

PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Leonardo Rogério da Silva Rodrigues

**Controlabilidade Exata na Fronteira para um Sistema de
Timoshenko**

São Luís - MA

2014

Leonardo Rogério da Silva Rodrigues

**Controlabilidade Exata na Fronteira para um Sistema de
Timoshenko**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Marcos Antonio Ferreira Araújo**.

São Luís - MA

2014

Leonardo Rogério da Silva Rodrigues

Controlabilidade Exata na Fronteira para um Sistema de Timoshenko

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Marcos Antonio Ferreira Araújo**.

Dissertação aprovada em 10 de Fevereiro de 2014, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(ORIENTADOR) **Dr. Marcos Antonio Ferreira Araújo** (UFMA)

Dr. Aldo Trajano Lourêdo (UEPB)

Dra. Renata de F. L. Carvalho (UFMA)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família. Em especial a minha mãe, Djacir R. da Slva. A minha esposa Josicleide e ao meu filho Luís Otávio.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira Araújo, pela paciência, pelas conversas, por ajudar-me no conhecimento obtido sempre me indicando o caminho a ser seguido nos momentos de maior dificuldade e por depositar sua confiança em mim diante desse trabalho.

A todos os professores do PPGMAT da UFMA que contribuíram para meu engrandecimento acadêmico.

Ao Prof. Dr. José Carlos Aragão, por incentiva-me a fazer o mestrado.

À minha mãe Djacir, pelo apoio na minha decisão de prosseguir os meus estudos.

À minha esposa Josicleide, pelo apoio nos momentos de dificuldade, por ter encarado sozinha a difícil missão de educar o nosso filho, durante os momentos em que estive ausente.

Aos meus amigos e colegas de mestrado, Paulo Queiroz, Ronaldo Smith, Geilson Reis, Leandro, Popó, Diego, Jorge da Capadócia, Valdir Weingarten, Launé, pelos momentos de estudos e lazer, em especial a Jadevilson Cruz pelas longas horas de estudo juntos e grande amizade construída e Jailson Calado pelos conselhos, convivência, dúvidas tiradas e amizade ao longo desses dois anos.

À banca examinadora.

Ao povo brasileiro, que por meio da FAPEMA, financiou os meus estudos.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a controlabilidade exata na fronteira para um sistema de Timoshenko. Esse sistema modela as vibrações transversais, inércia rotatória e tensão de cisalhamento da secção transversal de uma viga. Estudamos a existência e unicidade das soluções do problema. Usaremos o HUM (Método de unicidade Hilbertiana) idealizado por J.L Lions para obter o controle exato na fronteira, tanto para o caso em que os coeficientes das equações do sistema são constantes reais positivas, quanto para o caso em são variáveis.

Palavras-chave: EDP, Controlabilidade, HUM, Desigualdade Inversa.

ABSTRACT

In this work, we analyse the exact controllability on boundary of a Timoshenko system. This system is the mathematical model of transverse vibrations, rotatory inertia and shearing deformation of transversal section of beams. We study the existence and uniqueness of solutions to problem. We use the Hilbert uniqueness Method, HUM, idealized by Jacques-Louis Lions for obtain the exact control on boundary for the system with constant coefficients, as well that with variable coefficients.

Keywords: EDP, Controllability, HUM , Observability inequality.

SUMÁRIO

	Page
Introdução	9
Capítulo 1: Noções preliminares	13
1.1 Espaços Funcionais	13
1.1.1 Principais Resultados Utilizados	19
Capítulo 2: Soluções para um Sistema de Timoshenko	25
2.1 Modelo de Timoshenko	25
2.2 Solução Forte	27
2.2.1 Desigualdade de Energia	38
2.3 Solução Fraca	40
2.4 Solução Ultra Fraca	47
Capítulo 3: Controlabilidade Exata para um sistema de Timoshenko	50
3.1 Controlabilidade Exata	50
3.1.1 Controlabilidade Exata na Fronteira	50
Capítulo 4: Controlabilidade Exata com Coeficientes Variáveis	65
4.1 Teorema Principal e Aplicação do HUM	66
Apêndice A: Existência e Prolongamento de Soluções Aproximadas	72

INTRODUÇÃO

Os fenômenos de natureza elástica tem sido objeto de intenso estudo nas últimas décadas. Em especial os que modelam as vibrações de barras ou vigas. A análise de vigas é bastante comum em problemas de engenharia e ciências aplicadas, tornando-se fundamental o seu estudo e formulação. Para este propósito, usualmente, consideram-se os modelos de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko. O movimento de uma viga pode ser descrito pela equação de Euler-Bernoulli, quando as dimensões da secção transversal são pequenas em comparação com o comprimento da viga. Se as dimensões da secção transversal não são desprezíveis, o efeito da inércia rotatória deve ser considerado. Nesse caso, o movimento é mais bem descrito pela equação viga de Rayleigh. Se o desvio devido ao cisalhamento é levado em conta, além da inércia rotatória, chegamos a um modelo ainda mais preciso que é chamado a viga de Timoshenko.

A intenção do presente trabalho é investigar algumas propriedades das equações que modelam o movimento da viga de Timoshenko, a saber: existência, unicidade, regularidade e controlabilidade exata na fronteira, com condições de contorno tipo Dirichlet. Para uma viga de comprimento $L > 0$, seu movimento é descrito pelo sistema de equações parciais acopladas:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{\rho} y_{tt} = EI y + K(z_x - y) \\ \rho z_{tt} = K(z_x - y)_x \end{array} \right. \quad \text{em } Q \quad (1)$$

onde $Q = (0, L) \times (0, T)$. Assumindo as condições de fronteira do tipo Dirichlet, isto é,

$$y(0, t) = y(L, t) = z(0, t) = z(L, t) = 0 \quad t \in (0, T)$$

e condições iniciais

$$y(x, 0) = y^0(x), \quad y_t(x, 0) = y^1(x), \quad z(x, 0) = z^0(x), \quad z_t(x, 0) = z^1(x), \quad x \in (0, L).$$

Aqui, t é a variável tempo e x é a coordenada do espaço ao longo da viga; y_x significa a derivada da função em relação a x e y' a derivada em relação a t . Além disso, z indica

o deslocamento transversal, y a rotação angular da secção transversal, k , I , I_ρ , E e ρ são coeficientes positivas. A energia do sistema é definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\rho(z_t)^2 + I_\rho(y_t)^2 + EI(y_x)^2 + K(z_x - y)^2 \right) dx \quad (2)$$

de onde segue que $E(t) = E(0)$, $\forall t \geq 0$.

Existem duas velocidades de propagação de ondas associada a (1),

$$v_1 = \sqrt{\frac{EI}{I_\rho}} \quad v_2 = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (3)$$

Temos que T_1 e T_2 denotam o tempo requerido pelos dois tipo de ondas para percorrem todo o comprimento da viga. Especificamente

$$T_1 = \int_0^L \frac{1}{v_1(x)} dx \quad T_2 = \int_0^L \frac{1}{v_2(x)} dx \quad (4)$$

Temos $T_0 = 2\max(T_1, T_2)$, supondo que $T > T_0$.

Considerando o importante papel desempenhado por vigas em várias áreas das ciências e engenharia, não é de estranhar que o controle de suas vibrações tenha motivado o trabalho de muitos investigadores começando com os trabalhos pioneiro de Lagnese e Lions [?] e Littman e Markus [?]. Recordando alguns resultados presentes na literatura, podemos mencionar, Soufyane [?] o qual estudou a estabilização uniforme e controle exato para uma viga, mediante a ação de um controle interno. No caso da aplicação de duas forças de controle, Kim e Renardy [?] estudaram a estabilização uniforme. Taylor [?] conseguiu resultados de controlabilidade no caso dos coeficientes da viga serem variáveis. Outras referências que merecem ser mencionadas (entre muitas outras) sobre o controle de vigas e estruturas relacionadas são Tucsnak [?], Léon e Zuazua [?], e as publicações de F. Bourquin [?] e seus colaboradores, Collet, e Joly.

Observe-se que, se consideramos o problema homogêneo adjunto a (1), a partir de (2) obtemos $E(t) = E(0)$, quer dizer, a energia total do sistema mecânico é constante ao longo de cada trajetória do sistema. Assim, nem uma solução não-nula da equação homogênea atinge o estado de repouso em tempo algum. Logo o problema da controlabilidade exata consiste precisamente em conduzir todas as trajetórias ao equilíbrio em um tempo uniforme, mediante a ação de uma força externa o *controle*. De forma mais precisa, o problema de controlabilidade exata para o sistema de Timoschenko, pode ser formulado da seguinte maneira: Estudar a existência de um tempo $T > 0$ tal

que para cada par de dados iniciais $\{y^0, y^1\}$, $\{z^0, z^1\}$ exista um controle $v(t)$ tal que a solução de (1) verifique

$$y(T) = y'(T) = z(T) = z'(T) = 0. \quad (5)$$

Nesta dissertação, fazemos um estudo do trabalho de Medeiros [?], onde o principal resultado é a controlabilidade exata para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_{tt} = a(x)y + z_x - y \\ z_{tt} = b(x)z_{xx} - y_x \end{cases} \quad \text{em } Q \quad (6)$$

Para isso considerou-se as seguintes hipóteses: Sejam $a, b \in W^{1,\infty}(0,1)$ tais que

$$\begin{cases} a(x) \geq a_0 > 1 \\ b(x) \geq b_0 > 1 \end{cases} \quad \text{em } (0,1) \quad (7)$$

e $T > 2\alpha$, onde $\alpha = \max\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}, \frac{1}{\sqrt{b_0}}\right)$.

Com estas hipóteses, o sistema é mais geral que o sistema de Timoshenko usual, pois inclui uma generalização do laplaciano, ou seja, incluímos coeficientes variáveis $a(x)$ e $b(x)$ nos termos onde figuram duas derivadas em relação a variável x . A demonstração da controlabilidade é baseada no método HUM (Hilbert Uniqueness Method). Para isso faz-se necessário demonstrar uma desigualdade de observabilidade dada por

$$C \left\| \left\{ \phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1 \right\} \right\|_F^2 \leq \int_0^T a(0) |\phi_x(0,t)|^2 dt + \int_0^T b(0) |\psi_x(0,t)|^2 dt \quad (8)$$

onde C é uma constante positiva, $T > T_0$ e $y = (x, t)$ e $z = (x, t)$ é solução de (6). Um problema técnico que surge na demonstração de tal desigualdade é a existência de coeficientes variáveis nas equações do sistema, os quais nos impedem de usar princípios de continuação única decorrentes do teorema de Holmgren.

No capítulo 1, serão desenvolvidos os conceitos de Distribuição e Espaço de Sobolev e apresentaremos alguns resultados relevantes para definir o conceito de solução de um sistema de equações de Timoshenko.

No capítulo 2, faz-se uma apresentação física das vibrações de uma barra grossa ou também chamada viga de Timoshenko. Provaremos a existência, unicidade e regularidade de soluções forte, fraca e ultra fraca do sistema (6), usaremos método de Faedo-Galerkin para provar a existência de solução forte e fraca. O método da transposição é

usado para definir solução ultra-fraca.

Os capítulos 3 e 4 versam sobre a controlabilidade exata do sistema (6). No capítulo 3, consideraremos os coeficientes reais positivos. Para conseguir o controle provaremos as desigualdade direta e inversa, usado o método HUM. No capítulo 4, aplica-se as hipóteses de (7) ao problema (6). Para provamos a controlabilidade sob essas condições, lança-se mão do funcional de energia como foi definido em [?], afim de obter estimativas *a priori* adequadas que permitam majorar a energia total das soluções em função de uma energia localizada em uma região específica da fronteira, a saber onde o *controle* exerce a ação. Para obtemos estas estimativas utilizamos técnicas de multiplicadores combinadas com desigualdades de energia.

Capítulo 1

NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo daremos definições e resultados essenciais à continuidade do trabalho

1.1 Espaços Funcionais

Definição 1.1.1. Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f , e denota-se por $\text{supp}(f)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Assim, $\text{supp}(f)$ é um subconjunto fechado de Ω .

Definição 1.1.2. Uma **n-upla** de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ define-se $D^0 u = u$, para toda função u .

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas e com suporte compacto em Ω . Um exemplo clássico de uma função de C_0^∞ é dado por

Exemplo 1.1.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\} \subset \Omega$.

Consideremos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \text{se } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma euclidiana de x . Temos que $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}(f) = \overline{B_1(0)}$ é compacto, isto é $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1.4. Denota-se com $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que a restrição de u a qualquer compacto K de $\mathbb{R}$ é integrável a Lebesgue em K .

Definição 1.1.5. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que uma função $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ é **derivada parcial fraca** de u em relação a x_i , se

$$\int_{\Omega} u(\partial_i \varphi) = \int_{\Omega} v_i \varphi,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty$. Neste caso, denotaremos

$$v_i = \partial_i u.$$

Dizemos que u é **fracamente diferenciável** se todas as derivadas parciais fracas de primeira ordem de u existirem.

Exemplo 1.1.6. Sejam $n = 1$, $\Omega = (0, 2)$ e

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Então, se

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

temos $u'(x) = v(x)$. De fato, dada $\varphi \in C_0^\infty((0, 2))$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^2 u \varphi' &= \int_0^1 x \varphi' + \int_1^2 \varphi' = \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi + 0 - \varphi(1) \\ &= - \int_0^2 v \varphi. \end{aligned}$$

Definição 1.1.7. Diz que uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $f \in C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $f \in C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

- i) Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi) \in K$ e $\text{supp}(\varphi)_n \in K, \forall n \in \mathbb{N}$,
- ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K , para todo multi-índice α .

Observação 1.1.8. O espaço C_0^∞ , munido da noção de convergência definida acima será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de Espaço das Funções Testes sobre Ω .

Definição 1.1.9. Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega),$
- ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_n$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_n$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω , com as operações usuais, é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria.

Exemplo 1.1.10. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx,$$

é comum distribuições sobre Ω univocamente determinada por u . Por esta razão, identifica-se à distribuição T_u por ela definida, desta forma $L^1_{loc}(\Omega)$ será identificada a uma parte(própria) de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.1.11. Consideremos $0 \in \Omega$ e o funcional $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

δ_0 é uma distribuição sobre Ω . Além disso, mostra-se que δ_0 não é definido por uma função de L^1_{loc} , isto é, não existe $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int f\varphi$.

Observação 1.1.12. Tem-se a seguinte cadeia, para $1 \leq p < \infty$,

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

sendo cada inclusão densa na seguinte.

Definição 1.1.13. Diz-se que uma sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.1.14. Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições) de ordem $|\alpha|$ de T é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.1.15. Decorre da definição (1.1.14) que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens.

Observação 1.1.16. $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω , onde $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, vê-se facilmente que $D^\alpha T$ é linear. Agora, para a continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim, $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Observação 1.1.17. A aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $T \rightarrow D^\alpha T$ é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$ (para maiores detalhes ver [?]).

Exemplo 1.1.18. Seja u a função Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma: $u(x) = 1$ se $x > 0$ e $u(x) = 0$ se $x \leq 0$. Ela pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. De fato, tem-se:

$$\langle u', \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Como vimos pelo exemplo acima, a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, não é em geral, uma função de L^1_{loc} . Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidas sob a denominação de Espaços de Sobolev.

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω , isto é, o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{ess} |D^\alpha u(x)|, \quad \text{quando } p = \infty,$$

é um espaço de Banach(ver [?]).

Dado um espaço de Banach X , denotamos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u definida em $(0, T)$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $(0, T)$, com norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 1.1.19. Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Se X é separável, então podemos indentificar

$$[L^p(0, T; X)]' \approx L^q(0, T; X'),$$

onde $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{q}\right) = 1$. Quando $p = 1$, faremos a identificação

$$\left[L^1(0, T; X) \right]' \approx L^\infty(0, T; X').$$

Essas identificações encontram-se detalhadas em [?].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado de Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 1.1.20. Dada $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, defini-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Exemplo 1.1.21. Dadas $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ a aplicação $T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t) \varphi(t) dt,$$

integral de Bochner em X , é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0, T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X)$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0, T; X) = \left\{ u \in L^p(0, T; X); u^{(j)} \in L^p(0, T; X), j = 1, \dots, m \right\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j -ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais.

Equipado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}(t)\|_{L^p(0,T;X)} \right), & 1 \leq p < \infty \\ \sup_{t \in (0,T)} \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}(t)\|_X \right), & p = \infty \end{cases}$$

$W^{m,p}(0, T; X)$ é um de Banach (ver [?]). O espaço

$$W_0^{m,p}(0, T; X) = \{u \in W^{m,p}(0, T; X); u(0) = u(T) = 0\},$$

representa o fecho de $\mathcal{D}(0, T; X)$ com norma de $W^{m,p}(0, T; X)$.

Observação 1.1.22. quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0, T; X)$ será denotado por $H^m(0, T; X)$, que munido do produto

$$(u, v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0, T; X)$ o fecho, em $H^m(0, T; X)$, de $\mathcal{D}(0, T; X)$ e por $H^{-m}(0, T; X)$ o dual topológico de $H_0^m(0, T; X)$.

Valem as seguintes inclusões

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \approx L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

As propriedades de imersão compacta dos espaços de Sobolev são as que lhe conferem a sua grande utilidade. Recordamos os conceitos de *imersão contínua* e *imersão compacta*:

Definição 1.1.23. Seja E um subespaço vetorial normado de um espaço normado F (ou seja, a norma em E não precisa necessariamente ser a norma induzida de F). Dizemos que a inclusão $E \subset F$ é uma *imersão* (contínua) se a aplicação inclusão $I : E \rightarrow F$ denida por $Ix = x$ for contínua. Denotamos este fato por

$$E \hookrightarrow F.$$

Se, além disso, a aplicação inclusão for compacta, dizemos que a imersão $E \hookrightarrow F$ é *compacta*. Denotaremos a imersão compacta de um espaço vetorial normado E em um espaço vetorial normado F por

$$E \xhookrightarrow{c} F.$$

Como a aplicação inclusão é linear, o fato de existir uma imersão $E \hookrightarrow F$ é equivalente à existência de uma constante C tal que

$$\|x\|_F \leq C \|x\|_E \text{ para todo } x \text{ em } E$$

Lema 1.1.24 (Imersão de Sobolev). *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

$$i) \ n > mp, \text{ então } W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ onde } q \in \left[1, \frac{np}{n-mp}\right].$$

$$ii) \text{ Se } n = mp, \text{ então } W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ onde } q \in [1, +\infty)$$

$$iii) \text{ Se } n = 1 \text{ e } m \geq 1, \text{ então } W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Prova: Ver [?] □

Lema 1.1.25. (Rellich-Kondrachov) *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

$$i) \ n > mp, \text{ então } W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega), \text{ onde } q \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right].$$

$$ii) \text{ Se } n = mp, \text{ então } W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega), \text{ onde } q \in [1, +\infty)$$

$$iii) \text{ Se } pm > n, \text{ então } W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^k(\overline{\Omega}), \text{ onde } k \text{ é um inteiro não negativo tal que } k < m - (n/p) \leq k + 1$$

Prova: Ver [?] □

1.1.1 Principais Resultados Utilizados

Denota-se por $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ ao espaço de Banach das restrições a $\overline{\Omega}$ das funções pertencentes a $C^{k,\lambda}$ (vide [?]), é equipado com a norma induzida, isto é,

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| + \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x,y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x - y\|^\lambda}$$

Teorema 1.1.26. *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), Ω de classe C^m . Então*

$$W^{m,\infty}(\Omega) \text{ é isomorfo a } C^{m-1,1}(\overline{\Omega}).$$

Prova: Ver [?]

□

Teorema 1.1.27. (Teorema do Traço) *Seja $\Omega = \mathbb{R}_+^n$. A aplicação linear*

$$\varphi \mapsto (\gamma_0 \varphi, \gamma_1 \varphi, \dots, \gamma_{m-1} \varphi), \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow X,$$

prolonga-se por continuidade a uma aplicação linear e contínua γ em $H^m(\Omega)$, $m \geq 1$, sobre X , cujo núcleo é o espaço H_0^m . Tem-se ainda que γ possui inversa à direita linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear e contínua Λ de X em $H^m(\Omega)$ tal que $\gamma(\Lambda \omega) = \omega$ para todo $\omega \in X$

Representa-se por X o espaço de Hilbert

$$X = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$

Prova: Ver [?]

□

Observação 1.1.28. Note que para o caso unidimensional, isto é, $\Omega = (\alpha, \beta)$ se $u \in H^m(\alpha, \beta)$, então pelo Lema 1.1.25 $u \in C^{m-1}([\alpha, \beta])$. Logo faz sentido definir a função u e suas derivadas na fronteira, que no caso será $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$

Teorema 1.1.29. (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam E e F dois espaços de Banach e seja T um operador linear contínuo e bijetivo de E em F . Então existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)).$$

Prova: Ver [?]

□

Teorema 1.1.30. (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Seja E um espaço de Banach. O Conjunto $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto com respeito da topologia fraca- $*$ $\sigma(E', E)$.*

Prova: Ver [?]

□

Teorema 1.1.31. *Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $v \in L^p(0, T; X)$, $v' \in L^p(0, T; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $v \in C^0([0, T]; Y)$.*

Prova: Ver [?]

□

Lema 1.1.32. (Gronwall) Sejam $z(t)$ uma função real absolutamente contínua em $[0, a[$ tal que para todo $t \in [0, a[$ tem-se

$$z(t) = C + \int_0^t z(s) ds.$$

Então $z(t) \leq Ce^t, \forall t \in [0, a[$

Prova: Ver [?] □

Lema 1.1.33. (Du Bois Raymond) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Prova: Ver [?] □

Lema 1.1.34. (Lax-Milgram) Seja H um espaço de Banach e $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para $\varphi \in H'$ existe $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \forall v \in H. \quad (1.1)$$

Além disso, se a é simétrica, u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \quad (1.2)$$

Prova: Ver [?] □

Observação 1.1.35. O teorema de Lax-Milgram é uma ferramenta muito simples e eficiente para a solução de equações diferenciais parciais elípticas lineares (ver capítulos 8 e 9 de [?]). É interessante observar a conexão entre a equação (1.1) e o problema de minimização (1.2). Tais questões surgem naturalmente na física, por exemplo: Princípio de Hamilton ou também conhecido como princípio da ação mínima, Minimização da energia, etc. Na linguagem do cálculo das variações se diz que (1) é a equação de Euler associada com o problema de minimização (2). Grosso modo, (1) diz que $F'(u) = 0$, onde F é função $F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle$

Teorema 1.1.36. (Desigualdade de Poincaré-Friedrichs) Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$.

Se $v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$|v|_{L^2(\Omega)} \leq c |\text{grad } v|_{(L^2(\Omega))^n}$$

A constante c só depende de Ω .

Prova: Ver [?] □

Observação 1.1.37. Esta desigualdade nos diz que em $H_0^1(\Omega)$, o gradiente define uma norma.

Proposição 1.1.38. (Desigualdade de Young) Se a, b são números reais então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

sempre que $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Prova: Ver [?] □

Proposição 1.1.39. (Desigualdade de Hölder) Se $u \in L^p$ e $v \in L^q$ então $uv \in L^1$ e tem-se a desigualdade

$$\int |uv| \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

onde $1 < p < \infty$

Prova: Ver [?] □

Proposição 1.1.40. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja E um espaço vetorial com produto interno. Então

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

para quaisquer u, v em E . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente, se os vetores u e v são linearmente dependentes.

Prova: Ver [?] □

Teorema 1.1.41. Sejam E um espaço de Banach, E' seu dual e (f_n) uma função de E' . Se $f_n \rightarrow f$ fraco- $*$ em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\| \leq C$ e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

Prova: Ver [?] □

Teorema 1.1.42. Seja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sejam $u \in L^q(0, T; X') = E'$ e $v \in L^p(0, T; X) = E$, então

$$\langle u, v \rangle_{E', E} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_{X', X} dt.$$

Prova: Ver [?] □

Teorema 1.1.43. (Banach-Stenhaus) Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja T_n uma sucessão de operadores lineares contínuos de E em F tais que para cada $x \in E$, $T_n x$ converge quando $n \rightarrow \infty$ a um limite que denotamos por T_x . Então tem-se:

$$i) \sup \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

$$ii) T \in \mathcal{L}(E, F).$$

$$iii) \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \lim \|T_n\|_{E,F}$$

Prova: Ver [?] □

Teorema 1.1.44. (Gauss-Green) Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então $\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\Gamma} \mu v^i d\Gamma$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Prova: Ver [?] □

Teorema 1.1.45. (Representação de Riesz) Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^q$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f, \forall f \in L^p.$$

Além disso se verifica

$$\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

Prova: Ver [?] □

Observação 1.1.46. Teorema (1.1.45) é muito importante. Ele diz que cada funcional contínuo linear em L^p com $1 < p < \infty$ pode ser representado "concretamente" como um sistema integrado. A aplicação $\varphi \rightarrow u$, que é uma isometria linear sobrejetora, nos permite identificar a identidade do espaço "abstrato" $(L^p)'$ com L^q . No que se segue, vamos sistematicamente fazer a identificação

$$(L^p)' = L^q$$

Teorema 1.1.47. (Regularidade para o Problema Elíptico) Seja Ω um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, verificando

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in H_1^0(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde c é uma constante que só depende de Ω . Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ e $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq$

$c \|f\|_{H^m(\Omega)}$; em particular, se $m > \frac{n}{2}$ então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ainda, se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Prova: Ver [?]

□

Capítulo 2

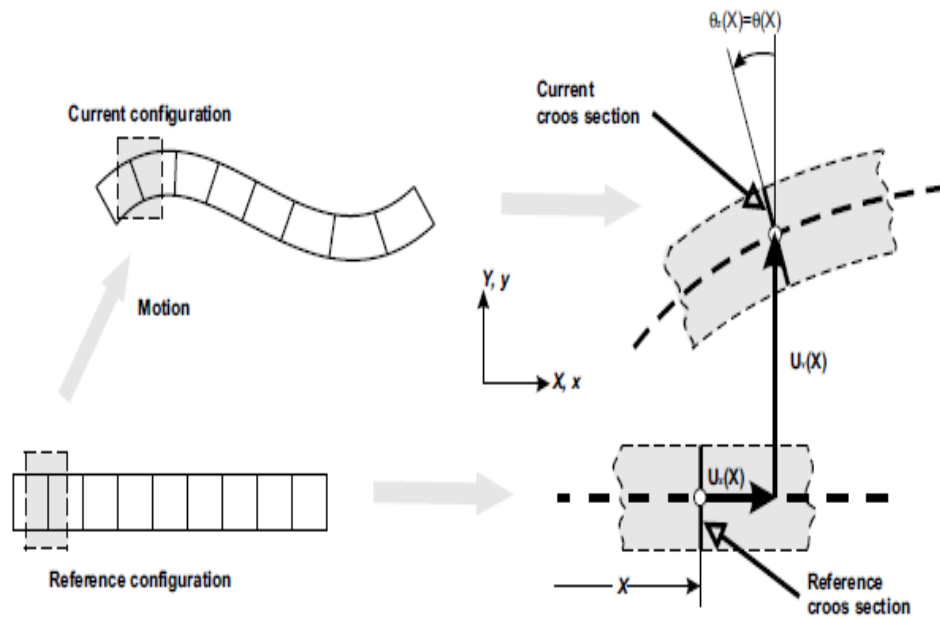
SOLUÇÕES PARA UM SISTEMA DE TIMOSHENKO

Neste capítulo, seguiremos de perto os resultados de Medeiro [?]. Temos como objetivo estudar a existência, unicidade e regularidade da solução para o problema misto associado ao sistema de Timoshenko. Antes veremos uma preve descrição física do modelo de vibrações para esse sistema.

2.1 *Modelo de Timoshenko*

A presente seção tem o objetivo de dá uma breve descrição de um modelo matemático de natureza elástica, em particular o que modela as vibrações de vigas. Tal modelo é bastante utilizado em sistemas mecânicos que são empregados na Física e na Engenharia.

O Modelo de viga de Timoshenko, (ou modelo de barra grossa) é útil para efeitos de inércia rotacional e deformação de lâmina, ou seja, nesta teoria secções transversais permanecem planas e giram sobre o eixo neutro, mas sofrem um deformação na secção transversal, os quais são omitidos quando se usa a teoria clássica das barras. A dinâmica do movimento de uma barra está bem definida se as seguintes funções são dadas: o deslocamento longitudinal $u_x(X)$, o deslocamento transversal $u_y(X)$, e a rotação da seção transversal $\theta_z(X) = \theta(X)$, onde X denota a coordenada longitudinal na configuração de referência. Ver figura 2.1.



A vibração transversal da barra depende da sua geometria e das propriedades do seu material assim como da aplicação de forças externas e torque. As propriedades geométricas referem-se principalmente ao comprimento L , tamanho e formato de sua secção transversal tais como área A , momento de inércia I com respeito ao eixo central de torção, e coeficiente laminar de Timoshenko κ que é um fator de mudança ($\kappa < 1$) que influi na distribuição do estresse laminar, ou melhor no cisalhamento da secção transversal de tal forma que a área efetiva da lâmina é igual a κA .

Neste modelo aparecem duas equações diferenciais acopladas

$$I_\rho y_{tt} - (EI y_x)_x + \kappa AG(y - z_x) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho A z_{tt} + (\kappa AG(y - z_x))_x = 0 \quad (2.2)$$

onde $0 < x < L$, $t > 0$, ρ é densidade, E é o módulo de elasticidade, G é o módulo laminar ou módulo de rigidez, $z(x, t)$ representa o deslocamento transversal do eixo central numa distância X e $y(x, t)$ o deslocamento giratório da secção transversal da viga.

De modo geral a equação (2.1) descreve o equilíbrio do torque rotacional por unidade de comprimento transformando-a em momento de torção junto com a força laminar interna, enquanto a equação (2.2) descreve o equilíbrio da força transversal por unidade

de comprimento junto com o gradiente da força na lâmina interna. Com estas equações é possível encontrar as frequências ressonantes e de vibrações livres, do qual a solução é dada na forma de $(z(x, t), y(x, t))$.

2.2 Solução Forte

O objetivo nesta seção é estudar a regularidade da solução do sistema (2.3), quando os dados $\phi^0, \psi^0, \phi^1, \psi^1, f$ e g são suficientemente regulares. Começaremos com o estudo de regularidade de soluções forte do seguinte problema misto.

Consideramos $\Omega = (0, 1)$ o segmento da reta e por Q o retângulo $(0, 1) \times (0, T)$ e $T > 0$ um número real positivo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{tt} - a\phi_{xx} - \psi_x + \phi = f \\ \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \phi_x = g \end{array} \right. \quad \text{em } Q \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(0, t) = 0, \quad \phi(1, t) = 0 \\ \psi(0, t) = 0, \quad \psi(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{em }]0, T[\quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(x, 0) = \phi^0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi^1(x) \\ \psi(x, 0) = \psi^0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi^1(x) \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega \quad (2.5)$$

Teorema 2.2.1. *Dados*

$$\phi^0, \psi^0 \in H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1); \phi^1, \psi^1 \in H_0^1(0, 1); f, g \in W^{1,1}(0, T; H_0^1(0, 1)), \quad (2.6)$$

existe uma única solução forte $\{\phi, \psi\}$ de (2.3), (2.4) e (2.5) satisfazendo as condições

$$\phi, \psi \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)) \quad (2.7)$$

$$\phi_t, \psi_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1)) \quad (2.8)$$

A aplicação

$$\{\{\phi^0, \psi^0\}, \{\phi^1, \psi^1\}, \{f, g\}\} \rightarrow \{\{\psi, \phi\}, \{\phi_t, \psi_t\}\} \quad (2.9)$$

é contínua.

O **teroema 2.2.1** garante a existência e unicidade de solução para o problema (2.3). Para a existência de solução forte, usaremos o método de Faedo-Galerkin com uma base especial em $H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$. Esse método consiste em três etapas:

1. construção das *soluções aproximadas* em um espaço de dimensão finita;
2. obtenção de *estimativas a priori* para as soluções aproximadas;
3. *passagem ao limite* das soluções aproximadas

Prova: Sejam (ω_ν) , (λ_ν) , respectivamente, as autofunções e os autovalores do problema espectral

$$((\omega_j, v)) = \lambda(\omega_j, v) \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$, satisfazendo as condições:

- para cada m os vetores $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ são linearmente independentes;
- as combinações lineares finitas dos ω_ν são densas em $H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$.

Agora para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos $V_m = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m]$ o subespaço de $H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$, de dimensão m , gerado pelos m primeiros vetores da base obtida. Iremos encontrar soluções aproximadas $\phi^m, \psi^m \in V_m$ do tipo

$$\phi^m(x, t) = \sum_{\nu=1}^m g^{\nu m}(t) \omega_\nu(x),$$

$$\psi^m(x, t) = \sum_{\nu=1}^m h^{\nu m}(t) \omega_\nu(x)$$

onde $g^{\nu m}(t)$ e $h^{\nu m}(t)$ são soluções do problema inicial para o seguinte sistema de equações ordinárias

$$\begin{aligned}
 & \left(\phi_{tt}^m(t), v \right) + \left(\psi_{tt}^m(t), u \right) + a((\phi_{xx}^m(t), v)) + b((\psi_{xx}^m(t), u)) - (\psi_x^m(t), v) + \\
 & + (\phi_x^m(t), u) + (\phi^m(t), v) = (f(t), v) + (g(t), u) \quad \forall v, u \in V_m, \\
 & \phi_t^m(0) = \phi^{1m}(x) \rightarrow \phi^1 \quad \text{fortemente em} \quad H_0^1(0, 1) \\
 & \psi_t^m(0) = \psi^{1m}(x) \rightarrow \psi^1 \quad \text{fortemente em} \quad H_0^1(0, 1) \\
 & \phi^m(0) = \phi^{0m}(x) \rightarrow \phi^0 \quad \text{fortemente em} \quad H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1) \\
 & \psi^m(0) = \psi^{0m}(x) \rightarrow \psi^0 \quad \text{fortemente em} \quad H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

As convergências acima têm sentido, pois o conjunto formado pelas combinações lineares de elementos de V_m é denso em $H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$. O sistema acima tem solução no intervalo $[0, t_m]$ com $t_m < T$ (Ver Apêndice, Corolários (A.0.4)) e essas soluções podem ser estendidas a todo intervalo $[0, T]$ como consequência das estimativas a priori que faremos a seguir. A estimativa *a priori* permite estender a solução e obter, no limite, a solução única. Mostraremos como obter estas estimativas.

• Estimativa I

De fato, multiplicando ambos os lados de (2.3)₁ por $v = \phi_t^m(t)$ e de (2.3)₂ por $u = \psi_t^m(t)$ e integrando sobre $(0, 1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left(\phi_{tt}^m(t), \phi_t^m(t) \right) - a(\phi_{xx}^m(t), \phi_t^m(t)) - (\psi_x^m(t), \phi_t^m(t)) + (\phi^m(t), \phi_t^m(t)) = (f(t), \phi_t^m(t)) \\
 & \left(\psi_{tt}^m(t), \psi_t^m(t) \right) - b(\psi_{xx}^m(t), \psi_t^m(t)) - (\phi_x^m(t), \psi_t^m(t)) = (g(t), \psi_t^m(t))
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Observação 2.2.2. Observe que

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx$$

e

$$\int_0^1 \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} dx = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right|^2 dx$$

para maiores detalhes ver [?]

Note que $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno em $L^2(0, 1)$. Então de (2.11) e da observação

(2.2.2) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\phi_t^m(t)|^2 + a \|\phi_x^m(t)\|^2 + |\phi^m(t)|^2) &= (f(t), \phi_t^m(t)) + (\psi_x^m(t), \phi_t^m(t)) \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\psi_t^m(t)|^2 + b \|\psi_x^m(t)\|^2) &= (g(t), \psi_t^m(t)) - (\phi_x^m(t), \psi_t^m(t)) \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Observe que $|\cdot|$, $\|\cdot\|$ são normas respectivamente em $L^2(0, 1)$ e $H_0^1(0, 1)$. Por adição das equações em (2.12) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\phi_t^m(t)|^2 + |\psi_t^m(t)|^2 + a \|\phi_x^m(t)\|^2 + b \|\psi_x^m(t)\|^2 + |\phi^m(t)|^2) &= \\ &= (f(t), \phi_t^m(t)) + (g(t), \psi_t^m(t)) + (\psi_x^m(t), \phi_t^m(t)) - (\phi_x^m(t), \psi_t^m(t)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Integrando (2.13) de 0 a t , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|\phi_t^m(t)|^2 + |\psi_t^m(t)|^2 + a \|\phi_x^m(t)\|^2 + b \|\psi_x^m(t)\|^2 + |\phi^m(t)|^2) &= \\ &= \frac{1}{2} (|\phi^{1m}|^2 + |\psi^{1m}|^2 + a \|\phi_x^{0m}\|^2 + b \|\psi_x^{0m}\|^2 + |\phi^{0m}|^2) + \\ &+ \int_0^t (f(s), \phi_t^m(s)) ds + \int_0^t (g(s), \psi_t^m(s)) ds + \int_0^t (\psi_x^m(s), \phi_t^m(s)) ds - \int_0^t (\phi_x^m(s), \psi_t^m(s)) ds \end{aligned} \quad (2.14)$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, Hölder e Young, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^t (f(s), \phi_t^m(s)) ds + \int_0^t (g(s), \psi_t^m(s)) ds + \int_0^t (\psi_x^m(s), \phi_t^m(s)) ds - \int_0^t (\phi_x^m(s), \psi_t^m(s)) ds &\leq \\ &2 \int_0^t (f(s), \phi_t^m(s)) ds + 2 \int_0^t (g(s), \psi_t^m(s)) ds \leq \\ &\leq 2 \int_0^t |(f(s), \phi_t^m(s))| ds + 2 \int_0^t |(g(s), \psi_t^m(s))| ds \\ &\leq 2 \int_0^t |f(s)| |\phi_t^m(s)| ds + 2 \int_0^t |g(s)| |\psi_t^m(s)| ds \\ &\leq 2 \left(\int_0^t |f(s)| ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |f(s)| |\phi_t^m(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\int_0^t |g(s)| ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |g(s)| |\psi_t^m(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_0^T |f(s)| ds + \int_0^t |f(s)| |\phi_t^m(s)|^2 ds + \int_0^T |g(s)| ds + \int_0^t |g(s)| |\psi_t^m(s)|^2 ds \end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (2.14) segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|\phi_t^m(t)|^2 + |\psi_t^m(t)|^2 + a \|\phi_x^m(t)\|^2 + b \|\psi_x^m(t)\|^2 + |\phi^m(t)|^2) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} (|\phi^{1m}|^2 + |\psi^{1m}|^2 + a \|\phi_x^{0m}\|^2 + b \|\psi_x^{0m}\|^2 + |\phi^{0m}|^2) + \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\int_0^T |f(s)| ds + \int_0^t |f(s)| |\phi_t^m(s)|^2 ds + \int_0^T |g(s)| ds + \int_0^t |g(s)| |\psi_t^m(s)| ds$$

Logo pelas convergências dadas em (2.10) e pela desigualdade de Gronwall (Lema 1.1.27), segue

$$|\phi_t^m(t)|^2 + |\psi_t^m(t)|^2 + a \|\phi_x^m(t)\|^2 + b \|\psi_x^m(t)\|^2 + |\phi^m(t)|^2 \leq C \quad (2.16)$$

onde $C > 0$ independe de m e t . Logo podemos estender a solução para todo o intervalo $[0, T]$.

• Estimativa II

Tem-se que $(\phi_{xxt}^m(t))_{m \in \mathbb{N}}$ representa uma sequência de funções, com duas derivadas em relação a x e uma em relação a t .

Multiplicando ambos os lados de (2.3)₁ por $v = -\phi_{xxt}^m(t)$ e (2.3)₂ por $u = -\psi_{xxt}^m(t)$ e integrando sobre $]0, 1[$, obtemos

$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} & (\phi_{tt}^m(t), -\phi_{xxt}^m(t)) - a(\phi_{xx}^m(t), -\phi_{xxt}^m(t)) - (\psi_x^m(t), -\phi_{xxt}^m(t)) + (\phi^m(t), -\phi_{xxt}^m(t)) = (f(t), -\phi_{xxt}^m(t)) \\ & (\psi_{tt}^m(t), -\psi_{xxt}^m(t)) - b(\psi_{xx}^m(t), -\psi_{xxt}^m(t)) + (\phi_x^m(t), -\psi_{xxt}^m(t)) = (g(t), -\psi_{xxt}^m(t)) \end{aligned} \right. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Integrando por partes (2.17), obtemos

$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\phi_t^m\|^2 + a|\phi_{xx}^m|^2 + \|\phi_x^m\|^2) = ((f(t), \phi_t^m)) + (\psi_x^m(t), \phi_{xx}^m(t)) \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\psi_t^m(t)\|^2 + b|\psi_{xx}^m(t)|^2) = ((g(t), \psi_t^m)) - (\phi_x^m(t), \psi_{xx}^m(t)) \end{aligned} \right. \quad (2.18) \end{aligned}$$

No entanto, note que

$$\frac{d}{dt} (\psi_x^m(t), \phi_{xx}^m(t)) = (\psi_{xt}^m(t), \phi_{xx}^m(t)) + (\psi_x^m(t), \phi_{xxt}^m(t))$$

Integrando de 0 a t , obtemos

$$\int_0^t (\psi_x^m(t), \phi_{xxt}^m(t)) dt = (\psi_x^m(t), \phi_{xx}^m(t)) - (\psi_x^m(0), \phi_{xx}^m(0)) - \int_0^t (\psi_{xt}^m(s), \phi_{xx}^m(s)) ds \quad (2.19)$$

Integrando (2.18)₁ de 0 a t , a partir de (2.19), obtemos para (2.17)₁

$$\frac{1}{2} \left(\|\phi_t^m(t)\|^2 + a|\phi_{xx}^m(t)|^2 + \|\phi^m(t)\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\|\phi^{1m}\|^2 + a|\phi_{xx}^{0m}|^2 + \|\phi^{0m}\|^2 \right) + \quad (2.20)$$

$$+ \int_0^t ((f(s), \phi_t^m(s)) ds + (\psi_x^m(t), \phi_{xx}^m(t)) - (\psi_x^{0m}, \phi_{xx}^{0m}) - \int_0^t (\psi_{xt}^m(s), \phi_{xx}^m(s)) ds$$

Por argumento similar para (2.17)₂, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\|\psi_t^m(t)\|^2 + b|\psi_{xx}^m(t)|^2 \right) &= \frac{1}{2} \left(\|\psi^{1m}\|^2 + b|\phi_{xx}^{0m}|^2 \right) + \\ &+ \int_0^t ((g(t), \psi_t^m)) ds + (\phi_x^m(t), \psi_{xx}^m(t)) - (\phi_x^{0m}, \psi_{xx}^{0m}) - \int_0^t (\phi_{xt}^m(s), \psi_{xx}^m(s)) ds \end{aligned} \quad (2.21)$$

Somando (2.20) com (2.21), resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\|\phi_t^m(t)\|^2 + a|\phi_{xx}^m(t)|^2 + \|\phi^m(t)\|^2 + \|\psi_t^m(t)\|^2 + b|\psi_{xx}^m(t)|^2 \right) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|\phi^{1m}\|^2 + a|\phi_{xx}^{0m}|^2 + \|\phi^{0m}\|^2 + \|\psi^{1m}\|^2 + b|\phi_{xx}^{0m}|^2 \right) + \\ &+ \int_0^t \|f(s)\| \|\phi_t^m(s)\| ds + |\psi_x^m| |\phi_{xx}^m| + \|\psi_x^{0m}\| \|\phi_{xx}^{0m}\| + \\ &+ \int_0^t \|g(t)\| \|\psi_t^m\| ds + |\phi_x^m| |\psi_{xx}^m(t)| + \|\phi_x^{0m}\| \|\psi_{xx}^{0m}\| \end{aligned} \quad (2.22)$$

Definamos

$$F(t) = \frac{1}{2} \left(\|\phi_t^m(t)\|^2 + a|\phi_{xx}^m(t)|^2 + \|\phi^m(t)\|^2 + \|\psi_t^m(t)\|^2 + b|\psi_{xx}^m(t)|^2 \right)$$

assim obtemos a partir de (2.22)

$$F(t) \leq C(\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,1))} + \|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(0,1))}) + F(0). \quad (2.23)$$

onde $C > 0$ independe de m e t .

• **Passagem ao Limite.**

Por (2.16) e (2.23) obtemos

$$(\phi^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.24)$$

$$(\phi_t^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.25)$$

$$(\phi_{xx}^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, L^2(0, 1)), \quad (2.26)$$

$$(\psi^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.27)$$

$$(\psi_t^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)). \quad (2.28)$$

$$(\psi_{xx}^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, L^2(0, 1)), \quad (2.29)$$

Resulta então que pelo teorema (1.1.30) que existem subsequências de (ϕ^m) e (ψ^m) , ainda denotadas da mesma forma, tais que

$$\phi^m \rightarrow \phi \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)), \quad (2.30)$$

$$\phi_t^m \rightarrow \phi_t \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.31)$$

$$\phi_{xx}^m \rightarrow \phi_{xx} \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, L^2(0, 1)), \quad (2.32)$$

$$\psi^m \rightarrow \psi \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)), \quad (2.33)$$

$$\psi_t^m \rightarrow \psi_t \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)). \quad (2.34)$$

$$\psi_{xx}^m \rightarrow \psi_{xx} \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, L^2(0, 1)), \quad (2.35)$$

Nas equações (2.11)₁ e (2.11)₂, obtemos

$$(\phi_{tt}^m(t), v) - a(\phi_{xx}^m(t), v) - (\psi_x^m(t), v) + (\phi^m(t), v) = (f(t), v)$$

e

$$(\psi_{tt}^m(t), u) - b(\psi_{xx}^m(t), u) + (\phi_x^m, u) = (g(t), u)$$

para todo v e $u \in V_m$. Com V_m denso em $H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$, temos que as equações acima são válidas para toda v e $u \in H_0^1(0, 1)$. Logo em particular

$$(\phi_{tt}^m(t), v) + a((\phi^m(t), v)) - (\psi_x^m(t), v) + (\phi^m(t), v) = (f(t), v) \quad (2.36)$$

e

$$(\psi_{tt}^m(t), u) + b((\psi^m(t), u)) + (\phi_x^m, u) = (g(t), u) \quad (2.37)$$

v e $u \in \mathcal{D}(0, 1)$

Multiplicando (2.36) por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando de 0 a T obtemos

$$\int_0^T (\phi_{tt}^m(t), v) \theta dt + a \int_0^T ((\phi^m(t), v)) \theta dt - \int_0^T (\psi_x^m(t), v) \theta dt + \int_0^T (\phi^m(t), v) \theta dt = \int_0^T (f(t), v) \theta dt, \quad (2.38)$$

Observe que

$$\int_0^T (\phi_{tt}^m(t), v) \theta dt = \int_0^T \frac{d}{dt} (\phi_t^m(t), v) \theta(t) dt = - \int_0^T (\phi_t^m(t), v) \theta'(t) dt$$

e, por (2.31),

$$- \int_0^T (\phi_t^m(t), v) \theta'(t) dt \rightarrow - \int_0^T (\phi_t(t), v) \theta'(t) dt = \int_0^T \frac{d}{dt} (\phi_t^m(t), v) \theta(t) dt \quad (2.39)$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.38) e usando (2.30) – (2.35) segue que

$$\int_0^T (\phi_{tt}(t), v) \theta dt + a \int_0^T ((\phi(t), v)) \theta dt - \int_0^T (\psi_x(t), v) \theta dt + \int_0^T (\phi(t), v) \theta dt = \int_0^T (f(t), v) \theta dt, \quad (2.40)$$

o que implica

$$\langle (\phi_{tt}(t), v) - a(\phi_{xx}(t), v) - (\psi_x(t), v) + (\phi(t), v) - (f(t), v), \theta \rangle_{\mathcal{D}'(0, T), \mathcal{D}(0, T)} = 0 \quad (2.41)$$

$$\forall \theta \in \mathcal{D}(0, T) \text{ e } \forall v \in \mathcal{D}(0, 1)$$

$$\langle \phi_{tt}(t) - a\phi_{xx}(t) - \psi_x(t) + \phi(t) - f(t), v \rangle_{\mathcal{D}'(0, T), \mathcal{D}(0, T)} = 0 \quad (2.42)$$

para todo v em $\mathcal{D}(0, 1)$ no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$. Assim obtemos

$$\phi_{tt}(t) - a\phi_{xx}(t) - \psi_x(t) + \phi(t) = f(t) \text{ em } \mathcal{D}'(Q) \quad (2.43)$$

Multiplicando (2.37) por θ e integrando de 0 a T obtemos

$$\int_0^T (\psi_{tt}^m(t), u) \theta dt + b \int_0^T ((\psi^m(t), u)) \theta dt + \int_0^T (\phi_x^m(t), u) \theta dt = \int_0^T (g(t), u) \theta dt \quad (2.44)$$

Aqui usaremos o mesmo argumento de (2.39) e a convergência (2.34), para passa o limite em (ψ_{tt}^m) .

Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.44) e usando (2.30) – (2.35) segue que

$$\int_0^T (\psi_{tt}(t), u) \theta dt + b \int_0^T ((\psi(t), u)) \theta dt + \int_0^T (\phi_x(t), u) = \int_0^T (g(t), u) \theta dt. \quad (2.45)$$

Assim

$$\langle (\psi_{tt}(t), u) - b(\psi_{xx}(t), u) + (\phi_x(t), u) - (g(t), u), \theta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T), \mathcal{D}(0,T)} = 0 \quad (2.46)$$

para toda $\theta \in \mathcal{D}'(0, T)$ e toda $u \in \mathcal{D}(0, 1)$. Logo

$$\langle \psi_{tt}(t) - b\psi_{xx}(t) + \phi_x(t) - g(t), u \rangle_{\mathcal{D}'(0,T), \mathcal{D}(0,T)} = 0 \quad (2.47)$$

para toda $u \in \mathcal{D}(0, 1)$ no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$.

Desta forma obtemos

$$\psi_{tt}(t) - b\psi_{xx}(t) + \phi_x(t) = g(t) \text{ em } \mathcal{D}'(Q) \quad (2.48)$$

Condições de Iniciais

- $\phi(0) = \phi^0$ (Analogamente para $\psi(0) = \psi^0$)

Desde que $\phi \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1))$ e $\phi_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$, então pelo teorema (1.1.31), $\phi \in C^0([0, T]; H_0^1(0, 1))$. Assim faz sentido $\phi(\cdot, 0)$

Segue de (2.31) que

$$\int_0^T (\phi_t^m(t), v) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (\phi_t(t), v) \theta(t) dt,$$

para toda $v \in H_0^1(0, 1)$ e toda $\theta \in C^1([0, T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Logo

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (\phi^m(t), v) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} (\phi(t), v) \theta(t) dt. \quad (2.49)$$

Segue de (2.30) que

$$\int_0^T (\phi^m(t), v) \theta'(t) dt \rightarrow \int_0^T (\phi(t), v) \theta'(t) dt, \quad (2.50)$$

para toda $v \in H_0^1(0, 1)$ e toda $\theta \in C^1([0, T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$.

De (2.49) e (2.50) obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt} [(\phi^m(t), v) \theta(t)] dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} [(\phi(t), v) \theta(t)] dt.$$

Logo

$$(\phi^m(t), v)\theta(t)|_0^T \rightarrow (\phi(t), v)\theta(t)|_0^T$$

o que implica

$$(\phi^m(0), v(0)) \rightarrow (\phi(0), v(0)) \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$$

Mas por (2.10)₄

$$(\phi^{0m}, v) \rightarrow (\phi, v) \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

Portanto, $(\phi(0), v) = (\phi^0, v)$; para toda $v \in H_0^1(0, 1)$, isto é, $\phi(0) = \phi^0$.

- $\phi_t(0) = \phi^1$ (Analogamente para $\psi_t(0) = \psi^1$).

Como a $\phi_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$ e $\phi_{tt} \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$, então, pelo teorema (1.1.31), $\phi_t \in C^0([0, T]; L^2(0, 1))$, logo faz sentido $\phi(0)$.

Temos de (2.36)

$$(\phi_{tt}^m(t), v) + a((\phi^m(t), v)) - (\psi_x^m(t), v) + (\phi^m(t), v) = (f(t), v) \quad (2.51)$$

Multiplicando (2.51) por θ_δ definida por

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} -\frac{t}{\delta} + 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \delta \\ 0 & \text{se } \delta \leq t \leq T \end{cases}$$

e integrando de 0 a T obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T (\phi_{tt}^m(t), v)\theta_\delta dt + a \int_0^T ((\phi^m(t), v))\theta_\delta dt - \int_0^T (\psi_x^m(t), v)\theta_\delta dt + \\ + \int_0^T (\phi^m(t), v)\theta_\delta = \int_0^T (f(t), v)\theta_\delta dt. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Observemos que

$$\int_0^T (\phi_{tt}^m(t), v)\theta_\delta dt = \int_0^T \frac{d}{dt} (\phi_t^m(t), v)\theta_\delta dt = (\phi_t^m(t), v)\theta_\delta|_0^T + \frac{1}{\delta} \int_0^T (\phi_t^m(t), v) \quad (2.53)$$

Substituindo (2.52) em (2.53), obtemos

$$\begin{aligned} -(\phi^{1m}, v) + \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (\phi_t^m(t), v) + a \int_0^\delta ((\phi^m(t), v))\theta_\delta dt - \int_0^\delta (\psi_x^m(t), v)\theta_\delta dt + \\ + \int_0^\delta (\phi^m(t), v)\theta_\delta = \int_0^\delta (f(t), v)\theta_\delta dt. \end{aligned} \quad (2.54)$$

fazendo $m \rightarrow \infty$ na igualdade acima e usando as convergências (2.30) – (2.35) temos

$$\begin{aligned} -(\phi^1, v) + \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (\phi_t(t), v) + a \int_0^\delta ((\phi(t), v)) \theta_\delta dt - \int_0^\delta (\psi_x(t), v) \theta_\delta dt + \\ + \int_0^\delta (\phi(t), v) \theta_\delta = \int_0^\delta (f(t), v) \theta_\delta dt. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Lembrando do cálculo, que para todo $t \in [a, b]$ tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(r) dr = f(t)$$

daí segue, que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (\phi_t(t), v) = (\phi_t(0), v)$$

Fazendo agora o limite em (2.55) quando $\delta \rightarrow \infty$, obtemos

$$-(\phi^1, v) + (\phi_t(0), v) = 0.$$

Logo $(\phi^1, v) = (\phi_t(0), v) \forall v \in H_0^1(0, 1)$, portanto $\phi_t(0) = \phi^1$.

• Unicidade

Suponha que os pares $\{\phi, \psi\}$ e $\{\bar{\phi}, \bar{\psi}\}$ sejam soluções fortes de (2.3) – (2.5). Assim pelo Teorema 2.2.1 o par $\{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}\}$, onde $\varphi^{(1)} = \phi - \bar{\phi}$ e $\varphi^{(2)} = \psi - \bar{\psi}$, satisfaz

$$\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)) \quad (2.56)$$

$$\varphi_t^{(1)}, \varphi_t^{(2)} \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1)) \quad (2.57)$$

$$\varphi_{tt}^{(1)}, \varphi_{tt}^{(2)} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \quad (2.58)$$

$$\varphi_{tt}^{(1)} - a\varphi_{xx}^{(1)} - \varphi_x^{(2)} + \varphi^{(1)} = 0 \text{ q.s em } Q \quad (2.59)$$

$$\varphi_{tt}^{(2)} - b\varphi_{xx}^{(2)} + \varphi_x^{(1)} = 0 \text{ q.s em } Q \quad (2.60)$$

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi_t^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi_t^{(2)}(0) = 0 \text{ sobre } \Omega \quad (2.61)$$

Fazendo o produto interno em $L^2(0, 1)$ da equação (2.59) por $\varphi^{(1)} = v(t)$, e da equação (2.60) por $\varphi^{(2)} = u(t)$ integrando por partes e somando, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \varphi_t^{(1)}(t) \right|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \varphi_t^{(2)}(t) \right|^2 + a \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \varphi_x^{(1)}(t) \right\|^2 + b \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \varphi_x^{(2)}(t) \right\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \varphi^{(1)}(t) \right|^2 = 0 \quad (2.62)$$

Integrando de 0 a T e usando as condições (2.61) tem-se

$$\frac{d}{dt} \left(\left| \varphi_t^{(1)}(t) \right|^2 + \left| \varphi_t^{(2)}(t) \right|^2 + a \left\| \varphi_x^{(1)}(t) \right\|^2 + b \left\| \varphi_x^{(2)}(t) \right\|^2 + \left| \varphi^{(1)}(t) \right|^2 \right) = 0 \quad (2.63)$$

e portanto, $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$, ou seja, $\phi = \bar{\phi}$ e $\psi = \bar{\psi}$. $\square$

2.2.1 Desigualdade de Energia

Nesta seção provaremos que a energia associada ao sistema (2.3), (2.4) e (2.5) com $f = 0$ e $g = 0$ satisfaz uma desigualdade do tipo:

$$C_0 E_0 \leq E(t) \leq C_1 E_0 \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad (2.64)$$

onde C_0, C_1 são constantes positivas.

De fato, multiplicando (2.3)₁ por $(\phi'(t))$ e (2.3)₂ por $(\psi'(t))$ e integrando em $]0, 1[$ obtemos,

$$\begin{cases} (\phi''(t), \phi'(t)) - a(\phi_{xx}(t), \phi'(t)) - (\psi_x(t), \phi'(t)) + (\phi(t), \phi'(t)) = 0 \\ (\psi''(t), \psi'(t)) - b(\psi_{xx}(t), \psi'(t)) + (\phi_x(t), \psi'(t)) = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

de (2.65) segue:

$$\begin{aligned} E'(t) + \frac{d}{dt}(\psi(t), \phi_x(t)) &= 0 \\ \int_0^t E'(t) dt + \int_0^t \frac{d}{dt}(\psi(t), \phi_x(t)) dt &= 0 \\ E(t) - E(0) + (\psi(t), \phi_x(t)) - (\psi(0), \phi_x(0)) &= 0 \\ E(t) + (\psi(t), \phi_x(t)) &= E_0 + (\psi^o, \phi_x^o). \end{aligned}$$

Sabe-se que:

$$-\frac{1}{2}(|\psi^o|^2 + |\phi_x^o|^2) \leq (\psi^o, \phi_x^o),$$

logo, somando E_0 em ambos os lados da desigualdade acima temos:

$$E_0 - \frac{1}{2}(|\psi^o|^2 + |\phi_x^o|^2) \leq E_0 + (\psi^o, \phi_x^o). \quad (2.66)$$

De (2.66) obtemos a seguinte estimativa

$$E_0 - \frac{1}{2}(|\psi^o|^2 + |\phi_x^o|^2) \leq \frac{1}{2} \left[|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + a|\phi_x^o|^2 - |\phi_x^o|^2 + b|\psi_x^o|^2 - |\psi^0|^2 + |\phi^o|^2 \right].$$

Pela desigualdade de Poincaré, temos:

$$\int_0^1 |v_x(s)|^2 ds \geq \lambda_1 \int_0^1 |v(s)|^2 ds, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

onde $\lambda_1 = \pi$, é o primeiro auto-valor do problema espectral $-v'' = \lambda v$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Portanto,

$$|\psi^o|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} |\psi_x^o|^2.$$

Daí, segue:

$$\frac{b}{2}|\psi_x^o|^2 - \frac{1}{2}|\psi^o|^2 \geq \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{\pi^2} \right) |\psi_x^o|^2$$

como $\pi^2 b > 1$ e pela hipótese do **teorema 3.1.3**, a desigualdade é válida.

Agora, modificando (2.66) conseguimos:

$$\begin{aligned} E_o + (\phi^o, \psi_x^o) &\geq E_o - \frac{1}{2} (|\psi^o|^2 + |\phi_x^o|^2) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left[|\phi^1|^2 + |\psi^1|^2 + a|\phi_x^o|^2 - |\phi_x^o|^2 + \left(b - \frac{1}{\pi^2} \right) |\psi_x^o|^2 + |\phi_x^o|^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

De (2.66) e (2.67) obtemos:

$$E(t) + (\psi, \phi_x) \geq \frac{1}{2}|\phi^1|^2 + \frac{1}{2}|\psi^1|^2 + \frac{1}{2}(a-1)|\phi_x^o|^2 + \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{\pi^2} \right) |\psi_x^o|^2 + \frac{1}{2}|\phi_x^o|^2.$$

Portanto, a partir dessa desigualdade, resulta:

$$C_o E_o \leq E(t) \text{ em } 0 \leq t \leq T. \quad (2.68)$$

Vamos provar o segundo membro de (2.64). Para isso temos:

$$E(t) + (\phi, \psi_x) = E_o + (\psi^o, \phi_x^o) \leq C E_o.$$

Sabe-se

$$-\frac{1}{2}(|\psi_x| + |\phi|^2) \leq -(\psi_x, \phi) = (\psi, \phi_x),$$

daí, obtemos:

$$E(t) - \frac{1}{2}(|\psi_x| + |\phi|^2) \leq E(t) + (\psi, \phi_x) \leq C E_o.$$

Para modificar o lado direito da desigualdade, usaremos a desigualdade de Poincaré para $|\phi|$ e obter:

$$\begin{aligned} E(t) - \frac{1}{2}|\psi_x|^2 - \frac{1}{2\lambda_1}|\phi_x|^2 &\geq \frac{1}{2}|\phi'|^2 + \frac{1}{2}|\psi'|^2 + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{\lambda_1} \right) |\phi_x|^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(b-1)|\psi_x|^2 \geq \min \left(a - \frac{1}{\lambda_1}, b-1, 1 \right) E(t). \end{aligned}$$

Portanto, $E(t) \leq C_1 E_o$ em $0 \leq t \leq T$.

2.3 Solução Fraca

O objetivo desta seção é considerar o problema (2.3) com dados iniciais $\phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1$, f e g , menos regulares. A solução obtida com essa pouca regularidade sobre os dados, será chamada de *solução fraca*

Teorema 2.3.1. *Dados*

$$\phi^0, \psi^0 \in H_0^1(0,1); \phi^1, \psi^1 \in L^2(0,1); f, g \in L^1(0,T; L^2(0,1)), \quad (2.69)$$

existe uma única solução fraca $\{\phi, \psi\}$ de (2.3), (2.4) e (2.5) satisfazendo as condições

$$\phi, \psi \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,1)) \quad (2.70)$$

$$\phi', \psi' \in L^\infty(0,T; L^2(0,1)) \quad (2.71)$$

A aplicação

$$\{\phi^0, \psi^0\}, \{\phi^1, \psi^1\}, \{f, g\} \rightarrow \{\{\psi, \phi\}, \{\phi', \psi'\}\} \quad (2.72)$$

é contínua.

Prova: A mesma observação feita na prova do teorema 2.2.1 sobre as aproximações de Galerkin é verdadeira aqui. Então vamos fazer estimativas apriori, afim de estender a soluções aproximadas a todo intervalo $[0, T]$.

De fato, multiplicando ambos os lados de $(2.3)_1$ por $v = \phi_t^m(t)$ e de $(2.3)_2$ por $u = \psi_t^m(t)$ e integrando sobre $(0, 1)$, obtemos

$$\begin{aligned} & (\phi_{tt}^m(t), \phi_t^m(t)) - a(\phi_{xx}^m(t), \phi_t^m(t)) - (\psi_x^m(t), \phi_t^m(t)) + (\phi^m(t), \phi_t^m(t)) = (f(t), \phi_t^m(t)) \\ & (\psi_t^m(t), \psi_t^m(t)) - b(\psi_{xx}^m(t), \psi_t^m(t)) - (\phi_x^m(t), \psi_t^m(t)) = (g(t), \psi_t^m(t)) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Note que $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno em $L^2(0,1)$. Então de (2.73) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\phi_t^m(t)|^2 + a \|\phi_x^m(t)\|^2 + |\phi^m(t)|^2) = (f(t), \phi_t^m(t)) + (\psi_x^m(t), \phi_t^m(t)) \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\psi_t^m(t)|^2 + b \|\psi_x^m(t)\|^2) = (g(t), \psi_t^m(t)) - (\phi_x^m(t), \psi_t^m(t)) \end{aligned} \quad (2.74)$$

Observe que $|\cdot|$, $\|\cdot\|$ são normas respectivamente em $L^2(0, 1)$ e $H_0^1(0, 1)$. Por adição das equações em (2.74) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\phi_t^m(t)|^2 + |\psi_t^m(t)|^2 + a \|\phi_x^m(t)\|^2 + b \|\psi_x^m(t)\|^2 + |\phi^m(t)|^2) = \\ = (f(t), \phi_t^m(t)) + (g(t), \psi_t^m(t)) + (\psi_x^m(t), \phi_t^m(t)) - (\phi_x^m(t), \psi_t^m(t)) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Integrando (2.75) de 0 a t , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|\phi_t^m(t)|^2 + |\psi_t^m(t)|^2 + a \|\phi_x^m(t)\|^2 + b \|\psi_x^m(t)\|^2 + |\phi^m(t)|^2) = \\ = \frac{1}{2} (|\phi^{1m}(t)|^2 + |\psi^{1m}(t)|^2 + a \|\phi_x^{0m}(t)\|^2 + b \|\psi_x^{0m}(t)\|^2 + |\phi^{0m}(t)|^2) + \\ + \int_0^t (f(s), \phi_t^m(s)) ds + \int_0^t (g(s), \psi_t^m(s)) ds + \int_0^t (\psi_x^m(s), \phi_t^m(s)) ds - \int_0^t (\phi_x^m(s), \psi_t^m(s)) ds \end{aligned} \quad (2.76)$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, Hölder e Young, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^t (f(s), \phi_t^m(s)) ds + \int_0^t (g(s), \psi_t^m(s)) ds + \int_0^t (\psi_x^m(s), \phi_t^m(s)) ds - \int_0^t (\phi_x^m(s), \psi_t^m(s)) ds \leq \\ \leq 2 \int_0^t (f(s), \phi_t^m(s)) ds + 2 \int_0^t (g(s), \psi_t^m(s)) ds \leq \\ \leq 2 \int_0^t |(f(s), \phi_t^m(s))| ds + 2 \int_0^t |(g(s), \psi_t^m(s))| ds \\ \leq 2 \int_0^t |f(s)| |\phi_t^m(s)| ds + 2 \int_0^t |g(s)| |\psi_t^m(s)| ds \\ \leq 2 \left(\int_0^t |f(s)| ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |f(s)| |\phi_t^m(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\int_0^t |g(s)| ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |g(s)| |\psi_t^m(s)| ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \int_0^T |f(s)| ds + \int_0^t |f(s)| |\phi_t^m(s)|^2 ds + \int_0^T |g(s)| ds + \int_0^t |g(s)| |\psi_t^m(s)| ds \end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (2.76) segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|\phi_t^m(t)|^2 + |\psi_t^m(t)|^2 + a \|\phi_x^m(t)\|^2 + b \|\psi_x^m(t)\|^2 + |\phi^m(t)|^2) \leq \\ \leq \frac{1}{2} (|\phi^{1m}(t)|^2 + |\psi^{1m}(t)|^2 + a \|\phi_x^{0m}(t)\|^2 + b \|\psi_x^{0m}(t)\|^2 + |\phi^{0m}(t)|^2) + \\ + \int_0^T |f(s)| ds + \int_0^t |f(s)| |\phi_t^m(s)|^2 ds + \int_0^T |g(s)| ds + \int_0^t |g(s)| |\psi_t^m(s)| ds \end{aligned} \quad (2.77)$$

Agora definamos a energia associada a (2.3), (2.4) e (2.5) por

$$E(t) = \frac{1}{2} (|\phi_t(t)|^2 + |\psi_t(t)|^2 + a \|\phi_x(t)\|^2 + b \|\psi_x(t)\|^2 + |\phi(t)|^2) \quad (2.78)$$

A partir de (2.74) e (2.75) e das convergências de (2.10), obtemos

$$E'(t) \leq \frac{1}{2}(|f(t)| + |f(t)||\phi_t^m(t)|^2 + |g(t)| + |g(t)||\psi_t^m(t)|^2 + \|\psi^m(t)\|^2 + |\phi_t^m(t)|^2 + \|\phi^m(t)\|^2 + |\psi_t^m(t)|^2)$$

Então

$$E'(t) \leq \frac{1}{2}(|f(t)| + |g(t)|) + h(t)E(t), \text{ onde} \quad (2.79)$$

$$h(t) = |f(t)| + |g(t)| + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \in L^2(0, T)$$

Integrando (2.79) obtemos:

$$E(t) \leq E(0) + \frac{1}{2} \int_0^T (|f(t)| + |g(t)|) dt + \int_0^t h(s)E(s) ds. \quad (2.80)$$

Pela desigualdade de Gronwall aplicada a (2.80):

$$E(t) \leq C \left(\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))} + \|g\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + E_0 \right) \quad (2.81)$$

onde $E_0 = E(0)$, onde C independete de m e t . Logo podemos estender a solução para todo o intervalo $[0, T]$.

De (2.81) segue que as aproximações de Garlekin são limitadas em $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ e $L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$, quer dizer:

$$(\phi^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.82)$$

$$(\phi_t^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, L^2(0, 1)), \quad (2.83)$$

$$(\phi_x^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.84)$$

$$(\psi^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.85)$$

$$(\psi_t^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, L^2(0, 1)). \quad (2.86)$$

$$(\psi_x^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.87)$$

Resulta então que pelo teorema (1.1.30) que existem subsequências de (ϕ^m) e (ψ^m) , ainda denotadas da mesma forma, tais que

$$\phi^m \rightarrow \phi \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.88)$$

$$\phi_t^m \rightarrow \phi_t \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, L^2(0, 1)), \quad (2.89)$$

$$\phi_x^m \rightarrow \phi_x \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.90)$$

$$\psi^m \rightarrow \psi \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.91)$$

$$\psi_t^m \rightarrow \psi_t \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, L^2(0, 1)). \quad (2.92)$$

$$\psi_x^m \rightarrow \psi_x \text{ fraco} - * \text{ em } L^\infty(0, T, H_0^1(0, 1)), \quad (2.93)$$

Multiplicando (2.73)₁ por $\gamma\theta$, com $\gamma \in \mathcal{D}(0, 1)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando em Q , obtemos

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\phi_t^m(t), \gamma) \theta' dt + a \int_0^T ((\phi^m(t), \gamma)) \theta dt - \int_0^T (\psi_x^m(t), \gamma) \theta dt + \\ & + \int_0^T (\phi^m(t), \gamma) \theta dt = \int_0^T (f(t), \gamma) \theta dt \end{aligned} \quad (2.94)$$

Aplicando as convergências (2.88 – 2.93) em (2.94), temos

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\phi_t(t), \gamma) \theta' dt + a \int_0^T ((\phi(t), \gamma)) \theta dt - \int_0^T (\psi_x(t), \gamma) \theta dt + \\ & + \int_0^T (\phi(t), \gamma) \theta dt = \int_0^T (f(t), \gamma) \theta dt \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \phi_{tt}(t), \gamma \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} \theta dt - a \int_0^T \langle \phi_{xx}(t), \gamma \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} \theta dt - \\ & - \int_0^T (\psi_x(t), \gamma) \theta dt + \int_0^T (\phi(t), \gamma) \theta dt = \int_0^T (f(t), \gamma) \theta dt \end{aligned}$$

ou seja

$$\left\langle \langle \phi_{tt}(t), \gamma \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} - a \langle \phi_{xx}(t), \gamma \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} - (\psi_x(t), \gamma) \right.$$

$$+(\phi(t), \gamma) - (f(t), \gamma) \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} = 0, \forall \gamma \in \mathcal{D}(0,1) \text{ e } \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Assim

$$\langle \phi_{tt}(t) - a\phi_{xx}(t) - \psi_x(t) + \phi(t) - f(t), \gamma \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} = 0$$

para todo $\gamma \in \mathcal{D}'(0,T)$. Portanto

$$\phi_{tt}(t) - a\phi_{xx}(t) - \psi_x(t) + \phi(t) = f(t) \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Como $\phi \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,1))$ então $\phi_{xx} \in L^\infty(0,T; H^{-1}(0,1))$. Por este fato, obtemos

$$\phi_{tt}(t) - a\phi_{xx}(t) - \psi_x(t) + \phi(t) = f(t) \text{ em } L^1(0,T; H^{-1}(0,1)) \quad (2.95)$$

Multiplicando (2.73)₂ por $\gamma\theta$, com $\gamma \in \mathcal{D}(0,1)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,t)$ e integrando em Q , obtemos

$$-\int_0^T (\psi_t^m(t), \gamma) \theta' dt + b \int_0^T ((\psi^m(t), \gamma)) \theta dt + \int_0^T (\phi_x^m(t), \gamma) \theta dt = \int_0^T (g(t), \gamma) \theta dt \quad (2.96)$$

Aplicando as convergências (2.88 – 2.93) em (2.96), temos que

$$-\int_0^T (\psi_t(t), \gamma) \theta' dt + b \int_0^T ((\psi(t), \gamma)) \theta dt + \int_0^T (\phi_x(t), \gamma) \theta dt = \int_0^T (g(t), \gamma) \theta dt$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \psi_{tt}(t), \gamma \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} \theta dt - b \int_0^T \langle \psi_{xx}(t), \gamma \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} \theta dt + \\ & + \int_0^T (\phi_x(t), \gamma) \theta dt = \int_0^T (g(t), \gamma) \theta dt \end{aligned}$$

ou seja

$$\left\langle \langle \psi_{tt}(t), \gamma \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} - b \langle \psi_{xx}(t), \gamma \rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} + (\phi_x(t), \gamma) = \int_0^T (g(t), \gamma) \theta \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,1), \mathcal{D}(0,1)} = 0,$$

para todo $\gamma \in \mathcal{D}(0,1)$ no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$. Portanto

$$\psi_{tt}(t) - b\psi_{xx}(t) + \phi_x(t) = g(t) \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Como $\psi \in L^\infty(0,T; H_0^1(0,1))$ então $\psi_{xx} \in L^\infty(0,T; H^{-1}(0,1))$. Por este fato, obtemos

$$\psi_{tt}(t) - b\psi_{xx}(t) + \phi_x(t) = g(t) \text{ em } L^1(0,T; H^{-1}(0,1)). \quad (2.97)$$

• Condições Iniciais

Como ϕ e $\psi \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$ e ϕ_t e $\psi_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ temos pelo teorema (1.1.31) que ϕ e $\psi \in C^0([0, T]; H^{-1}(0, 1))$, logo faz sentido $\phi(0)$ e $\psi(0)$ e $\phi_t(0)$ e $\psi_t(0)$. Assim de modo análogo na seção (2.2), obteremos as condições iniciais do teorema 2.3.1.

• Unicidade

Para provamos a unicidade da solução fraca do problema (2.3). Suponhamos (u^1, v^1) e (u^2, v^2) na condições do teorema 2.3.1. Então o par $\{w^1, w^2\}$, onde $w^1 = u^1 - u^2$ e $w^2 = v^1 - v^2$, satisfaz

$$w^{(1)}, w^{(2)} \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1)) \quad (2.98)$$

$$w_t^{(1)}, w_t^{(2)} \in L^\infty(0, T; L_0^2(0, 1)) \quad (2.99)$$

$$w_{tt}^{(1)}, w_{tt}^{(2)} \in L^\infty(0, T; H^{-1}(0, 1)) \quad (2.100)$$

$$w_{tt}^{(1)} - aw_{xx}^{(1)} - w_x^{(2)} + w^{(1)} = 0 \text{ em } L^1(0, T; H^{-1}(0, 1)) \quad (2.101)$$

$$w_{tt}^{(2)} - bw_{xx}^{(2)} + w_x^{(1)} = 0 \text{ em } L^1(0, T; H^{-1}(0, 1)) \quad (2.102)$$

$$w^{(1)}(0) = w_t^{(1)}(0) = w^{(2)}(0) = w_t^{(2)}(0) = 0 \text{ sobre } \Omega \quad (2.103)$$

Assim $w \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$, $w_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ e $w_{tt} \in L^1(0, T; H^{-1}(0, 1))$. Note-mos que não faz sentido as dualidades $\langle w_{tt}^{(1)}, w_t^{(1)} \rangle$ e $\langle w_{tt}^{(2)}, w_t^{(2)} \rangle$. Então definamos funções

$$z^i(t) = \begin{cases} -\int_t^s w^i(r) dr & \text{se } 0 \leq t \leq s \\ 0 & \text{se } s \leq t \leq T \end{cases}$$

com $i = (1, 2)$. Temos então $z^i(t) \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$ e $z_t^i(t) = w^i(t)$. Fazendo $w_1^i(t) = \int_0^t w^i(r) dr$, podemos concluir que $z^i(t) = w_1^i(t) - w_1^i(s)$.

Como $L^\infty(0, T; H^{-1}(0, 1)) + L^1(0, T; L^2(0, 1))$ estar continuamente imerso $(L^\infty(0, T; H^1(0, 1)))'$, faz sentido as dualidades $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$ de (2.101) com z^1 e de (2.102) com z^2 , onde $X = L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1))$. Multiplicando (2.101) por z^1 e (2.102) por z^2 e integrando de 0 a s , obtemos

$$\int_0^s \langle w_{tt}^{(1)}(t), z^{(1)}(t) \rangle_{E', E} dt + \int_0^s \langle w_{tt}^{(2)}(t), z^{(2)}(t) \rangle_{E', E} dt + a \int_0^s ((w^{(1)}(t), z^{(1)}(t))) dt \quad (2.104)$$

$$\int_0^s ((w^{(1)} - w_x^{(2)})(t), z^{(1)}(t)) dt - \int_0^s ((w^{(1)} - bw_x^{(2)})(t), z_x^{(2)}(t)) dt = 0$$

como b é uma constante positiva, e escolhendo-o convenientemente igual a 1, a igualdade (2.104) fica

$$\int_0^s \left\langle w_{tt}^{(1)}(t), z^{(1)}(t) \right\rangle_{E', E} dt + \int_0^s \left\langle w_{tt}^{(2)}(t), z^{(2)}(t) \right\rangle_{E', E} dt + a \int_0^s ((w^{(1)}(t), z^{(1)}(t))) dt \\ \int_0^s ((w^{(1)} - w_x^{(2)})(t), z^{(1)}(t) - z_x^{(2)}(t)) dt = 0$$

onde $E = H_0^1(0, 1)$

Analisando os termos de (2.104)

$$\int_0^s \left\langle w_{tt}^{(i)}(t), z^{(i)}(t) \right\rangle_{E', E} dt \quad (i = 1, 2)$$

Temos que

$$\frac{d}{dt} (w_t^{(i)}(t), z^{(i)}(t)) = \left\langle w_{tt}^{(i)}(t), z^{(i)}(t) \right\rangle_{E', E} + (w_t^{(i)}(t), z_t^{(i)}(t))$$

Logo

$$\int_0^s \left\langle w_{tt}^{(i)}(t), z^{(i)}(t) \right\rangle_{E', E} dt = \int_0^s \frac{d}{dt} (w_t^{(i)}(t), z^{(i)}(t)) dt - \int_0^s (w_t^{(i)}(t), z_t^{(i)}(t)) dt \\ = (w_t^{(i)}(t), z^{(i)}(t)) \Big|_0^s - \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} |w^{(i)}(t)|^2 = -\frac{1}{2} |w^{(i)}(s)|^2 + \frac{1}{2} |w^{(i)}(0)|^2 = -\frac{1}{2} |w^{(i)}(s)|^2 \quad (2.105)$$

Agora, observe que

$$a \int_0^s ((w^{(1)}(t), z^{(1)}(t))) dt \\ a \int_0^s ((w^{(1)}(t), z^{(1)}(t))) dt = a \int_0^s ((z_t^{(1)}(t), z^{(1)}(t))) dt = a \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|z^{(1)}(t)\|^2 dt \quad (2.106) \\ = a \frac{1}{2} \|z^{(1)}(s)\|^2 - \frac{1}{2} \|z^{(1)}(0)\|^2 = -\frac{a}{2} \|w_1^{(1)}(s)\|^2$$

temos que

$$\int_0^s ((w^{(1)} - w_x^{(2)})(t), z^{(1)}(t) - z_x^{(2)}(t)) dt = \int_0^s ((z^{(1)} - z_x^{(2)})_t(t), z^{(1)}(t) - z_x^{(2)}(t)) dt \\ = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} |z^{(1)}(t) - z_x^{(2)}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} |z^{(1)}(s) - z_x^{(2)}(s)|^2 - \frac{1}{2} |z^{(1)}(0) - z_x^{(2)}(0)|^2 \quad (2.107) \\ = -\frac{1}{2} |w_1^{(1)}(s) - w_{1x}^{(2)}(s)|^2.$$

Substituindo (2.105) – (2.107) em (2.104), obtemos

$$\frac{1}{2} |w^{(1)}(s)|^2 + \frac{1}{2} |w^{(2)}(s)|^2 + \frac{a}{2} \|w_1^{(1)}(s)\|^2 + \frac{1}{2} |w_1^{(1)}(s) - w_{1x}^{(2)}(s)|^2 = 0. \quad (2.108)$$

Concluimos que

$$\left|w^{(1)}(s)\right|^2 + \left|w^{(2)}(s)\right|^2 + a \left\|w_1^{(1)}(s)\right\|^2 + \left|w_1^{(1)}(s) - w_{1x}^{(2)}(s)\right|^2 = 0,$$

ou seja $\left|w^{(1)}(s)\right| = \left|w^{(2)}(s)\right| = 0$. Portanto $w^{(1)}(s) = w^{(2)}(s) = 0$, para todo $s \in [0, T]$, o que implica $u^1 = u^2$ e $v^1 = v^2$.

□

2.4 Solução Ultra Fraca

Objetivo deste seção é definir solução ultra fraca e apresentar certas regularidades para o seguinte problema misto de valor não homogêneo na fronteira.

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - ay_{xx} - z_x + y = 0 \\ z'' - bz_{xx} + y_x = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } Q \quad (2.109)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0, t) = v(t), \quad y(1, t) = 0 \\ z(0, t) = w(t), \quad z(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{em }]0, T[\quad (2.110)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x, 0) = y^0(x), \quad y'(x, 0) = y^1(x) \\ z(x, 0) = z^0(x), \quad z'(x, 0) = z^1(x) \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega \quad (2.111)$$

quando os dados iniciais y^0 , y^1 , z^0 , z^1 são menos regulares que os considerados na Seção 2.3. Por este motivo, a solução será denominada de *solução ultra fraca*.

Queremos estudar este problema supondo que $v(t), w(t) \in L^2(0, T)$. A fim de obter a definição de solução para o problema misto acima, nós seguiremos um procedimento heurístico. Multiplicar ambos os lados de (2.109)₁ por ϕ e de (2.109)₂ por ψ e integrar

sobre Q . Onde $\{\phi, \psi\}$ são soluções de

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi'' - a\phi_{xx} - \psi_x + \phi = f \\ \phi'' - b\psi_{xx} + \phi_x = g \end{array} \right. \quad \text{em } Q \quad (2.112)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(0, t) = 0, \quad \phi(1, t) = 0 \\ \psi(0, t) = 0, \quad \psi(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{em }]0, T[\quad (2.113)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(x, T) = 0, \quad \phi'(x, T) = 0 \\ \psi(x, 0) = 0, \quad \psi'(x, T) = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega \quad (2.114)$$

Sabemos que a solução $\{\phi, \psi\}$ pertence a classe

$$C^0([0, T]; H_0^1(0, 1) \cap C^1([0, 1]; L^2(0, 1))),$$

onde $f, g \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$. Depois da integração em Q , obtemos

$$\begin{aligned} & -(y^1, \phi(0)) + (y^0, \phi'(0)) - (z^1, \psi(0)) + (z^0, \psi'(0)) - \int_0^T av(t)\phi_x(0, t)dt - \\ & - \int_0^T bw(t)\phi_x(0, t)dt + \int_0^T \int_0^1 (yf + zg)dxdt = 0 \end{aligned} \quad (2.115)$$

Note que $\phi(0), \psi(0) \in H_0^1(0, 1)$ e $\phi'(0), \psi'(0) \in L^2(0, 1)$, portanto, se escolhermos em (2.115), $y^0, z^0 \in L^2(0, 1)$ e $y^1, z^1 \in H^{-1}(0, 1)$, então faz sentido, em (2.115), $\langle y^1, \phi(0) \rangle, \langle z^1, \psi(0) \rangle$, a dualidade entre os pares $H^{-1}(0, 1)$ e $H_0^1(0, 1)$. Também faz sentido $(y^0, \phi'(0)), (z^0, \psi'(0))$ o produto interno em $L^2(0, 1)$. Note que $\phi_x(0, t), \psi_x(0, t)$ pertencem a $L^2(0, 1)$.

Motivado por (2.115) consideramos a aplicação S definido sobre $(L^1(0, T; L^2(\Omega)))^2$, tomando valores em $\mathbb{R}$, dada por

$$\langle S, \{f, g\} \rangle = (y^0, \phi'(0)) - \langle y^1, \phi(0) \rangle + (z^0, \psi'(0)) - \langle z^1, \psi(0) \rangle + \quad (2.116)$$

$$+ \int_0^T av(t)\phi_x(0,t)dt + \int_0^T bw(t)\psi_x(0,t)dt$$

Daí

$$\begin{aligned} |\langle S, \{f, g\} \rangle| &\leq |y^0| |\phi'(0)| + \|y^1\|_{H^{-1}(0,1)} \|\phi(0)\| + \\ &|z^0| |\psi'(0)| + a|v(t)| |\phi_x(0,t)| + b|w(t)| |\psi_x(0,t)| \end{aligned} \quad (2.117)$$

Como uma consequência do **Teorema 2.3.1** e da identidade do **Lema 3.2.1**, obtemos de (2.117).

$$\begin{aligned} |\langle S, \{f, g\} \rangle| &\leq C(|y^0| + \|y^1\|_{H^{-1}(0,1)} + |z^0| + \|z^1\|_{H^{-1}(0,1)} + \\ &+ |\phi_x(0,t)| + |\psi_x(0,t)|) \|\{f, g\}\|_{(L^1(0,T;L^2(0,1)))^2} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Então (2.118) diz que S definida por (2.116) em $(L^1(0,T;L^2(0,1)))^2$ é uma forma linear contínua, isto é, S é um objeto de $(L^\infty(0,T;L^2(0,1)))^2$ dual de $(L^1(0,T;L^2(0,1)))^2$. Pelo *Teorema da Representação de Riesz*, existe um objeto $\{y, z\}$ de $(L^2(0,T;L^2(0,1)))^2$ tal que

$$\langle S, \{f, g\} \rangle = \int_0^T \int_0^1 (yf + zg) dx dt \quad (2.119)$$

Definição 2.4.1. Para $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)$ e $v, w \in L^2(0,T)$ nós chamamos de solução ultra fraca ou **Solução por Transposição** (Ver [?]) do problema não homogêneo (2.109), (2.110) e (2.111), o par de funções $\{y, z\} \in (L^\infty(0,T;L^2(0,1)))^2$ que satisfaz

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 (yf + zg) dx dt &= (y^0, \phi(0)) - \langle y^1, \phi(0) \rangle + (z^0, \psi'(0)) - \\ &- \langle z^1, \psi(0) \rangle + \int_0^T av(t)\phi_x(0,t)dt + \int_0^T bw(t)\psi_x(0,t)dt \end{aligned}$$

para todo par $\{f, g\} \in (L^1(0,T;L^2(0,1)))^2$ e $\{\phi, \psi\}$ é solução de (2.112), (2.113) e (2.114).

Existe apenas uma solução ultra fraca para o Sistema de Timoshenko e esta solução $\{y, z\}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \|\{y, z\}\|_{(L^2(0,T;L^2(0,1)))^2} &\leq C(|y^0| + \|y^1\|_{H^{-1}(0,1)} + |z^0| + \\ &+ \|z^1\|_{H^{-1}(0,1)} + |\phi_x(0,t)| + |\psi_x(0,t)|) \end{aligned} \quad (2.120)$$

De fato, a existência é uma consequência do *Teorema da Representação de Riesz*, como podemos ver acima. A estimativa em (2.120) é consequência de (2.119) A unicidade

segue do **Lema de Du Bois Raymond**.

Nós podemos também provar usando o mesmo método usado para equação de onda linear que a solução ultra fraca $\{y, z\}$ de (2.109), (2.110) e (2.111) satisfazem a condição de regularidade

$$y, z \in C^0([0, T] : L^2(0, 1)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(0, 1),$$

o dado inicial e as condições de fronteiras.

Capítulo 3

CONTROLABILIDADE EXATA PARA UM SISTEMA DE TIMOSHENKO

3.1 Controlabilidade Exata

O objetivo deste capítulo é estudar problemas de controlabilidade exata por meio do Método da Unicidade Hilbertiana (HUM), idealizado por Lions (ver [?]), cuja metodologia é baseada em certo critério de unicidade e na construções de um espaço de Hilbert. O HUM toma em consideração as propriedades das soluções da equação da onda, neste trabalho iremos considerar as propriedades da equação de vibrações transversais de viga, desenvolvidas no capítulo 2. Primeiro iremos verificar a controlabilidade para o sistema (3.1) no caso em que os coeficientes são constantes reais positivas, posteriormente veremos uma generalização.

3.1.1 Controlabilidade Exata na Fronteira

O problema de controlabilidade exata na fronteira Σ , consiste em mostrar que dado um conjunto de valores iniciais em um espaço de Hilbert conveniente, existem controles que chamaremos aqui de $v(t)$ e $w(t)$ que pertençam a $L^2(\Sigma_0)$ de forma que todo estado inicial pode ser dirigido ao equilíbrio. Em outras palavras é equivalente a demonstrar que todo estado inicial pode ser dirigido a todo estado final.

Consideramos a controlabilidade para o sistema:

$$\begin{cases} y'' - ay_{xx} - z_x + y = 0 \\ z'' - bz_{xx} + y_x = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

que é motivado por questões de vibrações elásticas unidimensional. De fato, o sistema (3.1) tem sua origem nas vibrações transversais de uma viga onde consideramos o efeito de rotação inercial. É chamado de **S. Timoshenko** [?], modelo para vibrações quando consideramos a rotação inercial e deformação de cisalhamento. Note que a e b são constantes positivas. Suponhamos uma viga de comprimento $L = 1$. O deslo-

camento transversal do ponto x , para $0 \leq x \leq 1$ no instante t , $0 \leq t \leq T$, que é a deformação da curva, representada por $z = z(x, t)$. Denotaremos por $y = y(x, t)$ a declividade da deformação da curva $z = z(x, t)$ motivada pela ação de rotação, produzindo um cisalhamento.

Vamos representar por Ω o segmento de $[0, 1]$ da reta real $\mathbb{R}$, que representa a viga em equilíbrio. Por Q representaremos o retângulo $\Omega \times (0, T)$ do plano $\mathbb{R}^2$, onde T é um número real positivo $T > 0$; $\Gamma = \{0\}, \{1\}$ é fronteira de Ω ; $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ é lateral do retângulo Q ; $\Gamma_0 = \{0\}$ é uma parte de Γ com media positiva e $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$ é parte da fronteira onde o controle exerce a ação, portanto $\Sigma_0 = \{0\} \times (0, T) = (0, T)$. Denotaremos com y' e y_x a derivada de $y = (x, t)$, respectivamente, com respeito a t e x . Então temos o seguinte problema misto não homogêneo:

$$\left| \begin{array}{l} y'' - ay_{xx} - z_x + y = 0 \\ z'' - bz_{xx} + y_x = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } Q \quad (3.2)$$

$$\left| \begin{array}{l} y(0, t) = v(t), y(1, t) = 0 \\ z(0, t) = w(t), z(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \quad (3.3)$$

$$\left| \begin{array}{l} y(x, 0) = y^0(x), y'(x, 0) = y^1(x) \\ z(x, 0) = z^0(x), z'(x, 0) = z^1(x) \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega \quad (3.4)$$

A controlabilidade exata na fronteira para (3.1) é formulada a seguir: Dado $T > 0$, encontre um espaço Hilbert H tal que para cada par $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\}$ pertencentes a H , existe um par de controles $v(t), w(t)$ em $L^2(0, T)$, tal que a solução $y = y(x, t)$, $z = z(x, t)$ de (3.2), (3.3), (3.4) satisfaz:

$$\left| \begin{array}{l} y(x, T) = 0, y'(x, T) = 0 \\ z(x, T) = 0, z'(x, T) = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } (\Omega) \quad (3.5)$$

Observação 3.1.1. Como a velocidade de propagação das ondas para cada tipo de movimento é finita (em nosso caso, iguais a $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$), para que se tenha controlabilidade, o tempo T haverá de ser suficientemente grande, aqui $T > 2\alpha$, onde $\alpha = \max \{T_1, T_2\}$.

Observação 3.1.2. Devido à linearidade e reversibilidade da equação da onda, o problema de controlabilidade exata na fronteira pode ser formulado como: Dado $T > 0$ suficientemente grande, achar um espaço de Hilbert H tal que para todo par de dados $\{y^0, z^0, z^1\}$ e $\{q^0, q^1, p^0, p^1\}$ em H , existam controles v e $w \in L^2(\Sigma_0)$, tal que a solução $y = y(x, t, v, w)$, $z = z(x, t, v, w)$ de (3.2) satisfaz a condição:

$$\begin{aligned} y(T) &= q^0, \quad y'(T) = q^1. \\ z(T) &= p^0, \quad z'(T) = p^1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

De fato, sejam $q(x, t)$ e $p(x, t)$ soluções do sistema

$$\begin{aligned} &\left| \begin{aligned} q'' - aq_{xx} - p_x + q &= 0 \\ p'' - bp_{xx} + q_x &= 0 \end{aligned} \right. && \text{em } Q \\ &\left| \begin{aligned} q(x, 0) = 0 = q(1, t) &= 0 \\ p(x, 0) = 0 = p(1, t) &= 0 \end{aligned} \right. && \text{em } (0, T) \\ &\left| \begin{aligned} q(T) = q^0, \quad q'(T) &= q^1 \\ p(T) = p^0, \quad p'(T) &= p^1. \end{aligned} \right. && \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

O problema (3.7) admite uma única solução forte, conforme resultados da seção 2.2.

Definamos novas variáveis

$$m = y - q, \quad n = z - p.$$

Então, y, z satisfaz (3.2) se, e somente se, m, n são soluções do seguinte sistema

$$\begin{aligned} &\left| \begin{aligned} m'' - am_{xx} - n_x + m &= 0 \\ n'' - bn_{xx} + m_x &= 0 \end{aligned} \right. && \text{em } Q \\ &\left| \begin{aligned} m(x, 0) = 0 = m(1, t) &= 0 \\ n(x, 0) = 0 = n(1, t) &= 0 \end{aligned} \right. && \text{em } (0, T) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\left| \begin{array}{l} m(0) = y^0 - q(0), \quad m'(0) = y^1 - q^1(0) \\ n(0) = z^0 - p(0), \quad n'(0) = z^1 - p^1(0). \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega$$

Além disso, verifica-se (3.6) se, e somente se,

$$m(T) = m'(T) = n(T) = n'(T) = 0. \quad (3.9)$$

Portanto, como $\{y^0 - q(0), y^1 - q^1(0)\}$ e $\{z^0 - p(0), z^1 - p^1(0)\} \in H$, existem controles v e $w \in L^2(\Sigma_0)$, tal que a solução de (3.8) verifica (3.9), logo a solução de (3.2) satisfaz a condição (3.5). Um fato importante e indispensável na prova desta equivalência, foi a linearidade e reversibilidade do sistema.

O resultado a seguir garante a controlabilidade exata na fronteira para o sistema (3.2).

Teorema 3.1.3. *Suponha a e b números reais tal que*

$$\min = \{a, b\} > 1 \text{ e } \alpha = \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}} \right\},$$

e seja $T > 2\alpha$. Então, para cada conjunto de dados iniciais $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\}$ pertencentes ao $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$, existem um controles $v(t), w(t) \in L^2(0, T)$ tal que a solução $y = y(x, t), z = (x, t)$ de (3.2), (3.3), (3.4) satisfaz (3.5).

Prova: A prova é aplicação direta do método HUM, que consiste nas seguintes etapas.

1. consideremos $\{\phi^0, \phi^1\}, \{\psi^0, \psi^1\} \in \mathcal{D}(0, 1) \times \mathcal{D}(0, 1)$ e resolvendo o seguinte problema misto:

$$\left| \begin{array}{l} \phi'' - a\phi_{xx} - \psi_x + \phi = 0 \\ \psi'' - b\psi_{xx} + \phi_x = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } Q \quad (3.10)$$

$$\left| \begin{array}{l} \phi(0, t) = 0, \quad \phi(1, t) = 0 \\ \psi(0, t) = 0, \quad \psi(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } (0, T) \quad (3.11)$$

$$\left| \begin{array}{l} \phi(x, 0) = \phi^0(x), \phi'(x, 0) = \phi^1(x) \\ \psi(x, 0) = \psi^0(x), \psi'(x, 0) = \psi^1(x) \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega \quad (3.12)$$

Pelo resultados da seção 2.2 o problema misto acima (3.10), (3.11) e (3.12) tem uma única solução forte $\phi = \phi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$ e tem-se que:

$$\phi_x(0, t), \psi_x(0, t) \in L^2(0, T). \quad (3.13)$$

2. Usando a solução $\phi = \phi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$ do passo 1, e resolvendo o problema retrógrado:

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{\zeta}'' - a\tilde{\zeta}_{xx} - \tilde{\zeta}_x + \tilde{\zeta} = 0 \\ \zeta'' - b\zeta_{xx} + \zeta_x = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } Q \quad (3.14)$$

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{\zeta}(0, t) = -a\phi_x(0, t), \tilde{\zeta}(1, t) = 0 \\ \zeta(0, t) = -b\psi_x(0, t), \zeta(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \quad (3.15)$$

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{\zeta}(x, T) = 0, \tilde{\zeta}'(x, T) = 0 \\ \zeta(x, T) = 0, \zeta'(x, T) = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega \quad (3.16)$$

Note que (3.14), (3.15) e (3.16) tem uma única solução $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(x, t)$ e $\zeta = \zeta(x, t)$.

Para as soluções $\tilde{\zeta}$ e ζ satisfazendo (3.13), definamos a aplicação:

$$\Lambda \left\{ \phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1 \right\} = \left\{ \tilde{\zeta}'(0), -\tilde{\zeta}(0), \zeta'(0), -\zeta(0) \right\} \quad (3.17)$$

Λ está bem definida. De fato para todo par $\{\phi^0, \phi^1\}, \{\psi^0, \psi^1\} \in \mathcal{D}(0, 1) \times \mathcal{D}(0, 1)$ resolveremos (3.10), (3.11) e (3.12). Como a solução $\phi = \phi(x, t)$ e $\psi = \psi(x, t)$, satisfaz (3.13), resolveremos (3.14), (3.15) e (3.16), obtemos $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}(x, t)$ e $\zeta = \zeta(x, t)$ e pela regularidade da solução ultra-fraca, temos $\tilde{\zeta}(0), \zeta(0) \in L^2(0, 1)$ e $\tilde{\zeta}'(0), \zeta'(0) \in H^{-1}(0, 1)$, logo faz sentido calcular $\tilde{\zeta}(0) = \tilde{\zeta}(x, 0)$, $\zeta(0) = \zeta(x, 0)$, $\tilde{\zeta}'(0) = \tilde{\zeta}'(x, 0)$, $\zeta'(0) = \zeta'(x, 0)$.

3. Multiplique ambos os lados de (3.10)₁ por ξ e (3.10)₂ por ζ , solução de (3.14), (3.15) e (3.16), e integrando em Q . Obtemos, depois integrando por partes:

$$\int_Q \phi'' \xi dxdt - a \int_Q \phi_{xx} \xi dxdt - \int_Q \psi_x \xi dxdt + \int_Q \phi \xi dxdt = 0 \quad (3.18)$$

Note $(\phi'', \xi) = (\phi', \xi)' - (\phi', \xi')$, então a primeira integral de (3.18) é igual a

$$\int_Q \phi'' \xi dxdt = - \langle \phi'(0), \xi(0) \rangle - \int_0^T \langle \phi', \xi' \rangle dt. \quad (3.19)$$

Como

$$\int_0^T \langle \phi', \xi' \rangle dt = - \langle \phi(0), \xi'(0) \rangle - \int_Q \phi \xi'' dxdt, \quad (3.20)$$

então substituindo (3.20) em (3.19), segue que

$$\int_Q \phi'' \xi dxdt = - \langle \phi'(0), \xi^0 \rangle + \langle \phi(0), \xi^1 \rangle + \int_Q \phi \xi'' dxdt. \quad (3.21)$$

Por outra parte, usando a identidade de Green, temos

$$-a \int_Q \phi_{xx} \xi dxdt = a \int_Q \nabla \phi \nabla \xi dxdt = -a \int_Q \xi_{xx} \phi dxdt + a \int_{\Sigma} \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \phi d\Sigma. \quad (3.22)$$

analisando o seguinte termo

$$- \int_Q \psi_x \xi dxdt = - \int_0^1 \int_0^T \psi_x \xi dxdt = - \int_0^T \psi_x(1, t) \xi(1, t) dt + \int_0^T \psi_x(0, t) \xi(0, t) dt$$

usando as condições de contorno de (3.15), teremos

$$- \int_Q \psi_x \xi dxdt = -a \int_0^T \psi_x(0, t) \phi_x(0, t) dt. \quad (3.23)$$

observe que, usando as condições (3.11) no termo $\phi \xi$, segue que

$$\int_Q \phi \xi dxdt = \int_0^1 \int_0^T \phi \xi dxdt = \int_0^T \phi(1, t) \xi(1, t) dt - \int_0^T \phi(0, t) \xi(0, t) dt = 0 \quad (3.24)$$

Agora analisando os termos de (3.10)₂ tem-se

$$\int_Q \psi'' \zeta dxdt - b \int_Q \psi_{xx} \zeta dxdt + \int_Q \phi_x \zeta dxdt = 0 \quad (3.25)$$

Note $(\psi'', \zeta) = (\psi', \zeta)' - (\psi', \zeta')$, então a primeira integral de (3.25) é igual a

$$\int_Q \psi'' \zeta dxdt = - \langle \psi'(0), \zeta(0) \rangle - \int_0^T \langle \psi', \zeta' \rangle dt. \quad (3.26)$$

Como

$$\int_0^T \langle \psi', \zeta' \rangle dt = - \langle \psi(0), \zeta'(0) \rangle - \int_Q \psi \zeta'' dxdt, \quad (3.27)$$

então substituindo (3.27) em (3.26), segue que

$$\int_Q \psi'' \zeta dx dt = -\langle \psi'(0), \zeta^0 \rangle + \langle \psi(0), \zeta^1 \rangle + \int_Q \psi \zeta'' dx dt. \quad (3.28)$$

Por outro lado, usando a identidade de Green, temos

$$-b \int_Q \psi_{xx} \zeta dx dt = b \int_Q \nabla \psi \nabla \zeta dx dt = -b \int_Q \zeta_{xx} \psi dx dt + b \int_{\Sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \psi d\Sigma. \quad (3.29)$$

analisando o seguinte termo

$$\int_Q \phi_x \zeta dx dt = \int_0^1 \int_0^T \phi_x \zeta dx dt = \int_0^T \phi_x(1, t) \zeta(1, t) dt - \int_0^T \phi_x(0, t) \zeta(0, t) dt$$

usando as condições de contorno de (3.15), segue que

$$\int_Q \phi_x \zeta dx dt = b \int_0^T \phi_x(0, t) \psi_x(0, t) dt. \quad (3.30)$$

Assim, substituindo as igualdades (3.21), (3.22), (3.23) e (3.24) em (3.18), e (3.28), (3.29), (3.30) em (3.25) e adicionado ambos os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} & -\langle \psi'(0), \zeta^0 \rangle + \langle \psi(0), \zeta^1 \rangle + b \int_0^T \phi_x(0, t) \psi_x(0, t) dt + b \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \psi d\Gamma dt + \\ & -\langle \phi'(0), \zeta^0 \rangle + \langle \phi(0), \zeta^1 \rangle - a \int_0^T \psi_x(0, t) \phi_x(0, t) dt + a \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \phi d\Gamma dt = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Tendo em conta (3.15), segue de (3.31), que

$$\begin{aligned} & (\zeta'(0), \phi^0) - (\zeta(0), \phi^1) + (\zeta'(0), \psi^0) - (\zeta(0), \psi^1) = \\ & = \int_0^T a \phi_x^2(0, t) dt + \int_0^T b \psi_x^2(0, t) dt. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Observe que o segundo membro de (3.32) é uma consequência das condições de fronteira

$$\zeta(0, t) = -a \phi_x(0, t) \text{ e } \zeta(0, t) = -b \psi_x(0, t).$$

De (3.17) e (3.32) obtemos:

$$\begin{aligned} & \left\langle \Lambda \left\{ \phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1 \right\}, \left\{ \phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1 \right\} \right\rangle = \\ & = \left(\left\{ \zeta'(0), -\zeta(0), \zeta'(0), -\zeta(0) \right\}, \left\{ \phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1 \right\} \right)_F = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\xi'(0), \phi^o) - (\xi(0), \phi^1) + (\xi'(0), \psi^o) - (\xi(0), \psi^1) = \\
&= \int_0^T a \phi_x^2(0, t) dt + \int_0^t b \psi_x^2(0, t) dt.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Mostraremos mas adiante que existem constanstes positivas C_0 e C_1 tal que:

$$\begin{aligned}
C_0 \left\| \left\{ \phi^o, \phi^1, \psi^o, \psi^1 \right\} \right\|_F^2 &\leq \int_0^T a \phi_x^2(0, t) dt + \int_0^T b \psi_x^2(0, t) dt \leq \\
&\leq C_1 \left\| \left\{ \phi^o, \phi^1, \psi^o, \psi^1 \right\} \right\|_F^2
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Note que em (3.34) tem-se, por definição,

$$\left\| \left\{ \phi^o, \phi^1, \psi^o, \psi^1 \right\} \right\|_F^2 = \int_0^1 (|\phi^1(x)|^2 + |\phi_x^o(x)|^2 + |\psi^1(x)|^2 + |\psi_x^o|^2) dx, \tag{3.35}$$

que é uma norma em $(H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1))^2$.

Por (3.34) segue se que $C_1 \left\| \left\{ \phi^o, \phi^1, \psi^o, \psi^1 \right\} \right\|_F$ definida por (3.35) é uma norma em $(D(0, 1) \times D(0, 1))^2$, equivalente a norma de $(H_0^1 \times L^2(0, 1))^2$ definida por (3.35). O operador Λ definido por (3.17) é linear e contínuo com respeito a norma $\|\cdot\|_F$. Então tem uma extensão única, por continuidade, ao fecho de $(\mathcal{D}(0, 1) \times \mathcal{D}(0, 1))^2$ com respectiva norma $\|\cdot\|_{F'}$, que por (3.34) é equivalente a norma em $(H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1))^2$ dada por (3.35). Portanto, $F = (H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1))^2$ e temos

$$\Lambda : F \rightarrow F'. \tag{3.36}$$

F' é o dual de F , pois Λ é coesiva. Esta (3.36) é uma consequência do lema de **Lax-Milgram**. Veja, também que $F' = (H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1))^2$.

Segue que Λ é um isomorfismo entre $F = (H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1))^2$ e seu dual $F' = (H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1))^2$. Consequentemente, dado $\{y^o, y^1, z^o, z^1\}$ tal que $\{y^1, -y^o\}, \{z^1, -z^o\} \in H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1)$, a equação

$$\Lambda \left\{ \phi^o, \phi^1, \psi^o, \psi^1 \right\} = \left\{ y^1, -y^o, z^1, z^o \right\}, \tag{3.37}$$

tem uma única solução $\{\phi^o, \phi^1, \psi^o, \psi^1\}$ tal que $\{\phi^o, \phi^1\}, \{\psi^o, \psi^1\} \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$.

Por meio de (3.17) e (3.37) concluímos que a única solução de (3.14), (3.15) e (3.16) satisfazendo (3.4). Então, a única solução de (3.2), (3.3) e (3.4) com controle:

$$v(t) = -a\phi_x(0, t) \text{ e } w(t) = -b\psi_x(0, t). \quad (3.38)$$

satisfazendo (3.5), como queríamos demonstrar.

□

Agora, para finalizar o teorema 3.1.3 é suficiente prova a dupla desigualdade (3.34). Para isso consideramos a energia do sistema (3.10) – (3.12) dada por

$$E(t) = \int_0^1 (|\phi^1(x)|^2 + |\phi_x^0(x)|^2 + |\psi^1(x)|^2 + |\psi_x^0|^2) dx, \quad (3.39)$$

onde, usando (3.10) – (3.11) obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (3.40)$$

Então, usando (3.35) e (3.40) temos

$$E(t) = E(0) = \left\| \phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1 \right\|_F^2, \quad \forall t > 0. \quad (3.41)$$

Agora mostramos (3.34) em duas etapas.

Consideramos o sistema (3.10) com f, g no lado direito de (3.10)₁ e (3.10)₂ respectivamente, no lugar de zero. Antes de provamos a dupla desigualdade precisamos do seguinte resultado.

Lema 3.1.4. *Se $\{\phi, \psi\}$ é uma solução fraca de (3.10), (3.11) e (3.12) com lado direito igual a f e $g \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, então temos a identidade:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T (a\phi_x^2(0, t) + b\psi_x^2(0, t)) dt = \\ & = - \left[(\phi'(x, t), (1-x)\phi_x(x, t)) + (\psi'(x, t), (1-x)\psi_x(x, t)) \right]_0^T + \\ & \quad + \int_Q (|\phi'|^2 + |\psi'|^2 + a|\phi_x|^2 + b|\psi_x|^2) dx dt - \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_Q |\phi|^2 dx dt + \int_Q f(1-x)\phi_x dx dt + \int_Q g(1-x)\psi_x dx dt. \end{aligned} \quad (3.42)$$

i) *Desigualdade Direta*

Prova: Primeiro mostraremos a desigualdade à direita de (3.34). Para isso seja $T > 0$ e toda solução de (3.10) com dados ϕ^o e $\psi^o \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$; $\phi^1, \psi^1 \in H_0^1(0,1)$ e $f, g \in W^{1,1}(0,T; H_0^1(0,1))$, e seja $q \in C^1([0,1])$, usando o método de multiplicadores como em J.L.Lions [?], ou seja tomando $q(x)(\frac{\partial \phi}{\partial x})$ escolhendo convenientemente $q(x) = L - x^o$, tem-se $q(x) = (1-x)$ e $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x$, daí multiplicando (3.10)₁ por $(1-x)\phi_x$, (3.10)₂ por $(1-x)\psi_x$ e integrando em Q , obtemos:

$$\int_Q \phi''(1-x)\phi_x dxdt - a \int_Q \phi_{xx}(1-x)\phi_x dxdt - \quad (3.43)$$

$$- \int_Q \psi_x(1-x)\phi_x dxdt + \int_Q \phi(1-x)\phi_x dxdt = \int_Q f(1-x)\phi_x dxdt$$

$$\int_Q \phi''(1-x)\psi_x dxdt - b \int_Q \psi_{xx}(1-x)\psi_x dxdt + \quad (3.44)$$

$$+ \int_Q \phi_x(1-x)\psi_x dxdt = \int_Q g(1-x)\psi_x dxdt$$

Vamos calcular (3.43) termo a termo

$$\begin{aligned} \int_Q \phi''(1-x)\phi_x dxdt &= \int_0^T (\phi'', (1-x)\phi_x) dt = \\ &= (\phi', (1-x)\phi_x)|_0^T - \int_0^T (\phi', (1-x)\phi'_x) dt \end{aligned}$$

A integral do lado direito será:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 (1-x)\phi' \phi'_x dxdt &= \int_0^T \int_0^1 (1-x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dxdt = \\ &= \int_0^T \int_0^1 (1-x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} dxdt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (1-x) \frac{\partial \phi}{\partial x} |\phi'|^2 dxdt = \end{aligned}$$

integrando por partes

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left\{ (1-x)|\phi'|^2|_0^1 - \int_0^1 |\phi|^2 dx \right\} dt = -\frac{1}{2} \int_Q |\phi'|^2 dxdt.$$

Note que $(1-x)\phi'(x,t)|_0^1 = -\phi'(0,t) = 0$. Então,

$$\int_Q \phi''(1-x)\phi_x dxdt = (\phi', (1-x)\phi_x)|_0^T - \frac{1}{2} \int_Q \phi'(x,t)^2 dxdt. \quad (3.45)$$

Obtemos:

$$-a \int_Q \phi_{xx}(1-x)\phi_x dxdt = -a \int_0^T \int_0^1 (1-x)\phi_x \phi_{xx}$$

$$\begin{aligned}
&= -a \int_0^T \int_0^1 (1-x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dt = -a \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^T \int_0^1 (1-x) \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^2 dx dt \\
&= -\frac{a}{2} \int_0^T \int_0^1 (1-x) \frac{\partial}{\partial x} \phi_x^2 dx dt =
\end{aligned}$$

integrando por partes

$$\begin{aligned}
&-\frac{a}{2} \int_0^T \left\{ (1-x) \phi_x^2 \Big|_0^1 + \int_0^1 \phi_x^2 dx \right\} dt = \\
&\frac{1}{2} \int_0^T a \phi_x^2(0, t) dt - \frac{1}{2} \int_Q a \phi_x^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Então,

$$-\int_Q a \phi_{xx} (1-x) \phi_x dx dt = \frac{1}{2} \int_0^T a \phi_x^2(0, t) dt - \frac{1}{2} \int_Q a \phi_x^2 dx dt. \quad (3.46)$$

Os próximos termos são

$$-\int_Q \psi_x (1-x) \phi_x dx dt = -\int_Q (1-x) \psi_x \phi_x dx dt \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}
&\int_Q \phi (1-x) \phi_x dx dt = \frac{1}{2} \int_Q (1-x) \frac{\partial}{\partial x} \phi^2 dx dt = \\
&\frac{1}{2} \int_0^T \left\{ (1-x) \phi^2(x, t) \Big|_0^1 + \int_1^0 \phi^2 dx \right\} dt = \frac{1}{2} \int_Q \phi^2 dx dt
\end{aligned}$$

porque $\phi(0, t) = 0$

Então,

$$\int_Q (1-x) \phi_x dx dt = -\frac{1}{2} \int_Q \phi^2 dx dt. \quad (3.48)$$

de (3.45) e (3.48) obtemos por adição:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_0^T a \phi_x^2(0, t) dt = -(\phi', (1-x) \phi_x) \Big|_0^T + \\
&+\frac{1}{2} \int_Q \phi'^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_Q a \phi_x^2 dx dt + \int_Q (1-x) \psi_x \phi_x dx dt - \\
&-\frac{1}{2} \int_Q \phi^2 dx dt + \int_Q f(1-x) \phi_x dx dt.
\end{aligned} \quad (3.49)$$

Vamos agora calcular (3.44), usando o mesmo método que foi aplicado a (3.43):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_0^T \psi_x^2(0, t) dt = -(\psi', (1-x) \psi_x) \Big|_0^T + \\
&+\frac{1}{2} \int_Q \psi'^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_Q b \psi_x^2 dx dt + \\
&+\int_Q (1-x) \psi_x \phi_x dx dt + \int_Q g(1-x) \psi_x dx dt.
\end{aligned} \quad (3.50)$$

Finalmente, se adicionamos (3.48) e (3.50) obteremos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^T (a\phi_x^2(0,t) + b\psi_x^2(0,t))dt = \\
& = -\{(\phi', (1-x)\phi_x) + (\psi', (1-x)\psi_x)\}|_0^T + \\
& + \frac{1}{2} \int_Q (|\phi'|^2 + |\psi'|^2 + a|\phi_x|^2 + b|\psi_x|^2)dxdt - \\
& - \frac{1}{2} \int_Q \phi^2 dxdt + \int_Q f(1-x)\phi_x dxdt + \int_Q g(1-x)\psi_x dxdt.
\end{aligned}$$

Agora, usando a identidade (3.42) do Lema 3.1.4, seremos capazes de prova a desigualdade direta. Por limite, a identidade é verdade para a solução fraca, note que:

$$\begin{aligned}
& \left| (\phi', (1-x)\phi_x) \right|_0^T \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left| (\phi'(x,t), (1-x)\phi_x(x,t)) \right| \leq \\
& \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \phi'^2(x,t)dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \phi_x^2 dx \right\} \leq C_0 E_0.
\end{aligned}$$

Para prova a desigualdade direta, vamos considerar (3.42) com $f = g = 0$, tal que $\{\phi, \psi\}$ é solução fraca de (3.10), (3.11) e (3.12). Se consideramos a desigualdade de energia da solução fraca que satisfaz $C_0 E_0 \leq E(t) \leq C_1 E_0$ e a desigualdade de Poincaré, segue de (3.42) que:

$$\int_0^T (a\phi_x^2(0,t) + b\psi_x^2(0,t))dt \leq C_1 \left\| \{\phi^0, \phi^1, \psi^0, \psi^1\} \right\|_{(H_0^1(0,1) \times L^2(0,1))^2}^2$$

ii) Desigualdade Inversa

Vamos prova a desigualdade inversa seguindo os métodos de Zuazua [?]. De fato, vamos considerar o funcional:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} (\phi'(x,t)^2 + a\phi_x(x,t)^2 + \phi(x,t)^2)dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} (\psi'(x,t)^2 + b\psi_x(x,t)^2)dt,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

definida em $0 \leq x \leq 1$. Onde $x = 0$ temos:

$$\begin{aligned}
F(0) &= \frac{1}{2} \int_{\alpha 0}^{T-\alpha 0} (\phi'(0,t)^2 + a\phi_x(0,t)^2 + \phi(0,t)^2)dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\alpha 0}^{T-\alpha 0} (\psi'(0,t)^2 + b\psi_x(0,t)^2)dt,
\end{aligned}$$

logo

$$F(0) = \frac{1}{2} \int_0^T (a\phi_x(0,t)^2 + b\psi_x(0,t)^2)dt, \tag{3.52}$$

que o segundo membro da desigualdade inversa. Repare que $\alpha = \max\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$. Represente $F(x) = G(x) + H(x)$ dado por (3.51). Calculando a derivada de $F(x)$ temos:

$$G'(x) = \int_{\alpha x}^{T-\alpha} (\phi' \phi'_x + a\phi_x \phi_{xx} + \phi \phi_x) dt - \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} (\phi(x, t)^2 + a\phi_x(x, t)^2 + \phi(x, t)^2) \quad (3.53)$$

integrando por partes:

$$\int_{\alpha x}^{T-\alpha} \phi' \phi'_x dt = \phi' \phi_x \Big|_{\alpha x}^{T-\alpha} - \int_{\alpha x}^{T-\alpha} \phi'' \phi_x dt. \quad (3.54)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.5) por ϕ_x e integrando de $(\alpha x, T - \alpha x)$ com respeito a t . Tem-se

$$\int_{\alpha x}^{T-\alpha} \phi'' \phi_x dt - \int_{\alpha x}^{T-\alpha} a\phi_{xx} \phi_x dt - \int_{\alpha x}^{T-\alpha} \psi \phi_x dt + \int_{\alpha x}^{T-\alpha} \phi \phi_x dt = 0. \quad (3.55)$$

Substituindo (3.54) em (3.55) obtemos:

$$\begin{aligned} \phi' \phi_x \Big|_{\alpha x}^{T-\alpha} - \int_{\alpha x}^{T-\alpha} \phi' \phi'_x dt - \int_{\alpha x}^{T-\alpha} a\phi_{xx} \phi_x dt - \\ - \int_{\alpha x}^{T-\alpha} \psi \phi_x dt + \int_{\alpha x}^{T-\alpha} \phi \phi_x dt = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Adicionando (3.53) e (3.56) temos:

$$\begin{aligned} G'(x) = \phi' \phi_x \Big|_{\alpha x}^{T-\alpha} - \int_{\alpha x}^{T-\alpha} \psi \phi_x dt + 2 \int_{\alpha x}^{T-\alpha} \phi \phi_x dt - \\ - \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} (\phi'(x, t)^2 + a\phi_x(x, t)^2 + \phi(x, t)^2). \end{aligned} \quad (3.57)$$

O primeiro termo do lado direito de (3.57) pode ser majorado por:

$$\phi' \phi_x \leq \frac{\beta}{2} \phi'^2 + \frac{1}{\beta} \phi_x^2 = \frac{\beta}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2\beta} a \phi_x^2.$$

Tomado $\beta = \frac{1}{\sqrt{a}}$ temos:

$$\begin{aligned} \phi' \phi_x &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \phi'^2 + \frac{1}{2\sqrt{a}} a \phi_x^2. \\ \phi' \phi_x &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}} (\phi'^2 + a \phi_x^2). \end{aligned}$$

Sabemos por hipótese do **Teorema principal 3.1.3** que $\frac{1}{\sqrt{a}} \leq \alpha$, então

$$\phi' \phi_x \leq \frac{\alpha}{2} (\phi'(x, t)^2 + a\phi_x(x, t)^2).$$

Onde

$$\phi' \phi|_{\alpha x}^{T-\alpha x} \leq \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} (\phi'(x,t)^2 + a\phi_x(x,t)^2 + \phi(x,t)^2) \quad (3.58)$$

De (3.57) e (3.58) obtemos:

$$G'(x) \leq - \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \psi \phi_x dt + 2 \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi \phi_x dt \quad (3.59)$$

A derivada de $H(x)$ com respeito a x é

$$\begin{aligned} H'(x) &= \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} (\psi' \psi'_x + b\psi_x \psi_{xx}) dt \\ &\quad - \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} (\psi'(x,t)^2 + b\psi_x(x,t)^2). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pelo mesmo argumento usado na análise de $G'(x)$ obtemos de (3.60)

$$H'(x) = \psi' \psi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} + \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi_x \psi_x dt - \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} (\psi'(x,t)^2 + b\psi_x(x,t)^2). \quad (3.61)$$

Obtemos também

$$\psi' \psi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} \leq - \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} (\psi'(x,t)^2 + b\psi_x(x,t)^2). \quad (3.62)$$

De (3.61) e (3.62) obtemos:

$$H'(x) \leq \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi_x \psi_x dt. \quad (3.63)$$

Adicionado (3.59) e (3.63) obtemos:

$$F'(x) \leq 2 \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi \phi_x dt. \quad (3.64)$$

Desde

$$\phi \phi_x \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{a} \right\} \left(\frac{1}{2} \phi(x,t)^2 + \frac{1}{2} a \phi_x(x,t)^2 \right),$$

modificando (3.64) para obter:

$$F'(x) \leq CF(x) \quad (3.65)$$

Integrando (3.65) obtemos:

$$F(x) \leq e^c F(0).$$

ou

$$\int_0^1 F(x) dx \leq e^c F(0).$$

Desde

$$\begin{aligned}
 (T - 2\alpha)E_o &= \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} E_o dt \leq C_0 \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} E(t) dt = \\
 &= C_0 \int_{\alpha}^{T-\alpha x} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} a \phi_x^2 + \frac{1}{2} \phi^2 \right) dx dt + \\
 &\quad + C_0 \int_{\alpha}^{T-\alpha x} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \psi'^2 + \frac{1}{2} b \psi_x^2 \right) dx dt.
 \end{aligned}$$

Desde $0 \leq x \leq 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 (T - 2\alpha)E_o &\leq C_0 \int_{\alpha}^{T-\alpha x} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} a \phi_x^2 \right) dx dt \\
 &\quad + C_0 \int_{\alpha}^{T-\alpha x} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \psi'^2 + \frac{1}{2} b \psi_x^2 \right) dx dt = C \int_0^1 F(x) dx \leq C_0 F(0).
 \end{aligned}$$

Então para $T > 0$ obtemos a desigualdade inversa e consequentemente a prova do

Teorema Principal 3.1.3.

□

Capítulo 4

CONTROLABILIDADE EXATA COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

Neste capítulo consideramos uma generalização do caso estudado no capítulo 3, ou seja os coeficientes $a(x)$ e $b(x)$ são variáveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - (a(x)y_x) - z_x + y = 0 \\ z'' - (b(x)z_x)_x + y_x = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

a motivação física para estudar este caso é a mesma dada anteriormente. Então temos o seguinte problema misto não homogêneo para (4.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - (a(x)y_x) - z_x + y = 0 \\ z'' - (b(x)z_x)_x + y_x = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } Q \quad (4.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0, t) = v(t), \quad y(1, t) = 0 \\ z(0, t) = w(t), \quad z(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } (0, T) \quad (4.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x, 0) = y^0(x), \quad y'(x, 0) = y^1(x) \\ z(x, 0) = z^0(x), \quad z'(x, 0) = z^1(x) \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega \quad (4.4)$$

A controlabilidade exata para os problemas (4.2), (4.3), (4.4) é formulada a seguir: Dado $T > 0$, encontre um espaço Hilbert H tal que para cada par $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\}$ pertencentes a H , existe um par de controles $v(t), w(t)$ em $L^2(0, T)$, tal que a solução $y = y(x, t), z = z(x, t)$ de (4.2), (4.3), (4.4) satisfaz:

$$\left| \begin{array}{l} y(x, T) = 0, y'(x, T) = 0 \\ z(x, T) = 0, z'(x, T) = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } (0, 1) \quad (4.5)$$

Formulado desta forma o problema parece ligeiramente ambíguo, já que não temos precisado o tempo T que dispomos para controlar o sistema e nem o espaço a qual os dados iniciais pertencem. Geralmente, a possibilidade de obter um resultado de controlabilidade exata dependerá de como se escolha o tempo T , o espaço dos controles e o espaço dos dados iniciais.

Observação 4.0.5. Novamente, devido a velocidade finita de propagação das ondas para que se possa ter um resultado de controlabilidade exata será preciso que T seja suficientemente grande, a saber, $T > T_0$ com $T_0 > 0$ dependendo de Ω e Γ_0 .

O resultado a seguir garante a controlabilidade exata para o problema proposto acima, usando o método HUM, onde $a(x)$ e $b(x)$ são funções variáveis positivas e as duas velocidades de ondas dadas por $\sqrt{a_0}$ e $\sqrt{b_0}$ são diferentes em todos os pontos da viga.

4.1 Teorema Principal e Aplicação do HUM

Nesta seção fixaremos o resultado principal, que dar a controlabilidade exata na fronteira para o sistema (4.1).

Teorema 4.1.1. *Suponha $a(x)$ e $b(x) \in W^{1,\infty}(0, 1)$ e*

$$a(x) \geq a_0 > 1, b(x) \geq b_0 > 1 \text{ em } (0, 1). \quad (4.6)$$

Seja $T > 2\alpha$, onde $\alpha = \max(\frac{1}{\sqrt{a_0}}, \frac{1}{\sqrt{b_0}})$. Então, para cada conjunto de dados iniciais $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\}$ pertencentes ao $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$, existem controles $v(t), w(t) \in L^2$ tal que a solução $y = y(x, t), z = z(x, t)$ de (4.2), (4.3), (4.4) satisfaz (4.5).

Observação 4.1.2. Tem-se o mesmo resultado quando o controle atua no outro extremo $x = 1$, a saber quando consideramos as condições de contorno

$$y(0, t) = 0; y(1, t) = -a(1)\phi_x(1, t) \quad \forall t \in (0, T)$$

$$z(0, t) = 0; z(1, t) = -b(1)\psi_x(1, t) \quad \forall t \in (0, T)$$

no caso em que o controle atua simultaneamente em ambos extremos do intervalo, a saber, quando se tem condições do tipo

$$y(0, t) = v(t); y(1, t) = -a(1)\phi_x(1, t) \quad \forall t \in (0, T)$$

$$z(0, t) = w(t); z(1, t) = -b(1)\psi_x(1, t) \quad \forall t \in (0, T)$$

a controlabilidade exata se verifica para $T > \frac{1}{\sqrt{a_0}}$ com controles $v(t)$, $w(t)$, $-a(x)\phi_x$, $-b(x)\psi_x \in L^2(0, T)$

Prova: O HUM se adapta muito bem a equação (4.1). Logo podemos reduzir o problema a obtenção da seguinte estimativa

$$C_0 \left\| \left\{ \phi^o, \phi^1, \psi^o, \psi^1 \right\} \right\|_F^2 \leq \int_0^T a(0) |\phi_x(0, t)|^2 dt + \int_0^T b(0) |\psi_x(0, t)|^2 dt \quad (4.7)$$

para soluções de

$$\left| \begin{array}{l} \phi'' - (a(x)\phi_x) - \psi_x + \phi = 0 \\ \psi'' - (b(x)\psi_x)_x + \phi_x = 0 \end{array} \right. \quad em \quad Q \quad (4.8)$$

$$\left| \begin{array}{l} \phi(0, t) = 0, \phi(1, t) = 0 \\ \psi(0, t) = 0, \psi(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad em \quad (0, T) \quad (4.9)$$

$$\left| \begin{array}{l} \phi(x, 0) = \phi^0(x), \phi'(x, 0) = \phi^1(x) \\ \psi(x, 0) = \psi^0(x), \psi'(x, 0) = \psi^1(x) \end{array} \right. \quad em \quad (0, 1) \quad (4.10)$$

a demonstração da desigualdade direta com coeficientes variáveis é análoga ao caso que foi estudado para coeficientes constantes.

Para demonstrar a desigualdade inversa definamos o funcional

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \left[|\phi'(x, t)|^2 + a(x) |\phi_x(x, t)|^2 + |\phi(x, t)|^2 \right] dt + \quad (4.11)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \left[|\psi'(x, t)|^2 + b(x) |\psi_x(x, t)|^2 \right] dt,$$

definida em $0 \leq x \leq 1$. Onde $x = 0$ temos:

$$F(0) = \frac{1}{2} \int_{\alpha 0}^{T-\alpha 0} \left[|\phi'(0, t)|^2 + a(0) |\phi_x(0, t)|^2 + |\phi(0, t)|^2 \right] dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\alpha 0}^{T-\alpha 0} \left[|\psi'(0, t)|^2 + b(0) |\psi_x(0, t)|^2 \right] dt,$$

logo

$$F(0) = \frac{1}{2} \int_0^T a(0) \phi_x^2(0, t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T b(0) \psi_x^2(0, t) dt, \quad (4.12)$$

que o segundo membro da desigualdade inversa. Repare que $\alpha = \max\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}, \frac{1}{\sqrt{b_0}}\right)$.

Represente $F(x) = G(x) + H(x)$. Calculando a derivada de $F(x)$ com respeito a x .

Então

$$G'(x) = \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \left[\phi' \phi'_x + \frac{a_x}{2} \phi_x^2 + a(x) \phi_x \phi_{xx} + \phi \phi_x \right] dt - \quad (4.13)$$

$$- \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} \left[\phi'(x, t)^2 + a(x) \phi_x(x, t)^2 \right]$$

integrando por partes:

$$\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi' \phi'_x dt = \phi' \phi_x \Big|_{\alpha x}^{T-\alpha x} - \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi'' \phi_x dt. \quad (4.14)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.8)₁ por ϕ_x e integrando de $(\alpha x, T - \alpha x)$ com respeito a t , substituindo o integrante $\phi'' \phi_x$ em (4.14) e substituindo o resultado em (4.13)

Tem-se

$$G'(x) = \phi' \phi_x \Big|_{\alpha x}^{T-\alpha x} - \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a_x \phi_x^2 dt - \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \psi_x \phi_x dt + \quad (4.15)$$

$$+ 2 \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi \phi_x dt - \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} \left[\phi'(x, t)^2 + a(x) \phi_x(x, t)^2 \right]$$

Agora modificando o primeiro termo do lado direito de (4.15). Obtemos

$$\phi' \phi_x \leq \frac{\beta}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2\beta} \phi_x^2 \leq \frac{\beta}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2a_0\beta} a(x) \phi_x^2.$$

Tomado $\beta = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \leq \alpha = \max\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}, \frac{1}{\sqrt{b_0}}\right)$ temos:

$$\phi' \phi_x \leq \frac{1}{2\sqrt{a_0}}(\phi'^2 + a(x)\phi_x^2) \leq \frac{\alpha}{2}(\phi'^2 + a(x)\phi_x^2).$$

$$\phi' \phi|_{\alpha x}^{T-\alpha x} \leq \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} \left[\phi'(x, t)^2 + a(x)\phi_x(x, t)^2 \right] \quad (4.16)$$

De (4.15) e (4.16) obtemos:

$$G'(x) \leq -\frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a_x \phi_x^2 dt - \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \psi_x \phi_x dt + 2 \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi \phi_x dt \quad (4.17)$$

A derivada de $H(x)$ com respeito a x é

$$H'(x) = \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \left(\psi' \psi'_x + \frac{b_x}{2} \psi_x^2 + b(x) \psi_x \psi_{xx} \right) dt \quad (4.18)$$

$$- \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} \left(\psi'(x, t)^2 + b(x) \psi_x(x, t)^2 \right).$$

Os mesmo argumento usado na análise de $(4.8)_1$, serão aplicados na equação $(4.8)_2$ para obtemos

$$H'(x) = \psi' \psi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} - \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi_x b_x \psi_x^2 + \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi_x \psi_x dt - \quad (4.19)$$

$$- \frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} \left[\psi''(x, t)^2 + b(x) \psi_x(x, t)^2 \right].$$

Por um argumento semelhante usado sobre $\phi' \phi_x$, obtemos

$$\psi' \psi_x \leq \frac{1}{2\sqrt{b_0}}(\psi'^2 + b(x)\psi_x^2) \leq \frac{\alpha}{2}(\psi'^2 + b(x)\psi_x^2),$$

porque $\frac{1}{\sqrt{a_0}} \leq \alpha = \max\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}, \frac{1}{\sqrt{b_0}}\right)$. Segue que:

$$\psi' \psi_x|_{\alpha x}^{T-\alpha x} \leq -\frac{\alpha}{2} \sum_{\substack{t=T-\alpha x \\ t=\alpha x}} \left[\psi'(x, t)^2 + b(x) \psi_x(x, t)^2 \right]. \quad (4.20)$$

De (4.19) e (4.20) obtemos:

$$H'(x) \leq -\frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} b_x \psi_x^2 dt + \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \psi_x \phi_x dt. \quad (4.21)$$

Adicionado (4.16) e (4.21) obtemos:

$$F'(x) \leq -\frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a_x \phi_x^2 dt - \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} b_x \psi_x^2 dt + 2 \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi \phi_x dt. \quad (4.22)$$

modificando (4.22) para obter:

$$F'(x) \leq \frac{\|a_x\|_\infty}{2a_o} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a(x) \phi_x^2 dt + \frac{\|b_x\|_\infty}{2b_o} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} b(x) \psi_x^2 dt \quad (4.23)$$

$$- 2\frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi^2 dt + 2\frac{1}{2a_o} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a(x) \phi_x^2 dt.$$

Por definição de $F(x)$ dada por (4.11) e da estimativa de $F'(x)$ tem-se:

$$F'(x) \leq cF(x)$$

com

$$C = \max \left(\frac{\|a_x\|_\infty}{a_o}, \frac{\|b_x\|_\infty}{b_o}, 2 \right).$$

Então, integrando sobre a desigualdade, segue:

$$F(x) \leq C_o F(0), C_o = \exp C, 0 \leq x \leq 1 \quad (4.24)$$

agora integrando (4.24) no intervalo $(0, 1)$ teremos

$$\int_0^1 F(x) \leq C_o F(0). \quad (4.25)$$

Se $T > 2\alpha$, $\alpha = \max \left(\frac{1}{\sqrt{a_o}}, \frac{1}{\sqrt{b_o}} \right)$, obtemos:

$$T - 2\alpha E_0 = \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} E_0 dt \leq C_1 \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} E(t) dt$$

a saber que $E(t)$ da seguinte forma quadrática é:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[|\phi'(x, t)|^2 + a(x) |\phi_x(x, t)|^2 + |\phi(x, t)|^2 \right] dx + \quad (4.26)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left[|\psi'(x, t)|^2 + b(x) |\psi_x(x, t)|^2 \right] dx.$$

como foi visto na seção (2.2.1) Então,

$$(T - 2\alpha)E_0 \leq \int_\alpha^{T-\alpha} \int_0^1 \frac{1}{2} \left[|\phi'(x, t)|^2 + a(x) |\phi_x(x, t)|^2 + |\phi(x, t)|^2 \right] dx dt$$

$$+ C_1 \int_\alpha^{T-\alpha} \int_0^1 \frac{1}{2} \left[|\psi'(x, t)|^2 + b(x) |\psi_x(x, t)|^2 \right] dx dt.$$

Desde $0 \leq x \leq 1$, $\alpha x \leq \alpha$, então

$$(T - 2\alpha)E_0 \leq \int_0^1 \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \left[|\phi'(x, t)|^2 + a(x) |\phi_x(x, t)|^2 + |\phi(x, t)|^2 \right] dt dx \quad (4.27)$$

$$+ C_1 \int_0^1 \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \left[|\psi'(x, t)|^2 + b(x) |\psi_x(x, t)|^2 \right] dt dx.$$

De (4.11) e modificando (4.27) para obter:

$$(T - 2\alpha)E_0 \leq C \int_0^1 F(x)dx \leq C_2 F(0).$$

que implica a desigualdade inversa.

□

REFERÊNCIAS

- [1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. F. *Sobolev spaces*. Academic Press, Canada, (2003).
- [2] BOTELHO, G. E PELLEGRINO, D. E. T. E. *Fundamentos de Análise Funcional*. SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- [3] BOURQUIN, F., JOLY, M., COLLET, M., AND RATIER, L. An efficient feedback control algorithm for beams: experimental investigations. *Journal of Sound and Vibration* 278, 1–2 (2004), 181–206.
- [4] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, USA, (2011).
- [5] CODDINGTON, E. E LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGrall-Hill, New York, (1955).
- [6] ERVEDOZA, S., AND ZUAZUA, E. *Numerical Approximation of Exact Control for Wave*. Springer, USA, (2013).
- [7] GLOWINSKI, R. J.L. LIONS, J. H. *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems : a numerical approach*, vol. 1. N.York, 2008.
- [8] KIM, J. U., AND RENARDY, Y. Boundary control of the timoshenko beam. *Journal Control and Optimization* 25, 6 (University of Auckland), 1417–1429.
- [9] KOMORNIK, V. *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*. Strasbourg, Universite Louis Paster, Hungary, (1993).
- [10] LAGNESE, J. E., AND LIONS, J. L. *Modeling Analysis and Control of Thin Plates*. Masson, 1988.
- [11] LEÓN, L., AND ZUAZUA, E. Boundary controllability of the finite-difference space semi-discretizations of the beam equation. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 8 (1 2002), 827–862.
- [12] LIONS, J. L. Exact controllability stabilization and perturbation for distributed systems. *SIAM Rev* 30 (1988), 1–68.
- [13] LIONS, J. L., AND E.MANEGES. *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, vol. 1. DUNOD, Paris, (1968).
- [14] LIONS, J. L., AND E.MANEGES, P. K. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, vol. 2. Springer-Verlag, Paris, (1972).

- [15] LITTMAN, W., AND MARKUS, L. Exact boundary controllability of a hybrid system of elasticity , *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 103 (1988), 193–236.
- [16] MEDEIROS, L. A. E MELLO, E. *A integral de Lebesgue*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.
- [17] MEDEIROS, L. A. Exact controllability for a timoshenko model of vibrations of beams. *Advances in Mathematical Sciences and Applications* 2, 1 (1992), 47–61.
- [18] MEDEIROS, L. A. *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais, parte I*, vol. 9. IM-UFRJ, 2006.
- [19] MEDEIROS, L. A. E MILLA MIRANDA, M. *Introdução ao Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, vol. 25. IM-UFRJ, 1989.
- [20] MEDEIROS, L. A. E MILLA MIRANDA, M. *Espaços de Sobolev(Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2010.
- [21] MEDEIROS, L. A. E RIVERA, P. H. *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).
- [22] MEDEIROS, L. A.,. *Exact Controllability For Wave Equations - HUM*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.
- [23] S. TIMOSHENKO, D. H. YOUNG, W. W. J. *Vibrations problems in engineering*.. John Wiley & Sons, N.Y., 1974.
- [24] SOUFYANE, A. Stabilisation de la poutre de timoshenko. *Problèmes mathématiques de la mécanique* 1 (1999), 731–734.
- [25] TAYLOR, S. W. *Boundary control of the Timoshenko Beam with variable physical characteristics*. Research report 356, Department of Mathmatics, University of Auckland.
- [26] TUCSNAK, M. Regularity and exact controllability for a beam with piezoelectric actuators. *Journal Control and Optimization* 34 (1996), 922–930.
- [27] ZUAZUA, E. Exact controllability for the semilinear wave equation in one space dimension. *Annales de l.I.H.P. Analyse non lineaire* 10 (1993), 109–129.
- [28] ZUAZUA, E. *Lectures Notes on Exact Control and Stabilization*. UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, (1990).
- [29] ZUAZUA, E. *An introduction to the exact controllability for distributed systems*. CMAF, Universidade de Lisboa, Portugal, (1990).
- [30] ZUAZUA, E. *Controllability of Partial Differential Equations*. DMUA, Universidad Autonoma, Spain, (2009).
- [31] ZUAZUA, E., AND MICU, S. *An introduction to the Controllability for Partial Differential Equations*. CMAF, Universidade de Lisboa, Portugal, (1990).

Apêndice A

EXISTÊNCIA E PROLONGAMENTO DE SOLUÇÕES APROXIMADAS

O nosso objetivo neste apêndice é justificar a existência de soluções do sistema (2.10). Sejam $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua.

Dizemos que uma função absolutamente contínua $x(t)$ definida em algum intervalo da reta I tal que $(x(t), t) \in G$, $\forall t \in I$, é uma solução para o problema

$$x' = f(x, t) \tag{A.1}$$

se $x(t)$ satisfaz A.1 q.s em (x, t) . Seja $(x_0, t_0) \in G$. Associando a A.1 e a (x_0, t_0) tem o problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right. \tag{A.2}$$

Dizemos que a função $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ está nas **Condições de Carathéodory** sobre G se

1. $f(x, t)$ é mensurável em t para cada x fixado,
2. $f(x, t)$ é contínua em x para cada t fixado,
3. Para cada compacto K de G existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que

$$|f(x, t)| \leq m_K(t), \forall (x, t) \in K.$$

Consideremos o retângulo

$$R = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x - x_0| \leq b, |t - t_0| \leq a, b > 0, a > 0 \right\}.$$

Teorema A.0.3. (Carathéodory) *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas Condições de Carathéodory sobre R , então existe uma solução $x(t)$ de A.2 sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \alpha$, $\alpha > 0$.*

Corolário A.0.4. *Sejam $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto de f satisfazendo as Condições de Carathéodory sobre G , então o problema A.2 tem solução para qualquer $(x_0, t_0) \in G$.*

Seja $\varphi(t)$ uma solução de (A.1) sobre I e $I \subset I_1$. Diz-se que $\varphi(t)$ tem um **prolongamento** até I_1 , se existe $\varphi_1(t)$ solução de (A.1) sobre I_1 e $\varphi_1(t) = \varphi(t)$, $\forall t \in I$.

Teorema A.0.5. (Prolongamento) *Sejam $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto e limitado e $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as duas primeiras Condições de Carathéodory sobre G e existe uma função integrável $m(t)$ tal que*

$|f(x, t)| \leq m(t), \forall (x, t) \in G$. Seja φ uma solução da equação (A.1) sobre o intervalo $]a, b[$, então

1. *existem $\varphi(a_+), \varphi(b_-)$,*
2. *se $(\varphi(b_-), b) \in G$, então φ pode ser prolongado até $]a, b + \delta[$ para algum $\delta > 0$.*

Resultado análogo para a

3. *$\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\varphi(\gamma_+), \gamma), (\varphi(\omega_-), \omega) \in \partial G$ (∂G é a fronteira de G)*

Corolário A.0.6. *Sejam $G = U \times [0, T]$, $T > 0$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições do teorema A.0.5. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, |x_0| \leq b. \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

Suponhamos que qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida tem-se $|\varphi(t)| \leq M, \forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então φ pode ser prolongada até $[0, T]$.

As demonstrações dos teoremas e dos corolários deste Apêndice podem ser encontradas em [?] e [?]

. Voltemos agora ao nosso problema. Como $a > 0$ e $b > 0$, afim de facilitar os cálculos assumiremos $a = b = 1$. Fazendo $v = u = \omega_i$ e substituindo $\phi^m(t)$ e $\psi^m(t)$ em (2.10)₁

temos

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^m (\omega_j(x), \omega_i(x)) g_{tt}^{jm}(t) + \sum_{j=1}^m (\omega_j(x), \omega_i(x)) h_{tt}^{jm}(t) + \sum_{j=1}^m ((\omega_j(x), \omega_i(x))) g^{jm}(t) + \\
 & + \sum_{j=1}^m (\omega_j(x) - \omega_{jx}(x), \omega_j(x) - \omega_{jx}(x)) (g^{jm} + h^{jm})(t) = \sum_{j=1}^m (f(t) + g(t), \omega_i(x)) \\
 & g^{jm}(0) = \tau_j, g_t^{jm} = \beta_j \\
 & h^{jm}(0) = \alpha_j, h_t^{jm}(0) = \theta_j
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Considere as seguintes matrizes

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1_m \end{bmatrix}_{m \times m} \quad e \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1_m \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}_{2m \times 2m} \quad \mathbf{B}_1 = [(\omega_j(x) - \omega_{jx}(x), \omega_i(x) - \omega_{jx}(x)) + \mathbb{I}]_{1 \leq i, j \leq m}$$

onde $\mathbb{I}$ é matriz identidade $m \times m$,

$$\mathbf{B}_2 = [(\omega_j(x) - \omega_{jx}(x), \omega_i(x) - \omega_{jx}(x))]_{1 \leq i, j \leq m}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}_{2m \times 2m}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} g^{1m}(t) \\ g^{2m}(t) \\ \vdots \\ g^{mm}(t) \\ h^{1m}(t) \\ h^{2m}(t) \\ \vdots \\ h^{mm}(t) \end{bmatrix}_{2m \times 1} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} (f(t) + g(t), \omega_1) \\ (f(t) + g(t), \omega_2) \\ \vdots \\ (f(t) + g(t), \omega_m) \\ (f(t) + g(t), \omega_1) \\ (f(t) + g(t), \omega_2) \\ \vdots \\ (f(t) + g(t), \omega_m) \end{bmatrix}_{2m \times 1} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_m \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}_{2m \times 1} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix}_{2m \times 1}$$

Assim em termos das matrizes acima o sistema (A.4) pode escrito como

$$\left| \begin{array}{l} AX_{tt} + BX = C \\ X(0) = X_0, X_t(0) = X_1. \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

Como o $\text{Det}A \neq 0$. Assim A é inversível. Portanto, Multiplicando (A.5) por A^{-1} a esquerda, temos

$$\left| \begin{array}{l} X_{tt} = -A^{-1}BX + A^{-1}C \\ X(0) = X_0, X_t(0) = X_1. \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

Fazendo $Z = X_t$ no sistema (A.6) obtemos

$$\left| \begin{array}{l} Z_t = -A^{-1}BX + A^{-1}C \\ X(0) = X_0, X_t(0) = X_1. \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

Consideremos I a matriz identidade $2m \times 2m$, 0 a matriz nula $2m \times 2m$, $\bar{0}$ a matriz nula $2m \times 1$ e

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix}$$

Obtemos por (A.7)

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}B & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Y} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ A^{-1}C \end{bmatrix} \\ Y(0) = Y_0. \end{array} \right. \quad (\text{A.8})$$

segue de (A.8) que

$$F_1(Y, t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}B & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad F_2(Y, t) = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ A^{-1}C \end{bmatrix}$$

Apartir de (A.8)

$$\left| \begin{array}{l} Y_t = F_1(Y, t) + F_2(Y, t), \\ Y(0) = Y_0. \end{array} \right. \quad (\text{A.9})$$

Agora mostraremos que $F(Y, t) = F_1(Y, t) + F_2(Y, t)$ está nas condições de Carathéodory. Seja $G = U \times [0, T]$, onde $U = \{x \in \mathbb{R}^{4m}; \|Y\|_{\mathbb{R}^{4m}} \leq b\}$. Então

- i) Fixando Y , temos que $F_1(Y, t)$ não depende de t e $F_2(Y, t)$ é mensurável, pois f e $g \in W^{1,1}(0, T; H_0^1(0, 1))$. Logo $F_1(Y, t) + F_2(Y, t)$ é mensurável em t para Y fixo.

- ii) Fixando t $F_2(Y, t)$ não depende de Y , então é constante e, portanto, contínua. A função $F_1(Y, t)$ é contínua em Y , pois é produto de uma matriz de entradas reais pela matriz Y , ou seja, $F_1(Y, t)$ é linear em Y . Então $F(Y, t)$ é contínua.
- iii) Como Y varia em U , então todas as entradas de $F_1(Y, t)$ são limitadas por uma mesma constante. As entradas de $F_2(Y, t)$ são funções integráveis em $[0, T]$, pois as $2m$ primeiras coordenadas são nulas e as $2m$ últimas são, em valor absoluto, iguais a $|(f(t) + g(t), \omega_j)|, j = 1, 2, 3, \dots, m$.

Em particular

$$\begin{aligned} |(f(t), \omega_j)| &= \left| \int_0^1 f(s) \omega_j ds \right| \leq \int_0^1 |f(s), \omega_j| ds \leq \int_0^1 |f(s)| |\omega_j| ds \leq \\ &\frac{1}{2} \int_0^1 |f(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^1 |\omega_j|^2 ds < \infty. \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} |(g(t), \omega_j)| &= \left| \int_0^1 g(s) \omega_j ds \right| \leq \int_0^1 |g(s), \omega_j| ds \leq \int_0^1 |g(s)| |\omega_j| ds \leq \\ &\frac{1}{2} \int_0^1 |g(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^1 |\omega_j|^2 ds < \infty. \end{aligned}$$

Assim $\|F_2(Y, t)\|_{\mathbb{R}^{4m}} \leq \max_{1 \leq j \leq m} |f(t) + g(t), \omega_j| = m_1(t) + m_2(t)$. Logo $\|F(Y, t)\|_{\mathbb{R}^{4m}} \leq M_U(t) = 2m_u + m_1(t) + m_2(t)$, como $M_U(t)$ integrável em $[0, T]$. Assim, pelo Corolário A.0.4, o sistema (A.8) possui solução em $[0, t_m]$, com $t_m < T$.

□