PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Jadevilson Cruz Ribeiro

Atrator global para uma equação de evolução não-linear em domínio não-limitado

São Luís - MA

2014

Jadevilson Cruz Ribeiro

Atrator global para uma equação de evolução não-linear em domínio não-limitado

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Marcos Antônio Ferreira de Araujo**.

São Luís - MA

2014

Jadevilson Cruz Ribeiro

Atrator global para uma equação de evolução não-linear em domínio não-limitado

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Marcos Antônio Ferreira de Araujo**.

Dissertação aprovada em , pela **BANCA EXAMINADORA**:

(Orientador) Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araujo (UFMA)

(Co-Orientador) Dr. Flank David Morais Bezerra (UFPB)

Dra. Renata de Farias Limeira Carvalho (UFMA)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais Sebastião Pires Ribeiro e Florinda Costa Cruz, aos meus irmãos, a Emanuel Bezerra Ribeiro familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Incialmente agradeço aos meus pais, Sebastião Pires Ribeiro e Florinda Costa Cruz (Dona Flora) por todo apoio, compreensão e encorajamento. Aos meus irmãos Jadeilson Cruz Ribeiro, Jadevaldo Cruz Ribeiro, Jadeilton Cruz Ribeiro, Italo Marcelo e Antonio Pereira Cabral. Ao meu filho Emanuel B. Ribeiro e minha amiga, Antonia Ferreira Bezerra. Pelo incentivo e por estarem sempre do meu lado nos momentos difíceis.

Ao professor Marcos Antonio Ferreira de Araujo pela amizade, orientação e principalmente, por toda paciência e disposição que teve, a qual foi essencial para a realização deste trabalho.

Ao professor Flank David Morais Bezerra, a quem serei eternamente grato, pois foi mais que um orientador, foi um amigo, irmão, pai, ou seja, foi o principal responsável por este trabalho acontecer e sempre disponível com toda paciência para tirar as duvidas mais elementares, a qual foi essencial para a realização deste trabalho.

Ao professor Elivaldo Rodriguês Macedo, orientador na minha monografia de graduação e grande amigo. Ao professor Anselmo Baganha Raposo Junior, que sempre ta disposto para tirar dúvidas dos alunos. Ao professor Luis Fernando Coelho de Amaral, o meu orientador por dois anos na graduação no programa PIBID-CAPES.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática-PPGMat e do Departamento de Matemática da UFMA pelo apoio, incentivo e pela contribuição na minha formação acadêmica de forma direta ou indireta.

Aos meus amigos da pós-graduação Leonardo Rogerio, Diego Diniz, Geilson Mendes, Jailson Calado, Paulo Queiroz, Ronaldo Smith, Alberto Leandro, Santana, Launé, Waldir Mendes, Jorge Augusto, Felipe Vaz, Rondinele, Sônia e Walterlino pela amizade pelo incentivo que sempre me deram.

Aos meus amigos da graduação Janilson, Alcino, Jeferson Bruno, Alexandre, José Roberto Damas, Israel Silva e Weberth por terem contribuído de alguma forma para meu crescimento profissional e pessoal, pelo incentivo, encorajamento, companheirismo e amizade que me proporcionaram durante minha vida acadêmica.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho consideramos o seguinte problema de evolução não local

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u\left(x,t\right) + tanh\left(\beta J * u\left(x,t\right) + h\right), t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

onde $u\left(x,t\right)$ é uma função real definida em $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$; $\beta > 1, h > 0$, e $J \in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ é uma função não negativa com integral igual a 1 e com suporte no intervalo $[-1,1]$. O símbolo $*$ denota a operação convolução na variável espacial, isto é,

$$\left(J * u\right)\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}} J\left(x-y\right) u\left(y\right) dy.$$

O principal resultado deste trabalho é a prova da existência do atrator global compacto para o semigrupo não linear gerado por este problema.

Palavras-chave: semigrupos não lineares, atrator global compacto, equação de evolução, espaços de Sobolev com peso.

ABSTRACT

In this work we consider the following the non local evolution problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u\left(x,t\right) + tanh\left(\beta J * u\left(x,t\right) + h\right), t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

where $u\left(x,t\right)$ is a real function defined in $\mathbb{R} \times [0,+\infty)\,;\, \beta > 1, h > 0$, and $J \in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ is a non negative function with unit integral and with support in interval $[-1,1]$. The $*$ product denotes convolution in the spacial variable, i.e.,

$$\left(J * u\right)\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}} J\left(x-y\right) u\left(y\right) dy.$$

The main result these work is the prove of existence of the compact global attractor for the non linear semigroup generated for this problem.

Keywords: non linear semigroup, compact global attractor, evolution equation, weighted spaces.

SUMÁRIO

Page

INTRODUÇÃO

Neste trabalho consideramos o seguinte problema de evolução não local

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u\left(x,t\right) + tanh\left(\beta J * u\left(x,t\right) + h\right), t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

onde $u\left(x,t\right)$ é uma função real definida em $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$; $\beta > 1, h > 0$, e $J \in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ é uma função não negativa com integral igual a 1 e com suporte no intervalo $[-1,1]$. O símbolo $*$ denota a operação convolução na variável espacial, isto é,

$$\left(J * u\right)\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}} J\left(x-y\right) u\left(y\right) dy.$$

A nossa motivação e principal referência para o estudo da dinâmica do problema (1), que nasce em modelos de separação de fases, é o artigo de Pereira [9]. Para maiores detalhes sobre a origem do problema (1), veja [9] e suas referências.

O principal objetivo deste trabalho consiste em mostrar a existência do atrator global compacto para o semigrupo não linear gerado pelo problema (1) num determinado espaços de fases. Para melhor compreensão desta dissertação descreveremos a seguir a estrutura da mesma.

No **capítulo 1** colecionamos alguns resultados de teoria de EDO's em espaços de Banach, teoria da medida e análise funcional.

No **capítulo 2** apresentamos a teoria de atratores globais compactos para semigrupos não lineares. A saber, se (X,d) é um espaço métrico completo e $C(X)$ é o conjunto das aplicações contínuas de X nele mesmo, então um semigrupo não linear (sistema dinâmico autônomo) em X é uma família de aplicações $\{T(t);\ t \geq 0\}$ em $\mathcal{C}(X)$ que verifica as propriedades:

(i) $T(0) = I$, onde I denota o operador identidade em X;

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todos $t,s \geq 0$;

(iii) A aplicação $[0,+\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Um atrator global compacto $A \subset X$ para um semigrupo não linear $\{T(t); t \geq 0\}$ é um conjunto compacto, invariante (isto é $T(t)A = A$ para todo $t \geq 0$) e que possui a propiedade de atrair conjuntos limitados de X, isto é, se $B \subset X$ é limitado então

$$\lim_{t \to +\infty} dist(T(t)B, A) = 0,$$

onde

$$dist(X_1, X_2) = \sup_{x_1 \in X_1} \inf_{x_2 \in X_2} d(x_1, x_2), \text{para todos } X_1, X_2 \subset X.$$

Iniciamos o **capítulo 3** provando a boa colocação global do problema (1), no espaço $L^2(\mathbb{R}, \rho)$, onde

$$L^2(\mathbb{R}, \rho) = \left\{ u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 \rho(x) dx < \infty \right\}$$

munido com a norma

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aqui, a função ρ é integrável e não negativa de tal forma que as funções constantes estão inclusas neste espaço. Neste espaço, a solução global do problema (1) com dado inicial $u_0 \in L^2(\mathbb{R}, \rho)$ é dada por

$$u(x,t) = u(x,t)e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} tanh \left\{ \beta J * u(x,s) + h \right\} ds.$$

Em seguida,provamos que, $B(0, 1+\epsilon)$, a bola centrada na origem de raio $1+\epsilon$, seja qual for $\epsilon > 0$, em $L^2(\mathbb{R}, \rho)$, é um conjunto absorvente para o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$, isto é, se $B \subset L^2(\mathbb{R}, \rho)$ é um conjunto limitado então existe $t_B > 0$ tal que $T(t)B \subset B(0, 1+\epsilon)$ para todo $t \geq t_B$.

Finalmente, provamos que o conjunto $\omega - limite$ $\omega(B(0, 1+\epsilon))$ é o atrator global para o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ em $L^2(\mathbb{R}, \rho)$, onde o conjunto $\omega-$limite subconjunto $B(0, 1+\epsilon)$ de $L^2(\mathbb{R}, \rho)$, é caracterizado por

$\omega(B(0,1+\epsilon)) = \{y \in L^2(\mathbb{R}, \rho);$ existem seqüências $\{t_n\}$ em $[0, +\infty)$, $t_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$, e $\{x_n\}$ em $B(0, 1+\epsilon)$, com $y = \lim_{n \to \infty} T(t_n) x_n\}$.

Capítulo 1

ALGUNS RESULTADOS CLÁSSICOS DA LITERATURA

Neste capítulo introduziremos alguns resultados clássicos sobre convolução de funções, teoria da medida, EDO's em espaços de Banach e análise funcional.

1.1 Convolução de funções

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de convoluções de funções. Para maiores informações consulte [4].

Definição 1.1.1. Seja f e g duas funções reais, definimos o produto convolução entre f e g pela expressão

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

para os pontos x tais que a integral exista, isto é, a função $y \in \mathbb{R} \longmapsto f(x-y)g(y)$ seja integrável.

Proposição 1.1.2. *O produto convolução goza das seguites propiedades:*

(i) $f * g = g * f$;

(ii) $f * (g + \gamma) = f * g + f * \gamma$;

(iii) $(f * g) * \gamma = f * (g * \gamma)$;

(iii) *Se A é o fecho do conjunto $\{x + y; x \in suppf, y \in suppg\}$, então $supp\,(f * g) \subset A$.*

Demonstração. Ver [4]. □

Teorema 1.1.3. *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $D_x g$ for limitada, então $f * g \in C^1(\mathbb{R})$ e $D_x(f * g) = f * (D_x g)$*

Demonstração. Ver [4]. □

Corolário 1.1.4. *Sejam f e g duas funções de classe $C^1(\mathbb{R})$ com f e $g \in L^1(\mathbb{R})$ com $D_x f$ e $D_x g$ limitadas. Então*

$$D_x(f * g) = (D_x f) * g = (D_x g) * f.$$

Demonstração. Ver [4].. □

Teorema 1.1.5. *(Desigualdade de Young Generalizada) Sejam $X = \mathbb{R}^n$, $C > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$. Suponha g uma função contínua em $X \times X$ tal que*

$$\sup_{x \in X} c_X \left| g(x,y) \right| dy \leq C, \sup_{y \in X} \left| g(x,y) \right| dx \leq C$$

Se $f \in L^p(X)$, a função (Tf) definida por

$$(Tf)(x) = \int_X g(x,y) f(y) dy$$

está bem definida q.t.p., $Tf \in L^p(X)$ e $\|Tf\|_p \leq \|f\|_p$.

Demonstração. Ver [4]. □

Teorema 1.1.6. *(Desigualdade de Young) Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, e $g \in L^p(\mathbb{R})$, então a função $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ e*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p .$$

Demonstração. Ver [4]. □

1.2 Teorema de existência e unicidade em espaços de Banach

Nesta seção usaremos alguns resultados de E.D.O em espaços de Banach.

Considere, em um espaço de Banach X, a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1.1}$$

sendo

$$\begin{array}{rcl} f : I \times X & \rightarrow & X \\ (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array}$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ representa um intervalo e $\dot{x}$ denota a derivada de x em relação a variável t.

Uma função continuamente diferenciável $\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita ser uma solução de (2.13) no intervalo I se:

(i) o gráfico de ϕ em I, isto é, $(t, \phi(t)); t \in I$ está contido no domínio de f

(ii) $\frac{d}{dt}\phi(t) = f(t, \phi(t))$ para todo $t \in I$.

O problema de Cauchy para (2.13) com condições iniciais (t_0, x_0) é denotado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0, \quad (t_0, x_0) \in I \times X \end{cases} \tag{1.2}$$

Lema 1.2.1. *O problema* (2.14) *é equivalente à equação integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{1.3}$$

Demonstração. De fato, integrando de t_0 a t ambos os lados de (2.14), temos

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Portanto,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Reciprocamente, derivando (2.15) temos

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}x(t_0) + \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Logo,

$$\dot{x} = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0$$

□

Teorema 1.2.2. *(Existência Local) Sejam X um espaço de Banach,$\delta > 0$ e $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Suponha que numa vizinhaça do ponto (t_0, x_0) a função*

$$\begin{aligned} f : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times X &\to X \\ (t, x) &\mapsto f(t, x), \end{aligned}$$

é contínua em t e satisfaça a condição de Lipschitz na segunda variável, isto é, existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq M \|x - y\|, \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \forall x, y \in X. \tag{1.4}$$

Então existe uma vizinhança de t_0 tal que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

tem uma única solução

Demonstração. Ver [8] □

Teorema 1.2.3. *(Existência Global) Suponha que exista um domínio $[a,b] \times X$ em que a função f é contínua em t e satisfaz a condição de Lipschitz na segunda variável. Então para todo $(t_0, x_0) \in [a,b] \times X$, o problema de Cauchy (2.17) possui uma única solução $\phi : [a,b] \to X$ tal que $x = \phi(t)$*

Demonstração. Ver [6] □

Teorema 1.2.4. *(Cauchy, Lipschitz, Picard) Sejam X um espaço de Banach e $F : X \to X$ uma aplicação tal que*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in X (L \in \mathbb{R}_+).$$

Então para todo $x_0 \in X$, existe $x \in C^1([0,\infty], X)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Demonstração. Ver [6] □

1.3 Alguns resultados de análise funcional e teoria da medida

Nesta seção introduziremos alguns resultado de análise funcional, os quais usamos ao longo dessa dissertação.

Definição 1.3.1. Um espaço normado E é chamado espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Teorema 1.3.2. *(Desigualdade de Hölder para integrais) Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ e $g \in \mathcal{L}_q(X, \Sigma, \mu)$, então $fg \in \mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q .$$

Demonstração. Ver [6] $\square$

Teorema 1.3.3. *(Desigualdade de Minkowski para integrais) Sejam $1 \leq p < +\infty$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f, g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$, então $f + g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q .$$

Demonstração. Ver [6] $\square$

Teorema 1.3.4. *(Fubini) Para toda função contínua $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, vale*

$$\int_a^b \int_c^d f(s,t)dtds = \int_c^d \int_a^b f(s,t)dsdt$$

Demonstração. Ver [7] $\square$

Lema 1.3.5. *(Gronwall) Seja u, v funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que, para $\alpha \geq 0$, satisfazem a*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds, \;\; t \in [a, b].$$

Então

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Em particular, se $\alpha = 0$ então $u \equiv 0$.

Demonstração. ver [10] $\square$

Lema 1.3.6. *(Gronwall Generalizada) Se u, α são funções contínuas para $a \leq t \leq b$, $v(t) \geq o$ integrável em $[a, b]$ e*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t v(s)u(s)ds, \;\; a \leq t \leq b,$$

Então

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t v(s)\alpha(s) \left(exp \int_s^t v(u)du \right) ds, \ \ a \leq t \leq b.$$

Demonstração. ver [5] □

Teorema 1.3.7. *(Regra de Leibniz) Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, seja $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$, uma função com as seguintes propiedades:*
(i) *Para todo $x \in U$, a função $t \longmapsto f(t,x)$ é integrável em $a \leq t \leq b$.*
(ii) *A i-ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ existe para cada $(x,t) \in U \times [a,b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: $U \times [a,b] \to \mathbb{R}$, assim definida, é contínua.*
Então a função $\varphi : U \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \int f(x,t)dt$, possui -ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt.$$

Em suma: pode-se derivar sob o sinal da integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

Demonstração. Ver [7] □

Definição 1.3.8. Sejam E e F espaços de Banach, B um subconjunto limitado de E e $\epsilon > 0$. Uma cobertura $\{V_i\}$ de B é uma $\epsilon -$ cobertura se $\text{diam}(V_i) \leq \epsilon$ para todo i. A medida de não-compacidade de B é definida por:

$$\psi_E(B) = \inf \{\epsilon > 0; \text{existe uma } \epsilon - \text{cobertura finita de } B\}.$$

Uma cobertura $\{B_i\}$ de B por bolas de raio $\leq \epsilon$ chamamos de uma $\epsilon -$ cobertura restrita de B. Assim a medida restrita de não-compacidade é definida por:

$$\overline{\psi}_E(B) = \inf \{\epsilon > 0; \text{existe uma } \epsilon - \text{cobertura restrita finita de } B\}.$$

Seja $T \in \mathcal{L}(E,F)$ a familia de todas aplicações lineares limitadas de E em F. E seja $k \in \mathbb{R}$ e $k \geq 0$.

Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é chamado de $k-$contração se

$$\psi_F(T(B)) \leq k\psi_E(B)$$

para todo conjunto limitado $B \subset E$.

A medida de não- compacidade $\beta(T)$ de T é definida por

$$\beta(T) = \min\{k; T \text{ é uma } k-\text{contração}\}.$$

Da mesma maneira definimos $k-$contração restrita e a medida de não compacidade restrita $\overline{\beta}$ nãode T usando as medidas restritas de não-compacidades $\overline{\psi}_E$ e $\overline{\psi}_F$.

As proposições a seguir apresentam várias propiedades de não compacidade

Proposição 1.3.9. *Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço de Banach E, então :*
(i) *$\psi_E(A) = 0$ se e somente se $\overline{A}$ é compacto, onde $\overline{A}$ é o fecho de A.*
(ii) *$\psi_E(A) = \psi_E(\overline{A})$;*
(iii) *$\psi_E(\lambda A) = |\lambda|\, \psi_E(\lambda A)$.*
(iv) *$\psi_E(A) \leq \psi_E(B)$ se $A \subset B$.*
(v) *$\psi_E(A+B) \leq \psi_E(A) + \psi_E(B)$.*
(vi) *$\overline{\psi}_E(A) \leq \psi_E(A) \leq 2\overline{\psi}_E(A)$.*
(vii) *Se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, então $\overline{\psi}_E(U_E) = 1$, onde U_E é a bola unitaria de E.*

*As propiedades **(i)** $-$ **(v)** também valem para a medida $\overline{\psi}_E$.*

Demonstração. Ver [3] □

Proposição 1.3.10. *Sejam $E,\ F$ espaços de Banach e $T,\ T_1,\ T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, então :*
(i) *T é compacto se e somente se $\beta(T) = 0$.*
(ii) *$\beta(T) \leq \|T\|$.*
(iii) *$\beta(T_1 + T_2) \leq \beta(T_1) + \beta(T_2)$.*
(iv) *$\overline{\beta}(T) \leq \overline{\psi}_F(T(U_E))$, onde U_E é a bola unitária de E.*
(v) *$\frac{1}{2}\beta(T) \leq \overline{\beta}(T) \leq 2\beta(T)$.*

Demonstração. Ver [3] □

Capítulo 2

ATRATORES GLOBAIS PARA SEMIGRUPOS NÃO LINEARES

Apresentaremos neste capítulo alguns resultados da teoria de atratores globais para semigrupos não lineares em espaços métricos completos. Para maiores detalhes veja [2] e [9] e suas referências. Em todo este capítulo (X, d) denota um espaço métrico completo e $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das aplicações contínuas de X nele mesmo.

Definição 2.0.11. Um semigrupo não linear em X é uma família de aplicações $\{T(t);\ t \geq 0\}$ em $\mathcal{C}(X)$ que verifica as propriedades:
(i) $T(0) = I$, onde I denota o operador identidade em X;
(ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$ para todos $t, s \geq 0$;
(iii) A aplicação $[0, +\infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

No caso em que X é um espaço de Banach e $T(t)$ é linear, diz-se que $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é um *semigrupo linear fortemente contínuo* em $\mathcal{L}(X)$. Aqui, $\mathcal{L}(X)$ denota o conjunto dos operadores lineares limitados de X em si próprio com a topologia uniforme dos operadores. Se este é o caso, temos uma vasta literatura, sugerimos [1].

Definição 2.0.12. Por um ponto x em X, define-se a *órbita positiva* $\gamma^+(x)$ por x como sendo $\gamma^+(x) := \{T(t)x;\ t \geq 0\}$. Além disso, para $s > 0$ denotaremos $\gamma_s^+(x) := \{T(t)x;\ t \geq s\}$ a órbita positiva por x no instante s.

Uma *solução para trás por* $x \in X$ é uma aplicação contínua $\phi : (-\infty, 0] \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $t \leq 0$ vale $T(s)\phi(t) = \phi(s + t)$ para todo $0 \leq s \leq -t$. Uma *solução global por* $x \in X$ é uma aplicação contínua $\phi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, $T(s)\phi(t) = \phi(s + t)$ para todo $s \geq 0$.

Caso X seja um espaço de Banach de dimensão infinita, *soluções para trás* ou *globais*, em geral, não existem e sua existência está condicionada à escolha de x. Além disso, quando uma *solução para trás* existe, ela pode não ser única, isto ocorre, pois $T(t)$ não é necessariamente injetivo para todo $t > 0$.

Definição 2.0.13. Se existir uma solução para trás por $x \in X$, então definimos a *órbita negativa* por x como sendo

$$\gamma^{-}(x) := \bigcup_{t \geq 0} H(t, x),$$

onde

$H(t, x) = \{y \in X;$ existe uma solução para trás por x, definida por $\phi : (-\infty, 0] \to X$ com $\phi(0) = x$ e $\phi(-t) = y\}$.

Além disso, para $s > 0$ denotaremos $\gamma_s^{-}(x) := \bigcup_{t \geq s} H(t, x)$ a órbita negativa por x no instante s.

Definição 2.0.14. A *órbita completa* por x (se existir órbita negativa por x) é definida por $\gamma(x) := \gamma^{+}(x) \cup \gamma^{-}(x)$.

Para um subconjunto B de X, definamos as órbitas positiva, negativa e completa por B (se existir a órbita negativa para cada $x \in B$), respectivamente, como sendo

$$\gamma^{+}(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma^{+}(x), \quad \gamma^{-}(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma^{-}(x) \;\text{ e }\; \gamma(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma(x).$$

Fixado $s > 0$, também usaremos as notações

$$\gamma_s^{+}(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma_s^{+}(x) \;\text{ e }\; \gamma_s^{-}(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma_s^{-}(x).$$

Definição 2.0.15. Um semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é dito limitado, se $\gamma^{+}(B)$ for limitada sempre que B for um subconjunto limitado de X.

Definição 2.0.16. Seja B um subconjunto de X. Definimos os conjuntos $\omega-$*limite* e $\alpha-$*limite* de B, respectivamente, como sendo

$$\omega(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^{+}(B)}^{1} \;\text{ e }\; \alpha(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^{-}(B)}.$$

Em particular, os conjuntos $\omega-$*limite* e $\alpha-$*limite* de um ponto $x \in X$, respectivamente, são dados por

$$\omega(x) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^{+}(x)} \;\text{ e }\; \alpha(x) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^{-}(x)}.$$

[1] Se Ω é um subconjunto de X, então $\overline{\Omega}$ denota o seu fecho em X.

Vale notar a seguinte caracterização do conjunto $\omega-$limite de um subconjunto B de X, $\omega(B) = \{y \in X;$ existem seqüências $\{t_n\}$ em $[0, +\infty)$, $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ e $\{x_n\}$ em B, com $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n\}$.

Agora, definamos as noções de atração, absorção e invariância sob a ação de um semigrupo. Para isto, recordemos a definição da *semidistância de Hausdorff*, $\text{dist}(A, B)$, entre dois subconjuntos limitados A e B de X. A saber

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x, y).$$

Lema 2.0.17. *Sejam A e B subconjuntos de X. Então*

$$dist(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que

$$dist(A, B) = 0,$$

isto é,

$$\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b) = 0$$

logo

$$\inf_{b\in B} d(a, b) = 0, \forall\ a \in A$$

Então existe (b_n) em B tal que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} d(a, b_n) &= \inf_{b\in B} d(a, b) \\ &= 0\ \forall\ a \in A \end{aligned}$$

e portanto a sequência converge para a, isto é, $a \in \overline{B}$, para todo $a \in A$. Em outras palavras $A \subset \overline{B}$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $A \subset \overline{B}$, vamos calcular $dist(A, B)$.

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b).$$

Mas, $A \subset \overline{B}$, e assim

$$\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b) \leq \sup_{a\in \overline{B}} \inf_{b\in B} d(a, b),$$

onde

$$\inf_{b\in B} d(a, b) = 0,\ \forall\ a \in \overline{B},$$

pois para cada $a \in \overline{B}$ existe (b_n) em B que converge prara a e

$$\begin{aligned}\inf_{b\in B} d(a,b) &= \inf_{b\in B}\lim_{n\to+\infty} d(b_n,b)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\inf_{b\in B} d(b_n,b)\\ &= \lim_{n\to+\infty} 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$0 \le \operatorname{dist}(A,B) \le \operatorname{dist}(\overline{B},B) = 0$$

então $\operatorname{dist}(A,B) = 0$. Como queríamos demonstrar.

□

A função $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ não é simétrica e a igualdade $\operatorname{dist}(A,B) = 0$ não implica que $A = B$. A *distância simétrica de Hausdorff* , $\operatorname{dist}_H(A,B)$, entre dois subconjuntos limitados A e B de X é definida por

$$\operatorname{dist}_H(A,B) := \operatorname{dist}(A,B) + \operatorname{dist}(B,A).$$

Definição 2.0.18. Sejam A e B subconjuntos de X. Diremos que A atrai B sob o semigrupo $\{T(t);\ t \ge 0\}$ quando

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(T(t)B, A) = 0.$$

Ou equivalentemente, para cada $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon, B) > 0$ tal que $T(t)B$ está contido em $\mathcal{O}_\epsilon(A) := \cup_{x\in A}\{z \in X;\ d(z,x) < \epsilon\}$ para todo $t \ge T$.

Se existir um $t_0 \ge 0$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \ge t_0$, então diremos que A absorve B sob o semigrupo. Em particular, se A absorve B, então A atrai B.

Definição 2.0.19. Diremos que um subconjunto A de X é invariante (*ou positivamente invariante ou negativamente invariante*) com relação ao semigrupo $\{T(t);\ t \ge 0\}$ quando para qualquer $x \in A$, existir uma órbita completa $\gamma(x)$ por x tal que $\gamma(x) \subset A$ (ou tal que $\gamma^+(x) \subset A$ ou tal que $\gamma^-(x) \subset A$).

Um subconjunto A de X é *invariante* sob o semigrupo $\{T(t);\ t \ge 0\}$ se, e somente se, $T(t)A = A$ para todo $t \ge 0$.

Os conjuntos ω e $\alpha-$limites de um subconjunto de X são invariantes.

Definição 2.0.20. Um equilíbrio (ponto de equilíbrio) para o semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é um ponto $x^* \in X$ tal que $T(t)x^* = x^*$ para todo $t \geq 0$. A aplicação $t \in \mathbb{R} \mapsto x^* \in X$ é dita uma solução estacionária ou solução de equilíbrio para o semigrupo.

Lema 2.0.21. *Sejam K um subconjunto compacto de X e $\{x_n\}$ uma seqüência em X com $\lim_{n\to\infty} d(x_n, K) = 0$. Então, $\{x_n\}$ possui uma subseqüência convergente para algum ponto de K. Se um conjunto compacto K atrai um conjunto compacto K_1 sob o semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$, então $\overline{\gamma^+(K_1)}$ é compacto e $\emptyset \neq \omega(K_1) \subset K$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, vale $d(x_n, K) = d(x_n, c_n)$ para algum $c_n \in K$. Existe uma subseqüência $\{c_{n_j}\} \subset \{c_n\}$ com $c_0 = \lim_{j\to\infty} c_{n_j}$, para algum $c_0 \in K$. Além disso, $\lim_{j\to\infty} d(x_{n_j}, K) = 0$, onde

$$d(x_{n_j}, K) = d(x_{n_j}, c_{n_j}) \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = c_0$, pois para todo $j \in \mathbb{N}$, vale

$$d(x_{n_j}, c_0) \leq d(x_{n_j}, c_{n_j}) + d(c_{n_j}, c_0) = d(x_{n_j}, K) + d(c_{n_j}, c_0).$$

Quanto a segunda afirmação, tome $\{y_n\} \subset \gamma^+(K_1)$, onde $y_n = T(t_n)x_n$, $x_n \in K_1$. Pela compacidade de K_1, existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$, com $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x$, $x \in K_1$. Se existir $\{t_{n_j}\} \subset \{t_n\}$, com $\lim_{j\to\infty} t_{n_j} = t$, então $\lim_{j\to\infty} T(t_{n_j})y = T(t)x$ para todo $y \in X$, o que implica, que $y_{n_j} = T(t_{n_j})x_{n_j}$ converge para $T(t)x$ quando j tende ao infinito. Por outro lado, se $t_n \to \infty$, então usamos a primeira afirmação e concluímos que toda seqüência em $\gamma^+(K_1)$ possui uma subseqüência convergente.

A compacidade de $\overline{\gamma^+(K_1)}$ implica que $\omega(K_1)$ é não vazio. Além disso, seja $x \in \omega(K_1)$, então existem $\{t_n\}$, com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $\{x_n\}$ em K_1 tal que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Como K_1 é atraído por K e

$$d(x, K) \leq d(x, T(t_n)x_n) + d(T(t_n)x_n, K) \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

concluímos que $x \in K$. $\square$

Lema 2.0.22. *Seja B um subconjunto de X tal que $\omega(B)$ seja compacto e $\omega(B)$ atrai B, então $\omega(B)$ é invariante. Além disso, se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração. Caso $\omega(B) \neq \emptyset$, da continuidade de $T(t)$ e a da caracterização apresentada ao conjunto $\omega-$limite, temos $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$. Resta-nos observar que $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$. Seja $x \in \omega(B)$, então existem seqüências $\{t_n\}$ em $[0, +\infty)$ e $\{x_n\}$ em B tal que $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Ora, como $t_n \to \infty$, para cada $t > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n > n_0$. Com isso, para $n > n_0$ $x = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} T(t)T(t_n - t)x_n$ e pela atração de B pelo compacto $\omega(B)$, o Lema 2.0.21 assegura que $T(t_n - t)x_n$ admite uma subseqüência convergente (ainda denotada por $T(t_n - t)x_n$), isto é, existe $y \in \omega(B)$ tal que $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n - t)x_n$, o que implica, $x = T(t)y$, isto é, $x \in T(t)\omega(B)$.

Agora, suponhamos que B seja conexo. Se $\omega(B)$ fosse desconexo, então poderíamos escrever $\omega(B)$ como a união de dois compactos disjuntos. Sejam K_1 e K_2 compactos, não vazios e disjuntos tais que $\omega(B) = K_1 \cup K_2$. Como $\omega(B)$ atrai B, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $M > 0$ tal que

$$T(t)B \subset \mathcal{O}_\epsilon(\omega(B)) \ \text{ para todo } \ t \geq M.$$

Uma vez que, $\mathcal{O}_\epsilon(\omega(B)) = \mathcal{O}_\epsilon(K_1) \cup \mathcal{O}_\epsilon(K_2)$ com $\mathcal{O}_\epsilon(K_1) \cap \mathcal{O}_\epsilon(K_2) = \emptyset$, temos $T(t)B \subset \mathcal{O}_\epsilon(K_i)$ para algum $i \in \{1,2\}$ para todo $t \geq M$. Ora, como $\omega(B) = \cap_{s\geq 0}\overline{\gamma_s^+(B)} \subset \overline{\gamma_M^+(B)}$, concluímos que $\omega(B) \subset \mathcal{O}_\epsilon(K_i)$. Logo, $\omega(B) \subset K_i$, ou seja, K_j ($j \neq i$ em $\{1,2\}$) é vazio. $\square$

Lema 2.0.23. *Se B é um subconjunto não vazio de X tal que $\overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ é compacto para algum $s_0 \geq 0$, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B.*

Demonstração. A família $\{\overline{\gamma_s^+(B)};\ s \geq s_0\}$ é formada por conjuntos compactos, não vazios e verifica a propriedade da interseção finita, então $\omega(B)$ é não vazio e compacto. Suponha que $\omega(B)$ não atraia B, então existem $\epsilon > 0$ e seqüências $\{x_n\}$ em B e $t_n \to \infty$ tais que

$$d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n;\ n \geq n_1\} \subset \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subseqüências $\{t_{n_j}\} \subset \{t_n\}$ e $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j}$ converge para algum $y \in \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$. Veja que $y \in \omega(B)$. Logo, existe $j_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(T(t_{n_j})x_{n_j}, \omega(B)) < \epsilon \ \text{ para todo } \ j \geq j_\epsilon,$$

o que é absurdo. □

Definição 2.0.24. Um semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é dito assintoticamente compacto, se para cada fechado, limitado e não vazio $B \subset X$ com $T(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $K = K(B) \subset B$ que atrai B.

Lema 2.0.25. *Sejam $\{T(t);\ t \geq 0\}$ assintoticamente compacto e B um subconjunto de X não vazio tal que $\gamma^+_{s_0}(B)$ é limitada para algum $s_0 > 0$. Então, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B.*

Demonstração. Como $T(t)\gamma^+_{s_0}(B) \subset \gamma^+_{s_0}(B)$ para todo $t \geq 0$, da continuidade de $T(t) : X \to X$, temos $\omega(B) \subset \overline{T(t)\gamma^+_{s_0}(B)} \subset \overline{\gamma^+_{s_0}(B)}$. Como $T(t)$ é assintoticamente compacto, existe um compacto $K \subset \overline{\gamma^+_{s_0}(B)}$ que atrai $\overline{\gamma^+_{s_0}(B)}$, *a fortiori*, atrai $\gamma^+_{s_0}(B)$. Portanto, existem seqüências $\epsilon_n \to 0$ e $t_n \to \infty$ tais que $\overline{T(t)\gamma^+_{s_0}(B)} \subset \mathcal{O}_{\epsilon_n}(K)$ para todo $t \geq t_n$. Assim, $\omega(B) \subset K$. Como $\omega(B)$ é fechado e K é compacto, temos a compacidade de $\omega(B)$.

Suponha que $\omega(B)$ não atraia B, então existem $\epsilon > 0$ e seqüências $\{x_n\}$ em B e $t_n \to \infty$ tais que $\mathrm{dist}(T(t_n), \omega(B)) > \epsilon$. Segue da compacidade de K e do Lema 2.0.21 que existem subseqüências $\{x_{n_j}\}$ e $t_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} z \in \omega(B)$, o que é uma contradição. Por conseguinte, $\omega(B)$ é não vazio, compacto e atrai B, e usando o Lema 2.0.22 concluímos a invariância. □

Definição 2.0.26. Um semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é dito condicionalmente eventualmente compacto, se para qualquer conjunto limitado B em X tal que $T(t)B$ é limitado para algum $t \geq 0$, temos $\overline{T(t)B}$ compacto. Um semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é dito eventualmente compacto se ele é condicionalmente eventualmente compacto e para cada conjunto limitado B em X, existe $t \geq 0$ tal que $T(t)B$ é um conjunto limitado.

Teorema 2.0.27. *Todo semigrupo condicionalmente eventualmente compacto é assintoticamente compacto.*

Demonstração. Seja $B \subset X$ um subconjunto não vazio, fechado e limitado tal que $T(t)B \subset B$. Como $\{T(t);\ t \geq 0\}$ condicionalmente eventualmente compacto, temos $\overline{\gamma^+_s(B)}$ compacto para todo $s \geq 0$. Assim, segue do Lema 2.0.23 que $\omega(B) \subset B$ é não vazio, compacto e atrai B. $\square$

Definição 2.0.28. Um semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é dito ponto dissipativo (*limitado dissipativo, compacto dissipativo, localmente compacto dissipativo*) se existe um subconjunto limitado B em X que atrai pontos (*subconjuntos limitados, conjuntos compactos, vizinhanas de conjuntos compactos*) de X.

Definição 2.0.29. Seja $\{T(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo. Um subconjunto $\mathcal{B}$ de X é dito um atratente para o semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$, se ele atrai subconjuntos limitados de X.

Definição 2.0.30. Seja $\{T(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo. Um subconjunto $\mathcal{B}$ de X é dito um absorvente para o semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$, se ele absorve subconjuntos limitados de X.

Note que todo conjunto absorvente é um conjunto atraente, mas a reciproca é falsa.

Definição 2.0.31. Seja $\{T(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo. Um subconjunto $\mathcal{A}$ de X é dito um atrator global para o semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$, se ele é compacto, invariante, e atrai subconjuntos limitados de X.

Um atrator global se encontra dentro de um conjunto atraente B, e em geral, é muito menor que B e descreve o comportamento assintótico das soluções de uma maneira mais precisa. Um atrator $\mathcal{A}$ para $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é o *conjunto maximal limitado invariante* para $\{T(t);\ t \geq 0\}$, isto significa que, se C é limitado e $T(t)C = C$ para todo $t \geq 0$ então $C \subset \mathcal{A}$, isto implica em particular que o atrator global para $\{T(t);\ t \geq 0\}$ se existir é único.

A compacidade implica que o atrator é um subconjunto topologicamente pequeno de X. A propriedade de atrair subconjuntos limitados significa que todo o comportamento assintótico do sistema acontece perto de $\mathcal{A}$ e não só dentro de B como na propriedade de atração. Finalmente a invariância é determinante, já que diz que toda a dinâmica sobre o atrator $\mathcal{A}$ é invariante, isto é, $\mathcal{A}$ trabalha como um objeto dinâmico independente.

Seja $\{T(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo. Suponha que $\{T(t);\ t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$. Segue da definição de atrator que através de cada ponto $x \in \mathcal{A}$ existe uma solução global limitada $\phi_x : \mathbb{R} \to X$. Reciprocamente, toda solução global limitada para o semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ possui seu traço contido no atrator global $\mathcal{A}$ para o semigrupo. Tendo dito isto, concluímos que

$$\mathcal{A} = \{x \in X;\ \text{existe uma solução global limitada por } x\},$$

por exemplo, os pontos de equílibrios para um semigrupo sempre pertencem ao atrator global se este existe.

Lema 2.0.32. *Seja $\{T(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Suponha que para cada subconjunto compacto B de X existe um $s_B \geq 0$ tal que $\gamma^+_{s_B}(B)$ é limitado. Então, o semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é compacto dissipativo.*

Demonstração. Como $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto B não vazio, fechado e limitado que absorve pontos de X. Seja $U = \{x \in B;\ \gamma^+(x) \subset B\}$. Como U absorve pontos, temos U não vazio. Claramente, $\gamma^+(U) \subset U$, e portanto, é limitado e absorve pontos.

Também, sabemos que $T(t)\overline{\gamma^+(U)} \subset \overline{\gamma^+(U)}$ e que $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto. Portanto, existe um conjunto compacto K, com $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$, tal que K atrai U, e portanto, K atrai pontos de X. O conjunto K atrai a si próprio (pois ele atrai $\overline{U}$ e $K \subset U$), e portanto, segue do Lema 2.0.21 que $\overline{\gamma^+(K)}$ é compacto e $\emptyset \neq \omega(K) \subset K$. O Lema 2.0.23 implica que $\omega(K)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai K. Portanto, $\omega(K)$ atrai K que atrai pontos de X, e por conseguinte, $\omega(K)$ atrai pontos de X.

No que segue, mostraremos que existe uma vizinhança V de $\omega(K)$ tal que $\gamma^+_s(V)$ é limitado para algum $s \geq 0$. Se este não é o caso, existem seqüências $\{x_n\} \subset X$, com $x_n \to y$, onde $y \in \omega(K)$ e $t_n \to \infty$ tais que $\{T(t_n)x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ é não limitado. Considere $A = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, portanto $\overline{A}$ é compacto e $\gamma^+_s(A)$ é não limitado para cada $s \geq 0$. Isto contradiz a hipótese de que existe um t_A tal que $\gamma_{t_A}(A)$ é limitado.

Sejam V uma vizinhança de $\omega(K)$ e $t_V \in \mathbb{R}$ tais que $\gamma^+_{t_V}(V)$ é limitado. Como $\omega(K)$ atrai pontos de X e $T(t)$ é contínua, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $s_x > 0$ tais que $T(t)\mathcal{O}_x \subset \gamma^+_{t_V}(V)$ para $s > s_x$, isto é, $\gamma^+_{t_V}(V)$ absorve uma vizinhança de x para todo $x \in X$. Com isso, segue que $\gamma^+_{t_V}(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e que $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é dissipativo compacto. □

Lema 2.0.33. *Sejam $\{T(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo em X e K subconjunto compacto de X. Se K atrai a si próprio sob o semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$, então $\omega(K) = \cap_{t \geq 0} T(t)K$.*

Demonstração. Seja $y \in \cap_{t \geq 0} T(t)K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $t_n > n$ tal que $y \in T(t_n)K$. Logo, existe $x_n \in K$ tal que $y = T(t_n)x_n$. Com esta escolha, temos $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}$ em K tal que $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$, ou seja, $y \in \omega(K)$. Por outro lado, sejam $y \in \omega(K)$ e $t \geq 0$, então existem seqüências $\{x_n\}$ em B e $t_n \to \infty$ tais que $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Pela compacidade de K, existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$, com $x_{n_j} \to x$, $x \in K$. Com isso, temos $T(t_{n_j})x \to T(t)x$, e usando o fato de que

$$d(y, T(t)x) \leq d(y, T(t_{n_j})x_{n_j}) + d(T(t_{n_j})x_{n_j}, K) + d(T(t_{n_j})x, K) + d(T(t_{n_j})x, T(t)x).$$

Podemos concluir que $y = T(t)x$, de onde concluímos que $y \in T(t)K$. □

Definição 2.0.34. Um semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é dito eventualmente limitado, se para cada subconjunto limitado B de X existe $s_B \geq 0$ tal que $\gamma^+_{s_B}(B)$ um subconjunto limitado de X.

O próximo teorema caracteriza os semigrupos que possuem atrator global.

Teorema 2.0.35. *Um semigrupo $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, $\{T(t);\ t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Segue do fato de que $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo, assintoticamente compacto e do Lema 2.0.32 que o semigrupo é compacto dissipativo. Seja C um conjunto limitado que absorve subconjuntos compactos de X. Considere $B = \{x \in C;\ \gamma^+(x) \subset C\}$. Então, $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ e, como $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto, então existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B e conseqüentemente K atrai subconjuntos compactos de X. O conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai subconjuntos compactos de X.

Seja B um subconjunto limitado de X, como $\{T(t);\ t \geq 0\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 2.0.25 que $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Como $\omega(B)$ é compacto e invariante, temos $\omega(B) \subset \mathcal{A}$, por conseguinte, $\mathcal{A}$ atrai B.

Não é difícil ver que, se $\{T(t);\ t \geq 0\}$ possui um atrator global, então o semigrupo é limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto. □

Teorema 2.0.36. *Seja $\{T(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo ponto dissipativo e eventualmente compacto para $t \geq t_0$. Então, o semigrupo possui um atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Pelos Teorema 2.0.27 e Teorema 2.0.35 é suficiente mostrarmos que órbitas positivas de conjuntos limitados são eventualmente limitadas. Dado um conjunto limitado B, segue do fato de $\{T(t);\ t \geq 0\}$ ser eventualmente compacto que existe $t_B \geq 0$, com $t_0 \leq t_B$ tal que $T(t_B)B$ é relativamente compacto. Portanto, necessitamos mostrar apenas que órbitas positivas de subconjuntos compactos de X são limitadas. Sejam K um subconjunto compacto de X e B_0 um subconjunto aberto e limitado de X que absorve pontos. Pela continuidade de $T(t)$, existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x tal que $T(t_x)\mathcal{O}_x \subset T(t_{B_0})B_0$. Existe $\{\mathcal{O}_{x_1}, \dots, \mathcal{O}_{x_\mathfrak{p}}\}$ que cobre K. Seja $t = t(K) = \max\{t_{x_i};\ 1 \leq i \leq \mathfrak{p}\}$, $K_0 = \overline{T(t_{B_0})B_0}$ e $\widetilde{K}_0 = \cup_{t=0}^{t(K_0)} T(t)K_0$. Claramente K_0 e $\widetilde{K}_0$ são subconjuntos compactos de X. Com isso, segue que $T(t)B_0 \subset K_0$ para todo $t \geq t_{B_0}$ e para cada subconjunto compacto K de X, temos $T(t)K \subset K_0$ para $t \geq t(K)$. $\square$

Capítulo 3

ATRATOR GLOBAL PARA UM PROBLEMA DE EVOLUÇÃO NÃO LOCAL EM $\mathbb{R}$

3.1 Introdução

Neste capítulo nós consideraremos o seguinte problema de evolução não local

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u\left(x,t\right) + tanh\left(\beta J * u\left(x,t\right) + h\right), t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $u\left(x,t\right)$ é uma função real definida em $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$; $\beta > 1$, $J \in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ é uma função não negativa com integral igual a 1 com suporte no intervalo $[-1,1]$, β e h são constantes positivas. O símbolo $*$ denota a convolução, ou seja,

$$\left(J * u\right)\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}} J\left(x-y\right) u\left(y\right) dy.$$

A nossa motivação e principal referência para o estudo da dinâmica do problema (1), que nasce em modelos de separação de fases, é o artigo de Pereira [9]. Para maiores detalhes sobre a origem do problema (1), veja [9] e suas referências.

Se $\beta \leq 1$, então a equação do problema (3.1) tem um equilíbrio. Se $\beta > 1$ e $0 \leq h \leq h^*$, em que $h*$ é definido implicitamente pela equação (3.2), (3.1) tem três equilíbrios espacialmente homogêneos, a saber, m_β^0, m_β^+ e m_β^- cada um identificado como uma das três raizes da equação

$$m_\beta = \tanh(\beta m_\beta + h). \tag{3.2}$$

Consideraremos o espaço $L^p\left(\mathbb{R},\rho\right), 1 \leq p < \infty$, definido por

$$L^p\left(\mathbb{R},\rho\right) = \left\{ u \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}\right) : \int_{\mathbb{R}} \left|u(x)\right|^p \rho(x) dx < +\infty \right\},$$

munido com a norma

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R},\rho)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left|u(x)\right|^p \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aqui a função ρ é integrável de tal forma que as funções constantes estão inclusas neste espaço. Por exemplo, podemos tomar $L^2\left(\mathbb{R},\rho\right)$ e $\rho(x) = \frac{1}{\pi}\left(1+x^2\right)^{-1}$, neste caso a função constante igual a 1 tem norma igual a 1 em $L^2(\mathbb{R},\rho)$, de fato temos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}dx &= \frac{1}{\pi}\left(\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+x^2}dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\lim_{R\to+\infty}[arctg(R)-arctg(-R)]\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}.\pi,
\end{aligned}$$

agora temos,

$$\begin{aligned}
\|1\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} &= \left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\sqrt{\pi}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

No caso $p=2$, o espaço de Sobolev de ordem superior $H^k(\mathbb{R},\rho)$ é o espaço das funções $u\in L^2(\mathbb{R},\rho)$ cujas derivadas de distribuição até ordem k também pertencem a $L^2(\mathbb{R},\rho)$, com a norma

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R},\rho)} = \left(\sum_{j=0}^{k}\left\|\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R},\rho)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A observação a seguir apresenta uma desigualdade importante para análise a ser realizada neste trabalho.

A função ρ é assumida tal que a seguinte propiedade é válida: existe uma constante $K>0$ tal que

$$sup\,\{\rho(x); y-1\le x\le y+1\}\le K\rho(y). \tag{3.3}$$

Por exemplo, se $\rho(x)=\frac{1}{\pi}(1+x^2)^{-1}$, com $K=3$. Além disso, podemos tomar K arbitrariamente próximo de 1 por escolher ρ adequadamente. Por exemplo, podemos ter ρ igual a uma constante num intervalo de $[-R,R]$ e igual a $\frac{1}{\pi}(1+x^2)^{-1}$ fora do intervalo $[-R-1,R+1]$.

3.2 Boa Posição em $L^2(\mathbb{R},\rho)$

Nesta seção provaremos que o problema (3.1) está bem posto em $L^2(\mathbb{R},\rho)$, isto é, para cada $u_0\in L^2(\mathbb{R},\rho)$, existe uma única $u(x,t)$, função real definida em $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$, que satisfaz a primeira equação em (3.1) em $L^2(\mathbb{R},\rho)$, e satifaz a condição $u(x,0)=u_0(x)$. Para isto reescreveremos o problema (3.1) na forma

$$\begin{cases} \dot{u} &= F(u) \\ u(0) &= u_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde a aplicação $F(u)=-u+tanhh(\beta J*u+h)$ é definida em $L^2\left(\mathbb{R},\rho\right)$.

Mostraremos que F é uma aplicação globalmente Lipschitz em $L^2(\mathbb{R},\rho)$. Mais precisamente, temos:

Lema 3.2.1. *Suponha sup* $\{\rho(x); y-1\leq x\leq y+1\}\leq K\rho(x)$, *para alguma constante* K *e para todo* $y\in\mathbb{R}$. *Então* F *é uma aplicação globalmente Lipschitz em* $L^2(\mathbb{R},\rho)$, *com*

$$\|F(u)-F(v)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)}\leq\left(1+\beta\sqrt{K}\right)\|u-v\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \tag{3.5}$$

Demonstração. Uma vez que J é limitada e tem suporte compacto, $(J*u)\,(x)$ está bem definida para $u\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Como $|tanh\,(\beta J*u+h)\,(x)|\leq 1$ segue que $F(u)\in L^2(\mathbb{R},\rho)$ se $u\in L^2(\mathbb{R},\rho)$. Agora

$$\begin{aligned} \|J*u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\rho)} &= \int_{\mathbb{R}}|(J*u)(x)|^2\rho(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}J(x-y)^{\frac{1}{2}}J(x-y)^{\frac{1}{2}}u(y)dy\right)^2\rho(x)dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\|J*u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \leq \|J\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}J(x-y)\,|u(y)|^2\,dy\right)\rho(x)dx$$

Pelo teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \|J*u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\rho)} &\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}J(x-y)\,|u(y)|^2\,\rho(x)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}J(x-y)\rho(x)dx\right)|u(y)|^2\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{|x-y|\leq 1}J(x-y)\rho(x)dx\right)|u(y)|^2\,dy. \end{aligned}$$

Agora usando a hipótese sup $\{\rho(x); y-1\leq x\leq y+1\}\leq K\rho(x)$, segue que

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{|x-y|\leq 1}K\rho(y)J(x-y)dx\right)|u(y)|^2\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}K\rho(y)\left(\int_{|x-y|\leq 1}J(x-y)dx\right)|u(y)|^2\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}K\rho(y)\left(\int_{\mathbb{R}}J(x-y)dx\right)|u(y)|^2\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}K\rho(y)\,|u(y)|^2\,dy \\ &= K\int_{\mathbb{R}}\rho(y)\,|u(y)|^2\,dy \\ &= K\,\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\rho)}. \end{aligned}$$

Usando o fato da função tangente hiperbólica ser Lipschitz com constante 1, temos para quaisquer $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \rho)$, o seguinte

$$\begin{aligned}
\|F(u)-F(v)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} &\leq \|u-v\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} + \|tanh(\beta J * u + h) - tanh(\beta J * v + h)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \\
&\leq \|u-v\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} + \|(\beta J * u + h) - (\beta J * v + h)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \\
&= \|u-v\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} + \|\beta J * (u-v)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \\
&\leq \left(1+\beta\sqrt{K}\right)\|u-v\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)}.
\end{aligned}$$

Como queriamos demonstrar. □

Pelo Lema 3.2.1 e pela teoria básica de EDOs em espaços de Banach segue-se que, para qualquer $u_0 \in L^2(\mathbb{R}, \rho)$, a equação $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u\,(x,t) + tanh\,(\beta J * u\,(x,t) + h)$ tem uma solução local única em $C\left([0, \tau(u_0)], L^2(\mathbb{R}, \rho)\right) \bigcap C^1\left((0, \tau(u_0), L^2(\mathbb{R}, \rho)\right)$ para algum $\tau(u_0) > 0$, que é contínua com respeito a u_0. A saber se $u(x,t)$ é uma solução local da equação $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u\,(x,t) + tanh\,(\beta J * u\,(x,t) + h)$ com condição inicial $u(x,0) = u_0(x)$, então multipiclando ambos os lados da equação acima pelo número e^t, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t}e^t = -u\,(x,t)\,e^t + e^t tanh\,(\beta J * u\,(x,t) + h) \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t}e^t + u\,(x,t)\,e^t = e^t tanh\,(\beta J * u\,(x,t) + h)
\end{aligned}$$

Note que o lado direito da equação anterior representa a derivada em relação a t da função $u(x,t)e^t$. Assim temos,

$$\frac{d}{dt}\left[u(x,t)e^t\right] = e^t tanh\,(\beta J * u\,(x,t) + h)\,.$$

Integrando esta ultima no intervalo de 0 a t obtemos,

$$u(x,t)e^t = u(x,0) + \int_0^t e^s tanh\,\{\beta J * u\,(x,s) + h\}\,ds.$$

Logo

$$u(x,t) = u(x,0)e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} tanh\,\{\beta J * u\,(x,s) + h\}\,ds.$$

Agora por argumentos análogos, utilizando a fórmula da variação das constantes (acima) e a desigualdade de Gronwall , segue-se que estas soluções são realmente definidos globalmente, isto é, $\tau(u_0) = \infty$ para qualquer u_0.

A partir de agora, denotamos por $\{T(t); t \geq 0\}$ o semigrupo gerado por $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u\,(x,t) + tanh\,(\beta J * u\,(x,t) + h)$ com condição inicial $u(x,0) = u_0(x)$ em $L^2(\mathbb{R}, \rho)$, isto é,

$$T(t)u_0(x) = u(x,t)$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

3.3 Existência do atrator global em $L^2(\mathbb{R},\rho)$

Nesta seção mostraremos que o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ possui um atrator global em $L^2(\mathbb{R},\rho)$. Para isto provaremos inicialmente que o semigrupo possuem uma bola centrada na origem de raio $1+\epsilon$ como um conjunto absorvente em $L^2(\mathbb{R},\rho)$, seja qual for $\epsilon > 0$, conforme o lema abaixo.

Lema 3.3.1. *Seja qual for* $\epsilon > 0$, *a bola centrada na origem e de raio* $1+\epsilon$, $B(0, 1+\epsilon)$, *é um conjunto absorvente para o semigrupo* $\{T(t); t \geq 0\}$ *em* $L^2(\mathbb{R},\rho)$.

Demonstração. Lembramos que um conjunto B_0 contido em $L^2(\mathbb{R},\rho)$ é um conjunto absorvente para o semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$, se para qualquer conjunto limitado B em $L^2(\mathbb{R},\rho)$, existe $t_B > 0$ tal que $T(t)B \subset B_0$ para qualquer $t \geq t_B$.

Se $u(x,t)$ é uma solução de (3.1) com a condição inicial $u_0 \in B$, onde B é um conjunto limitado em $L^2(\mathbb{R},\rho)$, temos pela fórmula de variação das constantes

$$u(x,t) = e^{-t}u_0(x) + \int_0^t e^{s-t} tanh\left\{\beta(J*u)(x,s) + h\right\} ds$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Usando a desigualdade triangular, temos para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq e^{-t}|u_0(x)| + \int_0^t e^{s-t} ds \\ &\leq e^{-t}|u_0(x)| + 1. \end{aligned}$$

Assim

$$|u(x,t)|^2 \leq \left(e^{-t}|u_0(x)| + 1\right)^2,$$

e multiplicando ambos os membros pela função ρ e integrando sobre $\mathbb{R}$, obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \leq \left\|e^{-t}|u_0(\cdot)| + 1\right\|^2_{L^2(\mathbb{R},\rho)},$$

e extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \leq \left\|e^{-t}|u_0(\cdot)| + 1\right\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)}.$$

Usando a desigualdade Minkowski

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \leq e^{-t}\|u_0(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} + 1$$

para todo $t \geq 0$.

Com isso, dado $\epsilon > 0$ existe $t_B > 0$ tal que $e^{-t}\|u_0(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} < \epsilon$, para todo $t > t_B$ $\left(\text{basta tomar } t_B = ln\left(\frac{\|u_0\|}{\epsilon}\right)\right)$. Portanto $u(\cdot,t) \in B(0,1+\epsilon)$, para todo $t > t_B$ e o resultado é provado. □

Lema 3.3.2. *Seja qual for $\eta > 0$, existe $t_\eta > 0$ tal que $T(t_\eta)B(0,1+\epsilon)$ possui uma cobertura finita por bolas de $L^2(\mathbb{R},\rho)$ com raio menor que η.*

Demonstração. Considere os sistemas

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u\,(x,t) + tanh\,(\beta J * u\,(x,t) + h)\,, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.6}$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= -v\,(x,t)\,, v(x,0) = u_0\,(x) \\ \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} &= -\omega\,(x,t) + tanh\,\{\beta J * (v+\omega)\,(x,t) + h\}\,, \omega(x,0) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Veja que se (v,ω) é uma solução de (3.7) então $u = v + \omega$ é uma solução de (3.6) com $u(0) = u_0$. Reciprocamente, qualquer solução u de (3.6) pode ser escrita como $u = v + \omega$, com (v,ω) uma solução do sistema (3.7).

Pela formula de variação das constantes, temos

$$u(x,t) = u(x,0)e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} tanh\,\{\beta J * u\,(x,s) + h\}\,ds,$$

e para qualquer $R > 0$ podemos escrever

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t)\chi_{[-R,R]} + \omega(x,t)\left(1 - \chi_{[-R,R]}\right),$$

onde $\chi_{[-R,R]}$ denota a função característica do intervalo $[-R,R]$.

Desde que $v(x,t) = e^{-t}u_0(x)$, dado $\eta > 0$, podemos encontrar t_η tal que se $t \geq t_\eta$ então $\|v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \leq \frac{\eta}{2}$ para todo $u_0 \in B(0,1+\epsilon)$.

Agora, observe que

$$|\omega(x,t)| \leq \int_0^t e^{s-t} ds \leq 1 \tag{3.8}$$

para todo $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a convolução $(J' * u)(x,s) = \int_{\mathbb{R}} J'(x-y)u(y,s)dy$ está bem definido se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, já que J' tem suporte compacto. Em particular, se $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \left|J' * u(x,s)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|J'(x-y)u(y,s)\right| dy \\ &= \int_{|x-y|\leq 1} \left|J'(x-y)u(y,s)\right| dy. \end{aligned}$$

Mas,

$$|x-y| \leq 1 \Leftrightarrow x-1 \leq y \leq x+1.$$

Daí, usando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \left|J' * u(x,s)\right| &\leq \int_{x-1}^{x+1} \left|J'(x-y)u(y,s)\right| dy \\ &\leq \left(\int_{x-1}^{x+1} \left|J'(x-y)\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x-1}^{x+1} |u(y,s)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\|J'\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\int_{x-1}^{x+1} |u(y,s)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Se $u(x,t) \in B(0, 1+\epsilon)$, $R > 0$ e $x \in [-R, R]$, temos

$$\begin{aligned} \left|J' * u(x,s)\right| &\leq \left\|J'\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\int_{-R-1}^{R+1} |u(y,s)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\|J'\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(y,s)|^2 \chi_{R+1}(y) dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\|J'\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(y,s)|^2 \chi_{R+1}\rho(y) \frac{1}{\rho_{R+1}} dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \tfrac{1}{\sqrt{\rho_{R+1}}} \left\|J'\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(y,s)|^2 \rho(y) dy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \tfrac{1}{\sqrt{\rho_{R+1}}} \left\|J'\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u(\cdot,s)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \\ &\leq \tfrac{1+\epsilon}{\sqrt{\rho_{R+1}}} \left\|J'\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

onde $\rho_{R+1} = \inf\{|\rho(x)|; x \in [-R-1, R+1]\}$, e χ_{R+1} é a função característica do intervalo do $[-R-1, R+1]$.

Portanto, diferenciando $\omega(x,t)$ com respeito a x, obtemos para $t \geq 0$

$$\tfrac{\partial}{\partial x}\omega(x,t) = \beta \int_0^t e^{s-t} sech^2\left(\beta J * u(x,s) + h\right).\left(J' * u\right)(x,s)\, ds.$$

Assim

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{\partial}{\partial x}\omega(x,t)\right| &\leq \beta\int_0^t e^{s-t}\left|(J' * u(x,s))\right| ds.\\ &\leq \tfrac{\beta(1+\epsilon)}{\sqrt{\rho_{R+1}}}\left\|J'\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\int_0^t e^{s-t}ds\\ &\leq \tfrac{\beta(1+\epsilon)}{\sqrt{\rho_{R+1}}}\left\|J'\right\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Com isso

$$\begin{aligned}\|\omega(\cdot,t)\|_{H^1([-R,R],\rho)} &= \left\|\tfrac{\partial}{\partial x}\omega(x,t)\right\|_{L^2([-R,R],\rho)}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}}\chi_R\rho(y)\left|\frac{\partial}{\partial x}\omega(x,t)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \tfrac{\beta(1+\epsilon)}{\sqrt{\rho_{R+1}}}\left\|J'\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\end{aligned} \tag{3.9}$$

Agora, escolheremos $R > 0$ de tal forma que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}(1-\chi_R)\rho(x)dx \leq \frac{\eta}{4}$. Então por (3.8), temos

$$\begin{aligned}\|(1-\chi_R)\omega(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} &\leq \int_{\mathbb{R}}(1-\chi_R)\left|\omega(x,t)\right|\rho(x)dx\\ &\leq \tfrac{\eta}{4}.\end{aligned}$$

Além disso, por (3.8) e (3.9) a restrição de $\omega(\cdot,t)$ ao intervalo $[-R,R]$ é limitada em $H^1([-R,R],\rho)$ por uma constante independente de $u_0 \in B(0,1+\epsilon)$, e portanto o conjunto $\{\chi_R\omega(\cdot,t); t>0,\ \text{com}\ \omega(\cdot,0)\in B(0,1+\epsilon)\}$ é um subconjunto compacto de $L^2(\mathbb{R},\rho)$ já que $H^1([-R,R],\rho) \hookrightarrow L^2([-R,R],\rho)$ é uma imersão compacta, e assim, ele pode ser coberta por um número finito de bolas com raio menor que $\frac{\eta}{4}$.

Portanto , uma vez que $u(\cdot,t) = v(\cdot,t) + \chi_R\omega(\cdot,t) + (1-\chi_R)\omega(\cdot,t)$, segue-se que $T(t_\eta)B(0,1+\epsilon)$ tem uma cobertura finita de bolas em $L^2(\mathbb{R},\rho)$ com raio menor que η. □

Denotamos por $\omega(C)$, o conjunto ω-limite de um conjunto C contido em $L^2(\mathbb{R},\rho)$

Teorema 3.3.3. *O conjunto $\mathcal{A} = \omega(B(0,1+\epsilon))$ é um atrator global para o semigrupo gerado por* (3.1)*, em $L^2(\mathbb{R},\rho)$, que está contida na bola centrada na origem de raio um.*

Demonstração. Usando o lema 3.3.1 segue-se imediatamente que $\mathcal{A}$ está contido na bola centrada na origem de raio um. Além disso, uma vez que o conjunto $\mathcal{A}$ é invariante pelo semigrupo$\{T(t); t\geq 0\}$, segue-se que $\mathcal{A} \subset T(t)B(0,1+\epsilon)$, para qualquer $t > 0$ e então, pelo Lema 3.3.2, obtém-se que a medida da não compacidade de $\mathcal{A}$ é zero. Assim, $\mathcal{A}$ é relativamente compacto e, sendo fechado, $\mathcal{A}$ também é compacto. Finalmente, se D for um conjunto limitado em $L^2(\mathbb{R},\rho)$ então $T(\bar{t})D \subset B\left(0, 1+\epsilon\right)$ para $\bar{t}$ suficientemente grande e, por conseguinte, $\omega(D) \subset \omega\left(B\left(0, 1+\epsilon\right)\right)$. □

Uma vez que as estimativas em $L^2(\mathbb{R},\rho)$ foram obtidas para soluções no atrator, podemos usar um argumento do tipo *bootstrap* para obter estimativas em C^k.

Teorema 3.3.4. *O atrator global $\mathcal{A}$ é limitado em C^k, para qualquer k inteiro não negativo.*

Demonstração. Se $u(x,t)$ é uma solução de (3.1) com condição inicial $u(x,t_0)$ contido no atrator $\mathcal{A}$, pela fórmula das variações das constantes temos,

$$u(x,t) = e^{-(t-t_0)}u(x,t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{s-t} tanh\left\{\beta(J*u)(x,s)+h\right\}ds. \tag{3.10}$$

Como $\mathcal{A}$ está contido na bola centrada na origem de raio um, segue que $u(x,t_0)$ é limitado para qualquer t_0 escolhido. Daí, fazendo $t_0 \to -\infty$, obtemos

$$u(x,t) = 0 + \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} tanh\left\{\beta(J*u)(x,s)+h\right\}ds. \tag{3.11}$$

Aplicando o módulo em ambos os lados, temos

$$|u(x,t)| = \left|\int_{-\infty}^{t} e^{s-t} tanh\left\{\beta(J*u)(x,s)+h\right\}ds\right|.$$

Como $|tanh(x)| \leq 1, \forall\ x \in \mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \int_{-\infty}^{t} e^{s-t}ds \\ &\leq 1 \end{aligned} \tag{3.12}$$

para todo $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Apartir de (2.11) obtemos

$$\begin{aligned} \left|J' * u(x,s)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|J'(x-y)u(y,s)\right| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|J'(x-y)\right| dy = \left\|J'\right\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Deriviando em (2.10) em relação a x, obtemos para $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial x}u(x,t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{s-t}\frac{\partial}{\partial x} tanh\left\{\beta(J*u)(x,s)+h\right\}ds \\ &= \beta\int_{-\infty}^{t} e^{s-t} sech^2\left(\beta J*u(x,s)+h\right).(J'*u)(x,s)ds, \end{aligned}$$

que é bem definido por argumentos totalmente semelhantes aos utilizados na prova do lema 3.3.2.

Usando (2.12) temos,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right| &\leq \beta\int_{-\infty}^{t} e^{s-t}\left|(J^{'}*u)(x,s)\right| ds \\
&\leq \beta\left\|J^{'}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{-\infty}^{t} e^{s-t}ds \\
&\leq \beta\left\|J^{'}\right\|_{L^1(\mathbb{R}).}
\end{aligned}
$$

Observe-se que, a partir desta estimativa, temos

$$
\begin{aligned}
\left|J^{'}*u^{'}(x,s)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}}\left|J^{'}(x-y)u^{'}(y,s)\right| dy \\
&\leq \beta\left\|J^{'}\right\|_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\mathbb{R}}\left|J^{'}(x-y)\right| dy \\
&= \beta\left\|J^{'}\right\|^2_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Diferenciando em (2.10) mais uma vez, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{s-t}2\beta^2 sech(\beta J*u(x,s)).sechtanh(\beta J*u(x,s)) \\
&. \quad (J^{'}*u(x,s))^2+\beta sech^2(\beta J*u(x,s))(J^{'}*u^{'}(x,s))ds
\end{aligned}
$$

e assim usando o fato que as funções *sech* e *tanh* tem módulo menor que 1, temos

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} &\leq \beta\int_{-\infty}^{t} e^{s-t}2\beta\left(J^{'}*u(x,s)\right)^2+(J^{'}*u^{'}(x,s))ds \\
&\leq \beta\left\|\int_{-\infty}^{t} e^{s-t}2\beta\left\|J^{'}\right\|^2_{L^1(\mathbb{R})}+\beta\left\|J^{'}\right\|^2_{L^1(\mathbb{R})}ds\right\|_{L^2(\mathbb{R},\rho)} \\
&\leq 3\beta^2\left\|J^{'}\right\|^2_{L^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Da mesma maneira podemos obter estimativas para as derivadas de u de qualquer ordem, em termos de J, $J^{'}$ e derivadas de ordem inferior de u, concluindo a prova.

□

REFERÊNCIAS

[1] A.PAZY. *semigroups of linear operators and aplication to partial differenthial equations*. Sringer-Velang, New York, 1983.

[2] BEZERRA, F. D. M. *Taxa de convergência de atratores de algumas equações de reação-difusão pertubadas*. PhD thesis, ICMC-USP, 2010.

[3] DA SILVA, E. B. *Medidas de não compacidade e Teoria de Interpolação*. Dissertação de Mestrado. UNICAMP-Campinas, 1992.

[4] FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, second ed. John Wiley, New York, 1999.

[5] HALE, J. K. *Asymptotic behavior of dissipative Systems*. American Surveys and Monographs, n. 25, 1988.

[6] H.BREZIS. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.

[7] LIMA, E. L. *Curso de análise. Vol. 2*, vol. 13 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.

[8] MACÊDO, H. J. *Existência de soluções de equilíbrios tipo instanton para uma equação de evolução com convolução*. Dissertação de Mestrado. CCT-UFCG, 2011.

[9] PEREIRA, A. L. Global attractor and nonhomogeneous equilibria for a non local evolution equation in an unbounded domain. *Journal of Differential Equations. 226* (2006), 352–372.

[10] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.