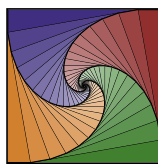


áfico da função Δ com $m_1 = \zeta = 0.1$ no sistema p-fuzzy da figura 4.104.1158 gráfico da
função Δ com $m_1 = 0.1$ e $\zeta = 0.4$ no sistema p-fuzzy da figura 4.104.1258



PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Valdir Mendes da Silva

**Teorema da Função Implícita, uma aplicação na lógica
fuzzy**

São Luís - MA

2014

Valdir Mendes da Silva

**Teorema da Função Implícita, uma aplicação na lógica
fuzzy**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor João de Deus Mendes da Silva**.

São Luís - MA

2014

Valdir Mendes da Silva

Teorema da Função Implícita, uma aplicação na lógica fuzzy

Dissertação apresentada à Banca Examinadora
do Programa de Pós-Graduação em Matemática
da UFMA como requisito parcial para obtenção
do **Professor Doutor João de Deus Mendes da
Silva**.

Dissertação aprovada em 10 de Fevereiro de 2014, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(ORIENTADOR) **Dr. João de Deus Mendes da Silva** (UFMA)

Dr. xxxxxxxxxxxxxxxx (Unicamp)

Dra. xxxxxxxxxxxxxxxx (UFMA)

REFERÊNCIAS

- [1] Guidorizzi, Hamilton L., *Um curso de Cálculo*. Editora LTC.
- [2] E.L.Lima, *Curso de análise, vol.1*. Projeto Euclides, IMPA.
- [3] E.L.Lima, *Curso de análise, vol.2*. Projeto Euclides, IMPA.
- [4] Aldo Trajano Lourêdo, Alexandro M. Oliveira, Osmundo Alves, *Cálculo Avançado*. Campina Grande: Eduepb, 2010.
- [5] Klir, G. and Yuan, B., *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Applications*. Prentice Hall, 1995.
- [6] Zadeh, L. A., *Fuzzy sets. Information and Control* 8 (1965), 338-353..

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família. Em especial a minha mãe, Djacir R. da Slva. A minha esposa Josicleide e ao meu filho Luís Otávio.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva, pela paciência, pelas conversas, por ajudar-me no conhecimento obtido sempre me indicando o caminho a ser seguido nos momentos de maior dificuldade e por depositar sua confiança em mim diante desse trabalho.

Aos meus amigos e colegas de mestrado, Paulo Queiroz, Ronaldo Smith, Geilson Reis, Leandro, Popó, Diego, Jorge, Leonardo Weingarten, Raimundo Launé, pelos momentos de estudos e lazer, em especial a Launé pelas longas horas de estudo juntos e grande amizade construída e Leonardo e Jailson Calado pelos conselhos, convivência, dúvidas tiradas e amizade ao longo desses anos.

A todos os professores do PPGMAT da UFMA que contribuíram para meu engrandecimento acadêmico.

À banca examinadora.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos sistemas p -fuzzy unidimensional e seus pontos de estabilidade, quando assim existirem. Esses sistemas são usados em modelagem matemática, mais precisamente em biomatemática. Estudamos a existência e unicidade dos pontos de estabilidade dos sistemas p -fuzzy, onde será demonstrado o teorema bem como as condições que um sistema deve respeitar afim de que se tenha pontos de equilíbrio.

Palavras-chave: Teorema da função implícita, Lógica fuzzy, Conjuntos fuzzy, Sistemas p -fuzzy.

ABSTRACT

In this work, we analyse the exact controllability on boundary of a Timoshenko system. This system is the mathematical model of transverse vibrations, rotatory inertia and shearing deformation of transversal section of beams. We study the existence and uniqueness of solutions to problem. We use the Hilbert uniqueness Method, HUM, idealized by Jacques-Louis Lions for obtain the exact control on boundary for the system with constant coefficients, as well that with variable coefficients.

Keywords: EDP, Controllability, HUM , Observability inequality.

SUMÁRIO

	Page
Referências	5
Capítulo 1: Introdução	1
1.1 Lógica Fuzzy	2
1.2 Um Breve Histórico	4
Capítulo 2: Conceitos de Análise	7
2.1 Noções de Topologia em $\mathbb{R}$	7
2.1.1 Funções Contínuas e Propriedades	10
2.1.2 Derivadas e Propriedades	12
2.2 Noções de Topologia em $\mathbb{R}^n$	16
2.2.1 O espaço euclidiano n -dimensional	16
2.2.2 Bolas e Conjuntos	18
2.2.3 Sequências em $\mathbb{R}^n$	19
2.2.4 Aplicações Contínuas	23
2.2.5 Funções Diferenciáveis e Propriedades	25
2.2.6 Funções de Classe C^1 e Propriedades	25
2.3 Teorema da Função Implícita	26
Capítulo 3: Conceitos básicos em lógica fuzzy	29
3.1 Conjuntos fuzzy	29
3.1.1 Operações com conjuntos fuzzy	30
3.1.2 Número fuzzy	31
3.2 Lógica Fuzzy	33
3.2.1 Variáveis Linguística	34
3.2.2 Proposição fuzzy e operadores $max - \wedge$ e $min - \vee$	35
3.2.3 Sistemas baseados em regras fuzzy	36
3.2.4 Sitemas p-fuzzy	38
3.2.5 Sistemas p-fuzzy e Equações diferenciais	38
Capítulo 4: Sistema p-fuzzy Unidimensional	42
4.1 Definições Iniciais	42
4.1.1 Defuzificação da saída do sistema fuzzy	44
4.2 Existência de ponto de equilíbrio	48

4.2.1	Ponto de equilíbrio - saída simétrica	49
4.3	Unicidade do ponto de equilíbrio	50
4.4	Considerações sobre a unicidade do teorema	56
4.4.1	Consequências do teorema de unicidade	58

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Descrever os fenômenos naturais para fazer previsões e tomar decisões ainda é um dos grandes desafios da humanidade. Nesse sentido, a matemática tem sido uma grade aliada, vários fenômenos podem ser descritos através de equações diferenciais ordinárias ou parciais, entretanto muitos desses fenômenos apresentam variáveis linguísticas, isto é, informações vagas e imprecisas. Existe uma ampla classe de sistemas que, ao menos aparentemente, não podem ser governados por leis do tipo deterministas (ou não se conhecem estas leis) como acontece, por exemplo, com o comportamento humano, ou com o problema de modelar o comportamento das micropartículas (Mecânica quântica), cujas leis não são totalmente conhecidas, ou ainda mais, o que acontece com a dinâmica de populações, onde os parâmetros que caracterizam um indivíduo ou um grupo de indivíduos nem sempre podem ser avaliados ou medidos no sentido tradicional, são "incertezas" que somente podemos conjecturar intuitivamente.

"Assim, existe uma dificuldade ao descrever sua evolução no tempo a partir de um estado inicial dado. Neste contexto, os métodos e técnicas matemáticas clássicas (tais como: EDO's, EDP's, Equações de diferenças, a Teoria de probabilidades) não funcionam, devido a natureza intrinsecamente "fuzzy" (difuso, nebuloso) do problema, ou então se impõem condições e/ou restrições tão drásticas que, na maioria dos casos, termina desvirtuando a natureza da situação em estudo."¹

Geralmente, as doenças são descritas por meio de termos linguísticos que são intrinsecamente vagos, e que muitas vezes constituem variáveis qualitativas em medicina. O tratamento dessas variáveis utilizando métodos quantitativos, apresenta dificuldades. Foi a partir de situações como esta, envolvendo incertezas não tratáveis por meio da estatística, que Lofti Asker Zadeh, em 1965, introduziu a teoria dos conjuntos fuzzy.

¹Ferreira, F.T., *Sistemas p-Fuzzy Modificados para Dinâmicas Populacionais: modelagens e simulações*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, 2012.

1.1 Lógica Fuzzy

A teoria fuzzy foi apresentada em 1964 por Lotfi A. Zadeh, professor no departamento de engenharia elétrica e ciências da computação da Universidade da Califórnia, em Berkeley, quando ele trabalhava com problemas de classificações de conjuntos que não possuíam fronteiras bem definidas (ou seja, a transição entre os conjuntos é suficiente para resolver grande parte dos problemas abordados pela física ou pela matemática). Dado conjunto $A \subset U$ e um elemento x de U , $x \in A$ ou $x \notin A$. Ser ou não ser, portanto. Essa é a lógica clássica. É importante, porém, ressaltar que no decurso da ciência outros pesquisadores demonstraram seu desconforto com relação a lógica binária, relatando sua fragilidade para lidar com situações mais realistas².

Por exemplo, afirmamos sem receio que o número 5 pertence ao conjunto dos números naturais e que o número -5 não pertence a este mesmo conjunto. Este é um caso sobre o qual não temos dúvidas, sendo a lógica booleana devidamente aplicada. Entretanto, se nos referirmos ao conjunto dos números aproximadamente iguais a 5, certamente teremos dificuldade em verificar se 4,5 pertence ou não. Neste caso a resposta não é única e objetiva, pertencer ou não poderá depender do tipo de problema que estamos analisando. Pensemos, por exemplo, que 4,5 foi a média de provas de um aluno extremamente aplicado que está passando por sérios problemas de saúde e que, em razão disso, apresentou dificuldades para realizar as últimas provas. O professor nesta situação poderá ponderar sobre a capacidade do aluno, sua dedicação durante o curso e sua realidade optando por aprová-lo, ainda que a média necessária seja 5. Neste caso o número 4,5 pode ser visto como pertencendo ao conjunto dos números aproximadamente iguais a 5³. De fato, mesmo a aplicação numérica de notas pode não ser um método totalmente objetivo de avaliação (Law 1996).

Existem inúmeras situações em que a relação de pertinência não é bem definida e, nestes casos, não sabemos dizer se o elemento pertence ou não a um dado conjunto. A intenção de Zadeh foi flexibilizar a pertinência de elementos aos conjuntos criando a idéia de grau de pertinência. Dessa forma, um elemento poderia pertencer parcial-

²A lógica de três valores proposta por Lukasiewicz, onde 1 é **verdadeiro**, 0 é **falso** e $1/2$ é **impossível**, foi um trabalho formal que já sinalizava o desenvolvimento de teorias neste sentido (Reznik 1997).

³A utilização da palavra pertencer neste caso consiste em um abuso de linguagem, pois o elemento não pertence de fato ao conjunto citado. O mais correto seria dizer que o número 4,5 é compatível, com um certo grau, com a afirmação é aproximadamente igual a 5. Todavia, por simplicidade, utilizarei a palavra pertencer para designar esta compatibilidade

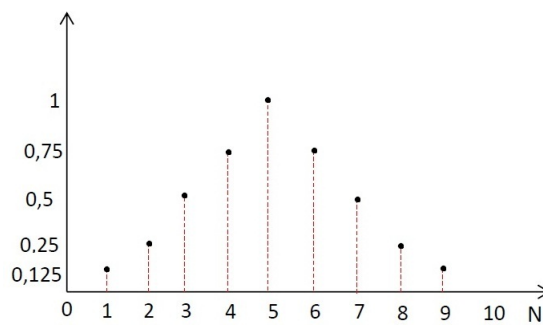


Figura 1.1: Função de pertinência dos números próximos de 5

mente a um dado conjunto. Esta sua idéia foi publicada em 1965 (Zadeh 1965), sendo este artigo considerado o marco do nascimento da teoria de conjuntos fuzzy. O termo fuzzy significa nebuloso, difuso, e se refere ao fato de, em muitos casos, não se conhece completamente os sistemas que está sendo estudado. Se desejarmos construir, por exemplo, o conjunto dos números aproximadamente iguais a 5, citado anteriormente, como iremos proceder? Será que os números 2 e 10 pertenceriam a este conjunto? Claramente, esta resposta dependerá do contexto. O que Zadeh nos propõe é considerarmos uma função de pertinência que nos forneça o grau de pertinência dos diversos números ao conjunto considerado. Sendo assim, chamando de $\mathcal{F}$ o conjunto dos números aproximadamente iguais a 5, no universo dos números naturais $\mathbb{N}$, podemos propor por exemplo, uma função de pertinência onde o $10 \in \mathcal{F}$ com grau 0 (o que corresponde a não pertinência clássica), o $2 \in \mathcal{F}$ e o $8 \in \mathcal{F}$ com grau de pertinência 0,25, o $3 \in \mathcal{F}$ e o $7 \in \mathcal{F}$ com grau 0,5, os números $4 \in \mathcal{F}$ e $6 \in \mathcal{F}$ com o grau 0,75 e o $5 \in \mathcal{F}$ com grau de pertinência 1 (correspondendo a pertinência total). Esta extensão da função característica da lógica clássica para o intervalo $[0, 1]$ originou os conjuntos fuzzy e possibilitou, entre outras coisas, a utilização de variáveis linguísticas, permitindo o avanço do conhecimento humano no desenvolvimento de muitos sistemas. A figura 1.1 apresenta a função de pertinência do conjunto fuzzy que corresponde aos números aproximadamente iguais a 5 proposta. Note que, neste caso a função de pertinência é discreta, mas ela também pode ser contínua, como por exemplo a função que classifica um indivíduo quanto à sua estatura que veremos no início do capítulo 3.

Dadas as características da teoria da lógica fuzzy, é esperado que suas contribuições para o desenvolvimento da física teórica e seus princípios fundamentais sejam muito

tímidas. No entanto, em áreas onde é necessário lidar com a imprecisão, como a engenharia (Karwowski & Mital 1986, Yager & Filev 1994, Kosko 1997, Shaw & Simões 1999, Wen & Lee 1999) e a química (Schultz 1999, Fonseca & Knapp 2000, Russo et al 1998), e com a subjetividade e o desconhecimento, como a biologia (Luo et al 1995, Sadegh-Zadeh 1999), a medicina, a epidemiologia (Massad et al 1997, Struchiner et al 1997, Ohayon 1999, Ortega et al 2000, Ortega et al 2001, Massad et al 2001), a ecologia (Giering III & Kandel 1983, Salski 1992, Bassanezi & Barros 1995, Bai-Lian Li 1996, Barros et al 2000), a economia (OH et al 1990, Tarrazo & Gutierrez 2000, Campbell & Kelly 1996, Nurmi et al 1996), a psicologia (Saitta & Torasso 1981, Averkin & Tarasov 1987, Theoto et al 1987, Anwar & Igor 1997), as ciências sociais (Smithson 1988), a educação (Law 1996) e a saúde pública (Massad et al 1999), esta teoria têm demonstrado grande capacidade de aplicação, ajudando estes profissionais a produzir modelos mais de acordo com a suas necessidades e realidades. A idéia de grau de pertinência da lógica fuzzy nos possibilita agrupar os elementos de maneira diferente da aplicada na lógica clássica, o que nos permite re-interpretar antigos conceitos, elaborados segundo esta lógica. Os conceitos de saúde e doença, por exemplo, são vistos pela comunidade médica como opostos, ou seja, a doença é a ausência de saúde e vice-versa. Dessa forma, a existência de saúde e doençaa em um mesmo indivíduo consiste em uma situação contraditória. No entanto, na abordagem fuzzy os conceitos de doença e saúde são antes complementares do que contraditórios. Sendo assim, um novo conceito de doença e saúde pode ser estabelecido, o que pode provocar transformações em outras construções conceituais da medicina como, por exemplo, a nosologia (Sadegh-Zadeh 1994, Sadegh-Zadeh 1998, Sadegh-Zadeh 1999).

1.2 Um Breve Histórico

A teoria da lógica fuzzy enfrentou forte resistência por parte da comunidade científica no seu início, principalmente por parte dos estatísticos norte americanos. Entretanto, a despeito de todo preconceito muitos pesquisadores vislumbraram as possibilidades que esta teoria oferecia e trabalhos surgiram em todo o mundo, particularmente no Japão onde a lógica fuzzy encontrou um solo fértil para desenvolver-se rapidamente.

Já na primeira década (1965-1975) os pesquisadores se esforçaram por estender os fundamentos da lógica fuzzy, introduzindo conceitos novos e desenvolvendo outras

abordagens da teoria, bem como as relações fuzzy, as variáveis linguísticas, os processos de decisão fuzzy, a medida fuzzy, sistemas topológicos, álgebra com números fuzzy, fuzzy clustering, etc.. Em 1972 formou-se no Japão o primeiro grupo de pesquisas em sistemas fuzzy, coordenado pelo professor Toshiro Terano, e em 1974 iniciou-se um importante capítulo no desenvolvimento desta teoria com a apresentação do primeiro controlador fuzzy criado por E. Mamdani, no Reino Unido. A partir de então vários foram os pesquisadores que buscaram aplicar a teoria de lógica fuzzy para controlar sistemas em engenharia. Em 1976 temos a primeira aplicação industrial da lógica fuzzy, desenvolvido pelo Circle Cement e SIRA, na Dinamarca, que consistiu de um controlador fuzzy que incorporava o conhecimento e a experiência dos operários para controlar os fornos das fábricas (Reznik 1997). Em 1977, Didier Dubois aplicou os conjuntos fuzzy em um estudo sobre condições de tráfego e neste mesmo ano surgiu o primeiro sistema especialista fuzzy (Yen & Langari 1999).

Em 1985 foi desenvolvido o primeiro chip fuzzy por Masaki Togai e Hiroyuki Watanabe, no laboratório Bell (EUA). Em 1987 foi inaugurado com sucesso o primeiro trem controlado com lógica fuzzy, no sistema do metrô de Sendai, no Japão. Foi também neste ano que a Yamaha desenvolveu seu helicóptero não-tripulado, Yamaha-50, totalmente controlado por um controlador fuzzy, dando origem a era do desenvolvimento tecnológico proporcionado por esta teoria. Em 1988 começou a operar no Yamaichi Fuzzy Fund o primeiro sistema de comércio financeiro fuzzy. Mas foi em 1990 que esta teoria atingiu a popularidade com o lançamento no mercado da primeira máquina de lavar roupas fuzzy, da Matsushita Electric Industrial Co., marcando o início do desenvolvimento de produtos de consumo (Reznik 1997). Hoje é possível encontrar, principalmente no Japão, toda a sorte de eletrodoméstico cujo sistema é baseado em controles fuzzy (televisão, câmera fotográfica, panela para cozimento de arroz, vídeos, etc.) e existem atualmente várias empresas (Siemens, Daimler-Benz, Klockner-Moeller, SGS-Thomson, General Motors, Motorola, Hewlett-Packard, etc.) que possuem laboratórios de pesquisa em lógica fuzzy para desenvolvimento de seus produtos.

O objetivo desse breve histórico é ilustrar quão rápido se deu o desenvolvimento da teoria fuzzy e quão abrangente tem sido suas aplicações. Esta teoria tem mostrado possuir um enorme potencial de desenvolvimento na área de Soft Computing. Em verdade, podemos notar um interesse por esta teoria cada vez mais crescente por pro-

fissionais e pesquisadores das mais diversas áreas dada a sua capacidade de explorar variáveis linguísticas, da possibilidade de desenvolver raciocínios mais próximos do humano, da sua diversidade de operações e da sua potencialidade em aplicações.

No brasil, a lógica fuzzy xxx

Capítulo 2

CONCEITOS DE ANÁLISE

2.1 Noções de Topologia em $\mathbb{R}$

Na topologia são estudados com grande generalidade, as noções de limite, continuidade e as idéias com elas relacionadas, como veremos agora.

Definição 2.1.1. Conjunto Aberto

Diz-se que a é interior ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe um $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$. O conjunto dos pontos interiores a X chama-se o interior do conjunto X e representa-se pela notação $\text{int}X$. Quando $a \in \text{int}X$ diz-se que o conjunto X é uma vizinhança do ponto a . Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se *aberto* quando $A = \text{int}A$, isto é, quando todos os pontos de A são interiores a A .

O limite de uma sequência pode ser reformulado em termos de conjuntos abertos: tem-se $a = \lim x_n$ se, e somente se, para todo aberto A contendo a existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$.

Exemplo 2.1.2. Todo ponto c do intervalo aberto (a, b) é um ponto interior a (a, b) . Os pontos extremos do intervalo fechado $[a, b]$ não são interiores a (a, b) .

Teorema 2.1.3.

1. Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos então a intersecção $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.
2. Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de abertos, a reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração 2.1.4. a) Se $x \in A_1 \cap A_2$ então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como A_1 e A_2 são abertos, existem $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tais que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset A_2$. Seja $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ então, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_2$ logo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1 \cap A_2$. Assim todo ponto $x \in A_1 \cap A_2$ é um ponto interior, ou seja, o conjunto $A_1 \cap A_2$ é aberto.

b) Se $x \in A$ então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A_\lambda \subset A$, logo todo ponto $x \in A$ é interior, isto é, A é aberto.

Exemplo 2.1.5. Segue imediatamente de a) no teorema acima que a intersecção $A_1 \cap \dots \cap A_n$ de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto. Mas, embora por b) a reunião infinita de conjuntos abertos seja ainda aberta, a intersecção de um número infinito de abertos pode não ser aberta. Basta tomar $A_1 = (-1, 1)$, $A_2 = (-1/2, 1/2)$, $\dots$, $A_n = (-1/n, 1/n)$, $\dots$ então $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \{0\}$. Com efeito, se $x \neq 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| > 1/n$ logo $x \notin A_n$, donde $x \notin A$.

Definição 2.1.6. Conjunto Fechados

Diz-se que a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$. Evidentemente que todo ponto $a \in X$ é aderente a X : Basta tomar a sequência $x_n = a$.

Chama-se *fecho* de um conjunto X ao conjunto $\bar{X}$ formados por todos os pontos aderentes a X . Tem-se que $X \subset \bar{X}$. Se $X \subset Y$ então $\bar{X} \subset \bar{Y}$. Um conjunto X diz-se *fechado* quando $X = \bar{X}$, isto é, quando todos os seus pontos aderentes.

Seja $X \subset Y$. Diz-se que X é *denso* em Y quando $Y \subset \bar{X}$, isto é, quando todo ponto $b \in Y$ é aderente a X .

Exemplo 2.1.7. $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.8. Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X .

Demonstração 2.1.9. Seja a aderente a X . Então $a = \lim x_n$, onde $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada uma vizinhança qualquer $V \ni a$ temos $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande, logo $V \cap X \neq \emptyset$. Reciprocamente, se toda vizinhança de a contém pontos de X podemos escolher, em cada intervalo $(a - 1/n, a + 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X$. Então $|x_n - a| < 1/n$, logo $\lim x_n = a$ e a é aderente a X .

Corolário 2.1.10. O fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado. (ou seja, $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$ para todo $X \subset \mathbb{R}$).

Demonstração 2.1.11. Consultar[2]

Teorema 2.1.12. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.*

Demonstração 2.1.13. Sejam F fechado e $a \in A$, isto é, $a \notin F$. Pelo Teorema 2.1.7, existe alguma vizinhança $V \ni a$ que não contém pontos de F , isto é, $V \subset A$. Assim, todo ponto $a \in A$ é interior a A , ou seja, A é aberto. Reciprocamente, se o conjunto A é aberto e o ponto a é aderente a $F = \mathbb{R} - A$ então toda vizinhança de a contém pontos de F , logo a não é interior a A . Sendo A aberto, temos $a \notin A$, ou seja, $a \in F$. Assim todo ponto a aderente a F pertence a F , logo F é fechado.

Teorema 2.1.14.

1. Se F_1 e F_2 são conjuntos fechados então $F_1 \cup F_2$ é um conjunto fechado.
2. Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados então a intersecção $F = \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto fechado.

Demonstração 2.1.15. a) Os conjuntos $A_1 = \mathbb{R} - F_1$ e $A_2 = \mathbb{R} - F_2$ são abertos, pelo Teorema 2.1.9. Logo, pelo Teorema 2.1.3, $A_1 \cap A_2 = \mathbb{R} - (F_1 \cup F_2)$ é aberto, o que implica $F_1 \cup F_2$ fechado.

b) Para cada $\lambda \in L$, $A_\lambda = \mathbb{R} - F_\lambda$ é aberto. Segue-se que $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto. Mas $A = \mathbb{R} - F$. Logo F é fechado.

Definição 2.1.16. Pontos de acumulação

Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a . ($V \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$).

Equivalentemente: para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Indica-se com X' o conjunto dos pontos de acumulação de X .

Assim, $a \in X' \iff a \in \overline{X - \{a\}}$. Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X , diz-se que a é um ponto *isolado* de X . Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que a é o único ponto de X no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Quando todos os pontos de um conjunto X são isolados, X chama-se um conjunto *discreto*.

Teorema 2.1.17. *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. a é um ponto de acumulação de X ;

2. a é o limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$;
3. Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X .

Demonstração 2.1.18. Consultar[2]

Teorema 2.1.19. *Todo conjunto infinito limitado de números reais admite pelo menos um ponto de acumulação.*

Demonstração 2.1.20. Seja $X \subset \mathbb{R}$ infinito limitado. X possui um subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Fixado essa numeração, temos uma sequência (x_n) de termos dois a dois distintos, pertencentes a X , portanto uma sequência limitada, a qual, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência convergente. Desprezando os termos que estão fora dessa subsequência e mudando a notação, podemos admitir que (x_n) converge. Seja $a = \lim x_n$. Como os termos x_n são todos distintos, no máximo um deles pode ser igual a a . Descartando-o, caso exista teremos a como limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$, logo $a \in X'$.

2.1.1 Funções Contínuas e Propriedades

Definição 2.1.21. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Em símbolos, f contínua no ponto a significa:

$$\forall \varepsilon > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Chama-se *descontínua* no ponto $a \in X$ uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que não é contínua nesse ponto. Isso quer dizer que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$ pode-se achar um $x_\delta \in X$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$ impliquem $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$

Diz-se que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua quando é contínua em todos os pontos $a \in X$.

A continuidade é um fenômeno local, isto é, a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existe uma vizinhança V de a tal que a restrição de f a $V \cap X$ é contínua no ponto a .

Teorema 2.1.22. *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.*

Demonstração 2.1.23. Tomemos $c = [g(a) + f(a)]/2$ e $\varepsilon = g(a) - c = c - f(a)$. Então $\varepsilon > 0$ e $f(a) + \varepsilon = g(a) - \varepsilon = c$. Pela definição de continuidade, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < c$ e $x \in X, |x - a| < \delta_2 \Rightarrow c < g(x) < g(a) + \varepsilon$. Seja δ o menor dos números δ_1 e δ_2 . Então $x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < c < g(x)$.

Corolário 2.1.24. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$. Se $f(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de $f(a)$.*

Demonstração 2.1.25. Com efeito, para fixar idéias suponhamos $f(a) < 0$. Então basta tomar g identicamente nula no teorema anterior.

Corolário 2.1.26. *Dadas $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sejam $Y = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ e $Z = \{x \in X; f(x) \leq g(x)\}$. Existem $A \in \mathbb{R}$ aberto e $F \in \mathbb{R}$ fechado tais que $Y = X \cap A$ e $Z = X \cap F$. Em particular, se X é aberto então Y é aberto e se X é fechado então Z é fechado.*

Demonstração 2.1.27. Com efeito, pelo Teorema 2.2.2, para cada $y \in Y$ existe um intervalo aberto I_y , de centro y , tal que $\{y\} \subset X \cap I_y \subset Y$. Daí resulta $\bigcup_{y \in Y} \{y\} \subset \bigcup_{y \in Y} (X \cap I_y) \subset Y$, ou seja: $Y \subset X \cap (\bigcup_{y \in Y} \{y\}) \subset Y$. Pondo $A = \bigcup_{y \in Y} \{y\}$, o Teorema 2.1.3 garante que A é um conjunto aberto. Além disso, de $Y \subset X \cap A \subset Y$ concluímos que $Y = X \cap A$. Quanto ao conjunto Z , temos $Z = X - \{x \in X; f(x) < g(x)\}$. Pelo que acabamos de ver, existe $B \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $Z = X - (X \cap B) = X \cap (\mathbb{R} - B)$. Pelo Teorema 2.1.9, $F = \mathbb{R} - B$ é fechado, portanto $Z = X \cap F$ como se pretendia mostrar.

Teorema 2.1.28. *Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ então são contínuas nesse mesmo ponto as funções $f + g, f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$, bem como f/g , caso seja $g(a) \neq 0$*

Demonstração 2.1.29. Consultar[2]

Teorema 2.1.30. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, de modo que a composta $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ está bem definida. Então $g \circ f$ é contínua no ponto a .*

Demonstração 2.1.31. Consultar[2]

Teorema 2.1.32. (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração 2.1.33. Consultar[2]

2.1.2 Derivadas e Propriedades

Definição 2.1.34. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada da função f no ponto a é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Bem entendido, o limite acima pode existir ou não. Se existir, diz-se que f é derivável no ponto a . Quando existe a derivada $f'(x)$ em todos os pontos $x \in X \cap X'$ diz-se que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no conjunto X e obtem-se uma função $f' : X \cap X' \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f'(x)$, chamada a função derivada de f . Se f' é contínua, diz-se que f é de classe c^1 .

Teorema 2.1.35. A fim de que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in X \Rightarrow f(a + h) = f(a) + c.h + r(h)$, onde $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$. No caso afirmativo, tem-se $c = f'(a)$

Demonstração 2.1.36. Seja $Y = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in X\}$. Então $0 \in Y \cap Y'$. Supondo que $f'(a)$ exista, definimos $r : Y \rightarrow \mathbb{R}$ por $r(h) = f(a + h) - f(a) - f'(a).h$. Então

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a),$$

logo $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$. A condição é portanto necessária. Reciprocamente, se vale a condição, então $r(h)/h = [f(a + h) - f(a)]/h - c$, logo $\lim_{h \rightarrow 0} (f(a + h) - f(a))/h - c = \lim_{h \rightarrow 0} r(h)/h = 0$, portanto $f'(a)$ existe e é igual a c .

Corolário 2.1.37. Uma função é contínua nos pontos em que é derivável.

Demonstração 2.1.38. Consultar[2]

Exemplo 2.1.39. A função constante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ é derivável e sua derivada é identicamente nula. De fato, tome um ponto $a \in \mathbb{R}$ no domínio

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = 0$$

Exemplo 2.1.40. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = ax + b$ então, para $s \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$ quaisquer, $[f(s+h) - f(s)]/h = a$, logo $f'(s) = a$. Para $n \in \mathbb{N}$, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = x^n$, tem derivada $f'(x) = nx^{n-1}$. Com efeito, pelo binômio de Newton, $f(x+h) = (x+h)^n = x^n + hnx^{n-1} + h^2.p(x,h)$, onde $p(x,h)$ é um polinômio em x e h . Portanto $[f(x+h) - f(x)]/h = nx^{n-1} + h.p(x,h)$.

Segue-se que $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)]/h = nx^{n-1}$.

Da mesma forma, podemos definir a partir de f' a função f'' , chamada de derivada a segunda de f . Se tivermos f'' contínua, dizemos que f de classe c^2 .

Teorema 2.1.41. Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. As funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e f/g (caso $g(a) \neq 0$) são também deriváveis no ponto a , com

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ e
- $(f/g)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$

Demonstração 2.1.42. Consultar[1]

Teorema 2.1.43. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Demonstração 2.1.44. Como g é derivável no ponto b ,

$$\frac{g(b+k) - g(b)}{k} = g'(b) + \eta(k),$$

onde $\eta(k) \rightarrow 0$ com $k \rightarrow 0$. Pondo $\eta(0) = 0$, podemos escrever essa equação na forma

$$g(b+k) - g(b) = k[g'(b) + \eta(k)],$$

que é verdadeira mesmo para $k = 0$. Seja $k = f(a+h) - f(a)$. Então,

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = \frac{g(b+k) - g(b)}{h} = \frac{[g'(b) + \eta(k)]k}{h} = [g'(f(a)) + \eta(k)] \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Da continuidade de f no ponto a segue-se que $k \rightarrow 0$ com $h \rightarrow 0$. Assim, basta fazer h tender a zero para obtermos o resultado.

Corolário 2.1.45. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma bijeção entre os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, com inversa $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$. Se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. No caso afirmativo, tem-se $g'(b) = 1/f'(a)$*

Exemplo 2.1.46. Para $n \in \mathbb{N}$ fixo, a função $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, dada por $g(x) = \sqrt[n]{x}$, é derivável no intervalo $(0, +\infty)$ com $g'(x) = 1/(n\sqrt[n]{x^{n-1}})$. Com efeito, g é a inversa da bijeção $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por $f(x) = x^n$. Assim usando o corolário acima, pondo $y = x^n$, temos $g'(y) = 1/f'(x)$ se $f'(x) = n.x^{n-1} \neq 0$, isto é, se $x \neq 0$. Logo $g'(y) = 1/n\sqrt[n]{y^{n-1}}$ e, mudando a notação, $g'(x) = 1/n\sqrt[n]{x^{n-1}}$.

As proposições seguintes, que se referem a derivadas laterais e a desigualdades, têm análogas com f'_+ trocadas por f'_- , com $>$ substituído por $<$, etc. Para evitar repetições monótonas, trataremos apenas um caso, embora utilizemos livremente seus análogos.

Teorema 2.1.47. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, a < x < a + \delta$ implicam $f(a) < f(x)$.*

Demonstração 2.1.48. Temos $\lim_{x \rightarrow a+} [f(x) - f(a)]/(x - a) = f'_+(a) > 0$. Na definição de limite à direita, tomando $\varepsilon = f'_+(a)$, obtemos $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, a < x < a + \delta \Rightarrow [f(x) - f(a)]/(x - a) > 0 \Rightarrow f(a) < f(x)$$

Corolário 2.1.49. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente, então suas derivadas laterais, onde existem, são ≥ 0 .*

Demonstração 2.1.50. Consultar[2]

Corolário 2.1.51. *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com $f'_+(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X, a - \delta < x < a < y < a + \delta$ implicam $f(x) < f(a) < f(y)$.*

Demonstração 2.1.52. Consultar[2]

Diz-se que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tem um máximo local no ponto $a \in X$ quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, 0 < |x - a| < \delta$ implicam $f(x) \leq f(a)$. Quando $x \in X, 0 < |x - a| < \delta$ implicam $f(x) < f(a)$ diz-se que f tem um máximo local estrito no ponto a . Definições análogas para mínimo local e mínimo local estrito.

Quando $a \in X$ é tal que $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é um ponto de mínimo absoluto para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se vale $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é o ponto de máximo absoluto.

Corolário 2.1.53. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$ e tem aí um máximo local então $f'_+(a) \leq 0$.

Demonstração 2.1.54. Consultar[2]

Corolário 2.1.55. Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e possui aí um ponto máximo ou mínimo local então, $f'(a) = 0$.

Demonstração 2.1.56. Consultar[2]

Teorema 2.1.57. (Rolle) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$ é derivável em (a, b) então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração 2.1.58. Pelo teorema de Weierstrass, f atinge seu valor mínimo m e seu valor máximo M em pontos de (a, b) . Se esses pontos forem a e b então $m = M$ e f será constante, daí $f'(x) = 0$ qualquer que seja $x \in (a, b)$. Se um desses pontos, digamos c , estiver em (a, b) então $f'(c) = 0$.

Proposição 2.1.59. Seja $\phi : I = [d_1, d_2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Se $\phi''(z) > 0, \forall z \in I$ e $\phi(d_1) < 0$, então ϕ possui no máximo uma raiz em I .

Demonstração 2.1.60. Suponhamos que existam $z_1, z_2 \in I (z_1 < z_2)$ tal que $\phi(z_1) = \phi(z_2) = 0$. De $\phi''(z) > 0$ temos que ϕ não é constante. Daí pelo teorema de Rolle, $\exists c \in (z_1, z_2)$ tal que um $\phi'(c) = 0 \rightarrow c$ é ponto de mínimo, pois $\phi''(c) > 0$. Mas $\phi(d_1) < 0 \Rightarrow \phi(c) > 0$. Como ϕ é contínua $\exists z_0 \in (z_1, z_2)$ tal que $\phi(c) > \phi(z_0) > 0$, Absurdo!. Logo ϕ tem no máximo uma raiz.

Proposição 2.1.61. Seja $\phi : I = [d_1, d_2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Se $\phi''(z) < 0, \forall z \in I$ e $\phi(d_1) > 0$, então ϕ possui no máximo uma raiz em I .

Demonstração 2.1.62. Análoga a demonstração anterior

Teorema 2.1.63. (Teorema do Valor Médio de Lagrange) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)] / (b - a)$.

Demonstração 2.1.64. Consideremos a função auxiliar $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - dx$, onde d é escolhido de modo que $g(a) = g(b)$, ou seja, $d = [f(b) - f(a)] / (b - a)$. Pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, isto é, $f'(c) = d = [f(b) - f(a)] / (b - a)$.

Um enunciado equivalente: Seja $f : [a, a + h] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivável em $(a, a + h)$. Existe um número θ , $0 < \theta < 1$ tal que $f(a + h) = f(a) + f'(a + \theta.h).h$.

2.2 Noções de Topologia em $\mathbb{R}^n$

2.2.1 O espaço euclidiano n -dimensional

Seja n um número natural. O *espaço euclidiano n -dimensional* $\mathbb{R}^n$ é o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}$. Seus elementos, portanto, são as seqüências (ou listas) de n termos reais $x = (x_1, \dots, x_n)$. Para cada $i = 1, \dots, n$, o termo x_i chama-se i -ésima coordenada de x . Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, tem-se $x = y$ se, e somente se, $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Assim, toda igualdade entre dois elementos de $\mathbb{R}^n$ equivale a n igualdades entre números reais. Por simplicidade adotaremos o hábito de escrever $z = (x, y)$ em vez de $x = (x_1, x_2)$ e $w = (x, y, z)$ em vez de $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados de *pontos* e as vezes *vetores*. Este segundo nome se aplica principalmente quando se considerarem entre eles as operações que definiremos agora.

A *adição* faz corresponder a cada par de elementos $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ a soma $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.

A *multiplicação* do número real α pelo elemento $x = (x_1, \dots, x_n)$ tem como resultado o *produto* $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

O vetor $0 = (0, \dots, 0)$, cujas coordenadas são todas nulas, chama-se a *origem* de $\mathbb{R}^n$. Para todo $x = (x_1, \dots, x_n)$, o vetor $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ chama-se o *oposto*, ou *simétrico* de x . Dados quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valem as igualdades:

$$x + y = y + x, \quad x + 0 = x, \quad -x + x = 0, \quad x + (y + z) = (x + y) + z, \\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad 1.x = x.$$

A segunda e a terceira delas dizem que 0 é o *elemento neutro* da adição e $-x$ é o *inverso aditivo* de x . Os vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$,

têm uma única coordenada não-nula, igual a 1, constituem a *base canônica* de $\mathbb{R}^n$. A igualdade $x = (x_1, \dots, x_n)$ significa que $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Existe ainda uma operação que associa a cada par de vetores $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ o número real

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

chamado o *produto interno* de x por y . Para $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\langle x, x \rangle > 0$ se $x \neq 0$.

Segue-se que $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ e $\langle x, 0 \rangle = 0$.

Diz-se que os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais, e escreve-se $x \perp y$, quando $\langle x, y \rangle = 0$.

Exemplo 2.2.1. Dados $e_i, e_j \in \mathbb{R}^n$, temos $e_i \perp e_j$ se $i \neq j$.

O número não-negativo $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ chama-se *norma* (ou comprimento) do vetor x . Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ então

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Por definição, tem-se $\sqrt{\langle x, x \rangle} = |x|^2$. Quando $|x| = 1$ diz-se que x é um vetor unitário. Para todo $x \neq 0$, o vetor $u = x/|x|$ é unitário.

Proposição 2.2.2. (Teorema de Pitágoras) Se $x \perp y$ então $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Demonstração 2.2.3. Consultar[2]

Proposição 2.2.4. (Desigualdade de Schwarz) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $x \perp y$ então $|x + y| \leq |x| + |y|$, valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores é múltiplo do outro.

Demonstração 2.2.5. Consultar[2]

A norma goza das seguintes propriedades:

1. $|x| \geq 0$, valendo a igualdade somente quando $x = 0$;
2. $|\alpha x| = |\alpha| |x|$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$

A última igualdade, referindo-se a números não-negativos, equivale a

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2.$$

De fato,

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

pois, em decorrência da desigualdade de Schwarz, $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$. Há duas outras normas no $\mathbb{R}^n$ que convém mencionar. São elas:

- $|x|_M = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ (norma do máximo),
- $|x|_S = |x_1| + \dots + |x_n|$ (norma da soma).

2.2.2 Bolas e Conjuntos

Dados o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e o número real $r > 0$, a *bola aberta* de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor que r . Em símbolos:

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}.$$

Analogamente, a *bola fechada* de centro a e raio r é o conjunto $B[a; r]$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor ou igual que r , ou seja;

$$B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| \leq r\}.$$

Por sua vez, a *esfera* de centro a e raio r é o conjunto

$$S[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| = r\}.$$

Segue-se $B[a; r] = B(a; r) \cup S[a; r]$.

Quando $n = 1$ a bola aberta $B(a; r)$ de centro a e raio r é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$ e a esfera $S[a; r]$ reduz-se ao conjunto formado pelos dois pontos $a - r$ e $a + r$.

Para $n = 2$ tomando a norma euclidiana ($|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$), as bolas dos planos chamam-se *discos abertos* e *discos fechados* e as esferas reduzem-se a círculos.

Exemplo 2.2.6. Por exemplo, se tomarmos em $\mathbb{R}^2$ a norma do máximo, a "esfera unitária" é o bordo do quadrado de centro 0 e lado de comprimento dois, paralelos aos eixos. Ainda em $\mathbb{R}^2$ com a norma da soma o "disco unitário" é o quadrado cujos vértices são os pontos $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ e $(0, -1)$.

Figura 2.1: Representação da esfera e disco

Seja $a \in X \subset \mathbb{R}^n$, diz-se que o ponto a é interior ao conjunto X quando, para algum $r > 0$ tem-se $B(a; r) \subset X$. Isso significa que todos os pontos suficientemente próximos de a também pertencem a X . O conjunto $\text{int}X$ dos pontos interiores a X chama-se o interior do conjunto X . Evidentemente $\text{int}X \subset X$. Quando $a \in \text{int}X$ diz-se que X é uma vizinhança de a .

Exemplo 2.2.7. Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ o semi-plano superior fechado. Se $p = (a, b)$ com $b > 0$, então $p \in \text{int}X$. Com efeito, afirmamos que $B = B(p; b) \subset X$. Isto é claro geometricamente.

Definição 2.2.8. (Conjuntos Abertos) Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *aberto* quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando $A = \text{int}A$.

Exemplo 2.2.9. Toda bola aberta $B = B(a; r)$ é um conjunto aberto. De fato, seja $x \in B$. Então $|x - a| < r$, logo $s = r - |x - a| > 0$. Afirmamos que $B(x; s) \subset B$.

Com efeito, $y \in B(x; s) \Rightarrow |y - x| < r - |x - a|$. Logo $y \in B(x; s) \Rightarrow |y - a| \leq |y - x| + |x - a| < r - |x - a| + |x - a| = r$. Daí concluímos que $y \in B(a; r)$.

Exemplo 2.2.10. Dado $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$. Temos $\text{int}X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$.

Teorema 2.2.11.

- (a) Se A_1, A_2 são abertos em $\mathbb{R}^n$ então $A_1 \cap A_2$ é aberto.
- (b) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família arbitrária de conjuntos abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ então a reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração 2.2.12. Consultar[3]

2.2.3 Sequências em $\mathbb{R}^n$

Uma em $\mathbb{R}^n$ é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que associa a cada número natural k um ponto $x_k \in \mathbb{R}^n$. As notações para uma sequência são $(x_1, \dots, x_k, \dots)$, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_k) . Para cada $i = 1, \dots, n$, indicamos com x_k a i -ésima coordenada de

$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$. Dar uma sequência em $\mathbb{R}^n$ significa que temos n sequências de números reais $(x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$.

Diz-se que a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada quando existe $c > 0$ tal $|x_k| \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência (x_k) quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$. Noutras palavras: $k > k_0 \Rightarrow x_k \in B(a; \varepsilon)$. Escreve-se então $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, $\lim_{k \in \mathbb{N}} x_k = a$ ou $\lim x_k = a$, simplesmente.

De acordo com esta definição, tem-se $\lim x_k = a$ se, e somente se, $\lim |x_k - a| = 0$. Dizer que $\lim x_k = a$ significa que qualquer bola de centro a contém todos os x_k com a possível exceção de um número finito de valores de k (que são $1, 2, \dots, k_0$).

Uma sequência x_k em $\mathbb{R}^n$ diz-se convergente quando existe $a = \lim x_k$.

Teorema 2.2.13. *A sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ converge para o ponto $a = (a_1, \dots, a_n)$ se, e somente se, para cada $i = 1, \dots, n$, tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$, isto é, cada coordenada de x_k converge para a coordenada correspondente de a .*

Demonstração 2.2.14. Consultar[3]

Teorema 2.2.15. (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma sub-sequência convergente.*

Demonstração 2.2.16. Consultar[3]

Diz-se que um ponto a é *aderente* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando existe uma sequência de pontos $x_k \in X$ tais que $\lim x_k = a$.

Chama-se *fecho* do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ ao conjunto $\bar{X}$ formado por todos pontos aderentes a X . Portanto $a \in \bar{X} \iff a = \lim x_k, x_k \in X$. Dizer que $a \in \bar{X}$ é o mesmo que afirmar que a é aderente a X .

Definição 2.2.17. (Conjuntos Fechados) Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *fechado* quando $\bar{F} = F$, isto é, quando o limite de toda sequência convergente de F é ainda um ponto de F .

Exemplo 2.2.18. Se $|x| = r$ então x não pertence à bola aberta $B = B(0; r)$ porém é aderente e ela.

De fato, pondo $x_k = (1 - \frac{1}{k})x$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $x_k \in B(0; r)$ e $\lim x_k = x$, logo $x \in \bar{B}$.

Reciprocamente, se $x \in \bar{B}$ então $x = \lim x_k$ com $|x_k| < r$ para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto $|x| = \lim |x_k| \leq r$. Conclui-se que $x \in \bar{B} \iff |x| \leq r$, ou melhor, $\bar{B} = B[0; r]$.

Exemplo 2.2.19. O fecho de toda bola aberta $B = B(a; r)$ é a bola fechada $B[a; r]$.

Teorema 2.2.20.

- (a) O ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, toda bola de centro a contém algum ponto de X .
- (b) Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R}^n - F$ é aberto.
- (c) O fecho de qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado.

Demonstração 2.2.21. Consultar[3]

Teorema 2.2.22.

- (a) Se F_1 e F_2 são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ então $F_1 \cup F_2$ também é fechado.
- (b) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família arbitrária de conjuntos fechados $F_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ então a reunião $A = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.

Demonstração 2.2.23. Consultar[3]

Definição 2.2.24. Dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de acumulação* do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando toda bola de centro a contém algum ponto de X diferente de a . Um ponto de acumulação de X pode pertencer ou não a X . Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X , diz-se que a é um ponto *isolado* de X . Isto significa que existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \cap X = \{a\}$. Quando todos os pontos de um conjunto X são isolados, dizemos que X é um conjunto **discreto**.

Exemplo 2.2.25. Dadas as bolas $B = B(a; r)$ e $B = B[a; r]$, a é ponto de acumulação de ambas.

Exemplo 2.2.26. O conjunto $\mathbb{Z}^n$ dos pontos de $\mathbb{R}^n$ com coordenadas inteiras é um conjunto discreto.

Teorema 2.2.27. *Sejam a um ponto e X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. a é um ponto de acumulação de X .
2. a é limite de uma sequência de pontos $x_k \in X - a$.
3. Toda bola de centro a contém uma infinidade de pontos de X .

Demonstração 2.2.28. Consultar[3]

Teorema 2.2.29. *Todo subconjunto infinito limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ admite pelo menos um ponto de acumulação.*

Demonstração 2.2.30. Consultar[3]

Definição 2.2.31. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *compacto* quando é limitado e fechado.

Exemplo 2.2.32. Toda bola fechada $B = [a; r]$ é compacta e nenhuma bola aberta é.

Exemplo 2.2.33. O conjunto $\mathbb{Z}^n$ é fechado mas não é limitado, logo não é compacto. Toda esfera $S = [a; r]$.

Teorema 2.2.34. *As seguintes afirmações sobre o conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ são equivalentes:*

1. K é um compacto;
2. Toda sequência de pontos $x_k \in K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K .

Demonstração 2.2.35. Se K é compacto então toda sequência de pontos $x_k \in K$ é limitada, pois K é limitado. Por Bolzano-Weierstrass, uma subsequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ converge para um ponto $a = \lim_{k \in \mathbb{N}'} x_k$. Como K é fechado, tem-se $a \in K$. Logo (1) implica (2). Reciprocamente, se vale (2) então K é limitado pois do contrário existiria, para cada $k \in \mathbb{N}$ um ponto x_k tal que $|x_k| > k$. A sequência (x_k) assim obtida não possuiria

subsequência limitada, logo nenhuma de suas subsequências seria convergente. Além disso, K é fechado pois se $a = \lim x_k$ com $x_k \in K$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então, por (2), uma subsequência de (x_k) convergeria para todo ponto de K . Mas toda subsequência de (x_k) converge para a . Logo $a \in K$. Isto mostra que (2) $\Rightarrow$ (1).

Teorema 2.2.36. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Existem $x_0 \in K$ e $y_0 \in F$ tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ para quaisquer $x \in K$ e $y \in F$.*

Demonstração 2.2.37. Consultar[3]

Corolário 2.2.38. *Sejam $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, onde K é compacto U é aberto. Existem $\varepsilon > 0$ tal que toda bola $B(x; \varepsilon)$, de raio ε e centro num ponto $x \in K$, está contida em U .*

Demonstração 2.2.39. Consultar[3]

2.2.4 Aplicações Contínuas

Uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, associa a cada ponto $x \in X$ sua imagem $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. As funções reais $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, assim definidas, são chamadas de funções coordenadas de f . Escreve-se então $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Diz-se que f é contínua no ponto $a \in X$ quando, para cada $\varepsilon > 0$ arbitrariamente dado, pode-se obter $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Dito de outra forma: para cada bola $B(f(a); \varepsilon)$ dada, existe uma bola $B(a; \delta)$ tal que $f(B(a; \delta) \cap X) \subset B(f(a); \varepsilon)$.

Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ quando f for contínua em todos os pontos $a \in X$.

Teorema 2.2.40. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $f(X) \subset Y$ e $g : Y \subset \mathbb{R}^p$. Se f é contínua no ponto $a \in X$ e g é contínua no ponto $f(a)$ então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ é contínua no ponto a (a composta de duas aplicações contínuas é contínua).*

Demonstração 2.2.41. Seja $\varepsilon > 0$ dado. A continuidade de g no ponto $f(a)$ assegura a existência de $\lambda > 0$ tal que $y \in Y, |y - f(a)| < \lambda \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\lambda > 0$, a continuidade de f no ponto fornece $\delta > 0$ tal que $x \in X, |f(x) - f(a)| < \lambda \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$, logo $g \circ f$ é contínua no ponto a .

Teorema 2.2.42.

- (a) A aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in X$ com $\lim x_k = a$, tem-se $\lim f(x_k) = f(a)$
- (b) A aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a se, e somente se, suas funções-coordenadas $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas nesse ponto.

Demonstração 2.2.43. Consulta[3]

Teorema 2.2.44. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se as aplicações $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a função $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ então são também contínuas nesse ponto as aplicações*

$f + g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\langle f, g \rangle : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $|f| : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $(f + g)(x) : f(x) + g(x)$, $\langle f, g \rangle(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, $|f|(x) = |f(x)|$ e $(\alpha f)(x) = \alpha(x)f(x)$.

Demonstração 2.2.45. Consultar[3]

Teorema 2.2.46. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto em X .*

Demonstração 2.2.47. Seja f contínua. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto então, para todo $x \in f^{-1}(A)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x); \varepsilon) \subset A$. Pela continuidade de f , x é centro de uma bola aberta B_x tal que $f(B_x \cap X) \subset B(f(x); \varepsilon) \subset A$, logo $x \in B_x \cap X \subset f^{-1}(A)$. Isto valendo para todo $x \in f^{-1}(A)$, resulta que $f^{-1}(A) \subset U \cap X \subset f^{-1}(A)$, logo $f^{-1}(A) = U \cap X$, onde U é a reunião de bolas abertas B_x , $x \in f^{-1}(A)$.

Reciprocamente, suponhamos que, para todo aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(A)$ seja aberto em X , isto é, $f^{-1}(A) = U \cap X$ com U aberto em $\mathbb{R}^m$. Então, dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, tomamos $A = B(f(x); \varepsilon)$ e obtemos $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto tal que $U \cap X = f^{-1}(B(f(x); \varepsilon))$. Certamente $x \in U$, logo existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset U$ e assim $f(B(x; \delta) \cap X) \subset B(f(x); \varepsilon)$. Portanto, f é contínua em todos os pontos $x \in X$.

Teorema 2.2.48. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa de todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto $f^{-1}(F)$ fechado em X .*

Demonstração 2.2.49. Isso resulta do Teorema anterior se observarmos que, pondo $A = \mathbb{R}^n - F$, então A é aberto em $\mathbb{R}^n$ e que $f^{-1}(F) = X - f^{-1}(A)$ é fechado em X se, e somente se $f^{-1}(A)$ é aberto em X .

2.2.5 Funções Diferenciáveis e Propriedades

Definição 2.2.50. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $i = 1, \dots, n$, a i -ésima derivada parcial de f no ponto $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ é o número*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + te_i, \dots, a_n) - f(a)}{t},$$

caso este limite exista.

Observemos que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ significa a derivada de f em relação a sua i -ésima variável, seja qual for o nome que se atribua a ela. Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial z_i}, \text{ etc.}$$

Quando $n = 2$ ou $n = 3$, escrevemos (x, y) em vez de (x_1, x_2) e (x, y, z) em vez de (x_1, x_2, x_3) . Assim $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ são as derivadas de f em relação a primeira, segunda e terceira variáveis respectivamente.

2.2.6 Funções de Classe C^1 e Propriedades

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui derivadas parciais em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Ficam então definidas as n funções

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \rightarrow \mathbb{R},$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Se estas funções forem contínuas em U , diremos que f é uma função de classe C^1 e escrevemos $f \in C^1$. Muitas propriedades importantes das funções de classe C^1 resultam de serem elas diferenciáveis no seguinte sentido. Uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, diz-se diferenciável no ponto $a \in U$ quando cumpre as condições:

- Existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$.

- Para todo $v = (\alpha_1), \dots, \alpha_n$ tal que $a + v \in U$, tem-se

$$f(a + v) - f(a) = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha_i + r(v)$$

$$, \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$$

Teorema 2.2.51. *Toda função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é diferenciável.*

Demonstração 2.2.52. Por simplicidade, suporemos $U \in \mathbb{R}^2$. O caso geral se trata analogamente, apenas com uma notação mais elaborada. Fixemos $c = (a, b) \in U$ e tomemos $v = (h, k)$ tal que $c + v \in B \subset U$, onde B é uma bola de centro c . Seja

$$r(v) = r(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x} h - \frac{\partial f}{\partial y} k$$

, onde as derivadas são calculadas no ponto $c = (a, b)$. Podemos escrever

$$r(v) = f(a + h, b + k) - f(a, b + k) + f(a, b + k) - f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x} h - \frac{\partial f}{\partial y} k.$$

Pelo teorema do valor médio para funções de uma variável real, existem $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ tais que:

$$r(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, b + k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b + \theta_2 k)k - \frac{\partial f}{\partial x} h - \frac{\partial f}{\partial y} k$$

, logo

$$\frac{r(v)}{|v|} = 0$$

2.3 Teorema da Função Implícita

Teorema 2.3.1. (Teorema da Função Implícita) *Dada a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k ($k \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, seja $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. Existem uma bola $B = B(x_0; \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ com as seguintes propriedades:*

1. $B \times \bar{J} \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in B \times \bar{J}$;
2. Para todo $x \in B$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x, \xi(x)) = c$.

A função $\xi : B \rightarrow J$, assim definida, é de classe C^k e suas derivadas parciais em cada ponto $x \in B$ são dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}$$

Demonstração 2.3.2. 1. Vamos mostrar que para cada $x \in B$ existe um único $y \in J$, ou seja, $y = \zeta(x)$ é uma função $\zeta : B \rightarrow J$;

2. Mostraremos em seguida que $\zeta : B \rightarrow J$ é de classe C^k e que suas derivadas são calculadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \zeta(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \zeta(x))}$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in B \times \bar{J} \subset U$, então para fixar as idéias admita que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Sabemos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua pois f é de classe C^k então, existem $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que, pondo $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, temos $B \times \bar{J} \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0, \forall (x, y) \in B \times \bar{J}$.

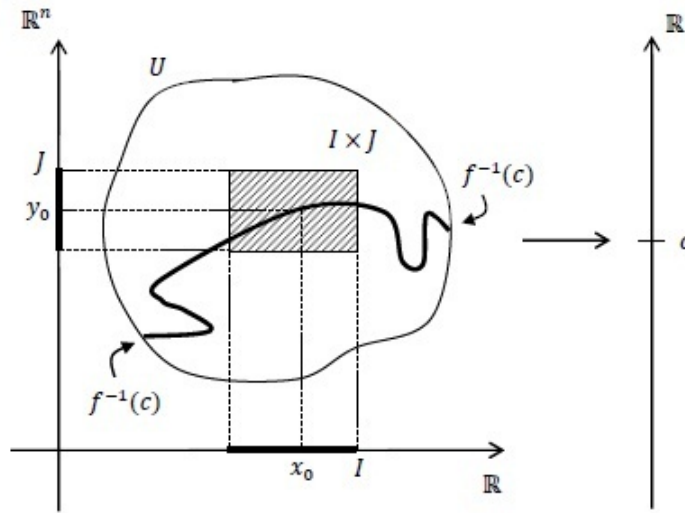


Figura 2.2: Teorema da função implícita

Assim para todo $x \in B$, a função $y \rightarrow f(x, y)$ é crescente (pois $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ em todo $B \times \bar{J}$) no intervalo $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] = \bar{J}$. De $f(x_0, y_0) = c$, segue que $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < c$ e $f(x_0, y_0 + \varepsilon) > c$. Sendo f contínua podemos tomar δ tão pequeno que $f(x, y_0 - \varepsilon) < c$ e $f(x, y_0 + \varepsilon) > c$ para todo $x \in B$.

Pelo teorema do valor intermediário, para cada $x \in B$ existe um único $y = \zeta(x) \in \bar{J}$ tal que $f(x, y) = c$. Tem-se que $y \in J$, assim para cada $x \in B$ existe um $y \in J$ único. Portanto temos a função $\zeta : B \rightarrow J$ com $y = \zeta(x)$.

Mostraremos agora $y = \zeta(x)$ possui derivadas parciais em todo $x \in B$. De fato, pondo $k = k(t) = \zeta(x + te_i) - \zeta(x)$ temos $\zeta(x + te_i) = \zeta(x) + k$, logo $f(x + te_i, \zeta(x) +$

$k) = f(x, \zeta(x)) = c$. Pelo Teorema 2.3.18 (valor intermediário), para todo t existe $\theta = \theta(t) \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + te_i, \zeta(x) + k) - f(x, \zeta(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \zeta(x) + \theta k)t + \frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta te_i, \zeta(x) + \theta k)k. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\zeta(x + te_i) - \zeta(x)}{t} = \frac{k}{t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \zeta(x) + \theta k)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta te_i, \zeta(x) + \theta k)}.$$

Neste ponto admitamos a continuidade de ζ , que será provada abaixo. Então $\lim_{t \rightarrow 0} k(t) = 0$. A continuidade das derivadas parciais de f nos dá então

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\zeta(x + te_i) - \zeta(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \zeta(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \zeta(x))}$$

A expressão de $\partial \zeta / \partial x_i$, mostra que se $f \in C^k$ então $\partial \zeta / \partial x_i \in C^{k-1}$ para todo $i = 1, \dots, n$, portanto $\zeta \in C^k$.

Agora veremos que ζ é contínua. De fato, pelo Teorema 2.2.26, basta mostrar que par todo conjunto fechado $F \subset \bar{J}$, a imagem inversa $\zeta^{-1}(F)$ é fechada em B . Ou seja: se a sequência de pontos $x_k \in B$ é tal que $\zeta(x_k) \in F$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e o $\lim x_k = \bar{x} \in B$, então $\zeta(\bar{x}) \in F$. Ora, f é compacto, logo uma subsequência de pontos $x'_k \in B$ é tal que o $\lim \zeta(x'_k) = a \in F$. Logo $f(\bar{x}, a) = \lim (x'_k, \zeta(x'_k)) = c$. Mas $f(\bar{x}, \zeta(\bar{x})) = c$ pela unicidade de $\zeta(x)$, segue-se que $\zeta(\bar{x}) = a \in F$.

Capítulo 3

CONCEITOS BÁSICOS EM LÓGICA FUZZY

Neste capítulo, apresentamos as definições iniciais sobre lógica fuzzy e alguns resultados, sobre essa teoria, que julgamos importantes para o desenvolvimento dos demais capítulos deste trabalho.

3.1 Conjuntos fuzzy

O conceito de conjunto fuzzy foi primeiramente introduzido por L. A. Zadeh em um artigo publicado em 1965 (Zadeh, 1965). Desde então, as aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy são amplas e abrangem áreas tanto de interesse estritamente matemático (Diamond e Kloeden, 1994; Nguyen e Walker, 2000) como em matemática aplicada e engenharia (Klir e Yuan, 1995; Barros e Bassanezi, 2006).

A noção de conjunto fuzzy, dada por Zadeh, estende aquela de conjunto clássico no sentido que a relação de pertinência de um elemento a um conjunto deixa de ser uma relação dicotômica, isto é, para um subconjunto A de um conjunto universo X e um elemento $x \in X$, temos apenas as possibilidades de $x \in A$ ou $x \notin A$.

Na teoria clássica de conjuntos, um subconjunto A de X é caracterizado por sua função característica,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

isto é, um elemento $x \in X$ pertence ou não pertence a A . Neste caso, podemos dizer que a fronteira de A está bem definida. Entretanto, em muitos casos não é claro quando um elemento x pertence ou não ao conjunto A . Por exemplo, se A representa o conjunto dos indivíduos altos. Podemos dizer que uma pessoa com $2,00m$ é alta, mas o que dizer sobre uma pessoa com $1,80m$ ou $1,72m$? São elas altas ou não? Neste caso, dizemos que a fronteira de A é subjetiva.

Pensando em resolver questões como estas, Em 1965 Lotfi A. Zadeh desenvolveu a teoria dos conjuntos fuzzy. Nesta teoria, um elemento pertence a um dado conjunto

com um grau de pertinência. Isto é, um conjunto A é caracterizado por uma função de pertinência com valores em $[0; 1]$. No caso do exemplo acima, podemos usar a seguinte função de pertinência para A ,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 1.5 \\ \frac{x-1.5}{0.5}, & \text{se } 1.5 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

e, neste caso, uma pessoa com $1,80m$, por exemplo, seria alta com grau $0,6$

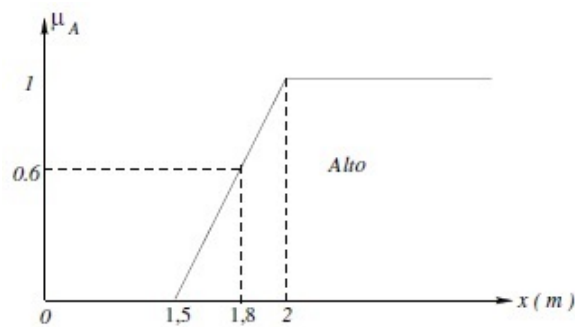


Figura 3.1: Função de pertinência do conjunto das pessoas altas

Definição 3.1.1. Seja X um subconjunto não vazio. Um conjunto fuzzy $A \subset X$ é caracterizado por sua função de pertinência $\mu_A : X \rightarrow [0; 1]$, onde $\mu_A(x)$ é interpretado como o grau com que x pertence a A .

Definição 3.1.2. Dizemos que um subconjunto fuzzy $A \subset X$ é normal se existe $x_0 \in X$ tal que $\mu_A(x_0) = 1$.

Em nosso trabalho, usaremos indistintamente A ou μ_A para indicarmos a função de pertinência do subconjunto fuzzy A .

3.1.1 Operações com conjuntos fuzzy

Um subconjunto fuzzy, matematicamente estende a definição de subconjunto clássico, pois basta tomar para função de pertinência de um subconjunto clássico sua função característica. A seguir vamos estender as principais operações sobre conjuntos clássicos para conjuntos fuzzy.

Definição 3.1.3. Sejam A e B subconjuntos fuzzy de X . A função de pertinência da união de A e B é definida por:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X$$

Definição 3.1.4. Sejam A e B subconjuntos fuzzy de X . A função de pertinência da interseção de A e B é definida por:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \forall x \in X$$

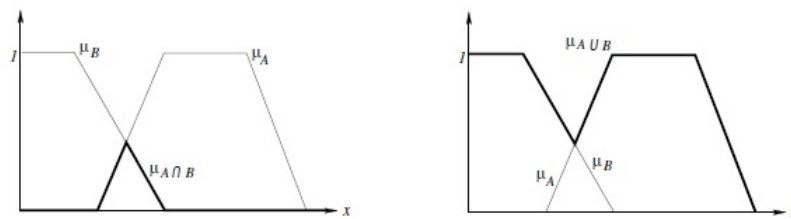


Figura 3.2: Função de pertinência dos subconjuntos $A \cup B$ e $A \cap B$ respectivamente.

3.1.2 Número fuzzy

Definição 3.1.5. Dado $\alpha \in [0, 1]$ e U um subconjunto fuzzy de X , denominamos de α -nível do subconjunto fuzzy U , o subconjunto $[U]^\alpha \subset X$ definido por:

- i) $[U]^0 = \overline{\{x \in X; U(x) > 0\}}$, ($\alpha = 0$)
- ii) $[U]^\alpha = \{x \in X; U(x) \geq \alpha\}$, se $\alpha \in (0, 1]$

Definição 3.1.6. Seja U um subconjunto fuzzy de X , o suporte de U , o qual denota-se, por $\text{supp}(U)$, é o subconjunto de X cujos elementos têm grau de pertinência não nulos em U , isto é,

$$\text{supp}(U) = \{x \in X; U(x) > 0\}$$

Definição 3.1.7. Um subconjunto fuzzy $A \subset \mathbb{R}$ é chamado de *número fuzzy* se satisfaz às condições:

- i) $[A]^\alpha \neq \emptyset, \forall x \in [0, 1]$;
- ii) $[A]^\alpha$ é um intervalo fechado, $\forall x \in [0, 1]$;
- iii) O suporte de A é limitado.

O teorema seguinte mostra uma caracterização de número fuzzy através de funções monótonas e contínuas.

Teorema 3.1.8. A é um número fuzzy se, somente se, existe um intervalo fechado $[b, c] \neq \emptyset$ e $a, d \in \mathbb{R}$ tal que,

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [b, c], \\ f(x), & \text{se } x \in (-\infty, b), \\ g(x), & \text{se } x \in (c, \infty). \end{cases}$$

onde $f : (-\infty, b] \rightarrow [0, 1]$ é contínua à direita, crescente em $[a, b]$ e tal que $f(x) = 0$, para $x \in (-\infty, a)$; $g : [c, \infty) \rightarrow [0, 1]$ é contínua à esquerda, decrescente em $[c, d]$ e $g(x) = 0$ para $x \in [d, \infty)$.

Demonstração 3.1.9. Consultar [5]

A interpretação geométrica de número fuzzy geral é dada na Figura abaixo.

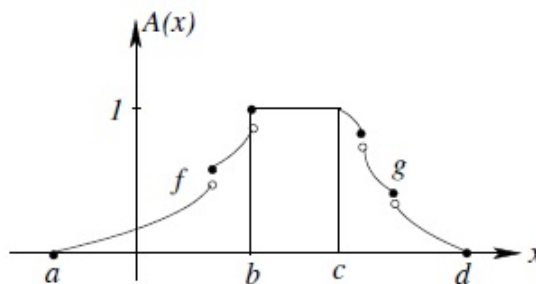


Figura 3.3: Interpretação do número fuzzy.

Nesse texto estaremos supondo que as funções f e g , no Teorema 3.1.9, são contínuas como é o caso dos números fuzzy triangulares e trapezoidais definidos a seguir.

Definição 3.1.10. Um número fuzzy A é dito triangular quando sua função de pertinência tem a forma,

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x \leq b, \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{se } b < x \leq c, \\ 0, & \text{se } x > c, \end{cases} \quad \text{com } a < b < c < d$$

Definição 3.1.11. Um número fuzzy A é dito trapezoidal quando sua função de pertinência é da forma,

$$A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a < x \leq b, \\ 1, & \text{se } b < x \leq c, \\ \frac{x-d}{c-d}, & \text{se } c < x \leq d, \\ 0, & \text{se } x > d, \end{cases} \quad \text{com } a < b < c < d$$

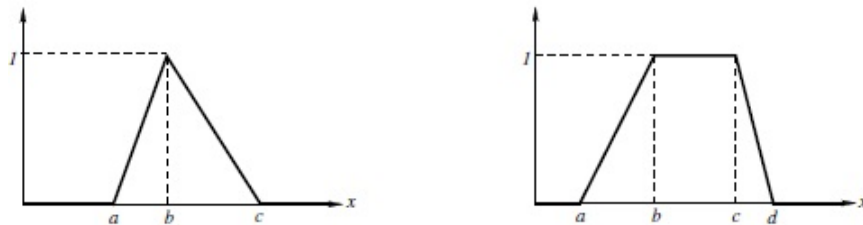


Figura 3.4: Números fuzzy triangular e trapezoidal.

3.2 Lógica Fuzzy

Lógica se refere ao estudo de métodos e princípios do pensamento humano. A lógica clássica trabalha com proposições que são ou verdadeiras ou falsas e se baseia na teoria clássica de conjuntos. A lógica fuzzy tem como base a teoria de conjuntos fuzzy e uma proposição fuzzy do tipo "Se x é A e y é B ", "Então z é C ou z é D " é falsa ou verdadeira com um certo grau. No mundo real existem situações onde a dicotomia verdadeiro falso não é suficiente para representar a realidade. Nestes casos, a lógica

fuzzy é útil, pois é capaz de traduzir em termos matemáticos as informações contidas em frases expressas em linguagem natural.

3.2.1 Variáveis Linguística

Variáveis linguísticas são variáveis cujos valores ao invés de números são palavras, chamadas de termos linguísticos. Cada termo linguístico corresponde a um conjunto fuzzy. Por exemplo, se considerarmos a temperatura como uma variável linguística seus termos poderiam ser: Muito baixa, Baixa, Média, Alta e Muito alta.

Formalmente, uma variável linguística é caracterizada conhecendo a quintupla $(x; T(x); U; G; M)$, onde:

- U é o universo de discurso (domínio da variável linguística);
- x é o nome da variável;
- T é o conjunto dos termos linguísticos, onde cada termo é um número fuzzy em U ;
- G é uma regra semântica para gerar os nomes dos valores de x ;
- M é uma regra semântica para associar cada valor ao seu significado.

No caso do exemplo dado acima para a variável temperatura temos $T = \{\text{Muito baixa}, \text{Baixa}, \text{Média}, \text{Alta}, \text{Muito alta}\}$, $U = [5, 50]$.

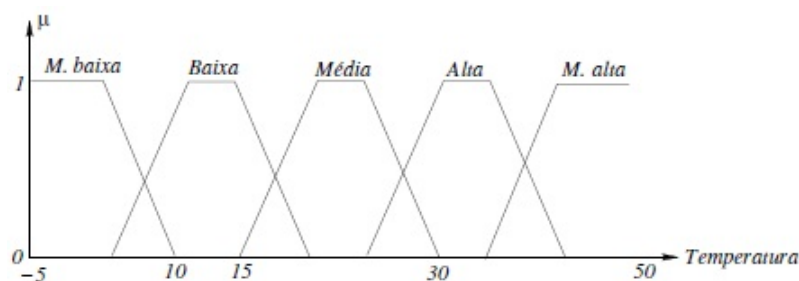


Figura 3.5: Exemplo de variável linguística de Temperatura.

3.2.2 Proposição fuzzy e operadores $\max$ – $\wedge$ e $\min$ – $\vee$

Uma preposição fuzzy é uma declaração do tipo "Se x é A e y é B ", "Então z é C ou z é D ". Para traduzir matematicamente uma proposição fuzzy é necessário traduzir os conectivos e e ou. Para isso usamos os operadores t -norma e t -conorma os quais indicamos por $\wedge$ e $\vee$ e passamos a definir.

Definição 3.2.1. Dizemos que o operador binário $\wedge : [0;1] \times [0;1] \rightarrow [0;1]$ é uma t -norma se satisfaz:

1. Comutatividade: $x \wedge y = y \wedge x$;
2. Associatividade: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
3. Monotonicidade: Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $x \wedge w \leq y \wedge z$.

Definição 3.2.2. Dizemos que o operador binário $\vee : [0;1] \times [0;1] \rightarrow [0;1]$ é uma t -conorma se satisfaz:

1. Comutatividade: $x \vee y = y \vee x$;
2. Associatividade: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
3. Monotonicidade: Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $x \vee w \leq y \vee z$;
4. Condição de fronteira: $0 \vee x = x$ e $1 \vee x = 1$

Proposição 3.2.3. Se A , B e C são subconjuntos fuzzy então os operadores $\max$ e $\min$ são associativos e comutativos, isto é:

1. $\min\{\max\{A, B\}, \max\{A, C\}\} = \max\{A, \min\{B, C\}\}$;
2. $\max\{\min\{A, B\}, \min\{A, C\}\} = \min\{A, \max\{B, C\}\}$.

Demonstração 3.2.4. Consultar [6]

3.2.3 Sistemas baseados em regras fuzzy

Sistemas baseados em regras fuzzy são conceitualmente simples. Tais sistemas consistem basicamente de três estágios: um estágio de entrada-fuzificador, um estágio de processamento, composto por uma base de regras *fuzzy* e um método de *inferência* e um estágio de saída - *defuzificador*.

Supondo que $\mathbb{R}^n$ é o universo de discurso, então dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ o fuzificador transforma x_0 em um conjunto fuzzy, $\hat{x}_0 \in F(\mathbb{R}^n)$.

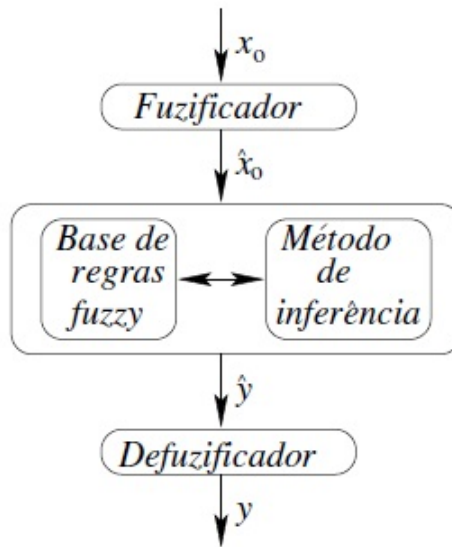


Figura 3.6: Esquema de um sistema baseado em regras fuzzy.

Normalmente isto pode ser feito simplesmente tomando $\hat{x}_0$ como a imagem da função característica de x_0 , isto é, a imagem de:

$$\hat{x}_0(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a = x_0, \\ 0, & \text{se } a \neq x_0. \end{cases}$$

O estágio de processamento é o núcleo do controlador fuzzy. Cada regra da base de regras é uma sentença do tipo: Se Condição Então Ação.

Normalmente estas sentenças são ligadas por conectivos: E, OU e NÃO. O método de inferência traduz estas regras matematicamente, por meio de t -norma e t -conormas, gerando para cada regra uma saída. A combinação destas saídas gera uma saída fuzzy do sistema, $\hat{y}_0 \in F(\mathbb{R}^n)$.

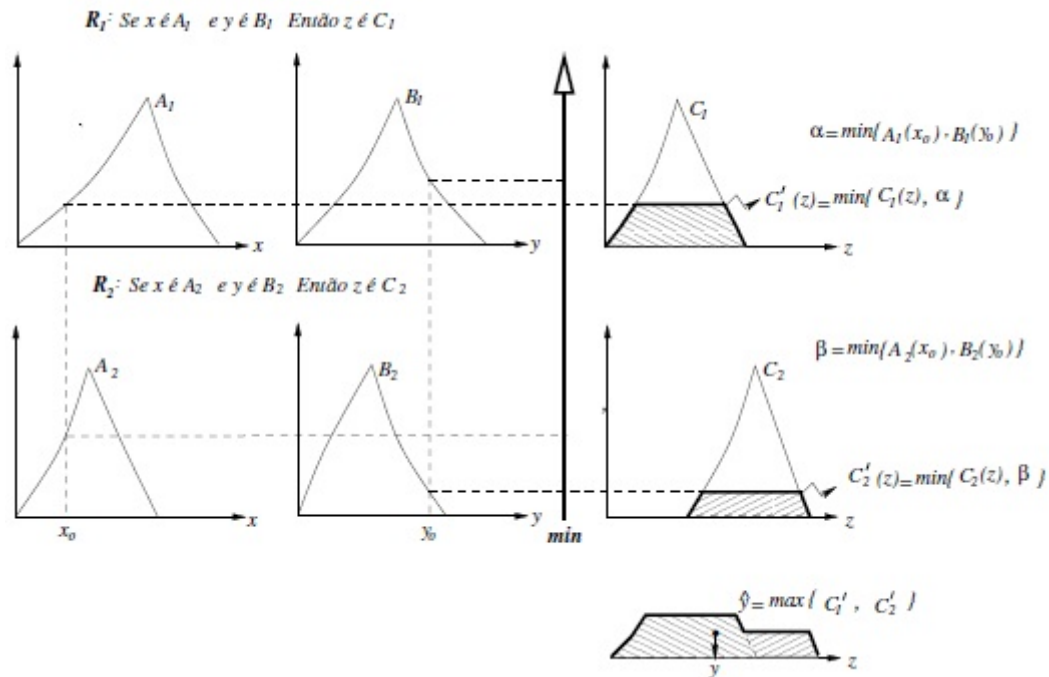


Figura 3.7: Sistema baseado em regras fuzzy com duas entradas e uma saída.

O método de inferência mais utilizado é o MAX-MIN, onde adota-se a t -norma $\wedge$ (mínimo) para modelar o conectivo "E" e a t -conorma $\vee$ (máximo) para agregar as regras fuzzy da base de regras. Normalmente sistemas do tipo Mamdani usam o MAX-MIN como t -normas e t -conormas.

A defuzificação é um processo de escolha de um elemento $y \in \text{supp}(\hat{y})$ tal que y seja capaz de representar o conjunto fuzzy $(\hat{y})$. Existem vários métodos de defuzificação descritos na literatura, o mais utilizado é o centro de gravidade.

A Figura anterior ilustra um controlador fuzzy com duas variáveis de entrada e uma variável de saída, usando o método de inferência MAX-MIN e como defuzificador o método do *centro de massa*.

Na Figura também podemos observar que dado $x_0 \in \text{supp}(A_1) \cap \text{supp}(A_2)$ e $y_0 \in \text{supp}(B_1) \cap \text{supp}(B_2)$ para cada regra $i = 1, 2$ é obtida uma saída, $C'_i(z) = (A_i(x_0) \wedge B_i(y_0) \wedge C_i(z))$. Daí, obtém-se o subconjunto fuzzy $\hat{y} = C'_1 \vee C'_2$. E, com a defuzificação de $\hat{y}$ obtém-se o número y , o qual é a abscissa do centro de massa da região limitada pela função de pertinência de $\hat{y}$.

3.2.4 Sistemas p-fuzzy

Um sistema p-fuzzy em $\mathbb{R}$ é um sistema dinâmico discreto,

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

onde a função F é dada por $F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$, a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, é dada, e a variação $\Delta(x_k) \in \mathbb{R}^n$ é obtida por meio de um sistema baseado em regras fuzzy. Nesse texto usamos o método de inferência de Mamdani, ou seja, trabalhamos com sistemas baseados em regras fuzzy do tipo Mamdani.

A arquitetura de um sistema p-fuzzy pode ser visualizada na Figura abaixo,

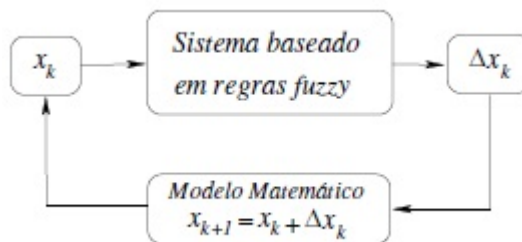


Figura 3.8: Esquema de um sistema p-fuzzy.

3.2.5 Sistemas p-fuzzy e Equações diferenciais

Motivados pelo grande sucesso de Newton com suas: "Equações do movimento", vários cientistas passaram a acreditar que tudo no universo poderia ser descrito por sistemas determinísticos e, qualquer parte do sistema poderia - em princípio - ser previsto a partir do conhecimento exato do seu estado inicial [9]. Com este pensamento,

as equações diferenciais tornaram-se a ferramenta mais utilizada para modelagem de problemas reais no século XVIII e começo do século XIX.

No entanto, mesmo quando é possível modelar, depois de formulado um modelo, resolvê-lo é algo quase sempre impossível do ponto de vista analítico, como assinalou Ian Stewart: "Montar as equações é uma coisa, resolvê-las é totalmente outra"[9]. Daí, os métodos numéricos passam a ser a única esperança de uma solução, aproximada, para o modelo.

Modelar é uma tarefa difícil, pois depende de conhecimento prévio do problema [4], e normalmente o que se tem são informações imprecisas. Nestes casos achamos improvável, se não impossível, dizer que uma função definida por uma determinada lei matemática, seja capaz de modelar o problema em questão. Nestes casos, ao invés de equações diferenciais, sugerimos uma função dada por uma base de regras, isto é um sistema p-fuzzy.

Para fazer uma análise comparativa entre as equações diferenciais e os sistemas p-fuzzy vamos considerar, em detalhes, o modelo logístico clássico,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x(1 - \frac{x}{k}) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

o qual tem por solução única, a curva

$$x(t) = \frac{x_0 k}{x_0 + (k - x_0)e^{-\alpha t}}$$

Para obter o sistema p-fuzzy utilizaremos as variáveis linguísticas: *população* e *variação*. A variável *população* será a variável de entrada (Figura 3.9), definida pelos termos linguísticos: *Baixa(B)*, *Média Baixa(MB)*, *Média(M)*, *Média Alta(MA)*, *Alta(A)* e *Altíssima(AL)* e a variável de saída, *variação* (Figura 3.10) será a definida pelos termos linguísticos: *Baixa Negativa(BN)*, *Baixa Positiva(BP)*, *Média Positiva(MP)* e *Alta Positiva(AP)*.

A base de regras depende do fenômeno estudado. Para este caso propomos a seguinte base de regras:

1. Se população é baixa então variação é baixa positiva;
2. Se população é média baixa então variação é média positiva;

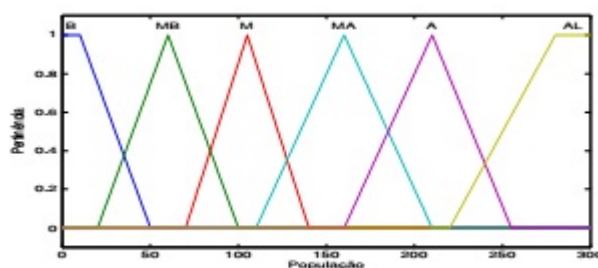


Figura 3.9: Variável entrada: População

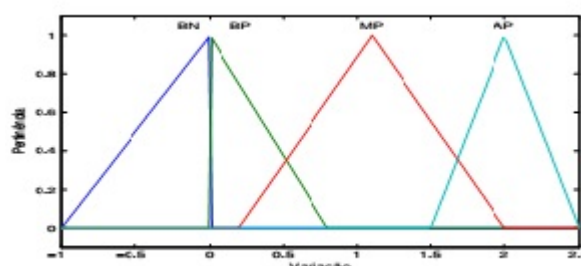


Figura 3.10: Variável saída: Variação

3. Se população é média então variação é alta positiva;
4. Se população é média alta então variação é média positiva;
5. Se população é alta então variação é baixa positiva;
6. Se população é altíssima então variação é baixa negativa;

As soluções: clássica e p-fuzzy podem ser vistas na Figura 3.11. Para solução clássica utilizamos $K = 234,714951$, $x_0 = 12,7945$ e $\alpha = 0,02232$.

Observe que as soluções são muito "parecidas". Isto é, com um sistema p-fuzzy simples podemos simular algo que na literatura é descrito por um modelo determinístico de equações diferenciais.

Uma observação interessante é que o método p-fuzzy pode auxiliar no cálculo dos parâmetros de um modelo clássico associado. Podemos utilizar o método p-fuzzy para obter os parâmetros para o modelo clássico, por exemplo, através de um ajuste de curva.

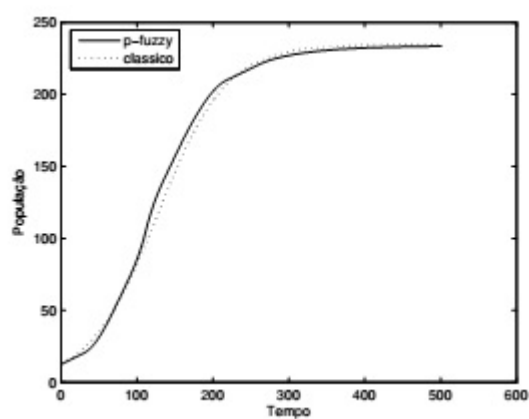


Figura 3.11: Gráfico logístico com $k = 234,71$ e $\alpha = 0,022$ e modelo p-fuzzy

De qualquer forma, a importância maior do modelo p-fuzzy é quando não se têm possibilidade de avaliar certos parâmetros ou quando as variáveis estão carregadas de subjetividades.

Capítulo 4

SISTEMA P-FUZZY UNIDIMENSIONAL

Neste capítulo, vamos abordar os sistemas p-fuzzy unidimensionais. Inicialmente apresentaremos as definições e os resultados matemáticos que julgamos necessários para o bom entendimento deste capítulo. Em seguida apresentaremos teoremas que garantem a existência e dão condições para unicidade do ponto de equilíbrio de um sistema p-fuzzy. Também apresentaremos exemplos e contra-exemplos que ilustram a teoria desenvolvida.

4.1 Definições Iniciais

Definição 4.1.1. Dado um sistema p-fuzzy unidimensional,

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k) \\ x_0 \text{ dado, e } x_k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$F(x_k) = x_k + \Delta(x_k)$, dizemos que x^* é um ponto de equilíbrio do sistema p-fuzzy acima se $F(x^*) = x^* \iff \Delta(x^*) = 0$.

Definição 4.1.2. Seja $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ uma família finita de subconjuntos fuzzy normais associados a uma variável linguística x . Dizemos que $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ é uma família de subconjuntos fuzzy sucessivos (Figura 4.1) se,

- (i) $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+1}) \neq \emptyset$, para cada $1 \leq i \leq k$;
- (ii) $\bigcap_{j=i,i+2} \text{supp}(A_j)$ possui no máximo um elemento para cada $1 \leq i \leq k-1$; isto é, $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+2}) \neq \emptyset$ se, e somente se, $\max\{x \in \text{supp}(A_i)\} = \min\{x \in \text{supp}(A_{i+2})\}$
- (iii) $\bigcup_{i=1,k} (\text{supp}(A_i)) = U$, onde U é o domínio das variáveis fuzzy x ;
- (iv) Sejam $z_1 \in \text{supp}(A_i)$ e $z_2 \in \text{supp}(A_{i+1})$, se $A_i(z_1) = 1$ e $A_{i+1}(z_2) = 1$, então necessariamente $z_1 < z_2$ para cada $1 \leq i \leq k$.

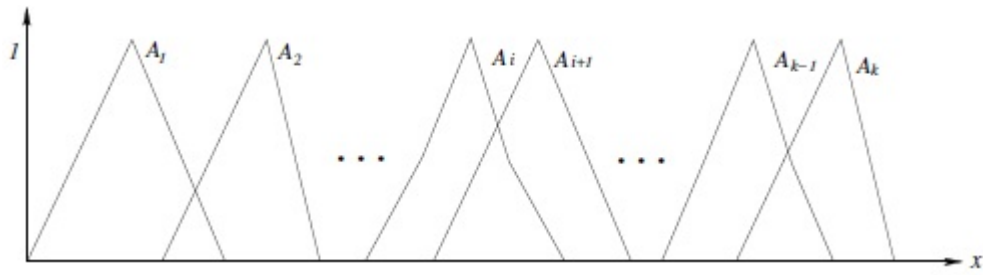


Figura 4.1: Família de conjuntos fuzzy sucessivos.

Definição 4.1.3. Consideremos o sistema p-fuzzy e uma família de subconjuntos fuzzy sucessivos. Se para algum $1 \leq i < k$, $z_1, z_2 \in \text{supp}(A_i \cup A_{i+1})$, $\Delta(z_1) \cdot \Delta(z_2) < 0$, então o subconjunto dado por: $\text{supp}(A^*)$, onde $A^* = A_i \cap A_{i+1}$, é denominado **conjunto viável de equilíbrio** do sistema p-fuzz.

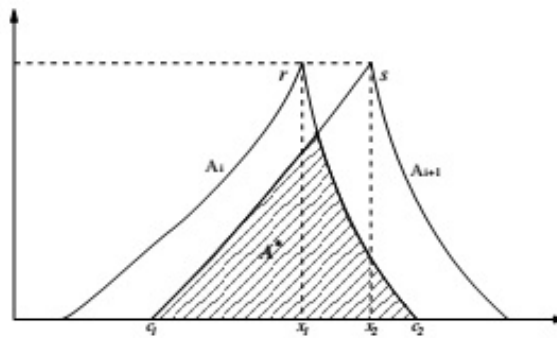


Figura 4.2: Conjunto viável de Equilíbrio.

Um sistema p-fuzzy depende do tipo de sistema fuzzy associado a ele. Isto é, da base de regras, do método de inferência e do método de defuzzificação utilizado. Na Definição 2.3, variações com sinais contrários significa que o sistema p-fuzzy está associado a um sistema fuzzy cuja a base de regras é do tipo:

- R_1 : Se x é A_i Então $\Delta(x)$ é C
- R_2 : Se x é A_{i+1} Então $\Delta(x)$ é D

onde $\text{supp}(C) \subset \mathbb{R}^-$ e $\text{supp}(D) \subset \mathbb{R}^+$ ou vice e versa.

Definição 4.1.4. Seja A uma região limitada pela função contínua $y = f(x)$, as retas $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x (Figura 2.3). O centro de gravidade ou centróide de A é o

ponto (x, y) onde

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad (4.1)$$

e

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} f(x)^2 dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad (4.2)$$

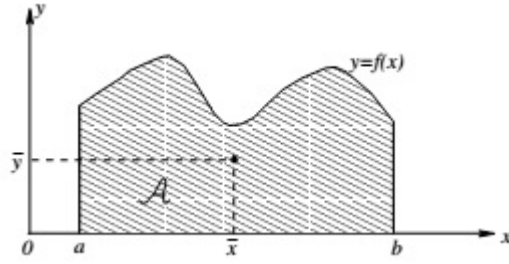


Figura 4.3: Representação geométrica do centróide.

Na teoria de sistemas fuzzy, usualmente centróide se refere apenas à abscissa do ponto $(\bar{x}, \bar{y})$. Portanto estaremos particularmente interessado em $\bar{x}$.

4.1.1 Defuzificação da saída do sistema fuzzy

Consideremos agora o sistema p-fuzzy associado ao sistema fuzzy de Mamdani. Seja $supp(A^*) = [c_1, c_2]$, $A^* = A_i \cap A_{i+1}$, um subconjunto viável de equilíbrio do sistema p-fuzzy. Para facilitar a notação indicaremos por r a função de pertinência de A_i , por s a função de pertinência de A_{i+1} .

$$z_1 = \min_{x \in supp(A_i)} \{r(x) = 1\} \text{ e } z_2 = \max_{x \in supp(A_{i+1})} \{s(x) = 1\},$$

e por f e g as respectivas funções de pertinência das saídas associadas a A_i e A_{i+1} .

Nestas condições indicaremos este sistema p-fuzzy por $(r, s) \rightarrow (g, f)$, afim de explicitar qual sistema está associado ao sistema p-fuzzy.

Dado $x \in supp(A^*)$, $\hat{\Delta}(x)$ é a curva que limita a região R. Ao valor defuzificado de $\Delta(x)$, pelo método de defuzificação centro de gravidade, indicaremos por $\Delta(x)$ e definimos:

$$\Delta(x) = \frac{\int_b^{f^{-1}(m)} t f(t) dt + \int_{f^{-1}(m)}^0 m t dt + \int_0^{g^{-1}(n)} n t dt + \int_{g^{-1}(n)}^a t g(t) dt}{\int_0^n g^{-1}(t) dt - \int_0^m f^{-1}(t) dt}$$

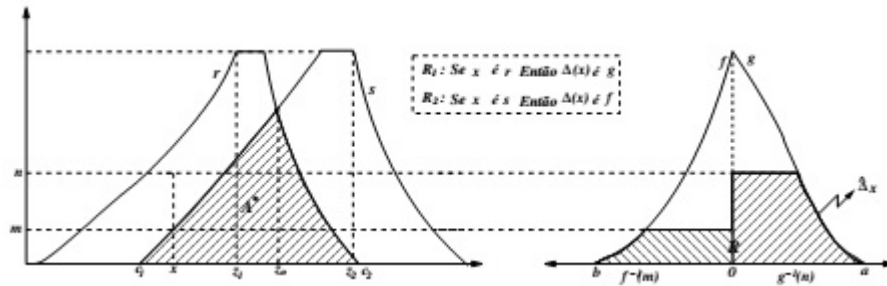


Figura 4.4: Processo de inferência Mamdani de um sistema $(r, s) \rightarrow (g, f)$.

onde $(n, m) = (r(x), s(x))$. A Equação ainda pode ser reescrita por:

$$\Delta(x) = \frac{h_1(n) + h_2(m)}{A(m, n)}$$

onde,

$$h_1(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} n t dt + \int_{g^{-1}(n)}^a t g(t) dt$$

$$h_2(m) = \int_b^{f^{-1}(m)} t f(t) dt + \int_{f^{-1}(m)}^m t dt$$

$$A(m, n) = \int_0^n g^{-1}(t) dt + \int_0^m f^{-1}(t) dt$$

Observe que $A(m, n)$ equivale a área da região R, onde decidimos reescrevê-la em função das funções inversas de f e de g .

Nesta seção vamos apresentar os resultados matemáticos necessários para a compreensão do restante do capítulo. Os resultados que seguem se referem ao sistema do tipo $(r, s) \rightarrow (g, f)$ da Figura 2.4. Para todos os resultados do restante deste Capítulo suporemos que as funções r, s, f e g são contínuas.

Lema 4.1.5. A função h_1 é crescente e sua imagem é dada por, $Im(h_1) = [0, \int_0^a t g(t) dt]$.

Demonstração 4.1.6. Como g é contínua em $[0, a]$ (portanto limitada, o que implica que g^{-1} é limitada) então a função h_1 é derivável, e,

$$h_1'(n) = \left(\int_0^{g^{-1}(n)} n t dt \right)' + \left(\int_{g^{-1}(n)}^a t g(t) dt \right)'$$

usando as propriedades de derivadas e integrais, segue que

$$h_1'(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} t dt + n \overbrace{\left(\int_0^{g^{-1}(n)} t dt \right)'}^* - \overbrace{\left(\int_a^{g^{-1}(n)} t g(t) dt \right)'}^{**}$$

usando em (*) o teorema fundamental do cálculo e a regra da cadeia, temos

$$* \left(\int_0^{g^{-1}(n)} t dt \right)' = \left(\left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{g^{-1}(n)} \right)' = \left(\frac{(g^{-1}(n))^2}{2} \right)' = ng^{-1}(n)(g^{-1})'(n)$$

agora fazendo $h(t) = tg(t)$ em (**) e aplicando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\begin{aligned} ** \left(\int_a^{g^{-1}(n)} tg(t) dt \right)' &= \left(\int_a^{g^{-1}(n)} h(t) dt \right)' = [h(t)t']_a^{g^{-1}(n)} = [tg(t)t']_a^{g^{-1}(n)} = \\ &= g^{-1}(n)g(g^{-1}(n))(g^{-1})'(n) - ag(a)a' = ng^{-1}(n)(g^{-1})'(n) \end{aligned}$$

pois $g(a) = 0$.

Assim,

$$h_1'(n) = \int_0^{g^{-1}(n)} t dt = \frac{(g^{-1}(n))^2}{2} > 0$$

portanto h_1 é crescente.

Agora,

$$h_1(0) = \int_0^{g^{-1}(0)} 0t dt + \int_{g^{-1}(0)}^a tg(t) dt = \int_a^a tg(t) dt = 0$$

e

$$h_1(1) = \int_0^{g^{-1}(1)} t dt + \int_{g^{-1}(1)}^a tg(t) dt = \int_0^a tg(t) dt$$

Logo

$$Im(h_1) = \left[0, \int_0^a tg(t) dt \right]$$

Lema 4.1.7. A função h_2 é decrescente e sua imagem é dada por, $Im(h_2) = \left[\int_b^0 tf(t) dt, 0 \right]$.

Demonstração 4.1.8. Faze-se de modo análogo, bastando verificar que

$$Im(h_2) = -\frac{(f^{-1}(m))^2}{2} < 0.$$

Considerando ainda o sistema p-fuzz $(r, s) \rightarrow (g, f)$ da Figura 2.4.

Lema 4.1.9. Se $g(t) > f(-t), \forall t \in [0, -b]$ então $g^{-1}(k) > -f^{-1}(k) \forall k \in [0, 1]$.

Demonstração 4.1.10. Basta observar a figura 4.5

Observação 4.1.11. Usamos D_g e D_f para representar respectivamente: $supp(\hat{\Delta}) \cap \mathbb{R}^+$ e $supp(\hat{\Delta}) \cap \mathbb{R}^-$.

Lema 4.1.12. Se $g(t) > f(-t), \forall t \in [0, -b]$ então para $m, n \in [0, 1]$ com $m \leq n$, existe um

$$\Delta(x) = \frac{h_1(n) + h_2(m)}{A(m, n)} > 0$$

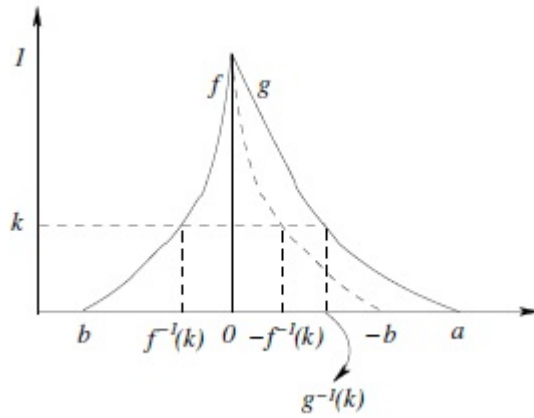


Figura 4.5: Sistema p-fuzzy com saída $g(t) > f(-t)$.

Demonstração 4.1.13. Seja $H(m, n) = h_1(n) + h_2(m)$, é suficiente mostrar que $H(m, n) > 0$, pois $A(m, n) > 0$. Vamos considera primeiro que dado $k \in [0, 1]$ tem-se $H(k, k) > 0$, para isto faremos em dois casos.

Suponhamos primeiro que $k \in [0, 1]$ é tal que $g^{-1}(k) \leq -b$. Temos que,

$$H(k, k) = h_1(k) + h_2(k) = \int_0^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(k)}^0 ktdt, \text{ pelo lema 4.1.12}$$

segue portanto

$$\overbrace{\int_0^{-f^{-1}(k)} ktdt + \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} (k)ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt + \int_{f^{-1}(k)}^0 ktdt}^{H(k,k)} \quad (4.4)$$

Como $\int_0^{-f^{-1}(k)} ktdt = -\int_{-f^{-1}(k)}^0 ktdt$ de (4.4)

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt + \int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt \quad (4.5)$$

Temos que $\int_b^{f^{-1}(k)} tf(t)dt = -\int_{-f^{-1}(k)}^{-b} tf(-t)dt = -\int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} tf(-t)dt - \int_{g^{-1}(k)}^{-b} tf(-t)dt$, visto que por hipótese que $g^{-1}(k) \leq -b$

Substituindo este resultado em (4.5) tem-se

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} ktdt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt - \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} tf(-t)dt - \int_{g^{-1}(k)}^{-b} tf(-t)dt \quad (4.6)$$

Podemos ficar ainda com (4.6) da seguinte forma

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} [kt - tf(-t)]dt + \int_{g^{-1}(k)}^a tg(t)dt - \int_{g^{-1}(k)}^b tf(-t)dt \quad (4.7)$$

Como $a > -b$ de (4.7) tem-se,

$$H(k, k) = \int_{-f^{-1}(k)}^{g^{-1}(k)} [kt - tf(-t)]dt + \int_{g^{-1}(k)}^{-b} [tg(t) - tf(-t)]dt + \int_{-b}^a tg(t)dt \quad (4.8)$$

Como para todo $t \in [0, b]$ tem-se $k > f(t) = f(-t) \Leftrightarrow kt - tf(-t) > 0$ e pelo lema 4.1.9 tem-se $tg(t) - tf(-t) > 0$ então todos os termos de (4.8) são assim todos positivos, logo $H(k, k) > 0$.

Se dado $k \in [0, 1]$ tivermos $g^{-1}(k) > -b$ a demonstração é análoga. Assim em qualquer caso, tem-se:

$$H(k, k) > 0. \quad (4.9)$$

Dados $m, n \in [0, 1]$, $m \leq n$ temos de (4.9) que $h_1(m) + h_2(m) > 0 \Leftrightarrow -h_2(m) < h_1(m)$. Como h_1 é crescente tem-se $-h_2(m) < h_1(m) \leq h_1(n)$.

Daí $H(n, m) > 0 \Rightarrow \Delta(x) > 0$

Lema 4.1.14. Se $g(t) < f(-t)$, $\forall t \in [0, a]$ e $m, n \in [0, 1]$ com $m \geq n$, então

$$\Delta(x) < 0.$$

Demonstração 4.1.15. Análoga a demonstração do lema 4.1.12

4.2 Existência de ponto de equilíbrio

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos um teorema que garante a existência de ao menos um ponto de equilíbrio para cada região de equilíbrio de um sistema p-fuzzy. Para isso, ainda usaremos a Figura 4.4 para motivar os resultados apresentados.

Teorema 4.2.1. (Existência) Seja S um sistema p-fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (g, f)$. Então, S possui ao menos um ponto de equilíbrio. Isto é, $\exists x \in A^*$ tal que $\Delta(x^*) = 0$.

Demonstração 4.2.2. Dado $x \in A^*$, pela Definição 4.1.1 x é um ponto de equilíbrio se, e somente se,

$$\Delta(x) = 0 \Leftrightarrow h_1(n) + h_2(m) = 0.$$

Se $\mu_{A_i}(c_1) = 0$ então

$$\Delta(c_1) = h_1(\mu_{A_i}(c_1)) + h_2(\mu_{A_{i+1}}(c_1)) = h_1(0) + h_2(0) = 0$$

e, portanto c_1 é ponto de equilíbrio. Se $\mu_{A_{i+1}}(c_2) = 0$ tem-se $\Delta(c_2) = 0$ logo c_2 é ponto de equilíbrio. Suponhamos que $\mu_{A_i}(c_1) > 0$ e $\mu_{A_{i+1}}(c_2) > 0$. Como $\mu_{A_{i+1}}(c_1) = 0$, então, do Lema 4.1.5 e Lema 4.1.7 $h_1(\mu_{A_i}(c_1)) > 0$ e $h_2(\mu_{A_{i+1}}(c_1)) = 0$. Daí,

$$\Delta(c_1) = h_1(\mu_{A_i}(c_1)) + h_2(\mu_{A_{i+1}}(c_1)) = h_1(\mu_{A_{i+1}}(c_1)) > 0$$

Analogamente

$$\Delta(c_2) = h_1(\mu_{A_i}(c_2)) + h_2(\mu_{A_{i+1}}(c_2)) = h_1(\mu_{A_{i+1}}(c_2)) < 0$$

Como Δ é contínua, pelo teorema do valor intermediário, $\exists x^* \in [c_1, c_2]$ tal que $\Delta(x^*) = 0 \Rightarrow x^*$ é ponto de equilíbrio.

Observação 4.2.3. Se considerarmos no Teorema 4.2.1, ao invés de A^* como um conjunto viável de equilíbrio do tipo $(A_i, A_{i+1}) \Rightarrow (f, g)$, o resultado seria análogo. Isto é, existe um ponto de equilíbrio $x^* \in A^*$.

4.2.1 Ponto de equilíbrio - saída simétrica

Quando a variável de saída do sistema fuzzy está associada à funções simétricas, o ponto de equilíbrio de um conjunto viável de equilíbrio é único.

Proposição 4.2.4. *Seja S um sistema p -fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S do tipo $(A_i, A_{i+1}) \Rightarrow (B, C)$. Se as funções de pertinência de B e C , são respectivamente μ_B e μ_C , são monótonas e simétricas, isto é $\mu_C(t) = \mu_B(-t)$, então existe um ponto de equilíbrio de S em A^* é:*

$$x^* = \max_{x \in A^*} [\min(\mu_{A_i}(x), \mu_{A_{i+1}}(x))]^0$$

Demonstração 4.2.5. Como $\mu_B(t) = \mu_C(-t)$ então $\mu_B(-a) = \mu_C(a) = 0 = \mu_B(b) \Rightarrow b = -a$, pois μ_B é monótona. Temos ainda que, $\mu_B(t) = \mu_C(-t) \Rightarrow \mu_B^{-1}(\mu_C(t)) = -t = -\mu_B^{-1}(\mu_B(t)) \Rightarrow \mu_B^{-1}(y) = -\mu_C^{-1}(y)$. Então, $\Delta(z_0) = 0$ se, somente se, $h_1(n) = -h_2(m)$.

Como $b = -a$,

$$h_2(m) = \int_{-a}^{\mu_B^{-1}(m)} t \mu_B(t) dt + \int_{\mu_B^{-1}(m)}^0 m t dt$$

fazendo amudança de variáveis $u = -t$ tem-se,

$$\begin{aligned} h_2(m) &= \int_a^{\mu_B^{-1}(m)} u \mu_B(-u) du + \int_{\mu_B^{-1}(m)}^0 m u du \Rightarrow \\ \Rightarrow h_2(m) &= \int_{-a}^{\mu_C^{-1}(m)} u \mu_C(u) du + \int_{\mu_C^{-1}(m)}^0 m u du = -h_1(m). \end{aligned}$$

Isto é, $h_2 = -h_1$. Daí, $h_1(n) = -h_2(m) \Leftrightarrow h_1(n) = h_1(m) \Leftrightarrow m = n$ (pois h_1 é crescente), isso mostra a proposição.

Observação 4.2.6. Se $\mu_{A_i}(c_1) \neq 0$, então $x^* = \max_{x \in A^*} [\min(\mu_{A_i}(x), \mu_{A_{i+1}}(x))]$ é o único ponto de equilíbrio do sistema. Além disso, se o sistema for do tipo $(A_i, A_{i+1}) \Rightarrow (B, C)$ o resultado da proposição 4.2.4 é o mesmo.

4.3 Unicidade do ponto de equilíbrio

Agora que já conhecemos a teoria matemática vista anteriormente, podemos estudar a unicidade do ponto de equilíbrio de um sistema p-fuzzy unidimensional. Vamos também, enunciar e demonstrar, teoremas que estabelecem condições suficientes para unicidade do ponto de equilíbrio de um sistema p-fuzzy unidimensional.

Vamos supor que as regiões de equilíbrios são tais que $r(c_1) \neq 0$ e $s(c_2) \neq 0$, para facilitar a notação. Além disso, quando temos $r(c_1) = 0$ ou $s(c_2) = 0$ pode não haver unicidade de ponto de equilíbrio.

Inicialmente vamos considerar o caso mais simples, quando $A^* \subset [z_1, z_2]$ (figura 4.6), onde, $z_1 = \min_{x \in \text{supp}(A_i)} \{r(x) = 1\}$ e $z_2 = \max_{x \in \text{supp}(A_{i+1})} \{s(x) = 1\}$

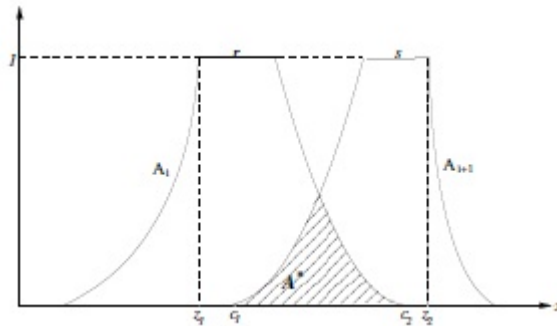


Figura 4.6: Conjunto viável de Equilíbrio.

Teorema 4.3.1. *Seja S um sistema p -fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S do tipo $(A_i, A_{i+1}) \Rightarrow (C, B)$. Se as funções μ_{A_i} e $\mu_{A_{i+1}}$ são monótonas por partes e $A^* \subset [z_1, z_2]$ então, existe um único ponto de equilíbrio em A_* .*

Demonstração 4.3.2. Dado um $x \in A^*$ temos que

$$\Delta(x) = h_1(n) + h_2(m) = h_1(r(x)) + h_2(s(x)).$$

Usando os Lemas 2.1 e 2.2 e a regra da cadeia temos que a derivada de Δ é dada por,

$$\Delta'(x) = \frac{[\mu_C^{-1}(\mu_{A_i}(x))]^2}{2} \mu'_{A_i}(x) - \frac{[\mu_B^{-1}(\mu_{A_{i+1}}(x))]^2}{2} \mu'_{A_{i+1}}(x)$$

Como, em $A^* = [c_1, c_2]$, μ_{A_i} é não crescente e $\mu_{A_{i+1}}$ é não decrescente então $\mu'_{A_i}(x) \leq 0$ e $\mu'_{A_{i+1}}(x) \geq 0$ e, além disso, se $\mu'_{A_i}(x) = 0$ tem-se $\mu'_{A_{i+1}}(x) \neq 0$ e se $\mu'_{A_{i+1}}(x) = 0$ tem-se $\mu'_{A_i}(x) \neq 0$. Então, $\Delta'(x) < 0$ o que mostra que Δ é decrescente. Como, pelo Teorema 2.1, existe um ponto de equilíbrio em A^* , ele é único.

Observação 4.3.3. Se no Teorema anterior tivéssemos f e g monótonas por parte (Figura 4.6) ainda assim teríamos um único ponto de equilíbrio. Basta observar que neste caso teríamos

$$\begin{aligned} h_1(n) &= \int_{a_1}^{g_1^{-1}(n)} t g_1(t) dt + \int_{g_1^{-1}(n)}^{g_2^{-1}(n)} n t dt + \int_{g_2^{-1}(n)}^{a_2} t g_2(t) dt \\ h_2(m) &= \int_{b_1}^{f_1^{-1}(m)} t f_1(t) dt + \int_{f_1^{-1}(m)}^{f_2^{-1}(m)} m t dt + \int_{f_2^{-1}(m)}^{b_2} t f_2(t) dt \end{aligned}$$

daí obtem-se

$$h'_1(n) = \frac{1}{2} \left\{ \left[g_2^{-1}(n) \right]^2 - \left[g_1^{-1}(n) \right]^2 \right\} > 0, \text{ pois } g_1^{-1}(n) < g_2^{-1}(n)$$

e

$$h'_2(m) = \frac{1}{2} \left\{ \left[f_2^{-1}(m) \right]^2 - \left[f_1^{-1}(m) \right]^2 \right\} < 0, \text{ pois } f_1^{-1}(m) < f_2^{-1}(m).$$

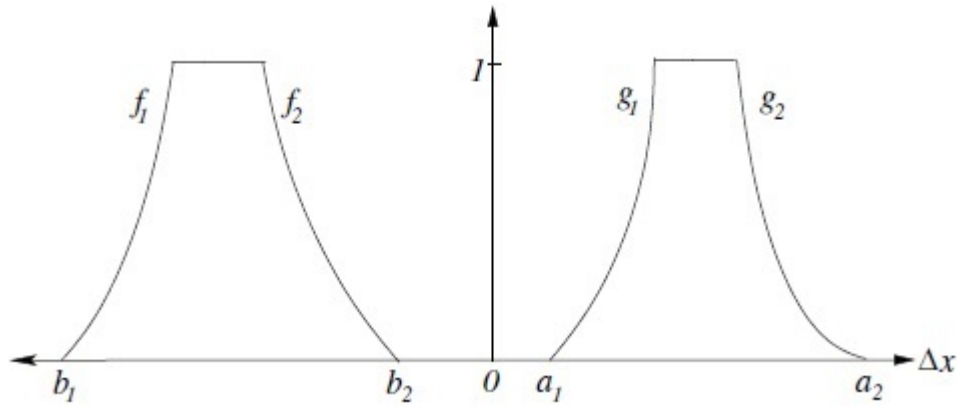


Figura 4.7: funções f e g monótonas por partes

Agora iremos tratar o caso mais geral, onde $A^* \not\subset [z_1, z_2]$, considerando inicialmente as funções de pertinência μ_C e μ_B tal que $\mu_C(t) > \mu_B(-t)$, o outro caso ocorre quando $\mu_C(t) < \mu_B(-t)$.

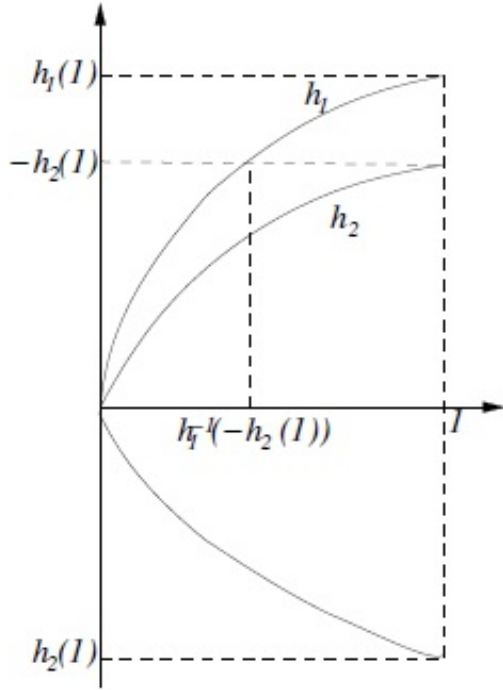
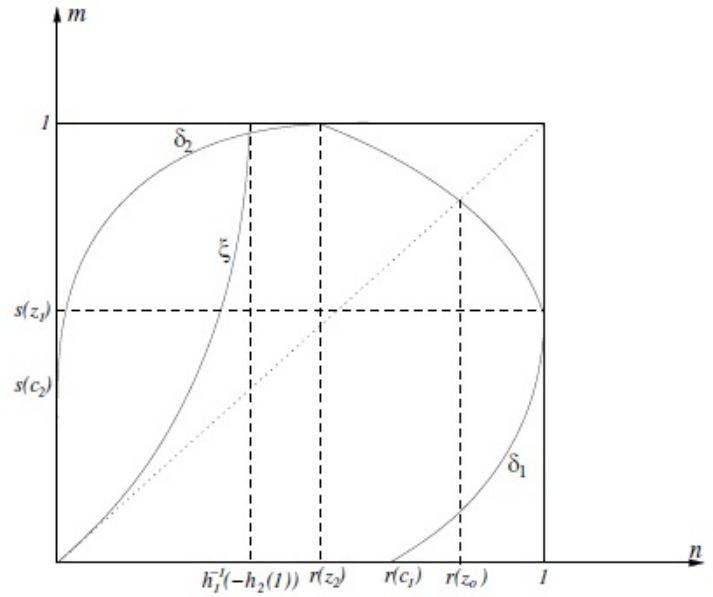
Teorema Principal 1. Seja S um sistema p-fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (C, B)$. Se as funções $\mu_{A_i}, \mu_{A_{i+1}}, \mu_B$ e μ_C são continuamente diferenciáveis; μ_{A_i} e $\mu_{A_{i+1}}$ monótonas por partes, μ_B e μ_C estritamente monótonas, tais que:

- (i) $\mu_C(t) > \mu_B(-t), \forall t \in (0, -b)$;
- (ii) $\frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} < \frac{p^3}{q^3}, \forall p \in \text{supp}(B), q \in \text{supp}(C)$ e $\mu_B(p) > \mu_C(q)$;
- (iii) $\left[\frac{\mu'_{A_{i+1}}(x)}{\mu'_{A_i}(x)} \right]' \leq 0, \forall x \in (z_0, c_2), \mu_{A_i}(x) \neq \mu_{A_{i+1}}(x)$.

Então, S possui um único ponto de equilíbrio, $x^* \in A^*$, e $x^* \in [z_0, c_2]$.

Demonstração 4.3.4. Para simplificar a notação, vamos considerar $r = \mu_{A_i}, s = \mu_{A_{i+1}}, f = \mu_B$ e $g = \mu_C$. Inicialmente, observemos que dado $x \in (z_0; c_2]$ (Figura 2.4), x determina um único par $(n, m) \in [0; 1]^2$ tal que $n = r(x)$ e $m = s(x)$. Pela monotonicidade de r , temos que para cada $n \in [0, r(z_0))$ existe um único $m \in [0, 1]$ tal que $n = r(x)$ e $m = s(x)$. Isto é, para cada par (n, m) nestas condições, determina um único $x \in (z_0; c_2]$.

Pelo Teorema 4.2.1 existe um ponto de equilíbrio $x^* \in [c_1, c_2] = [c_1, z_0] \cup [z_0, c_2]$. Dado $x \in [c_1, z_0] \Rightarrow m = s(x) \leq n = r(x)$. Então, pelo Lema 4.1.12 $x^* \notin [c_1, z_0] \Rightarrow x^* \in (z_0, c_2]$. Ou equivalentemente, existe um único (n^*, m^*) com $n^* \in [0, r(z_0))$ tal que $H(n^*, m^*) = 0$.

Figura 4.8: funções h_1 e h_2 Figura 4.9: funções ξ , δ_1 e δ_2

Como para cada $n \in [0; r(z_0))$, existe um único $m \in [0; 1]$ tal que $n = r(x)$ e $m = s(x)$, então podemos definir uma função $\delta_2 : [0, r(z_0)) \rightarrow [0, 1]$ tal que $m = \delta_2(n)$ (Figura 4.8). Observe também que δ_2 é contínua, pois r e s são contínuas. Utilizando a regra da cadeia, a derivada de δ_2 é dada por:

$$\delta'(n) = \frac{s'(x)}{r'(x)} \Rightarrow \delta''(n) \leq 0, \forall n \in D_{\delta_2}. \quad (4.10)$$

Pelo lema 4.1.5 e lema 4.1.7, h_1 e $-h_2$ são crescentes e pela condição (i), segue que (Figura 4.7):

$$\int_0^a tg(t)dt > - \int_b^0 tf(t)dt \Leftrightarrow h_1(1) > -h_2(1).$$

Então, dado $n \in [0, h_1^{-1}(h_2(1))]$, existe um único $m \in [0, 1]$ tal que

$$h_1(n) = -h_2(m) \Leftrightarrow h_1(n) + h_2(m) = 0.$$

. Daí, pode-se definir uma função injetiva ξ , $m = \xi(n)$ (Figura 4.8) tal que a imagem inversa de 0 por H é

$$H^{-1}(0) = \{(n, m); m = \xi(n)\},$$

onde $H : [0, h_1^{-1}(-h_2(1))] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $H(n, m) = h_1(n) + h_2(m)$.

Como já vimos (Lema 4.1.5) que $\frac{\partial H}{\partial n} = h_1'(n) = \frac{(g_1(n))^2}{2} > 0$ e (Lema 4.1.7) que $\frac{\partial H}{\partial m} = h_2'(m) = \frac{-(g_{-1}(m))^2}{2} < 0$, então pelo Teorema da Função Implícita (Teorema 2.3.1), ξ é k vezes diferenciável e, além disso:

$$\xi'(n) = -\frac{\frac{dh_1}{dn}}{\frac{dh_2}{dm}} = \left[\frac{g_{-1}(n)}{f_{-1}(m)} \right]^2 > 0, \quad \forall n \in (0, h_1^{-1}(-h_2(1))), m \in (0, 1) \text{ e } m = \xi(n) \quad (4.11)$$

Logo, ξ é uma função estritamente crescente e como $H(0, 0) = 0$ e $H(h_1^{-1}(-h_2(1)), 1) = 0$ então $D_\xi = [0, h_1^{-1}(h_2(1))]$ e $Im_\xi = [0, 1]$.

Dado $m, n \in (0, 1)$ existe um único $p \in (b, 0)$ tal que $p = f^{-1}(m)$ e existe um único $q \in (0, a)$ tal que $q = g^{-1}(n)$, pois f e g são estritamente monótonas, por hipótese.

Do Lema 4.1.12 temos que $m \leq n \Rightarrow H(m, n) > 0$. Daí $H(m; n) = 0 \Rightarrow m > n$. Portanto, estamos interessados nos pares (m, n) tais que, $m > n$. Temos que,

$$m > n \Leftrightarrow f(p) > g(q) \quad (4.12)$$

Como f e g são monótonas, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange (Teorema 2.1.64), têm-se:

$$p = f^{-1}(m) \Leftrightarrow (f^{-1})'(m) = \frac{1}{f'(p)} \quad (4.13)$$

$$q = g^{-1}(n) \Leftrightarrow (g^{-1})'(n) = \frac{1}{g'(q)} \quad (4.14)$$

Então,

$$m > n \Leftrightarrow f(p) > g(q) \Rightarrow \frac{g'(q)}{f'(p)} < \frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow \frac{(f^{-1})'(m)}{(g^{-1})'(n)} < \frac{[(f^{-1})(m)]^3}{[(g^{-1})(n)]^3}$$

Portanto,

$$m > n \Rightarrow (f^{-1})'(m) [g^{-1}(n)]^3 - (g^{-1})'(n) [f^{-1}(m)]^3 > 0. \quad (4.15)$$

Derivando ξ' , obtemos

$$\xi''(n) = \frac{-2g^{-1}(n)}{[f^{-1}(m)]^5} \left\{ (f^{-1})'(m) [g^{-1}(n)]^3 - (g^{-1})'(n) [f^{-1}(m)]^3 \right\}$$

e como $\frac{-2g^{-1}(n)}{[f^{-1}(m)]^5} > 0, \forall m, n \in (0, 1)$ tem-se,

$$\xi''(n) > 0, \forall n \in \text{int} D_{\xi}. \quad (4.16)$$

Tomemos agora $I = D_{\xi} \cap D_{\delta_2} = D_{\xi} \cap [0, r(z_0))$ e definamos a função $\phi : I \rightarrow [0, 1]$ tal que,

$$\phi(n) = \xi(n) - \delta_2(n). \quad (4.17)$$

Então, por (4.10) e (4.16) tem-se $\phi''(n) > 0$, para qualquer $n \in I$.

Como $\xi(0) = 0$ e a condição (iii) do teorema implica $\delta_2(0) > 0$, então tem-se $\phi(0) < 0$. Logo, em decorrência do lema existe um único $n^* \in I$ tal que,

$$\phi(n^*) = 0 \Leftrightarrow \xi(n^*) = \delta_2(n^*) \quad (4.18)$$

Como $\xi = H^{-1}(0)$ então, temos que

$$0 = H(n^*, \xi(n^*)) = H(n^*, \delta_2(n^*))$$

Logo, existe um único $x^* \in (z_0, c_2]$, $n^* = r(x^*)$ e $m^* = \delta_2(n^*) = s(x^*)$ tal que,

$$\Delta(x^*) = \frac{H(n^*, m^*)}{A(n^*, m^*)} = 0,$$

o que finaliza a demonstração do teorema.

Teorema Principal 2. Seja S um sistema p-fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S do tipo $(A_i, A_{i+1}) \rightarrow (C, B)$. Se as funções $\mu_{A_i}, \mu_{A_{i+1}}, \mu_B$ e μ_C são continuamente diferenciáveis; μ_{A_i} e $\mu_{A_{i+1}}$ monótonas por partes, μ_B e μ_C estritamente monótonas, tais que:

- (i) $\mu_C(t) < \mu_B(-t), \forall t \in (0, a)$;
- (ii) $\frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} > \frac{p^3}{q^3}, \forall p \in \text{supp}(B), q \in \text{supp}(C)$ e $\mu_B(p) > \mu_C(q)$;
- (iii) $\left[\frac{\mu'_{A_{i+1}}(x)}{\mu'_{A_i}(x)} \right]' \leq 0, \forall x \in (z_0, c_2), \mu_{A_i}(x) \neq \mu_{A_{i+1}}(x)$.

Então, S possui um único ponto de equilíbrio, $x^* \in A^*$, e $x^* \in [c_1, z_0]$.

Demonstração 4.3.5. Análoga à demonstração anterior.

4.4 Considerações sobre a unicidade do teorema

Nesta seção será discutidos alguns pontos importantes sobre a unicidade dos teoremas principal 1 e principal 2. São eles:

1. Que condições as funções $\mu_B(t)$ e $\mu_C(t)$ variáveis de saída, devem respeitar?
2. As hipóteses que aparecem no teorema não são fortes demais?
3. Para quais tipos de funções fuzzy o teorema em questão, vale?

Quando não temos $\mu_C(t) > \mu_B(-t)$ ou $\mu_C(t) < \mu_B(-t)$ não tem como se estabelecer condições gerais sobre o ponto de equilíbrio, como foi feito nos casos anteriores para o teorema.

De fato, consideremos o sistema p-fuzzy ilustrado abaixo. Este sistema possui um conjunto viável de equilíbrio, A^* , $A^* = A_1 \cap A_2 = [5, 90]$.

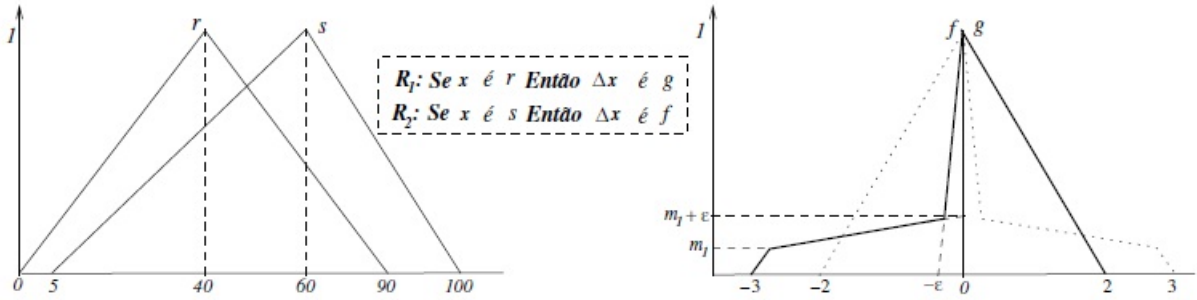


Figura 4.10: Existência de mais de um ponto de equilíbrio

Os conjuntos que descrevem a variável de entrada têm como funções de pertinência:

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{40}x, & \text{se } 0 < x \leq 40 \\ -\frac{1}{50}x + \frac{9}{5}, & \text{se } 40 < x \leq 90 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{e } \mu_{A_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{55}x - \frac{1}{11}, & \text{se } 5 < x \leq 60 \\ -\frac{1}{40}x + \frac{5}{2}, & \text{se } 60 < x \leq 100 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e os conjuntos que descrevem a variável de saída têm função de pertinências:

$$\mu_C(t) = \frac{-1}{2}t + 1 \text{ e}$$

$$\mu_B(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t + 1, & \text{se } -3 < t \leq 3(m_1 - 1) \\ \frac{\xi}{3(m_1 - 1)}t + m_1 + \xi, & \text{se } 3(m_1 - 1) < t \leq \frac{3\xi(\xi + m_1 - 1)(m_1 - 1)}{3(m_1 - 1) + \xi^2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.19)$$

Se fizermos em (4.19), $m_1 = 0.1$ e $\xi = 0.1$ o sistema p-fuzzy obtido possui três pontos de equilíbrio em A^* , como podemos ver na figura 4.11, onde consta o gráfico de Δ .

Se tomarmos, por exemplo, $\xi = 0.3$ e $m_1 = 0.3$ temos que o sistema p-fuzzy obtido possui somente um ponto de equilíbrio (figura 4.12).

Assim vemos que o teorema estabelece condições suficientes para a unicidade do ponto de equilíbrio.

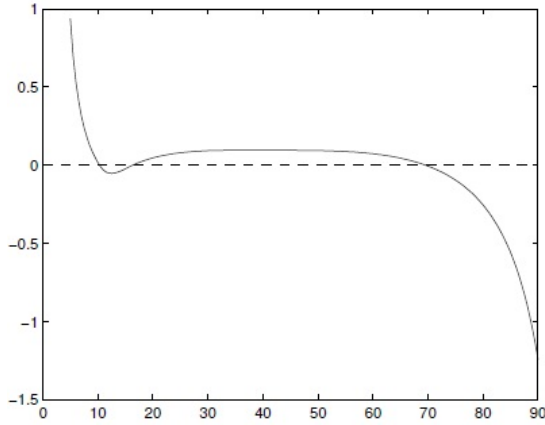


Figura 4.11: Gráfico da função Δ com $m_1 = \zeta = 0.1$ no sistema p-fuzzy da figura 4.10

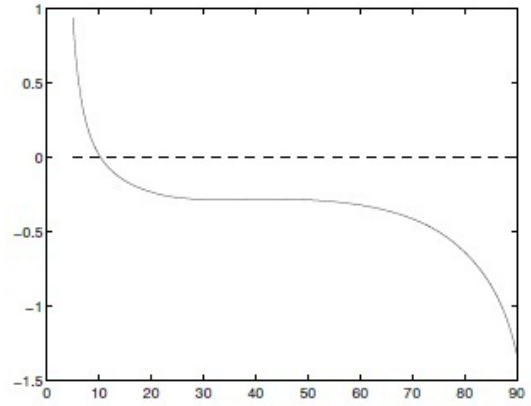


Figura 4.12: Gráfico da função Δ com $m_1 = 0.1$ e $\zeta = 0.4$ no sistema p-fuzzy da figura 4.10

4.4.1 Consequências do teorema de unicidade

Agora vamos observar algumas consequências importantes, referentes ao teorema. Será observado que para funções de pertinência do tipo triangular e trapezoidal o ponto de equilíbrio é único.

Antes vamos considerar ainda os resultados:

Lema 4.4.1. Se $\mu_B(p) > \mu_C(q)$ então $q > -p$, onde $p = \mu_B^{-1}(m)$ e $q = \mu_C^{-1}(n)$.

Demonstração 4.4.2. De fato, temos que $\mu_B(p) > \mu_C(q) \Rightarrow m > n$, daí usando o lema 4.1.9 e como onde $-\mu_{B-1}$ é decrescente, pois μ_B é crescente, então:

$$q = \mu_C^{-1}(n) > -\mu_B^{-1}(n) > -\mu_B^{-1}(m) = -p \Rightarrow q > -p$$

Lema 4.4.3. Se $\mu_B(p) < \mu_C(q)$ então $q < -p$, onde $p = \mu_B^{-1}(m)$ e $q = \mu_C^{-1}(n)$.

Demonstração 4.4.4. De fato, temos que $\mu_B(p) < \mu_C(q) \Leftrightarrow m < n$, daí usando lema 4.1.9 e como onde $-\mu_{B-1}$ é decrescente, pois μ_B é crescente, o que implica $\mu_B^{-1}(n) < -\mu_B^{-1}(m)$

$$q = \mu_C^{-1}(n) < -\mu_B^{-1}(n) < -\mu_B^{-1}(m) = -p \Rightarrow q < -p.$$

Corolário 4.4.5. Seja S um sistema p-fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S . Se μ_{Ai} , μ_{Ai+1} , μ_{AB} e μ_{AC} forem números fuzzy triangulares então S possui um único ponto de equilíbrio em A .

Demonstração 4.4.6. Vamos fazer para um sistema do tipo $(\mu_{A_i}, \mu_{A_{i+1}}) \rightarrow (\mu_B, \mu_C)$. O outro caso a demonstração é análoga.

Se $a = b$ então μ_{A_i} e $\mu_{A_{i+1}}$ são simétricas e segue da proposição 4.2.4 que, o ponto de equilíbrio é único,

$$x^* = \max_{x \in A^*} [\min(\mu_{A_i}(x), \mu_{A_{i+1}}(x))]^0$$

.

Consideremos agora $a > b$, então $\mu_{A_i}, \mu_{A_{i+1}}, \mu_B$ e μ_C satisfazem o teorema 1.

De fato,

(i) xxx.

(ii) Como $\mu_B(t) = -\frac{1}{b}t + 1$ e $\mu_C(t) = -\frac{1}{a}t + 1$ então $\mu_B(p) > \mu_C(q) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{b}{a} < \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} < \frac{p}{q}$. Do lema 4.4.1 temos que $q < -p \Rightarrow \frac{p}{q} < \frac{p^3}{q^3}$, portanto tem-se

$$\frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} < \frac{p^3}{q^3}.$$

(iii) Para todo $x \in (z_0, c_1)$ com $\mu_{A_i}(x) \neq \mu_{A_{i+1}}(x)$, temos:

$$\mu_{A_i}(x) = -\frac{1}{\{c_1 - z_0\}}x + \frac{c_1}{(c_1 - z_0)} \quad \text{e} \quad \mu_{A_{i+1}}(x) = \frac{1}{\{c_1 - z_0\}}x - \frac{z_0}{(c_1 - z_0)}.$$

Segue portanto que

$$\left[\frac{\mu'_{A_{i+1}}(x)}{\mu'_{A_i}(x)} \right]' = \left[\frac{\frac{1}{\{c_1 - z_0\}}}{-\frac{1}{\{c_1 - z_0\}}} \right]' \leq 0.$$

Suponhamos agora $a < b$, então $\mu_{A_i}, \mu_{A_{i+1}}, \mu_B$ e μ_C satisfazem o teorema 2.

De fato, (i) e (ii) são triviais e $\mu_B(p) > \mu_C(q) \Rightarrow \frac{b}{a} > \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} > \frac{p}{q}$. Pelo lema 4.4.3 temos que $q < -p \Rightarrow \frac{p}{q} > \frac{p^3}{q^3}$ e, portanto tem-se $\frac{\mu'_C(q)}{\mu'_B(p)} > \frac{p^3}{q^3}$ verificando assim (ii) e que prova o colorário.

Corolário 4.4.7. *Seja S um sistema p-fuzzy e A^* um conjunto viável de equilíbrio de S. Se $\mu_{A_i}, \mu_{A_{i+1}}$, forem números fuzzy trapezoidais e μ_B e μ_C forem números fuzzy triangulares então S possui um único ponto de equilíbrio em A .*

Demonstração 4.4.8. Análoga à demonstração do corolário anterior.