

PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Paulo Cristiano Queiroz

**Um Resultado de Simetria em Subvariedades de
Formas Espaciais**

São Luís - MA

2014

Paulo Cristiano Queiroz

Um Resultado de Simetria em Subvariedades de Formas Espaciais

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Maxwell Mariano De Barros**.

São Luís - MA

2014

Paulo Cristiano Queiroz

Um Resultado de Simetria em Subvariedades de Formas Espaciais

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Maxwell Mariano De Barros**.

Dissertação aprovada em March 12, 2014, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(ORIENTADOR) Dr. Maxwell Mariano De Barros (UFMA)

(Co-ORIENTADOR) Dr.nome..... (UFMA)

Dr.nome..... (IMPA)

Dra.nome..... (UNESP/SJRP)

DEDICATÓRIA

Dedicado a Bruna Ingrid Queiroz.

AGRADECIMENTOS

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Nullam hendrerit pharetra elit eget sagittis. Vestibulum ut tempor enim. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Quisque auctor lacus nec metus adipiscing non malesuada dui condimentum. Integer ultrices sapien in nibh pellentesque dictum. Nullam sagittis aliquam sem eu congue. Vivamus congue malesuada lorem, a vestibulum mi rhoncus et.

RESUMO

Estudaremos um resultado de simetria em subvariedades de codimensão 1 em uma forma espacial $(n + 1)$ -dimensional, relacionado com distância geodésica e a curvatura normal de algum campo de vetor fixado.

Palavras-chave: Forma espacial, Distância geodésica, Curvatura normal.

ABSTRACT

We studying a symmetry result on submanifolds of codimension one in a $(n + 1)$ -dimensional space form, related to the geodesic distance and to the normal curvature of some fixed vector field.

Keywords: Space form, Geodesic distance, Normal curvature.

SUMÁRIO

	Page
Capítulo 1: Conceitos Básicos de Geometria Diferencial	10
1.1 Variedades Diferenciáveis	10
1.2 Aplicações Diferenciáveis e Subvariedades	14
1.3 Campos de Vetores	15
Capítulo 2: Geometria Riemanniana	19
2.1 Variedades Riemannianas	19
2.2 Conexão de Levi-Civita	21
2.3 Geodésicas e a Aplicação Exponencial	25
2.4 Curvatura Seccional	28
2.5 Campos de Jacobi e Pontos Conjugados	37
Capítulo 3: Um Resultado de Simetria em Subvariedades de Formas Espaciais . .	41
Referências	51

INTRODUÇÃO

Capítulo 1

CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

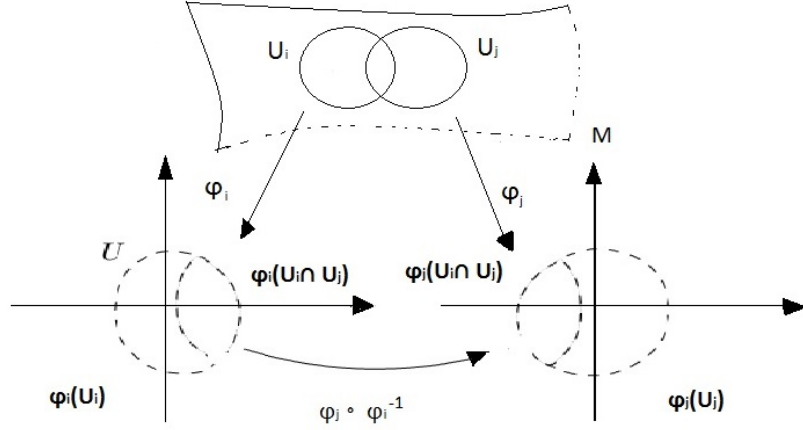
Neste capítulo, o leitor encontrará definições e resultados fundamentais de Geometria Diferencial, como por exemplo, os conceitos de Variedade Diferenciável, Subvariedade e Campo de Vetores. Nosso objetivo aqui é apresentar ferramentas que tornem, o mais compreensível possível, os capítulos posteriores. Uma leitura mais completa pode ser encontrada em [6].

1.1 Variedades Diferenciáveis

Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável. Então, M é uma *variedade topológica de dimensão n* , se cada ponto de M possui uma vizinhança aberta homeomorfa a um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Uma carta local de M , é um par (U, φ) , onde U é um subconjunto aberto de M e $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ é um homeomorfismo de U para um subconjunto aberto $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, já uma coleção $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de cartas locais de M tais que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ é chamado um *atlas*. Em meio a estas definições, dado um atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de M , definimos as *funções de transição* por

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j((U_i \cap U_j)),$$

onde $(U_i \cap U_j) \neq \emptyset$, como podemos ver na figura abaixo.



Duas cartas (U, φ) e (V, ψ) são *diferenciavelmente compatíveis* se $U \cap V = \emptyset$ ou se a função de transição $\varphi^{-1} \circ \psi$ é um difeomorfismo, e se um atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ for tal que, quaisquer duas de suas cartas são diferenciavelmente compatíveis uma com a outra, dizemos que este é diferenciável. Um atlas diferenciável em M é *completo* se ele não estiver contido em outro atlas diferenciável estritamente maior, por sua vez, uma *estrutura diferenciável* em uma variedade topológica M , é um atlas diferenciável completo. Podemos agora considerar a seguinte definição:

Definição 1.1.1. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um par (M, A) , onde M é uma variedade topológica de dimensão n e A é uma estrutura diferenciável em M .

Exemplo 1.1.2. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão n com estrutura diferenciável determinada pelo atlas consistindo de uma única carta, a saber a carta $(\mathbb{R}^n, Id)$.

Exemplo 1.1.3. Seja $\mathbb{S}^n$ a esfera unitária n -dimensional, isto é, o conjunto

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Seja U_i^+ o subconjunto de $\mathbb{S}^n$, com $i = 1, \dots, n, n+1$, dado por

$$U_i^+ = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x^i > 0\},$$

onde a i -ésima coordenada é positiva. Do mesmo modo, seja U_i^- o conjunto onde $x^i < 0$.

Para cada i , defina a aplicação $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\varphi_i^\pm(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1}),$$

onde o símbolo sobre x^i indica que x^i está omitido. Cada $\varphi_i^\pm$ é evidentemente contínua e é um homeomorfismo em sua imagem, a bola unitária $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$, com inversa dada por

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^{i-1}, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, u^i, \dots, u^n).$$

Uma vez que cada ponto de $\mathbb{S}^n$ está no domínio de uma dessas cartas, $\mathbb{S}^n$ é localmente euclidiana de dimensão n , e ainda, por ser subespaço topológico de $\mathbb{R}^n$, temos portanto que $\mathbb{S}^n$ é uma variedade topológica. Agora, tomando as cartas $(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)$ construídas, para quaisquer índices distintos i e j , a função de transição $\varphi_j^\pm \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}$, supondo $i < j$, é dada por

$$\varphi_j^\pm \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, \hat{u}^i, \dots, \pm\sqrt{1 - |u|^2}, \dots, u^n).$$

Uma expressão similar é obtida supondo $j < i$. Quando $i = j$ temos que

$$\varphi_i^\pm \circ (\varphi_i^\pm)^{-1} = Id_{\mathbb{B}^n}.$$

Assim, a coleção de cartas $\{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm)\}$ é um atlas diferenciável e define uma estrutura diferenciável em $\mathbb{S}^n$.

Uma variedade diferenciável M é *compacta* e respectivamente *conexa*, se for compacta e respectivamente conexa como espaço topológico. Já as variedades orientáveis, são definidas da seguinte maneira.

Definição 1.1.4. Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que M é *orientável* se admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que:

- (i) para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Caso contrário, diz-se que M é *não-orientável*. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo (i) é chamada uma *orientação* de M , e M é, então, *orientada*. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem (i) *determinam a mesma orientação* se a união delas ainda satisfaz (i). Sejam agora M_1 e M_2 variedades diferenciáveis e $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ um difeomorfismo, então, uma vez que variedades difeomorfas são idênticas do ponto de vista da diferenciabilidade, M_1 é orientável se, e só se M_2 é orientável. Se, além disto, M_1 e M_2 são conexas e estão orientadas, φ induz uma orientação em M_2 que pode ou não coincidir com a orientação inicial de M_2 . No primeiro caso, dizemos que φ *preserva a orientação* e no segundo, que φ *reverte a orientação*.

Lema 1.1.5. *Se M é uma variedade orientável de dimensão n , então em cada ponto $p \in M$ existe uma carta local (U, ϕ) , tal que $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva a orientação.*

Omitiremos aqui a demonstração deste lema, pois estamos interessados somente na demonstração de seu corolário que enunciaremos a seguir. Para uma demonstração, ver [1].

Corolário 1.1.6. *Toda variedade orientável conexa admite exatamente duas orientações diferentes.*

Antes de começarmos a demonstração, enunciaremos duas definições importantes em Geometria Diferencial, a saber, as definições de funções diferenciáveis de valores reais em uma variedade diferenciável e de espaço tangente de uma variedade diferenciável em um ponto.

Dizemos que uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, definida em uma variedade diferenciável M , de dimensão n , é *diferenciável*, se para cada carta (U, φ) em M , a função composta $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável no subconjunto aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Quando $k = 1$ o conjunto de todas as funções diferenciáveis de valores reais $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é denotado por $C^\infty(M)$. Além do mais, como a soma e a multiplicação por uma constante de funções diferenciáveis são funções diferenciáveis, o conjunto $C^\infty(M)$ é um espaço vetorial.

Agora, seja M uma variedade diferenciável e seja p um ponto de M . Uma aplicação linear $X : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma *derivação* em p se satisfaz

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf,$$

para toda $f, g \in C^\infty(M)$. O conjunto de todas as derivações de $C^\infty(M)$ em p é um espaço vetorial chamado o *espaço tangente* de M em p , e é denotado por T_pM . Um elemento de T_pM é chamado de *vetor tangente* em p .

Provemos agora o corolário 1.1.6.

Demonstração. Suponha que sejam dadas duas orientações para uma variedade conexa M . Seja $A \subset M$ o conjunto dos pontos p tal que estas duas orientações coincidem em T_pM . Pelo lema anterior, existe uma carta local (U, ϕ) centrada em p , tal que $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva a orientação. Isto implica que A é aberto. Do mesmo modo, podemos mostrar que $M - A$ é aberto. Uma vez que M é conexo, devemos ter $A = M$ ou $A = \emptyset$. Assim,

quaisquer duas orientações de M devem ser iguais em todo espaço tangente, ou devem ser diferentes em todo espaço tangente. Uma vez que cada espaço tangente pode ser orientado exatamente de duas maneiras diferentes, segue que $A = M$ e portanto M admite também, exatamente duas orientações diferentes. $\square$

1.2 Aplicações Diferenciáveis e Subvariedades

Na seção anterior, definimos funções diferenciáveis de valores reais. De uma maneira mais geral, sejam M e N variedades diferenciáveis com dimensões m e n respectivamente, então uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita ser diferenciável (ou de classe C^k , $k \geq 0$), se para quaisquer cartas locais (U, φ) e (V, ψ) , de M e N respectivamente, tais que $f(U) \subset V$, a aplicação

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$$

for diferenciável (ou de classe C^k , $k \geq 0$). O *posto* de f em um ponto $p \in M$ é o posto da aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ em $\varphi(p)$, onde (U, φ) e (V, ψ) são cartas tais que $p \in U$ e $f(p) \in V$. Dizemos que a aplicação f é uma *imersão*, se para todo $p \in M$ o posto de f é m , e uma *submersão* se para todo $p \in M$ o posto de f é n . Por último, a aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita ser um *mergulho* diferenciável se é uma imersão injetiva homeomorfa sobre a sua imagem.

Exemplo 1.2.1. A aplicação inclusão $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ que leva $(x^1, \dots, x^n)$ em $(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$ é um mergulho.

Exemplo 1.2.2. A projeção $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ das primeiras n coordenadas é uma submersão.

Dadas duas variedades diferenciáveis M e N , de dimensões m e n respectivamente, dizemos que M é uma *subvariedade imersa* de N , se existe uma imersão $f : M \rightarrow N$. Por exemplo, $\mathbb{S}^n$ é uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma *subvariedade mergulhada* em N . Observe que se $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$. A diferença $n - m$ é chamada a *codimensão* da imersão φ .

Exemplo 1.2.3. Seja $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. É claro que $\mathcal{S}$ possui uma estrutura diferenciável dada por suas parametrizações $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathcal{S}$. As aplicações x_α são, por definição, mergulhos de U_α em $\mathcal{S}$. Vamos mostrar que a inclusão $i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um

mergulho, isto é, $\mathcal{S}$ é uma subvariedade mergulhada em $\mathbb{R}^3$. De fato, i é diferenciável pois para todo $p \in \mathcal{S}$, existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S}$ de $\mathcal{S}$ em p e uma parametrização $j : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ de $\mathbb{R}^3$ em $i(p)$, tais que $j^{-1} \circ i \circ x = x$ é diferenciável, onde V é uma vizinhança de p em $\mathbb{R}^3$ e j é a aplicação identidade. Além disso, pela definição de superfície regular, i é uma imersão e um homeomorfismo sobre sua imagem, sendo portanto um mergulho, como queríamos mostrar.

1.3 Campos de Vetores

Um *campo de vetores* X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_p M$. O *fibrado tangente* de M , denotado por TM , é a união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos de M , isto é,

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Já um elemento dessa união disjunta, é um par ordenado (p, X) , onde $p \in M$ e $X \in T_p M$. Assim podemos pensar também, em um campo de vetores X , como uma aplicação de M em TM , dada por

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto (p, X(p)). \end{aligned}$$

Intuitivamente, X é uma coleção de setas, uma em cada ponto de M .

Para falarmos em diferenciabilidade, considere X um campo de vetores em M , f uma função em $C^\infty(M)$, e defina uma função de valores reais Xf em M , por

$$(Xf)(p) = X(p)(f),$$

para todo $p \in M$. Nesse sentido, sempre que $f \in C^\infty(M)$, dizemos que X é diferenciável se Xf for diferenciável.

Afim de apresentarmos uma base natural para o espaço tangente, definiremos a seguir a diferenciação parcial de uma função em uma variedade diferenciável.

Seja (U, x) uma carta local de uma variedade diferenciável M , de dimensão n , em um ponto p . Então podemos escrever x em coordenadas, da seguinte forma:

$$x = (x^1, \dots, x^n)$$

onde x^i , com $1 \leq i \leq n$, são funções de U em $\mathbb{R}$. Se $f \in C^\infty(M)$, a i -ésima derivada parcial de f em p é a função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial u^i}(x(p)) \quad (1 \leq i \leq n),$$

onde $u^1, \dots, u^n$ são funções coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n$. A função

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

que leva cada $f \in C^\infty(M)$ para $\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p$ é uma derivação, e portanto um vetor tangente de M em p . Os vetores coordenados $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$, como foram definidos acima, formam uma base natural do espaço tangente $T_p M$.

Em coordenadas, um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M , pode ser expresso por

$$X(p) = \sum a_i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p,$$

onde a_i são funções definidas na vizinhança coordenada, chamadas *componentes* de X . Nessas condições, sobre a diferenciabilidade do campo X , podemos dizer que X é diferenciável se, e somente se, suas componentes a_i são diferenciáveis. O conjunto de todos os campos diferenciáveis de vetores em M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$, que com as operações naturais de adição e multiplicação por um escalar, é um espaço vetorial real.

Se $X : M \rightarrow TM$ é um campo de vetores, então uma *singularidade* de X é um ponto $p \in M$ onde o campo X se anula. Caso tal ponto não exista, dizemos que o campo X é *não-singular*.

O modo como interpretamos um campo X nos permite considerar os iterados de X . Em geral, os iterados XY e YX de dois campos de vetores X e Y em uma variedade diferenciável M não são campos de vetores. Contudo, vale o seguinte resultado:

Lema 1.3.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo Z , tal que $Zf = (XY - YX)f$, $\forall f \in C^\infty(M)$.*

O leitor pode consultar uma prova desse lema em [3], página 28.

O campo Z dado pelo lema anterior é chamado o *colchete* $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y e é diferenciável. Além disso, satisfaz a seguinte proposição.

Proposição 1.3.2. *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M , a, b números reais e f, g funções diferenciáveis, então:*

$$(a) \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad (\text{anticomutatividade});$$

$$(b) \quad [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \quad (\text{linearidade});$$

$$(c) \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad (\text{identidade de Jacobi});$$

$$(d) \quad [fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

Demonstração.

$$(a) \quad [X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X];$$

$$(b) \quad [aX + bY, Z] = (aX + bY)Z - Z(aX + bY) = aXZ + bYZ - aZX - bZY = \\ = a[X, Z] + b[Y, Z];$$

$$(c) \quad \text{Calculando } [[X, Y], Z], \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [X, Y]Z - Z[X, Y] \\ &= (XY - YX)Z - Z(XY - YX) \\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$[[Y, Z], X] = YZX - ZYX - XYZ + XZY$$

e

$$[[Z, X], Y] = ZXY - XZY - YZX + YXZ.$$

Somando as igualdades acima, obtemos a identidade de Jacobi;

$$(d) \quad \text{Finalmente,}$$

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\ &= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X. \end{aligned}$$

□

Finalizemos esta seção com as definições de curva, diferencial de uma aplicação diferenciável e campo ao longo de uma curva como segue.

Definição 1.3.3. Seja M uma variedade diferenciável e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma curva diferenciável em M é uma aplicação diferenciável $c : I \rightarrow M$.

Ainda na definição acima, supondo que $0 \in I$ e $c(0) = p$, e sendo $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p , o *vetor tangente* à curva c em $t = 0$ é a função $c'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$c'(0)f = \left. \frac{d(f \circ c)}{dt} \right|_{t=0} \quad f \in \mathcal{D}.$$

Observa-se facilmente que $c'(0)$ é uma derivação. De uma maneira mais geral, um campo de vetores X ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $X(t) \in T_{c(t)}M$. Quanto a diferenciabilidade, dizemos que X é diferenciável, se para toda função diferenciável f em M , a função $t \rightarrow X(t)f$ é diferenciável em I .

Definição 1.3.4. Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente e $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, seja $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$ uma curva diferenciável com $c(0) = p$ e $c'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ c$. A diferencial de φ em p é a aplicação linear $d\varphi_p : T_pM_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$.

Note que a aplicação linear $d\varphi_p$ não depende da escolha da curva c .

Capítulo 2

GEOMETRIA RIEMANNIANA

Neste capítulo, apresentaremos conceitos fundamentais de Geometria Riemanniana que julgamos essenciais para compreensão do teorema principal deste trabalho. Serão estudadas aqui as definições de Variedades Riemannianas, Conexão de Levi-Civita, Curvatura e Pontos Conjugados, bem como suas propriedades mais oportunas. Para uma leitura mais completa recomendamos ao leitor [3] e [4].

2.1 Variedades Riemannianas

No que segue, uma variedade diferenciável M de dimensão n será denotada por M^n .

Definição 2.1.1. Uma métrica Riemanniana numa variedade diferenciável M^n é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno

$$\langle, \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

isto é, uma forma bilinear simétrica e positiva definida, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se (x, U) é uma carta local em torno de um ponto p e $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$ são os vetores coordenados definidos na seção 1.3, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right\rangle_p = g_{ij}$ é uma função diferenciável em U .

Sempre que possível, omitiremos o índice p em $\langle, \rangle_p$, e ainda, escreveremos $g(X, Y)$ para representar o produto $\langle X, Y \rangle$. Podemos agora, definir variedades Riemannianas.

Definição 2.1.2. Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.

Exemplo 2.1.3. Com a identificação natural $\mathbb{R}^n = T_p \mathbb{R}^n$, o produto interno usual

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

para $x, y \in \mathbb{R}^n$ define uma métrica Riemanniana para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Este é, portanto, uma variedade Riemanniana.

Exemplo 2.1.4. Se $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ é uma imersão, então f é diferenciável, e do Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se N tem uma métrica Riemanniana, f induz naturalmente uma métrica Riemanniana em M por

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

onde $u, v \in T_p M$. Variedades diferenciáveis imersas em variedades Riemannianas são portanto variedades Riemannianas. A métrica de M é então a métrica *induzida* por f , e f é chamada uma *imersão isométrica*.

Exemplo 2.1.5. Dos exemplos 1.1.3, 1.2.1 e 2.1.4 podemos concluir que a esfera unitária $\mathbb{S}^n$ é uma variedade Riemanniana.

Exemplo 2.1.6. Seja a variedade diferenciável $U = \mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, com a carta $id : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$. Dado $p \in U$, e escrevendo $p = (x_1, \dots, x_n)$, podemos definir uma métrica h em U , pondo

$$h_p(v, w) = \frac{1}{x_n^2} \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^n},$$

onde $u, v \in T_p U = \mathbb{R}^n$. O semi-espaço U , com a métrica h , é uma variedade Riemanniana denominada o *espaço hiperbólico* de dimensão n , o qual denotamos por $\mathbb{H}^n$.

Antes do próximo teorema, cabe aqui apresentarmos a definição de comprimento de um segmento de curva, que por sua vez, é a restrição de uma curva definida em um intervalo I , a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$.

Definição 2.1.7. O comprimento do segmento de uma curva c quando restrita a um intervalo fechado $[a, b]$, em uma variedade Riemanniana M , é dado por

$$\ell_a^b(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{1/2} dt.$$

Enunciaremos agora um teorema de existência para métricas Riemannianas. Em seguida faremos uma observação, que trata da existência de um campo normal em uma subvariedade orientável (objeto de estudo do teorema principal deste trabalho), que é admitido sem prova na demonstração do teorema de que se trata esta dissertação.

Teorema 2.1.8. *Toda variedade diferenciável M possui uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver [3], página 47. □

Considere agora M uma variedade orientável e $N \subset M$ uma subvariedade mergulhada, onde $\dim(N) = \dim(M) - 1$, isto é, N tem codimensão 1. Se N for orientável, existe um campo em M normal a N , uma vez que para cada $p \in N$ podemos tomar uma base $(X_1(p), \dots, X_{n-1}(p))$ na orientação de $T_p N$, que por sua vez tem seu complemento ortogonal em $T_p M$ com dimensão 1, donde existem portanto somente dois vetores unitários $Y_1(p), Y_2(p) \in T_p M$ que são ortogonais a $T_p N$. Isto é suficiente para garantir a existência de tal campo. Note ainda que $Y_1(p) = -Y_2(p)$.

2.2 Conexão de Levi-Civita

A conexão, como veremos a seguir, é a idéia de derivação de campos ao longo de curvas em variedades Riemannianas. Isto nos permite, por exemplo, falar em aceleração de curvas, que é um importante conceito no estudo das Geodésicas, que veremos na próxima seção deste capítulo. Antes de apresentarmos a conexão de Levi-Civita, faz-se necessário a seguinte definição.

Definição 2.2.1. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

que a cada par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, nessa ordem, nos fornece um terceiro campo, denotado por $\nabla_X Y$, e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- ii $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- iii $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Proposição 2.2.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo de vetores V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo de vetores $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:*

$$a) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt},$$

$$b) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt},$$

$$c) \text{ Se } V \text{ é induzido por um campo de vetores } Y \in \mathfrak{X}(M), \text{ isto é, } V(t) = Y(c(t)), \text{ então}$$

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y,$$

onde em a) e b), respectivamente, W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .

Demonstração. Suponhamos a existência de uma correspondência satisfazendo a), b) e c). Seja $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ a inversa de uma carta local de M com $c(I) \cap x(U) \neq \emptyset$ e sejam $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ a expressão local de $c(t)$, $t \in I$, e $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Expressando localmente o campo V como $V = \sum_{j=1}^n v^j X_j$, onde $v^j = v^j(t)$ e $X_j = X_j(c(t))$, temos por a) e b) que

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt} \left(\sum_{j=1}^n v^j X_j \right) = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Por c) e i da definição 2.2.1,

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{dc/dt} X_j = \nabla_{(\sum_i \frac{dx_i}{dt} X_i)} X_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j,$$

onde $i, j = 1, \dots, n$. Portanto

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j.$$

A igualdade acima mostra que se existe uma correspondência satisfazendo a), b) e c), tal correspondência é única.

Definindo $\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j$ em $x(U)$, temos de imediato que $\frac{DV}{dt}$ satisfaz as propriedades a), b) e c). Tomando outra vizinhança coordenada $y(W)$ em M , de forma que $y(W) \cap x(U) \neq \emptyset$ e definindo $\frac{DV}{dt}$ em $y(W)$ como na igualdade acima, pela unicidade de $\frac{DV}{dt}$, as definições concordam em $y(W) \cap x(U)$. Estendendo essa definição para toda variedade M , provamos esta proposição.

□

Pela proposição acima, temos associada a escolha de uma conexão afim em M , a existência de uma derivada de campos de vetores ao longo de curvas como frisamos inicialmente. Podemos agora definir campos paralelos ao longo de curvas como segue.

Definição 2.2.3. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo de vetores V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, $\forall t \in I$.

A próxima proposição trata da existência de campos paralelos e uma demonstração pode ser encontrada em [3], página 58.

Proposição 2.2.4. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$.*

O campo $V(t)$ de que trata a proposição acima é chamado o *transporte paralelo* de $V(t_0)$ ao longo de c .

Afim de enunciarmos o próximo teorema, considere as seguintes definições.

Definição 2.2.5. Uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana M é dita ser compatível com a métrica se

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.1)$$

Se M é uma variedade Riemanniana e X, V, W campos ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ com $X = \frac{dc}{dt}$, então a igualdade (2.1) é equivalente a

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I. \quad (2.2)$$

Definição 2.2.6. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Dispomos agora de ferramentas para enunciar o teorema principal desta seção.

Teorema 2.2.7 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

1. ∇ é simétrica.
2. ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. Provemos primeiramente, admitindo a existência, a unicidade de ∇ satisfazendo (1) e (2). Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos da definição de compatibilidade com a métrica que

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (2.3)$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (2.4)$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (2.5)$$

De (2.4) temos

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle - \langle Z, \nabla_Y X \rangle. \quad (2.6)$$

Somando (2.3) e (2.6) e subtraindo (2.5) temos, usando a simetria de ∇ , que

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle.$$

Portanto,

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}. \quad (2.7)$$

Da expressão (2.7) acima, temos que ∇ , caso exista, está univocamente determinada pela métrica $\langle, \rangle$, uma vez que se $\bar{\nabla}$ é outra conexão satisfazendo as condições do teorema, então $\bar{\nabla}$ também satisfaz (2.7), donde temos

$$\langle Z, \nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y \rangle = 0,$$

e por isso

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y.$$

Para provarmos a existência, basta definir ∇ por (2.7). Operações simples mostram que ∇ satisfaz as propriedades desejadas. $\square$

A conexão do teorema acima é chamada *conexão de Levi-Civita* de M .

Uma superfície parametrizada em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação diferenciável $s : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, onde A é um conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, com $U \subset A \subset \bar{U}$, U aberto em $\mathbb{R}^2$, e tal que a fronteira ∂A de A seja uma curva diferenciável por partes. Um campo de vetores v ao longo de s é uma aplicação que associa a cada $q \in A$ um vetor $V(q) \in T_{s(q)}M$.

No próximo lema, (u, v) são coordenadas cartesianas de A e $\frac{\partial s}{\partial u}$ é o campo de vetores $ds\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ ao longo da curva $u \rightarrow s(u, v_0)$, com v_0 fixo. E ainda, se V é um campo ao longo de $s : A \rightarrow M$, $\frac{DV}{\partial u}(u, v_0)$ é a derivada covariante ao longo da curva $u \rightarrow s(u, v_0)$ da restrição de V a esta curva. Analogamente se definem $\frac{\partial s}{\partial v}$ e $\frac{DV}{\partial v}$.

Lema 2.2.8 (de simetria). *Se M é uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica e $s : A \rightarrow M$ é uma superfície parametrizada. Então*

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v}.$$

Demonstração. Seja $x : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas (neste trabalho, são as coordenadas da inversa de uma carta local) em uma vizinhança de um ponto de $s(A)$. Então

$$x^{-1} \circ s(u, v) = (x^1(u, v), \dots, x^n(u, v)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial u} \right) &= \frac{D}{\partial v} \left(\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \nabla_{\sum_j (\partial x^j / \partial v) \partial / \partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Pela simetria da conexão $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$, assim, calculando $\frac{D}{\partial u} \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)$ obteremos a mesma expressão acima. Isto prova o lema.

□

2.3 Geodésicas e a Aplicação Exponencial

Faremos agora, uma breve introdução sobre geodésicas e aplicação exponencial, que serão estudadas com maior propósito para fins deste trabalho na seção 2.5. Além disso, afim de evitarmos repetições, M será no que segue, uma variedade Riemanniana munida de sua conexão de Levi-Civita.

Definição 2.3.1. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma *geodésica* em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 .

Se para todo $t \in I$, a curva γ é geodésica em t , dizemos que γ é uma *geodésica*. E ainda, se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, então a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada (segmento de) *geodésica ligando* $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Em termos de velocidade, considere uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

Portanto, se γ é geodésica, o vetor velocidade de γ possui norma constante.

Definição 2.3.2. O comprimento de arco s de uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$, a partir de uma origem fixa t_0 , é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt.$$

Na definição acima, uma vez que $\left| \frac{d\gamma}{dt} \right| = c$, onde c é uma constante em $\mathbb{R}$, temos que $s(t) = c(t - t_0)$, portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando $c = 1$, dizemos que a geodésica γ está *normalizada*.

Enunciaremos a proposição a seguir para introduzir o conceito de aplicação exponencial.

Para uma demonstração, ver [3], página 72.

Proposição 2.3.3. Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação C^∞ , $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$, com $\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_q M, |w| < \epsilon\}$, tal que $t \rightarrow \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w , para cada $q \in V$ e cada $w \in T_q M$, com $|w| < \epsilon$.

Seja $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado pela proposição anterior. Então a aplicação $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), \quad (q, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada a *aplicação exponencial* em $\mathcal{U}$. Usaremos a notação $\exp_q(v)$ para expressar $\exp(q, v)$.

Geometricamente, $\exp_q(v)$ é o ponto de M , obtido quando se percorre um comprimento igual a $|v|$, a partir de q , sobre a geodésica que passa por q com velocidade $\frac{v}{|v|}$.

No que segue, $B_\epsilon(0)$ será uma bola aberta centrada na origem de $T_q M$ e de raio ϵ .

Proposição 2.3.4. Dado $q \in M$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $\exp : B_\epsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ sobre um aberto de M .

Demonstração. Calculando $d(\exp_q)_0$, temos:

$$\begin{aligned} d(\exp_q)_0(v) &= \left. \frac{d}{dt}(\exp_q(tv)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v)) \right|_{t=0} \\ &= v. \end{aligned}$$

Portanto $d(\exp_q)_0$ é a identidade de T_qM , donde pelo teorema da função inversa, $\exp_q$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de 0.

□

Exemplo 2.3.5. Em $M = \mathbb{R}^n$ a derivação covariante coincide com a usual, as geodésicas são portanto retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco. E ainda, com a identificação usual do espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ em p com $\mathbb{R}^n$, a aplicação exponencial é a identidade.

Exemplo 2.3.6. Seja $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária de dimensão n . Tomando um círculo máximo de $\mathbb{S}^n$ parametrizados pelo comprimento de arco c , tem-se que

$$|c'(t)| = 1 \Rightarrow \langle c'(t), c''(t) \rangle = 0.$$

Assim, a derivada usual do campo velocidade ao longo de c é normal a $\mathbb{S}^n$. Como no espaço euclidiano a derivada usual é a derivada covariante, temos que a derivada covariante de tal campo é perpendicular a $T_{c(t)}\mathbb{S}^n$, isto significa que o campo $c'(t)$ é paralelo, e portanto tem derivada covariante igual a zero. Assim, os círculos máximos de $\mathbb{S}^n$ são geodésicas.

Teorema 2.3.7. *Sejam $p \in M$, U uma vizinhança normal de p e $B \subset U$ uma bola normal de centro em p . Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $c : [0, 1] \rightarrow M$ é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$, então $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$, e se a igualdade vale, então $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$.*

Demonstração. Ver [3], página 79.

□

Por fim, se $\exp_q$ é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem de T_qM , então o aberto U , onde $U = \exp_q V$ é chamado uma *vizinhança normal* de q . Se $B_\epsilon(0)$ é tal que

$\overline{B_\epsilon(0)} \subset V$, chamamos de *bola normal* (ou *geodésica*) de centro em p e raio ϵ ao conjunto $\exp_q B_\epsilon(0) = B_\epsilon(q)$. A *esfera geodésica* $S_\epsilon(q)$ é o conjunto $\partial B_\epsilon(q)$, e as geodésicas em $B_\epsilon(q)$ que partem de q são chamadas *geodésicas radiais*.

2.4 Curvatura Seccional

Iniciaremos esta seção com a definição de curvatura, que é fundamental à Geometria Diferencial. Em seguida, apresentaremos um exemplo que sugere que a curvatura pode ser pensada intuitivamente, como o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana.

Definição 2.4.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Exemplo 2.4.2. Em $\mathbb{R}^n$, $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. De fato, fazendo $Z = (z_1, \dots, z_n)$ temos

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n),$$

e portanto

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n).$$

Do mesmo modo,

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, \dots, XYz_n).$$

Agora, da igualdade $[X, Y] = XY - YX$ e das propriedades de conexão, temos

$$\nabla_{[X, Y]} Z = \nabla_{XY} Z - \nabla_{YX} Z = (XYz_1, \dots, XYz_n) - (YXz_1, \dots, YXz_n).$$

Logo, $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.4.3. *Seja M uma variedade Riemanniana. Então a curvatura R de M satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$.*

(ii) *Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear.*

(iii) (Primeira Identidade de Bianchi). Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vale a igualdade

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Demonstração.

(i) Dadas $f, g \in C^\infty(M)$ e $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned} R(fX + gY, Z)W &= \nabla_Z \nabla_{fX+gY} W - \nabla_{fX+gY} \nabla_Z W + \nabla_{[fX+gY, Z]} W \\ &= \nabla_Z (f \nabla_X W) + \nabla_Z (g \nabla_Y W) - f \nabla_X \nabla_Z W \\ &\quad - g \nabla_Y \nabla_Z W + \nabla_{f[X, Z] - Z(f)X + g[Y, Z] - Z(g)Y} W \\ &= f \nabla_Z \nabla_X W + Z(f) \nabla_X W + g \nabla_Z \nabla_Y W + Z(g) \nabla_Y W \\ &\quad - f \nabla_X \nabla_Z W - g \nabla_Y \nabla_Z W + f \nabla_{[X, Z]} W \\ &\quad - Z(f) \nabla_X W + g \nabla_{[Y, Z]} W - Z(g) \nabla_Y W \\ &= f(\nabla_Z \nabla_X W - \nabla_X \nabla_Z W + \nabla_{[X, Z]} W) \\ &\quad + g(\nabla_Z \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_Z W + \nabla_{[Y, Z]} W) \\ &= fR(X, Z)W + gR(Y, Z)W. \end{aligned}$$

Agora, como

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= -(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[Y, X]} Z) \\ &= -R(Y, X)Z, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} R(X, fY + gZ)W &= -R(fY + gZ, X)W \\ &= -fR(Y, X)W - gR(Z, X)W \\ &= fR(X, Y)W + gR(X, Z)W. \end{aligned}$$

Portanto, R é bilinear.

(ii) Dados $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, devemos provar que

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W \quad e$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z.$$

A primeira igualdade segue diretamente de (ii) da definição 2.2.1. Provemos então a segunda igualdade. Calculando $\nabla_Y \nabla_X(fZ)$, temos

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X(fZ) &= \nabla_Y(f\nabla_X Z + (Xf)Z) \\ &= f\nabla_Y \nabla_X Z + (Yf)(\nabla_X Z) + Xf(\nabla_Y Z) + (Y(Xf))Z. \end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\nabla_X \nabla_Y(fZ) = f\nabla_X \nabla_Y Z + (Xf)(\nabla_Y Z) + Yf(\nabla_X Z) + (X(Yf))Z.$$

E ainda

$$\begin{aligned} \nabla_{[X,Y]}fZ &= f\nabla_{[X,Y]}Z + ([X, Y]f)Z \\ &= f\nabla_{[X,Y]}Z + ((XY - YX)f)Z. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} R(X, Y)fZ &= f(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Logo o operador curvatura $R(X, Y)$ é linear.

(iii) Pela simetria da conexão de Levi-Civita e pela identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z \\ &\quad + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]}X \\ &\quad + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]}Y \\ &= \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [Y, X] + \nabla_X [Z, Y] \\ &\quad - \nabla_{[X,Z]}Y - \nabla_{[Y,X]}Z - \nabla_{[Z,Y]}X \\ &= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Temos então, provada, a proposição 2.4.3. □

Agora, dados os campos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e denotando (X, Y, Z, W) para representar o produto $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$, temos as propriedades que seguem.

Proposição 2.4.4. *São válidas as seguintes igualdades:*

$$(i) \quad (X, Y, Z, W) + (Y, Z, X, W) + (Z, X, Y, W) = 0;$$

$$(ii) \quad (X, Y, Z, W) = -(Y, X, Z, W);$$

$$(iii) \quad (X, Y, Z, W) = -(X, Y, W, Z);$$

$$(iv) \quad (X, Y, Z, W) = (Z, W, X, Y).$$

Demonstração.

(i) Segue diretamente da identidade de Bianchi.

(ii) Está demonstrada em (i) da proposição 2.4.3.

(iii) Mostremos primeiramente que $(X, Y, Z, W) = -(X, Y, W, Z)$ é equivalente a

$(X, Y, Z, Z) = 0$. De fato, se $(X, Y, Z, W) = -(X, Y, W, Z)$ para quaisquer campos $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, em particular, quando $Z = W$ temos que $(X, Y, Z, Z) = -(X, Y, Z, Z)$, donde $(X, Y, Z, Z) = 0$. Por outro lado, se $(X, Y, Z, Z) = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, então $(X, Y, Z + W, Z + W) = 0$ para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$, donde por linearidade $(X, Y, Z, Z) + (X, Y, Z, W) + (X, Y, W, Z) + (X, Y, W, W) = 0$, o que nos dá $(X, Y, Z, W) = -(X, Y, W, Z)$.

Limitemo-nos então a provar que $(X, Y, Z, Z) = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Ora,

$$(X, Y, Z, Z) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle.$$

Por ∇ ser compatível com a métrica, temos que

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle = Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle,$$

e pelo mesmo motivo

$$\langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle = \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle.$$

Portanto

$$\begin{aligned} (X, Y, Z, Z) &= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} Y (X, \langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2} X (Y \langle Z, Z \rangle) + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= -\frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que prova (iii).

(iv) Por (i), valem as igualdades

$$(X, Y, Z, W) + (Y, Z, X, W) + (Z, X, Y, W) = 0,$$

$$(Y, Z, W, X) + (Z, W, Y, X) + (W, Y, Z, X) = 0,$$

$$(Z, W, X, Y) + (W, X, Z, Y) + (X, Z, W, Y) = 0,$$

$$(W, X, Y, Z) + (X, Y, W, Z) + (Y, W, X, Z) = 0.$$

Somando as equações acima, obtemos

$$2(Z, X, Y, W) + 2(W, Y, Z, X) = 0,$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} (Z, X, Y, W) &= -(W, Y, Z, X) \\ &= (Y, W, Z, X), \end{aligned}$$

provando assim o item (iv). □

Dado um espaço vetorial V , o número $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$ representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$. Dito isto, considere a seguinte definição.

Definição 2.4.5. Dado um ponto $p \in M$, um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$ e $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. O número real

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

é chamado curvatura seccional de σ em p .

Obs. A curvatura seccional não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

O próximo lema garante que o conhecimento da curvatura seccional $K(\sigma)$, para todo σ , determina completamente a curvatura R , além de ser útil na demonstração do lema que o segue.

Lema 2.4.6. *Seja V um espaço vetorial de dimensão maior ou igual a 2, munido de um produto interno $\langle, \rangle$. Sejam $R : V \times V \times V \rightarrow V$ e $R' : V \times V \times V \rightarrow V$ aplicações trilineares tais que as condições (i), (ii), (iii) e (iv) da proposição 2.4.4 sejam satisfeitas para*

$$(x, y, z, t) = \langle R(x, y)z, t \rangle \text{ e } (x, y, z, t)' = \langle R'(x, y)z, t \rangle.$$

Se $x, y \in V$ são vetores linearmente independentes, escrevamos

$$K(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}, \quad K'(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)'}{|x \wedge y|^2},$$

onde σ é o subespaço bidimensional gerado por x e y . Se para todo $\sigma \subset V$, $K(\sigma) = K'(\sigma)$, então $R = R'$.

Demonstração. Ver [3], página 105. □

Lema 2.4.7. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M . Defina uma aplicação trilinear $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ por*

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e só se, $R = K_0 R'$, onde R é a curvatura de M .

Demonstração. Fazendo $\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = (X, Y, W, Z)'$ bem como $\langle R(X, Y, W), Z \rangle = (X, Y, W, Z)$, se for $R = K_0 R'$, então

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \frac{(X, Y, X, Y)}{|X \wedge Y|^2} \\ &= \frac{K_0 (X, Y, X, Y)'}{|X \wedge Y|^2} \\ &= \frac{K_0 (|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= K_0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se M tem curvatura seccional constante igual a K_0 para todo $\sigma \subset T_p M$, então

$$(X, Y, X, Y) = K_0 (|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2) = K_0 (X, Y, X, Y)'.$$

Pelo Lema anterior, isto implica que, para todo $X, Y, W, Z \in T_p M$

$$(X, Y, W, Z) = K_0 (X, Y, W, Z)'.$$

Logo $R = K_0 R'$, como queríamos demonstrar. $\square$

Estabeleceremos aqui uma igualdade que será útil na demonstração do teorema principal deste trabalho.

Lema 2.4.8. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma superfície parametrizada, (s, t) as coordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $V = V(s, t)$ um campo vetorial ao longo de f . Então, para cada (s, t) , vale a igualdade*

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R \left(\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \right) V.$$

Demonstração. Ver [3], página 109. $\square$

Afim de fixar idéias, estamos agora interessados em calcular a curvatura seccional da esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Em meio a este desenvolvimento, definiremos com notação adequada, a segunda forma fundamental de uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ em um ponto p , que a grosso modo exprime as relações entre as métricas Riemannianas de M e $\overline{M}$. Para este fim, considere as seguintes terminologias.

Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão isométrica. Para cada ponto $p \in M$, tem-se da Álgebra Linear que

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. Portanto, dado $v \in T_p \overline{M}$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_p M, \quad v^N \in (T_p M)^\perp,$$

onde v^T é denominada a *componente tangencial* de v e v^N a *componente normal* de v .

Indicaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$, e por $\overline{X}$, $\overline{Y}$ extensões locais a $\overline{M}$, de campos locais de vetores X e Y em M . Nesse sentido, definimos $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$.

Na proposição seguinte, dado um aberto $U \subset M$, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U)$.

Proposição 2.4.9. *Seja $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, e defina a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y.$$

Então a aplicação B é bilinear e simétrica.

Demonstração. A linearidade em X e Y segue das propriedades da definição de conexão afim. Para ver que B é simétrica, note que, da simetria da conexão de Levi-Civita, temos

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y = \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X} + [\overline{X}, \overline{Y}] - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Como em M , $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$, concluímos que $B(X, Y) = B(Y, X)$. $\square$

Agora, para definirmos a segunda forma fundamental, dados $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, considere a aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

e observe que, pela proposição anterior, a aplicação H_η é uma forma bilinear simétrica, portanto podemos associá-la a uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Mais precisamente, vale a proposição:

Proposição 2.4.10. *Seja $p \in M$, $x \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Seja $y \in T_p M$ e X, Y extensões locais de x, y , respectivamente, e tangentes a M . Então

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle(p) = \langle \overline{\nabla}_X Y, N \rangle(p) \\ &= -\langle Y, \overline{\nabla}_X N \rangle(p) = \langle -\overline{\nabla}_x N, y \rangle, \end{aligned}$$

para todo $y \in T_p M$. $\square$

Podemos agora definir a segunda forma fundamental.

Definição 2.4.11. A forma quadrática II_η definida em $T_p M$ por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η .

O teorema seguinte, em um caso particular, relaciona as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente denotadas por $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$, e será fundamental em nosso propósito de calcular a curvatura seccional da esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Nele, R e $\overline{R}$ são respectivamente as curvaturas de M e $\overline{M}$, com M imersa em $\overline{M}$.

Teorema 2.4.12. *Dados $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle + \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle.$$

Demonstração. Calculando $\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle$, temos

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle \\
 &= \langle \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + B(X, Z)) - \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + B(Y, Z)) + \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle \\
 &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle - \langle B(X, Z), \bar{\nabla}_Y W \rangle \\
 &\quad + \langle B(Y, Z), \bar{\nabla}_X W \rangle \\
 &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle + \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle.$$

□

Corolário 2.4.13. *Dado $p \in M$, se $X = W = x$ e $Y = Z = y$, onde $\{x, y\} \subset T_p M$ é um conjunto ortonormal, então*

$$K(x, y) = \bar{K}(x, y) + \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

Demonstração. Multiplicando por -1 a igualdade

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle + \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle,$$

temos

$$-\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle - \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle.$$

Fazendo as devidas substituições,

$$-\langle R(x, y)y, x \rangle = -\langle \bar{R}(x, y)y, x \rangle + \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

Como $\langle R(x, y)x, y \rangle = -\langle R(x, y)y, x \rangle$ e analogamente $\langle \bar{R}(x, y)x, y \rangle = -\langle \bar{R}(x, y)y, x \rangle$, segue que

$$K(x, y) = \bar{K}(x, y) + \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

□

Considere agora uma hipersuperfície $M^n \subset \bar{M}^{n+1}$. Dado $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, com $|\eta| = 1$, considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ tal que $S_\eta(e_i) = k_i e_i$,

$i = 1, \dots, n$. Tomando dois vetores $\{e_i, e_j\}$, como $B(e_i, e_j) \in (T_p M)^\perp$ e $(T_p M)^\perp$ tem dimensão 1, podemos escrever $B(e_i, e_j) = c\eta$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Mais precisamente, $c = \langle B(e_i, e_j), \eta \rangle = \langle S_\eta(e_i), e_j \rangle = k_i \langle e_i, e_j \rangle$, e portanto

$$B(e_i, e_j) = k_i \langle e_i, e_j \rangle \eta.$$

Assim, pelo corolário acima

$$K(e_i, e_j) = \overline{K}(e_i, e_j) + k_i k_j.$$

Finalmente, dada a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, como $\overline{K}(x, y) = 0$ para quaisquer $x, y \in T_p \mathbb{S}^n$ e, definindo $N(x) = -x$, com $|x| = 1$, pela proposição 2.4.9 tem-se $S_\eta = I$, onde I é a identidade, temos que $k_i = k_j = 1$. Logo, a curvatura seccional da esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é igual a 1.

Por último, dado uma variedade Riemanniana M , dizemos que M é *completa* se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial $\exp_p$, está definida para todo $v \in T_p M$. Se além disso, M tiver curvatura seccional constante, M é chamada uma *forma espacial*.

2.5 Campos de Jacobi e Pontos Conjugados

Nesta seção estudaremos os campos de Jacobi, que são campos de vetores ao longo de geodésicas, definidos por meio de uma equação diferencial. Apresentaremos também a definição de pontos conjugados e uma caracterização das singularidades da aplicação exponencial. Demais detalhes serão analisados no próximo capítulo.

Definição 2.5.1. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica de M . Um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se satisfaz para todo $t \in [0, a]$ a equação

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0.$$

A equação acima é chamada *equação de Jacobi*.

Exemplo 2.5.2. Sejam M uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante K , $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica normalizada e J um campo de Jacobi ao longo de γ , normal a γ' , então

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', T \rangle = K\{\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle J, \gamma' \rangle\} = K \langle J, T \rangle,$$

onde T é um campo de vetores qualquer ao longo de γ . Portanto

$$R(\gamma', J)\gamma' = KJ,$$

e por isso a equação de Jacobi, pode ser escrita como

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + KJ = 0.$$

Note ainda que o campo

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} \cdot w(t), & K > 0 \\ tw(t), & K = 0 \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} \cdot w(t) & K < 0. \end{cases}$$

é solução da equação diferencial acima com as condições iniciais $J(0) = 0$ e $J'(0) = w(0)$, onde $w(t)$ é um campo paralelo ao longo de γ , normal a γ' e com $|w(t)| = 1$.

Agora, dado $p \in M$ e $\epsilon > 0$, seja f uma superfície parametrizada dada por

$$f(t, s) = \exp_p tv(s), \quad t \in [0, 1], \quad s \in [-\epsilon, \epsilon],$$

onde $v(s)$ é uma curva de $T_p M$ com $v(0) = v$ e $v'(0) = w \in T_v(T_p M)$. Então, o campo

$$(d\exp_p)_{tv}(tw) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$$

ao longo da geodésica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $t \in [0, 1]$, é tal que $\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Assim, pelo o lema 2.4.8 temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{ds} \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} - R \left(\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} + R \left(\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Escrevendo $\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = J(t)$, temos que J satisfaz a equação

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0,$$

e portanto é um campo de Jacobi. Observando que $J(0) = 0$, os próximos resultados mostram que essa é a única maneira de construir campos de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$ com $J(0) = 0$.

Proposição 2.5.3. *Sejam $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica normalizada e J um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$. Faça $\frac{DJ}{dt}(0) = w$ e $\gamma'(0) = v$. Considere w como um elemento de $T_{av}(T_{\gamma(0)}M)$ e construa uma curva $v(s)$ em $T_{\gamma(0)}M$ com $v(0) = av$ e $v'(0) = w$. Faça $f(t, s) = \exp_p tv(s)$, $p = \gamma(0)$, e defina um campo de Jacobi $\bar{J}$ por $\bar{J}(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$. Então $J = \bar{J}$ em $[0, a]$.*

Demonstração. Pelo teorema de unicidade, basta provar que $J(0) = \bar{J}(0) = 0$ e $\frac{DJ}{dt}(0) = \frac{D\bar{J}}{dt}(0) = w$. De fato, em $s = 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{D}{\partial t}((d \exp_p)_{tv}(tw)) = \frac{D}{\partial t}(t(d \exp_p)_{tv}(w)) \\ &= (d \exp_p)_{tv}(w) + t \frac{D}{\partial t}((d \exp_p)_{tv}(tw)). \end{aligned}$$

Para $t = 0$,

$$\frac{D\bar{J}}{dt}(0) = \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = (d \exp_p)_0(w) = w.$$

Portanto, $\frac{DJ}{dt}(0) = \frac{D\bar{J}}{dt}(0) = w$. Como $\bar{J}(0) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = (d \exp_p)_{0v}0w = 0$, concluímos que $J = \bar{J}$. $\square$

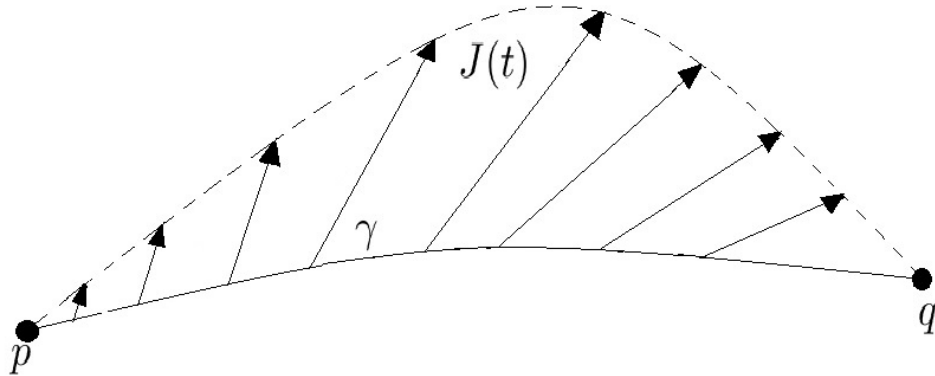
Corolário 2.5.4. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica. Então um campo de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = 0$ é dado por*

$$J(t) = (d \exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0, a].$$

Demonstração. Basta substituir v por $\gamma'(0)$ e w por $J'(0)$ em $\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = (d \exp_p)_{tv}(tw)$. $\square$

Antes de apresentarmos um simples resultado de caracterização das singularidades da aplicação exponencial, como nos referimos no início desta seção, faz-se necessário, tanto definir pontos conjugados, quanto apresentar um exemplo destes, afim de tornar tal definição mais clara. É o que faremos a seguir.

Definição 2.5.5. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica. Dado $t_0 \in (0, a]$, o ponto $\gamma(t_0) = q$ é conjugado de $\gamma(0) = p$ ao longo de γ , se existe um campo de Jacobi J ao longo de γ , não identicamente nulo, com $J(0) = 0 = J(t_0)$.*



Exemplo 2.5.6. Seja $\mathbb{S}^n$ a esfera unitária do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Como as curvaturas seccionais de $\mathbb{S}^n$ são iguais a 1, pelo exemplo 2.5.2, o campo de Jacobi em $\mathbb{S}^n$ dado por $J(t) = \sin(t)w(t)$ satisfaz a condição $J(0) = J(\pi) = 0$. Portanto, ao longo de qualquer geodésica γ de $\mathbb{S}^n$, o ponto antípoda $\gamma(\pi)$ de $\gamma(0)$ é conjugado de $\gamma(0)$.

Proposição 2.5.7. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica, com $\gamma(0) = q$. O ponto $p = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (0, a]$, é conjugado de q ao longo de γ se, e somente se, $v_0 = t_0\gamma'(0)$ é um ponto crítico da aplicação exponencial $\exp_q$.*

Demonstração. O ponto $p = \gamma(t_0)$ é conjugado de q ao longo de γ se, e somente se, existe um campo de Jacobi não nulo J ao longo de γ com $J(0) = 0 = J(t_0)$. Pelo corolário 2.5.4, campos de Jacobi satisfazendo $J(0) = 0$ são da forma $J(t) = (d\exp_q)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0))$. Portanto, p é conjugado de q se, e somente se,

$$0 = J(t_0) = (d\exp_q)_{t_0\gamma'(0)}t_0J'(0),$$

isto é, se e somente se $t_0\gamma'(0)$ é um ponto crítico de $\exp_q$. □

Note que na demonstração acima J é não nulo se, e só se, $J'(0) \neq 0$.

Capítulo 3

UM RESULTADO DE SIMETRIA EM SUBVARIEDADES DE FORMAS ESPACIAIS

Neste capítulo apresentaremos o teorema a que se refere o título deste trabalho, bem como sua demonstração. Antes disso, lembremos que uma *forma espacial* é por definição uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante K , e no que segue, $V = V^{n+1}$ com $n \geq 1$, é uma variedade diferenciável completa de dimensão $n + 1$, g é a métrica riemanniana em V , ∇ a conexão de Levi-Civita relacionada a g e $M = M^n$ é uma subvariedade diferenciável mergulhada em V , de dimensão n , que é compacta, orientável e sem bordo. Consideraremos também, em M , a métrica induzida por g , assim como a conexão de Levi-Civita relacionada e vamos chamar de N o vetor normal unitário a M . Serão consideradas também as seguintes definições:

Definição 3.0.8. A *segunda forma fundamental* h em M é o tensor simétrico definido no fibrado tangente TM , da seguinte forma:

$$h(X, Y) = g(\nabla_X Y, N) \quad \forall X, Y \in TM.$$

Definição 3.0.9. Seja um campo de vetores diferenciável unitário $X \in TM$. A *curvatura normal* de M , referida ao campo de vetor X , é o coeficiente da segunda forma fundamental:

$$C^X = h(X, X) = g(\nabla_X X, N).$$

Definição 3.0.10. A função distância $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, relacionada com g , é dada por

$$d(p_0, p_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(r'(t), r'(t))} dt$$

para quaisquer pontos $p_0, p_1 \in V$, onde $r : [t_0, t_1] \rightarrow V$, com $r(t_0) = p_0$ e $r(t_1) = p_1$, é a geodésica minimal em V conectando p_0 e p_1 .

Por último, lembremos que para um ponto $q \in V$ fixado, um ponto conjugado a q é um ponto $p \in V$ tal que, dada uma geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow V$, com $\gamma(0) = q$ e $\gamma(a_1) = p$, onde $a_1 \in (0, a]$, existe um campo de Jacobi não trivial J com $J(0) = 0 = J(a_1)$. Dito

isso, para $K > 0$, assumimos que M está contida na bola geodésica $B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}}(q)$ afim de evitar pontos conjugados, uma vez que para variedades Riemannianas com curvatura seccional constante $K > 0$, temos como campo de Jacobi, o campo $J(t) = \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}w(t)$, onde $w(t)$ é um campo paralelo ao longo de uma geodésica γ , com $g(\gamma'(t), w(t)) = 0$ e $|w(t)| = 1$, donde temos que $J(0) = 0 = J\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right)$, implicando ser $\gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{K}}\right)$ ponto conjugado de $\gamma(0)$. Por outro lado, quando $K \leq 0$ não existem pontos conjugados para qualquer ponto de V . De fato, dada a função

$$\phi(t) = \|J(t)\|^2,$$

onde J é um campo de Jacobi não trivial, então $\phi(t) \geq 0$. Calculando $\phi''(t)$, temos

$$\phi''(t) = 2\langle J''(t), J(t) \rangle + 2\|J'(t)\|^2.$$

Da equação de Jacobi,

$$\phi''(t) = -2\langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle + 2\|J'(t)\|^2,$$

onde γ é a geodésica relacionada ao campo J . De $K \leq 0$, temos $-2\langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle \geq 0$, donde $\phi''(t) \geq 0$. Assim, se tivermos $J(0) = 0 = J(t_0)$ para algum t_0 do domínio de γ , como ϕ é côncava para cima, existe t_1 pertencente ao domínio de γ , com $t_1 \neq t_0$, tal que $\phi(t_1) < 0$, uma contradição.

Agora afirmamos nosso resultado principal:

Teorema 3.0.11. *Seja V uma variedade Riemanniana $(n+1)$ -dimensional com curvatura seccional constante K , e M uma diferenciável, orientável, compacta, conexa e sem bordo, sub-variedade mergulhada em V , de dimensão n . Suponha que existe um ponto $q \notin M$ e um campo de vetor não-singular $X \in TM$, tal que:*

$$X(d(q, p)) = 0 \quad \forall p \in M. \quad (3.1)$$

Seja C^X a curvatura normal de M referente ao campo de vetor X . Temos dois casos:

- (i) $K \leq 0$. Se C^X é constante em M , então M é uma esfera geodésica em V ;
- (ii) $K > 0$. Se M pertence a $B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}}(q)$ e C^X é constante em M , então M é uma esfera geodésica em V .

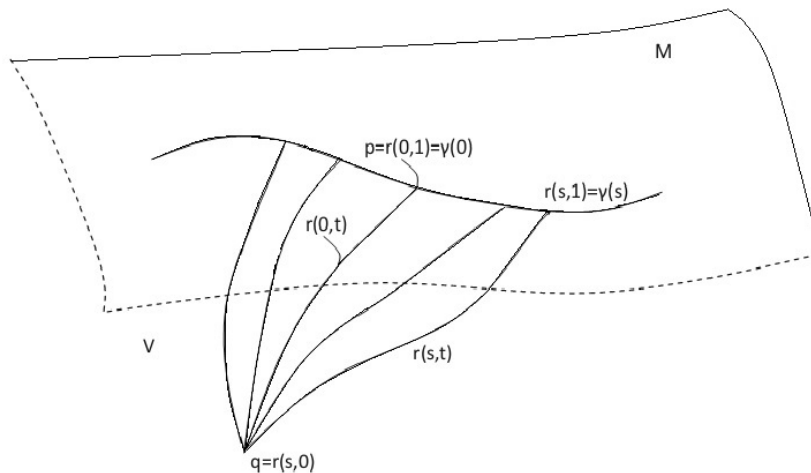
Demonstração. Primeiramente, uma vez que o campo de vetor X é não-singular, podemos normalizá-lo, de modo que $g(X, X) = 1$. Para todo $p \in M$, consideremos uma curva integral γ de um campo de vetor $Y \in TM$, passando por p , a saber: seja $\epsilon > 0$, então $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é tal que

$$\gamma(0) = p \text{ e } \frac{d}{ds}\gamma(s) = Y_{\gamma(s)} \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (3.2)$$

Ressaltamos aqui, que uma vez que não existem pontos conjugados a q em M , pela proposição 2.5.7, a aplicação exponencial $\exp_q$ não tem singularidades em M .

No que segue, denotaremos por um ponto $(\cdot)$ a derivada com respeito a t . Consideremos agora a família diferenciável $r(s, t)$ de geodésicas minimais únicas conectando q e γ , isto é:

$$\begin{cases} r(s, t) : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \longrightarrow V, \\ \frac{D}{dt} \frac{d}{dt} r(s, t) = \nabla_{\dot{r}} \dot{r} = 0 \\ r(s, 0) = q, \quad r(s, 1) = \gamma(s). \end{cases} \quad (3.3)$$



Definindo,

$$\ell_{\gamma(s)} = d(q, \gamma(s)),$$

e notando que

$$\ell_{\gamma(s)} = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{r}(s, t), \dot{r}(s, t))} dt = |\dot{r}(s, t)|$$

já temos as geodésicas $r(s, t)$ parametrizadas, de forma que elas tem velocidade constante (com respeito a t), igual a

$$|\dot{r}(s, t)| = \ell_{\gamma(s)} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Definamos em M , uma função E , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow E(p) = \frac{(d(q, p))^2}{2}. \end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} Y(E(p)) &= Y\left(\frac{(d(q, p))^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot Y((d(q, p))^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2Y(d(q, p))d(q, p) \\ &= d(q, p)Y(d(q, p)) \quad \forall Y \in TM. \end{aligned}$$

Em particular, como $q \notin M$ e então $d(q, p) > 0$, os pontos críticos em M de E são os mesmos da função distância $d(q, \cdot)$.

Agora, consideremos a função

$$\begin{aligned} \varphi &= E \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi(s) &= E(\gamma(s)) = \frac{(d(q, \gamma(s)))^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 g(\dot{r}(s, t), \dot{r}(s, t)) dt. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} Y(\varphi(s)) &= \frac{d}{ds} \varphi(s) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{ds} g(\dot{r}(s, t), \dot{r}(s, t)) dt \\ &= \int_0^1 g\left(\frac{D}{ds} \dot{r}(s, t), \dot{r}(s, t)\right) dt, \end{aligned}$$

onde a última igualdade acima, segue da definição de conexão compatível com a métrica.

Do Lema de Simetria, temos que

$$\begin{aligned} g\left(\frac{D}{ds} \dot{r}(s, t), \dot{r}(s, t)\right) &= g\left(\frac{D}{ds} \frac{d}{dt} r(s, t), \dot{r}(s, t)\right) \\ &= g\left(\frac{D}{dt} \frac{d}{ds} r(s, t), \dot{r}(s, t)\right) \\ &= \frac{d}{dt} g\left(\frac{d}{ds} r(s, t), \dot{r}(s, t)\right) - g\left(\frac{d}{ds} r(s, t), \frac{D}{dt} \dot{r}(s, t)\right) \end{aligned}$$

e, como $\frac{D}{dt}\dot{r}(s, t) = \nabla_{\dot{r}}\dot{r} = 0$, de (3.2) e (3.3) temos,

$$\begin{aligned} Y(\varphi(s)) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} g \left(\frac{d}{ds} r(s, t), \dot{r}(s, t) \right) dt \\ &= \left[g \left(\frac{d}{ds} r(s, t), \dot{r}(s, t) \right) \right]_0^1 \\ &= g(Y_{\gamma(s)}, \dot{r}(s, 1)). \end{aligned}$$

Note, que a velocidade de variação das geodésicas em $t = 0$, $\frac{d}{ds}r(s, 0)$, é zero.

Suponhamos agora que $p_0 \in M$ é um ponto crítico de E , então $Y(\varphi(0)) = 0$ para qualquer $Y \in T_{p_0}M$. Note ainda que

$$\dot{r}(0, 1) = -\ell_{\gamma(0)}N = -d(q, p_0)N.$$

Além disso, por (3.1), para todo $p \in M$ vale:

$$X(\varphi(s)) = g(X_{\gamma(s)}, \dot{r}(s, 1)) = 0, \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (3.4)$$

Seja $\gamma(0) = p$ e $\frac{d}{ds}\gamma(s) = X_{\gamma(s)}$, $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$, então

$$\begin{aligned} 0 = X^2(\varphi(s)) &= \frac{d}{ds} g(X_{\gamma(s)}, \dot{r}(s, 1)) \\ &= g \left(\frac{D}{ds} X_{\gamma(s)}, \dot{r}(s, 1) \right) + g \left(X_{\gamma(s)}, \frac{D}{ds} \dot{r}(s, 1) \right) \\ &= g(\nabla_{X_{\gamma(s)}} X_{\gamma(s)}, \dot{r}(s, 1)) + g \left(X_{\gamma(s)}, \frac{D}{ds} \dot{r}(s, 1) \right). \end{aligned}$$

Calculando a expressão anterior em um ponto crítico $p_0 = \gamma(0)$ de E , temos:

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_X X, \dot{r}(0, 1))_{p_0} + g \left(X_{p_0}, \frac{D}{ds} \dot{r}(0, 1) \right) \\ &= -d(q, p_0)g(\nabla_X X, N)_{p_0} + g \left(X_{p_0}, \frac{D}{ds} \dot{r}(0, 1) \right) \\ &= -d(q, p_0)C_{p_0}^X + g \left(X_{p_0}, \frac{D}{ds} \dot{r}(0, 1) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Fazendo,

$$\frac{D}{ds} \dot{r}(0, 1) = \frac{D}{ds} \dot{r}(s, t) \Big|_{s=0, t=1} = \frac{D}{ds} \frac{d}{dt} r(s, t) \Big|_{s=0, t=1} = \frac{D}{dt} \frac{d}{ds} r(s, t) \Big|_{s=0, t=1} \quad (3.6)$$

e definindo

$$J(t) = \frac{d}{ds} r(s, t) \Big|_{s=0}$$

temos que J é um campo de Jacobi ao longo da geodésica $r(0, \cdot)$. De fato, pelo lema 2.4.8,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{D}{ds} \left(\frac{D}{dt} \frac{d}{dt} r(s, t) \Big|_{s=0} \right) \\
&= \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{d}{dt} r(s, t) \Big|_{s=0} - R \left(\frac{d}{ds} r(s, t) \Big|_{s=0}, \frac{d}{dt} r(s, t) \Big|_{s=0} \right) \frac{d}{dt} r(s, t) \Big|_{s=0} \\
&= \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{d}{ds} r(s, t) \Big|_{s=0} + R \left(\frac{d}{dt} r(s, t) \Big|_{s=0}, \frac{d}{ds} r(s, t) \Big|_{s=0} \right) \frac{d}{dt} r(s, t) \Big|_{s=0}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{D^2}{dt^2} J(t) + R(\dot{r}(0, t), J(t)) \dot{r}(0, t) = 0,$$

o que prova esta afirmação.

Em particular, J é normal ao longo de $r(0, \cdot)$, uma vez que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} g(J(t), \dot{r}(0, t)) &= \frac{d}{dt} g \left(\frac{d}{ds} r(s, t), \frac{d}{dt} r(s, t) \right) \Big|_{s=0} \\
&= g \left(\frac{D}{dt} \frac{d}{ds} r(s, t), \frac{d}{dt} r(s, t) \right) \Big|_{s=0} + g \left(\frac{d}{ds} r(s, t), \frac{D}{dt} \frac{d}{dt} r(s, t) \right) \Big|_{s=0} \\
&= g \left(\frac{D}{ds} \frac{d}{dt} r(s, t), \frac{d}{dt} r(s, t) \right) \Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} g \left(\frac{d}{dt} r(s, t), \frac{d}{dt} r(s, t) \right) \Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\dot{r}(s, t)|^2 \Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} [(\ell_{\gamma(s)})^2] \Big|_{s=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto a função $g(J(t), \dot{r}(0, t))$ é constante ao longo de t , e para $t = 1$, temos por (3.4):

$$g(J(1), \dot{r}(0, 1)) = g(X_{p_0}, \dot{r}(0, 1)) = 0,$$

nos dando $g(J(t), \dot{r}(0, t)) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$, assim J é normal ao longo de $r(0, \cdot)$.

Usemos agora as hipóteses de curvatura seccional constante para escrever fórmulas explícitas para o campo de Jacobi normal J . Primeiro, lembremos que se K é a curvatura seccional constante de V , então R satisfaz a seguinte igualdade:

$$R(X, Y)Z = K[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] \quad \forall X, Y, Z \in TM.$$

Uma vez que J satisfaz a equação de Jacobi,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{D^2}{dt^2} J(t) + R(\dot{r}(0, t), J(t)) \dot{r}(0, t) \\
&= \frac{D^2}{dt^2} J(t) - R(J(t), \dot{r}(0, t)) \dot{r}(0, t) \\
&= \frac{D^2}{dt^2} J(t) - [K(g(J(t), \dot{r}(0, t)) \dot{r}(0, t) - g(\dot{r}(0, t), \dot{r}(0, t)) J(t))] \\
&= \frac{D^2}{dt^2} J(t) + g(\dot{r}(0, t), \dot{r}(0, t)) J(t) K \\
&= \frac{D^2}{dt^2} J(t) + |\dot{r}(0, t)|^2 K J(t) \\
&= \frac{D^2}{dt^2} J(t) + \ell_{p_0}^2 K J(t),
\end{aligned}$$

onde $\ell_{p_0} = d(q, p_0)$.

Escolhendo qualquer campo de vetor paralelo Z ao longo da geodésica $r(0, \cdot)$, isto é, escolhendo Z , de forma que

$$\frac{D}{dt} Z(t) = \nabla_{\dot{r}(0, t)} Z_{r(0, t)} = 0,$$

podemos escrever $J(t) = u(t)Z(t)$, desde que a função escalar u satisfaça a equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{u}(t) + \ell_{p_0}^2 K u(t) = 0.$$

Para ver isto, basta substituir $J(t)$ por $u(t)Z(t)$ na equação $\frac{D^2}{dt^2} J(t) + \ell_{p_0}^2 K J(t) = 0$.

Em particular, uma vez que $J(0) = 0$, exigimos que $u(0) = 0$, e então, podemos escolher Z de forma que $Z(1) = X_{p_0}$, assim $u(1) = \frac{J(1)}{Z(1)} = \frac{X_{p_0}}{X_{p_0}} = 1$, uma vez que $r(s, 1) = \gamma(s)$ nos dá $\frac{d}{ds} r(s, 1) = \gamma'(s)$ e portanto

$$J(1) = \frac{d}{ds} r(0, 1) = \gamma'(0) = X_{\gamma(0)} = X_{p_0}.$$

Finalmente, definindo $a = d(q, p_0)\sqrt{K}$ para $K \geq 0$ e $a_1 = d(q, p_0)\sqrt{-K}$ para $K < 0$, temos as seguintes fórmulas explícitas para u :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\text{sen}(a)} \cdot \text{sen}(at), & K > 0 \\ t, & K = 0 \\ \frac{1}{\text{senh}(a_1)} \cdot \text{senh}(a_1 t) & K < 0. \end{cases}$$

De fato, verificando em $\ddot{u}(t) + \ell_{p_0}^2 K u(t) = 0$, temos:

- para $K > 0$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}(t) + \ell_{p_0}^2 K u(t) &= \left[\frac{\text{sen}(at)}{\text{sen}(a)} \right]'' + \frac{\ell_{p_0}^2 K \text{sen}(at)}{\text{sen}(a)} \\
&= \left[\frac{\cos(at)a}{\text{sen}(a)} \right]' + \frac{\ell_{p_0}^2 K \text{sen}(at)}{\text{sen}(a)} \\
&= -\frac{\text{sen}(at)(\ell_{p_0} \sqrt{K})^2}{\text{sen}(a)} + \frac{\ell_{p_0}^2 K \text{sen}(at)}{\text{sen}(a)} \\
&= 0;
\end{aligned}$$

- para $K = 0$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}(t) + \ell_{p_0}^2 K u(t) &= t'' + \ell_{p_0}^2 0t \\
&= 0;
\end{aligned}$$

- para $K < 0$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}(t) + \ell_{p_0}^2 K u(t) &= \left[\frac{\text{senh}(a_1 t)}{\text{senh}(a_1)} \right]'' + \frac{\ell_{p_0}^2 K \text{senh}(a_1 t)}{\text{senh}(a_1)} \\
&= \left[\frac{\cosh(a_1 t)a_1}{\text{senh}(a_1)} \right]' + \frac{\ell_{p_0}^2 K \text{senh}(a_1 t)}{\text{senh}(a_1)} \\
&= \frac{\text{senh}(a_1 t)(\ell_{p_0} \sqrt{-K})^2}{\text{senh}(a_1)} + \frac{\ell_{p_0}^2 K \text{senh}(a_1 t)}{\text{senh}(a_1)} \\
&= -\frac{\text{senh}(a_1 t)\ell_{p_0}^2 K}{\text{senh}(a_1)} + \frac{\ell_{p_0}^2 K \text{senh}(a_1 t)}{\text{senh}(a_1)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Notemos, que se $K > 0$, então por hipótese, para todo $p \in M$ vale

$$0 < d(q, p) < \frac{\pi}{\sqrt{K}},$$

multiplicando por $\sqrt{K}$, temos

$$0 < d(q, p)\sqrt{K} < \pi,$$

onde em particular, temos

$$0 < d(q, p_0)\sqrt{K} < \pi,$$

nos dando

$$0 < a < \pi.$$

Por (3.6),

$$\frac{D}{ds} \dot{r}(0, 1) = \frac{D}{dt} \frac{d}{ds} r(s, t) \Big|_{s=0, t=1} = \frac{D}{dt} J(t) \Big|_{t=1} = \dot{u}(1)Z(1) + u(1)\frac{D}{dt}Z(1) = \dot{u}(1)X_{p_0},$$

e ainda, das regras de derivação,

$$\dot{u}(1) = \begin{cases} a \cot(a), & K > 0 \\ 1, & K = 0 \\ a_1 \coth(a_1) & K < 0. \end{cases}$$

Assim, (3.5) pode ser reescrita como

$$0 = -d(q, p_0)C_{p_0}^X + g(X_{p_0}, \dot{u}(1)X_{p_0}) = -d(q, p_0)C_{p_0}^X + \dot{u}(1).$$

Uma vez que X é não nulo e M é compacta, então E admite máximo e mínimo, que são pontos críticos de E . Pela hipótese de curvatura normal constante $C_p^X = C^X = \text{const.}$ em M , temos que para todo ponto crítico p_0 de E , em particular, o máximo e o mínimo, vale

$$d(q, p_0) = \frac{\dot{u}(1)}{C_{p_0}^X},$$

Portanto:

- para $K > 0$

$$d(q, p_0) = \frac{\dot{u}(1)}{C_{p_0}^X} = \frac{a \cot(a)}{C^X} = \frac{d(q, p_0)\sqrt{K} \cot(d(q, p_0)\sqrt{K})}{C^X},$$

então

$$\begin{aligned} \cot(d(q, p_0)\sqrt{K}) &= \frac{C^X}{\sqrt{K}} \Rightarrow \frac{1}{\tan(d(q, p_0)\sqrt{K})} = \frac{C^X}{\sqrt{K}} \\ &\Rightarrow \tan(d(q, p_0)\sqrt{K}) = \frac{\sqrt{K}}{C^X} \\ &\Rightarrow d(q, p_0) = \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan\left(\frac{\sqrt{K}}{C^X}\right); \end{aligned}$$

- para $K = 0$

$$d(q, p_0) = \frac{1}{C^X};$$

- para $K < 0$

segue analogamente do caso $K > 0$ que

$$d(q, p_0) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{-K}}{C^X}\right).$$

Em resumo,

$$\begin{cases} d(q, p_0) = \frac{1}{\sqrt{K}} \arctan \left(\frac{\sqrt{K}}{C^x} \right), & K > 0 \\ d(q, p_0) = \frac{1}{C^x}, & K = 0 \\ d(q, p_0) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{-K}}{C^x} \right) & K < 0. \end{cases}$$

Portanto, a função distância $d(q, \cdot)$ é constante em M e M é uma esfera geodésica.

□

REFERÊNCIAS

- [1] Lectures note 11. <http://people.math.gatech.edu/~ghomi/LectureNotes/LectureNotes11G.pdf>, 2006. Access date: 6 oct. 2013.
- [2] CARMO, M. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 4^a ed. Textos Universitários. SBM, Rio de Janeiro, 2010.
- [3] CARMO, M. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [4] LEE, J. M. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] LEE, J. M. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [6] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [7] MAALAOUI, A., AND MARTINO, V. A symmetry result on submanifolds of space forms and applications. *Mediterr. J. Math.* 10, 1 (2013), 507–517.
- [8] O’NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry*, vol. 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.