q passa pelo menos uma vez, e no máximo duas vezes no *domínio fundamental* D^u, e segundo, quando aplicamos a dinâmica do fluxo no *domínio fundamental* obtemos $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(D^u) = W^u(\Lambda) - \Lambda$.

Dizemos que p é um *ponto homoclínico* associado para o conjunto Λ hiperbólico se

$$p \in W^u_X(\Lambda) \cap W^s_X(\Lambda) - \Lambda.$$

Além do mais um ponto

$$q \in \left(\overline{W^u_X(\Lambda)} \cap W^s_X(\Lambda)\right) \cup \left(\overline{W^s_X(\Lambda)} \cap W^u_X(\Lambda)\right) - \Lambda$$

é chamado um *ponto quase homoclínico* associado para Λ. Uma sequência de orbitas finita $\{y_k : k \geq 1\}$ de X é uma *sequência quase homoclínica* associado a Λ se elas se acumulam tanto em D^s e D^u, e cada $y_k, k \geq 1$ está fora da vizinhança isolada de Λ, depois de deixar uma vizinhança de D^u e antes de se aproximar de D^s.

A existência de um ponto *quase homoclínico* associado a Λ implica a existência de uma sequência *quase homoclínico* associada a Λ em $W^u_X(\Lambda) \cup W^s_X(\Lambda)$. Faremos uma explanação somente para um difeomorfismo f tendo um ponto *quase homoclínico* em $W^s_X(\Lambda)$. Seja $y \in W^s_X(\Lambda)$ um *ponto quase homoclínico* e seja $m_1, m_2 \geq 0$ tal que $f^{m_1}(y) \in D^s$ e $f^{-m_2}(y) \notin U$. Como y é um *ponto quase homoclínico* existe $y_k \in W^u_X(\Lambda)$, com $k \geq 1$ tal que $\lim_{k\to+\infty} y_k = y$ e $n_k > m_2$,$k \geq 1$, tal que $f^{-n_k}(y_k) \in D^u$. Então a sequência de orbitas finitas $\{f^{-n_k}(y_k), f^{1-n_k}(y_k), f^{2-n_k}(y_k), ..., f^{m_1}(y_k)\} \subset W^u_X(\Lambda)$, com k suficientemente grande, é uma *sequência quase homoclínica* porque $\lim_{k\to+\infty} f^{m_1}(y_k) \in D^s$, $\lim_{k\to+\infty} f^{-m_2}(y_k) \notin U$. Os outros casos são similares. Assim temos o seguinte resultado.

Vamos agora enunciar o nosso connecting lemma.

Teorema 3.0.17. *Seja $X \in \mathcal{X}^1(M)$, uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X e um conjunto Λ hiperbólico isolado. Se X tem uma sequência quase homoclínica associada para Λ então existe $Y \in \mathcal{U}$ coincidindo com X em uma vizinhança de Λ e tendo um ponto homoclínico associado para Λ.*

Observação: dado um ponto *quase homoclínico* como no teorema acima, o ponto homoclínico criado pode ser tomado arbitrariamente perto do ponto *quase homoclínico.* Nosso interesse em pontos homoclínico transversal é maior do que pontos *quase homoclínico*, porque ele traz mais informações, o próximo corolário que enunciaremos nos dar uma boa informação relacionada aos pontos homoclínicos transversais em um contexto genérico.

Corolário 3.0.18. *Para difeomorfismo genérico C^1 o conjunto de pontos homoclínico transversal associado ao um ponto hiperbólico é denso no conjunto de pontos quase homoclínico associado ao o ponto fixo hiperbólico.*

Demonstração. Seja $f \in Diff^1(M)$, e denote $\Theta(f)$ o conjunto de pontos homoclínicos transversais associado ao um ponto fixo hiperbólico, e seja $\overline{\Theta(f)}$ o fecho do conjunto. Por a dependência contínua sobre $f \in Diff^1(M)$ das variedades estável e instável de um ponto fixo hiperbólico e a transversalidade ser uma propriedade aberta, temos que a função valor no conjunto $f \mapsto \overline{\Theta(f)}$ é semi-contínua inferior, pois se o conjunto aberto U satisfaz $\overline{\Theta(f)} \cap U \neq \emptyset$ para algum f, então $\overline{\Theta(g)} \cap U \neq \emptyset$ para g perto C^1 de f. Portanto por $A.2.7$ existe um residual $\mathcal{R} \subset Diff^1(M)$, tal que para cada $f \in \mathcal{R}$ é semi-contínua superior, ou seja, se $D \subset M$ é compacto e $\overline{\Theta(f)} \cap D = \emptyset$ então $\overline{\Theta(g)} \cap D = \emptyset$ para $g \in C^1$ perto de f. Vamos mostrar que para cada $f \in \mathcal{R}$ satisfaz o corolário 3.0.18.

Suponha que para algum $f \in \mathcal{R}$ não satisfaça o corolário 3.0.18, então existe uma vizinhança compacta V de um ponto quase homoclínico q associado ao um ponto fixo hiperbólico p de f tal que $\overline{\Theta(f)} \cap V = \emptyset$, mas pelo teorema 3.0.17 e a observação acima existe um g arbitrário perto C^1 de f tal que g tem um ponto homoclínico q' perto de q. Podemos assumir que $q' \in V$ e é transversal(perturbando g se for necessário). Então $\overline{\Theta(g)} \cap V \neq \emptyset$, contradizendo a semi-continuidade superior de f. $\square$

O connecting lemma provado por Hayashi para variedades é um caso geral, enunciamos uma nova versão do connecting lemma onde está provado em [16] neste mesmo artigo apresenta vários casos do C^1 connecting lemma.

Lema 3.0.19. *Seja $Y \in \mathcal{X}^1(M)$ e $x \notin Crit(Y)$. Para qualquer C^1 vizinhança $\mathcal{U}$ de Y existem $\rho > 1$, $L > 0$ e $\epsilon_0 > 0$ tal que, para qualquer $0 < \epsilon \leq e_0$ e qualquer dois pontos $p, q \in M$ satisfazendo:*

(a) $p, q \notin B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x))$;

(b) $\mathcal{O}_Y^+(p) \cap B_{\epsilon/\rho}(x) \neq \emptyset$;

(c) $\mathcal{O}_Y^-(q) \cap B_{\epsilon/\rho}(x) \neq \emptyset$;

existe um $Z \in \mathcal{U}$ tal que $Z = Y$ fora $B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x))$ e $q \in \mathcal{O}_Z^+(p)$

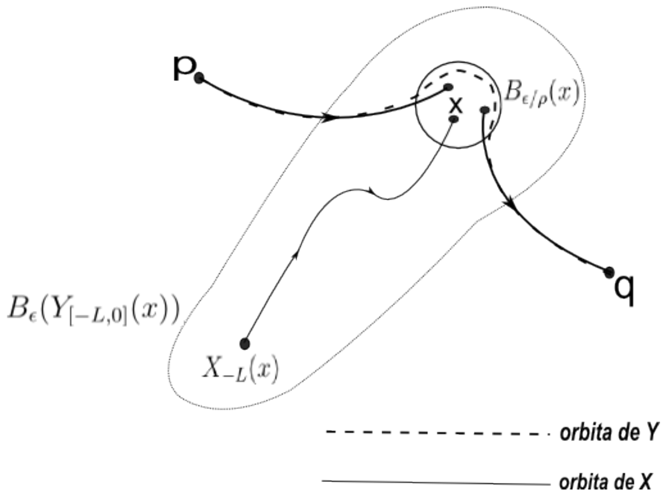

Figura 3.3: O connecting lemma para fluxos C^1

3.0.3 Classe homoclínica e conjunto neutral

Vamos introduzir algumas notações, recordemos que M é uma variedade fechada de dimensão n, $n \geq 3$. Denotemos por 2_c^M o espaço de todos os subconjuntos compactos de M com a topologia de Hausdoff. Recordemos que $KS^1(M) \subset \mathcal{X}^1(M)$ denota o conjunto de Kupka-Smale de campo de vetores C^1 sobre M.

Dado $X \in \mathcal{X}^1(M)$ e $p \in Per(X)$ denotemos por $\Pi_X(p)$ o período de p. Definimos $\Pi_X(p) = 0$ se p é uma singularidade de X.

Se $T > 0$ denotamos

$$Crit_T(X) = \{p \in Crit(X) : \Pi_X(p) < T\}$$

Se $p \in Crit(X)$ é hiperbólico, então existe uma continuação $p(Y)$ de p para Y perto o suficiente de X de modo que $p(X) = p$. Note que se $X \in KS^1(M)$ e $T > 0$, então

$$Crit_T(X) = \{p_1(X), ..., p_k(X)\}$$

é um conjunto finito. Além do mais,

$$Crit_T(Y) = \{p_1(Y), ..., p_k(Y)\}$$

para cada Y perto o suficiente de X.

Seja $\mathcal{Y}$ um espaço métrico. Uma aplicação valor no conjunto

$$\Phi : \mathcal{Y} \to 2_c^M$$

é semi-contínua inferior em $y_0 \in \mathcal{Y}$ se para cada conjunto aberto $U \subset M$ onde temos $\Phi(y_0) \cap U \neq \emptyset$ implica $\Phi(y) \cap U \neq \emptyset$ para cada y perto de y_0. Similarmente, nós dizemos que Φ é semi-contínua superior em $y_1 \in \mathcal{Y}$ se para cada conjunto compacto $K \subset M$ onde temos $\Phi(y_1) \cap K = \emptyset$ que implica $\Phi(y) \cap K = \emptyset$ para cada y perto de y_1. Dizemos que Φ é semi-contínua inferior se ele é semi-contínua inferior em cada $y_0 \in \mathcal{Y}$. Como em A.2.7 afirma que se $\Phi : \mathcal{X}^1(M) \to 2_c^M$ é uma aplicação semi-contínua inferior, então ela é semi-contínua superior em cada y em um subconjunto residual de $\mathcal{X}^1(M)$. Agora mostraremos nosso resultado principal que pode ser encontrado em [3].

Teorema 3.0.20 (Principal 1)**.** *Existe um subconjunto residual $\mathcal{R}$ de $\mathcal{X}^1(M)$ tal que para cada classe homoclínica de cada campo de vetor em $\mathcal{R}$ é neutral.*

A prova do teorema 3.0.20 segue imediatamente dos dois seguintes lemas.

Lema 3.0.21. *Existe um conjunto residual $\mathcal{R}$ de $\mathcal{X}^\infty(M)$ tal que, para cada $Y \in \mathcal{R}$ e $\sigma \in Crit(Y)$, $\overline{W_X^u(\sigma)}$ é estável no sentido de Lyapunov a X e $\overline{W_X^s(\sigma)}$ é estável no sentido de Lyapunov a $-X$.*

Lema 3.0.22. *Existe um conjunto residual $\mathcal{R}$ em $\mathcal{X}^\infty(M)$ tal que cada $X \in \mathcal{R}$ satisfaz*

$$H_X(p) = \overline{W_X^u(p)} \cap \overline{W_X^s(p)}$$

para todo $p \in Per(X)$.

Demonstração. A prova do lema 3.0.21 é uma consequência do seguinte lema em uma versão local.

Lema 3.0.23. *Se $X \in \mathcal{KS}^1(M)$ e $T > 0$, então existe uma vizinhança $\mathcal{U}_{X,T}$ de X e um subconjunto residual $\mathcal{R}_{X,T}$ de $\mathcal{U}_{X,T}$ tal que se $Y \in \mathcal{R}_{X,T}$ e $p \in Crit_T(Y)$, então $\overline{W^u_Y(p)}$ é estável no sentido de Lyapunov a Y e $\overline{W^s_Y(p)}$ é estável no sentido de Lyapunov a $-Y$.*

Demonstração. Recorde que Crit(Y)=$\{p_1(Y), ..., p_k(Y)\}$ para cada Y na vizinhança $\mathcal{U}_{X,T}$ de X, onde p_i(Y), $1 \leq i \leq k$ é periódico ou uma singularidade de Y. Para qualquer i $\in$ $\{1, ..., k\}$ definimos $\Phi_i : \mathcal{U}_{X,T} \to 2^M_c$ por

$$\Phi_i(Y) = \overline{W^u_Y(p_i(Y))}$$

Por dependência contínua da variedade instável temos que Φ_i é uma aplicação semi-contínua inferior. De de fato: Temos o aberto $U \ni p_i(Y)$ logo $\Phi_i(Y) \cap U \neq \emptyset$ para cada $Z \in \mathcal{U}_{X,T}$ temos p_i(Z) $\in$ U e $W^u_Y(p_i(Z)) \cap U \neq \emptyset$ pelo fato da variedade instável variar continuamente logo $\Phi_i(Z) \cap U \neq \emptyset$, e assim Φ_i é tambem semi-contínua superior para cada campo de vetor em algum residual $\mathcal{R}_i$ de $\mathcal{U}_{X,T}$. Seja o conjunto $\mathcal{R}_{X,T} = \mathcal{KS}^1(M) \cap (\cap_i R_i)$ então $\mathcal{R}_{X,T}$ é residual em $\mathcal{U}_{X,T}$. Vamos provar que $\mathcal{R}_{X,T}$ satisfaz a conclusão do lema. Seja $\sigma \in$ Crit(Y) para algum Y $\in \mathcal{R}_{X,T}$ então $\sigma = p_i(Y)$ para algum i, e assim $\Phi_i(Y) = \overline{W^u_Y(\sigma)}$. E agora suponha por contradição que $\overline{W^u_Y(\sigma)}$ não é estável no sentido de Lyapunov para Y, então afirmamos:

Afirmação 1. Existe um $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$ tal que $x \notin Crit(Y)$.

Prova da Afirmação 1. Como $\overline{W^u_Y(\sigma)}$ não é estável no sentido de Lyapunov então existe um aberto U contendo $\overline{W^u_Y(\sigma)}$ e duas sequências $x_n \to x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$, $t_n \geq 0$ tal que

$$Y_{t_n}\ (x_n) \notin U.$$

Vamos considerar $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$ - $W^u_Y(\sigma)$ pois se $x \in W^u_Y(\sigma)$ trivialmente $x \notin Crit(Y)$. Como $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)} - W^u_Y(\sigma)$ temos que $x \notin Crit(Y)$ ou $x \in Crit(Y)$ se $x \notin Crit(Y)$ não é necessária a prova mas se $x \in Crit(Y)$ temos, como Y é Kupka-Smale temos que $\mathcal{O}_Y(x)$ é hiperbólico. Temos que $\mathcal{O}_Y(x)$ não é poço [1] e nem fonte [2] e assim $W^u_Y(x) \backslash \mathcal{O}_Y(x) \neq \emptyset$ e $W^s_Y(x) \backslash \mathcal{O}_Y(x) \neq \emptyset$. Seja $V \subset U$ uma pequena vizinhança de x dado pelo teorema do Hartman-Grobman tal que $\partial(W^u_Y(x, V)) = D^u_Y(x)$ é um domínio fundamental para $W^u_Y(x)$ onde $W^u_Y(x, V)$ denota a componente conexa contendo $\mathcal{O}_Y(x)$. Note que $D^u_Y(x) \subset$

[1]Pois se $\mathcal{O}_Y(x)$ for poço teríamos $Y_{t_n}\ (x_n) \in$ U logo entramos em contradição com o que estamos assumindo $Y_{t_n}(x_n) \notin$ U logo $\mathcal{O}_Y$(x) não é poço

[2]Pois existe p $\in$ V vizinhança de x e p $\in W^u_Y(\sigma)$ tal que $Y_t(p)$ converge para x para $t \geq 0$ caso contrário se $\mathcal{O}_Y(x)$ for fonte então $\forall$ q $\in$ V vizinhança de $\mathcal{O}_Y(x)$ temos $Y_t(q) \not\to x$ com $t \geq 0$, mas temos $Y_t(p) \to x$ contradição logo $\mathcal{O}_Y(x)$ não é fonte

$W_Y^u(x)\backslash\mathcal{O}_Y(x)$. Como $x_n \to x$, assumimos que $x_n \in Int(V)$ para todo n, e como $Y_{t_n}(x_n) \notin U$, temos que $x_n \notin W_Y^s(\sigma)$. Assim há um $s_n \geq 0$ tal que $x'_n = Y_{s_n}(x_n) \in \partial(V)$ e $Y_s(x_n) \in Int(V)$ para $0 \leq s < s_n$ e desde que $Y_{t_n}(x_n) \notin U$ temos que $Y_{t_n}(x_n) \notin \overline{V}$ para todo n. Portanto concluímos que $s_n < t_n$ para todo n. Por outro lado, $x_n \to x$, passando uma subsequência se necessário, podemos assumir que $x'_n \to x'$ para algum $x' \in D_Y^u(x) \subset W_Y^u(x)\backslash\mathcal{O}_Y(x)$, x' está no domínio fundamental porque a sequência é formada pela dinâmica do fluxo, e toda fronteira ∂V converge para $W^u(x)$(veja a figura 1.3), logo a sequência convergirá para $W^u(x)$, e o conjunto que está na variedade instável e em ∂V ao mesmo tempo é o domínio fundamental, logo $x' \in D^u$. Agora fazemos outra afirmação:

Afirmação 2. $x' \in \overline{W_Y^u(\sigma)}$.

Prova da Afirmação 2. Vamos supor que $x' \notin \overline{W_Y^u(\sigma)}$, e agora como $x \in \overline{W_Y^u(\sigma)}$ e $x \in W_Y^s(x)$ temos que $\overline{W_Y^u(\sigma)} \cap W_Y^s(x) \neq \emptyset$ logo x é um ponto quase homoclínico portanto pelo connecting lema existe um $Z \in C^1$ perto de Y tal que $W_Z^u(\sigma(Z)) \cap W_Z^s(x(Z)) \neq \emptyset$, ou seja, existe uma sela conexão entre $\sigma(Z)$ e $x(Z)$. Temos que $M - \overline{W_Y^u(\sigma)}$ é aberto podemos tomar uma vizinhança K de x' compacta com $K \subset M - \overline{W_Y^u(\sigma)}$, logo $K \cap \overline{W_Y^u(\sigma)} = \emptyset$ e por semi-continuidade superior temos uma vizinhança $\mathcal{U}_{\mathrm{Y}}$ de Y tal que $\forall Z \in \mathcal{U}_{\mathrm{Y}}$ temos $K \cap \overline{W_Z^u(\sigma(Z))} = \emptyset$; podemos tomar uma seção Σ transversal a $W_Y^u(x)$ intersectando em x' e por continuidade temos que para todo Z perto de Y temos $W_Z^u(x(Z)) \cap \Sigma \neq \emptyset$ perto de x', ou seja, $W_Z^u(x(Z)) \cap K \neq \emptyset$. Agora podemos fazer essa interseção $W_Z^u(\sigma(Z)) \cap W_Z^s(x(Z))$ transversal para uma perturbação se necessário conforme o corolário 3.0.18 e assim pelo $\lambda - lema$ temos que $W_Z^u(\sigma(Z))$ se acumula em $W_Z^u(x(Z))$ e portanto temos $W_Z^u(\sigma(Z)) \cap K \neq \emptyset$. Isto contradiz a semi-continuidade superior de Φ_i em Y, logo concluímos $x' \in \overline{W_Y^u(\sigma)}$. Agora como $x' \in D_Y^u(x)$ temos que $x' \notin Crit(Y)$, e como $x'_n \to x'$ e $Y_{t_n - s_n}(x'_n) = Y_{t_n - s_n}(Y_{s_n}(x_n)) = Y_{t_n}(x_n) \notin U$ com $t_n - s_n > 0$, assim concluímos a afirmação 1 substituindo x_n por x'_n e t_n por $t_n - s_n$ e o que queremos x por x'.

$\square$

Agora é suficiente provar o lema 3.0.21 com a afirmação 1. Como $\overline{W_Y^u(\sigma)} \subseteq U$ e Φ_i é semi-contínua superior, existe uma C^1 vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{X,T}$ de Y tal que

$$\overline{W_Z^u(\sigma(Z))} \subseteq U, \tag{3.1}$$

para todo $Z \in \mathcal{U}$. De fato, temos que $M - U$ é compacto logo $\Phi_i(Y) \cap (M - U) = \emptyset$ então pela semi-continuidade superior $\Phi_i(Z) \cap (M - U) = \emptyset$, $\forall Z \in \mathcal{U}$.

Seja ρ, L, ϵ_0 como no lema 3.0.19 para $X = Y, x$, e $\mathcal{U}$ como acima. Como $x \notin Crit(Y)$, $Y_{[-L,0]}(x) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset$. Como $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$, $Y_{[-L,0]}(x) \subset \overline{W^u_Y(\sigma)}$ e assim $Y_{[-L,0]}(x) \subset U$. Então existe, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ tal que $B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x)) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset$ e $B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x)) \subseteq U$. Por ser espaço de hausdoff podemos escolher um conjunto aberto V contendo $\mathcal{O}_Y(\sigma)$, $V \subset \overline{V} \subset U$, tal que $V \cap B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x)) = \emptyset$. Para n grande, temos $x_n \in B_{\epsilon/\rho}(x)$ e vamos definir $q \leftarrow Y_{t_n}(x_n) \notin U$. Como $x_n \to x$ e $t_n > 0$ temos $\mathcal{O}^-_Y(q) \cap B_{\epsilon/\rho}(x) \neq \emptyset$. Como $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$, existe um $p \in (W^u_Y(\sigma) \setminus \{\sigma\}) \cap V$ tal que $\mathcal{O}^+_Y(p) \cap B_{\epsilon/\rho}(x) \neq \emptyset$ e $\mathcal{O}^-_Y(p) \subseteq V$. Por construção ϵ, p, q satisfaz (b) e (c) do lema 3.0.19. Como $V \cap B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x)) = \emptyset$ e $q \notin U$, temos que ϵ, p, q também satisfazem (a) do lema 3.0.19. Então pelo o lema 3.0.19, existe um $Z \in \mathcal{U}$ tal que $Z = Y$ fora $B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x))$ e $q \in \mathcal{O}^+_Z(p)$. Como $V \cap B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x)) = \emptyset$ e $\mathcal{O}^-_Y(p) \subset V$ temos

$$\mathcal{O}^-_Y(p) \cap B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x)) = \emptyset \tag{3.2}$$

Agora por 3.2,e com $V \cap B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x)) = \emptyset$ e $Z = Y$ fora $B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x))$ implica que $\sigma(Z) = \sigma$ e $p \in W^u_Z(\sigma)$. Como $q \notin U$ e $q \in W^u_Z(\sigma)$(recordemos que $p \in W^u_Z(\sigma)$ e $q \in \mathcal{O}^+_Z(p)$), temos uma contradição com 3.1. Isto finaliza a prova.

Prova do lema 3.0.22, vamos primeiro provar uma versão local do 3.0.22.

Lema 3.0.24. *Se $X \in \mathcal{KS}^1(M)$ e $T > 0$ então existe uma vizinhança $\mathcal{V}_{X,T} \ni X$ e um subconjunto residual $\mathcal{P}_{X,T}$ de $\mathcal{V}_{X,T}$ tal que se $Y \in \mathcal{P}_{X,T}$ e $p \in Per_T(Y)$ então $H_Y(p) = \overline{W^u_Y(p)} \cap \overline{W^s_Y(p)}$*

Demonstração. Existe uma vizinhança $\mathcal{V}_{X,T} \ni X$ tal que

$$Per_T(Y) = \{\sigma_1(Y), ..., \sigma_m(Y)\} \text{ para todo } Y \in \mathcal{V}_{X,T}.$$

Para cada $1 \leq i \leq m$, seja $\Psi_i : \mathcal{V}_{X,T} \ni Y \mapsto H_Y(\sigma_i(Y)) \in 2^M_c$. Note que Ψ_i, para todo i, é semi-contínua inferior por persistência de orbitas homoclínica transversal. [3] Portanto existem subconjuntos residuais $\mathcal{P}^i_{X,T}$ de $\mathcal{V}_{X,T}$ tal que Ψ_i é semi-contínua superior em $\mathcal{P}^i_{X,T}$. Seja $\mathcal{P}_{X,T} = \mathcal{KS}^1(M) \cap (\cap_i \mathcal{P}^i_{X,T}) \cap \mathcal{R}$, onde $\mathcal{R}$ é o conjunto residual dado pelo lema 3.0.21,então $\mathcal{P}_{X,T}$ é residual em $\mathcal{V}_{X,T}$.

Vamos provar que $\mathcal{P}_{X,T}$ satisfaz a conclusão do lema 3.0.24. Para isso, seja $\sigma \in Per_T(Y)$ para algum $Y \in \mathcal{P}_{X,T}$. Então $\sigma = \sigma_i(Y)$ para algum i, e assim $\Psi_i = H_Y(\sigma(Y))$

[3] De fato, seja o aberto $U \ni q$, onde $q \in H_Y(\sigma_i(Y))$ é ponto homoclínico transversal, e por persistência de pontos homoclínicos transversais temos que para todo $Z \in \mathcal{V}_{X,T}$ temos $q(Z) \in U$, logo $\Psi_i(Z) \cap U \neq \emptyset$

Supõe por contradição que $H_Y(\sigma) \neq \overline{W^u_Y(\sigma)} \cap \overline{W^s_Y(\sigma)}$. Então afirmamos:

Afirmação 3. Existe $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)} \cap \overline{W^s_Y(\sigma)} \backslash H_Y(\sigma)$ tal que $x \notin Crit(Y)$

Prova da Afirmação 3. temos que ou $x \in Crit(Y)$ ou $x \notin Crit(Y)$, supõe que $x \in Crit(Y)$ (pois se $x \notin Crit(Y)$ não é necessária à prova), como Y é Kupka-Smalle temos que $\mathcal{O}_Y(x)$ é hiperbólica. Claramente $\mathcal{O}_Y(x)$ não é poço e nem fonte, e assim $W^u_Y(x) \backslash \mathcal{O}_Y(x) \neq \emptyset$ e $W^s_Y(x) \backslash \mathcal{O}_Y(x) \neq \emptyset$. Note que $\overline{W^u_Y(\sigma)}$ é estável no sentido de Lyapunov desde que $Y \in \mathcal{R}$, como $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$ concluímos que $W^u_Y(x) \subseteq \overline{W^u_Y(\sigma)}$. Como $x \in \overline{W^s_Y(\sigma)}$, existe um $x' \in \overline{W^s_Y(\sigma)} \cap (W^u_Y(x) \backslash \mathcal{O}(x))$ arbitrariamente perto de x (para isso usamos o teorema Hartman-Grobman como na prova do lema 3.0.21). Claro que $x' \notin Crit(Y)$, e se $x' \in H_Y(\sigma)$, então obteríamos $x \in H_Y(\sigma)$ desde que $\alpha_Y(x') = \mathcal{O}_Y(x)$, contradizendo $x \notin H_Y(\sigma)$. Portanto $x' \in \overline{W^u_Y(\sigma)} \cap \overline{W^s_Y(\sigma)} \backslash H_Y(\sigma)$ e $x' \notin Crit(Y)$. Então concluímos a afirmação 3 substituindo x por x'.

Agora vamos provar o lema 3.0.24 com a afirmação 3. Como $x \notin H_Y(\sigma)$, existe uma vizinhança compacta K de x tal que $K \cap H_Y(\sigma) = \emptyset$ [4]. Como Ψ_i é semi-contínua superior em Y, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de Y tal que

$$K \cap H_Z(\sigma(Z)) = \emptyset, \tag{3.3}$$

para todo $Z \in \mathcal{U}$.

Seja ρ, L, ϵ_0 constante como no lema 3.0.19 para $Y \in \mathcal{X}^1(M)$, x e $\mathcal{U}$ como acima. Como $x \notin Crit(Y)$, $Y_{[-L,0]}(x) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset$, então existe, $0 < \epsilon < \epsilon_0$ tal que $B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x)) \cap \mathcal{O}_Y(\sigma) = \emptyset$ e $B_\epsilon(x) \subseteq K$.

Escolha um conjunto aberto V contendo $\mathcal{O}(\sigma)$ tal que $V \cap B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x)) = \emptyset$. Como $x \in \overline{W^u_Y(\sigma)}$, podemos escolher $p \in (W^u_Y(\sigma) \backslash \{\sigma\}) \cap V$ tal que

$$\mathcal{O}^+_Y(p) \cap B_{\epsilon/\rho}(x) \neq \emptyset.$$

Similarmente, como $x \in \overline{W^s_Y(\sigma)}$, podemos escolher $q \in (W^s_Y(\sigma) \backslash \{\sigma\}) \cap V$ tal que

$$\mathcal{O}^-_Y(q) \cap B_{\epsilon/\rho}(x) \neq \emptyset.$$

Podemos assumir que $\mathcal{O}^-_Y(p) \subset V$ e $\mathcal{O}^+_Y(q) \subset V$. Portanto

$$(\mathcal{O}^-_Y(p) \cup \mathcal{O}^+_Y(q)) \cap B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x)) = \emptyset. \tag{3.4}$$

[4]pois $M - H_Y(\sigma)$ é aberto, logo podemos tomar uma vizinhança K *de* x com $K \subset M - H_Y(\sigma)$ e como M é localmente compacto podemos fazer K compacto

Observe que $q \notin (\mathcal{O}_Y^+(p))$, caso contrário, p seria orbita homoclínica de Y passando através de K contradizendo 3.3.

Por construção ϵ, p, q satisfazem (b) e (c) do lema 3.0.19. Como $p, q \in V$ e $V \cap B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x)) = \emptyset$ temos que ϵ, p, q tambem satisfaz (a) do lema 3.0.19. Então por o lema 3.0.19 existe é um $Z \in \mathcal{U}$ tal que $Z = Y$ fora de $B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x))$ e $q \in \mathcal{O}_Z^+(p)$. Claramente $\sigma(Z) = Z$ e por 3.4 temos $p \in W_Z^u(\sigma)$ e $q \in W_Z^s(\sigma)$ desde $Z = Y$ fora $B_\epsilon(Y_{[-L,0]}(x))$. Por isso $\mathcal{O} = \mathcal{O}_Z(p) = \mathcal{O}_Z(q)$ é uma orbita homoclínica de σ. Como $q \notin \mathcal{O}_Y^+(p)$, temos que $\mathcal{O} \cap B_\epsilon(x) \neq \emptyset$. Perturbando Z podemos assumir que $\mathcal{O}$ é transversal, ou seja,$\mathcal{O} \subseteq H_Z(\sigma)$. Como $\mathcal{O} \cap B_\epsilon(x) \neq \emptyset$ e $B_\epsilon(x) \subset K$ obteríamos $K \cap H_Z(\sigma(Z)) \neq \emptyset$ contradizendo 3.3. Isto finaliza a prova do lema. □

Agora continuamos a prova do lema 3.0.22. Fixe $T > 0$, para qualquer $X \in \mathcal{KS}^1(M)$ considere $\mathcal{V}_{X,T}$ e $\mathcal{P}_{X,T}$ como no lema 3.0.24. Escolha uma sequência $X^n \in \mathcal{KS}^1(M)$ tal que $\{X^n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathcal{X}^1(M)$. Denote $\mathcal{V}_{n,T} = \mathcal{V}_{X^n,T}$ e $\mathcal{P}_{n,T} = \mathcal{P}_{X^n,T}$.

Defina

$$\mathcal{O}^T = \bigcup_n \mathcal{V}_{n,T} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}^T = \bigcup_n \mathcal{P}_{n,T}.$$

Claramente $\mathcal{O}^T$ é aberto e denso em $\mathcal{X}^1(M)$. Afirmamos que $\mathcal{P}^T$ é residual em $\mathcal{O}^T$. De fato, para qualquer n existe uma sequência $D_{k,n,T}$, com $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\mathcal{P}_{n,T} = \bigcap_k D_{k,n,T}$$

e $D_{k,n,T}$ é aberto e denso em $\mathcal{V}_{n,T}$ para qualquer K. Como

$$\mathcal{P}^T = \bigcup_n \mathcal{P}_{n,T} = \bigcup_n \left(\bigcap_k D_{k,n,T} \right) {}^5 = \bigcap_k \left(\bigcup_n D_{k,n,T} \right)$$

[5]Pois seja $x \in \bigcup_n \left(\bigcap_k D_{k,n,T} \right)$ então para algum j, temos $x \in \bigcap_k D_{k,j,T}$. Como $D_{k,j,T} \subset \bigcup_n (D_{k,n,T})$, então $\bigcap_k D_{k,j,T} \subset \bigcap_k \left(\bigcup_n D_{k,n,T} \right)$. Logo $x \in \bigcap_k \left(\bigcup_n D_{k,n,T} \right)$.

Agora seja $x \in \bigcap_k \left(\bigcup_n D_{k,n,T} \right)$ significa que $x \in \bigcup_n D_{k,n,T}$ $\forall k$, temos que $x \in \bigcap_k D_{k,j,T}$ para algum $j = j(k)$. Como $\bigcap_k D_{k,j,T} \subset \bigcup_k D_{k,j,T}$, segue que $\bigcup_j \left(\bigcap_k D_{k,j,T} \right) \subset \bigcup_j \left(\bigcup_k D_{k,j,T} \right)$, em particular $\bigcap_k D_{k,j,T} \subset \bigcup_j \left(\bigcap_k D_{k,j,T} \right)$ segue que $x \in \bigcup_n \left(\bigcap_k D_{k,n,T} \right)$.

e $\bigcup_n D_{k,n,T}$ é aberto e denso em $\bigcup_n \mathcal{V}_{n,T} = \mathcal{O}^T$, concluímos que $\mathcal{P}^T$ é residual em $\mathcal{O}^T$. Isto prova a afirmação.

Em particular, $\mathcal{P}^T$ é residual em $\mathcal{X}^1(M)$ para cada T. Seja $\mathcal{P} = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^N$. Segue que $\mathcal{P}$ é residual em $\mathcal{X}^1(M)$, escolha $X \in \mathcal{P}$, $p \in Per(X)$ e $N_0 \in \mathbb{N}$ maior do que $\Pi_X(p) + 1$. Por definição $X \in \mathcal{P}^{N_0}$, e assim $X \in \mathcal{P}_{X^n,N_0}$ para algum n. Como $N_0 > \Pi_X(p)$ temos $p \in Per_{N_0}(X)$. Então $H_Y(p) = \overline{W_Y^u(p)} \cap \overline{W_Y^s(p)}$ pelo lema 3.0.24 aplicado para X^n e $T = N_0$. Isto completa a prova do lema.

$\square$

Um exemplo que mostra duas classes homoclínicas diferentes com interseção diferente do vazio ($H_f(p) \neq H_f(q)$ e $H_f(p) \cap H_f(q) \neq \emptyset$ pode ser verificado em [4].

Apêndice 1

APLICAÇÃO SEMI-CONTÍNUA

A.1 O Espaço 2^M

Conhecido como a topologia exponencial o espaço 2^M [7], vamos entender algumas propriedades depois estudaremos o que é aplicação semi-contínua.

Definição A.1.1. Seja M um espaço topológico, denote por 2^M o conjunto de todos os subconjuntos fechados de M:

$$\left(F \subset 2^M\right) \equiv \left(\overline{F} = F\right). \tag{A.1}$$

Agora seja $A \subset M$. Denotamos por 2^A o conjunto de todos os $F = \overline{F} \subset A$. Assim temos que para $F \subset 2^M$:

$$\left(F \subset 2^A\right) \equiv \left(F \subset A\right), ou\ seja, 2^A = E_F\left(F \subset A\right). \tag{A.2}$$

Consequentemente para $F \subset 2^M$:

$$E_F\left(F \cap A \neq \emptyset\right) = 2^M - 2^{M-A}. \tag{A.3}$$

A topologia em 2^M(chamada de topologia exponêncial) é a mais grosseira topologia, em que os conjuntos 2^A são abertos em 2^M quando A é aberto e 2^A são fechados quando A é fechado. Em outras palavras nós assumimos que a familia de todos os conjuntos 2^G, e todos os conjuntos $2^M - 2^{M-A}$ é aberto em 2^M, onde G é aberto em M.

Propriedades fundamentais. As seguintes propriedades acontece em um $\mathcal{T}_1$-espaço arbitrário em M.

$$2^{A_0 \cap A_1} = 2^{A_0} \cap 2^{A_1} \text{ e geralmente } \quad 2^{\bigcap_t A_t} = \bigcap_t 2^{A_t} \qquad (1)$$

$$(A \subset B) \equiv \left(2^A \subset 2^B\right), \text{ por isso, } (A = B) \equiv \left(2^A = 2^B\right) \qquad (2)$$

$$\overline{2^A} = 2^{\overline{A}} \qquad (3)$$

$$Int\left(2^A\right) = 2^{IntA} \qquad (4)$$

A.2 Aplicação Semi-contínua

Definição A.2.1. Seja M e N dois espaços topológico e f uma função valor no conjunto, atribuindo para cada $y \in M$ um conjunto $f(y) \subset 2^N$

Dizemos então que f é chamada semi-contínua superior, se para cada aberto $A \subset M$(resp. fechado) o conjunto:

$$f^{-1}(2^A) = E_y\left(f(y) \subset 2^N\right) \tag{A.4}$$

é aberto(resp. fechado) em M.

Equivalentemente f é s.c.s(resp. s.c.i) se para cada conjunto fechado(resp. aberto)$A \subset M$ o conjunto:

$$M - f^{-1}(2^{M-A}) = E_y\left(f(y) \cap A \neq \emptyset\right)$$

é fechado(resp. aberto) em N.

Mais precisamente f é s.c.s em $y_0 \in M$ se:

$$y_0 \in f^{-1}(2^A) \Rightarrow y_0 \in int(f^{-1}(2^A)) \text{ onde } A \text{ é aberto.}$$

E f é s.c.i em y_0 se:

$$y_0 \in \overline{f^{-1}(2^K)} \Rightarrow y_0 \in f^{-1}(2^K) \text{ onde } K \text{ é fechado.}$$

Enunciaremos agora alguns teorema:

Teorema A.2.2. *f é s.c.s (resp. s.c.i) se e somente se, f é s.c.s (resp. s.c.i) em cada $y \in M$*

Teorema A.2.3. *f é contínua em y_0 se e somente se, f é tanto s.c.s e s.c.i. em y_0 .*

Consequentemene f é contínua se e somente se, é tanto s.c.s e s.c.i .

Teorema A.2.4. *Seja $D(f)$ o conjunto de pontos de descontinuidade de f. Então se f é s.c.s temos:*

$$D(f) = \bigcup_K \left\{\overline{f^{-1}(2^K)} - f^{-1}(2^K\right\} \textit{ onde } K \textit{ é fechado}$$

Se f é s.c.i então:

$$D(f) = \bigcup_G \left\{f^{-1}(2^G) - int(f^{-1}(2^G))\right\} \textit{ onde } G \textit{ é aberto}$$

Teorema A.2.5. *Se M é compacto também 2^M é compacto*

Agora vamos enunciar um teorema em que o maior interesse nosso é no seu corolário.

Teorema A.2.6. *Se M é métrico compacto e N métrico cada aplicação semi-contínua $f : N \to 2^M$ é(B-mensurável) de classe 1.*

O corolário seguinte usaremos na prova do teorema principal.

Corolário A.2.7. *Seja N métrico e M métrico compacto. Se $f : N \to 2^M$ é semi-contínua, então o conjunto de pontos de descontínuidade de f é de primeira categoria.*

Consequentemente se N é completo, então o conjunto de pontos contínuos de f, ou seja, de pontos y tal que

$$y_n \to y \text{ então } f(y_n) \to f(y)$$

é denso em N.

REFERÊNCIAS

[1] Bhatia, N., and Szego., G. *Stability Theory of Dynamical Systems.*

[2] Bonatti, C., Díaz, L. J., and Pujals, E. R. A C^1-generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources. *Ann. of Math. (2) 158*, 2 (2003), 355–418.

[3] Carballo, C. M., Morales, C. A., and Pacifico, M. J. Homoclinic classes for generic C^1 vector fields. *Ergodic Theory Dynam. Systems 23*, 2 (2003), 403–415.

[4] Díaz, L. J., and Santoro, B. Collision, explosion and collapse of homoclinic classes. *Nonlinearity 17*, 3 (2004), 1001–1032.

[5] Hayashi, S. Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω-stability conjectures for flows. *Ann. of Math. (2) 145*, 1 (1997), 81–137.

[6] Kupka, I. Contribution à la théorie des champs génériques. *Contributions to Differential Equations 2* (1963), 457–484.

[7] Kuratovskiĭ, K. *Topologiya. Tom 2.* Translated from the English by M. Ja. Antonovskiĭ. Izdat. "Mir", Moscow, 1969.

[8] Mañé, R. On the creation of homoclinic points. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 66 (1988), 139–159.

[9] Mañé, R. A proof of the C^1 stability conjecture. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 66 (1988), 161–210.

[10] Newhouse, S. E. Lectures on dynamical systems. In *Dynamical systems (Bressanone, 1978).* Liguori, Naples, 1980, pp. 209–312.

[11] Palis, J., and Takens, F. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, vol. 35 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993. Fractal dimensions and infinitely many attractors.

[12] Pugh, C. C. The closing lemma. *Amer. J. Math. 89* (1967), 956–1009.

[13] Robinson, C. Closing stable and unstable manifolds on the two sphere. *Proc. Amer. Math. Soc. 41* (1973), 299–303.

[14] Robinson, C. *Dynamical systems*, second ed. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1999. Stability, symbolic dynamics, and chaos.

[15] Smale, S. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc. 73* (1967), 747–817.

[16] Wen, L., and Xia, Z. C^1 connecting lemmas. *Trans. Amer. Math. Soc. 352*, 11 (2000), 5213–5230.