PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Daniele dos Santos Silva

Hipersuperfície com Curvatura Média Constante na Esfera

São Luís - MA

2013

Daniele dos Santos Silva

Hipersuperfície com Curvatura Média Constante na Esfera

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Maxwell Mariano de Barros**.

São Luís - MA

2013

Daniele dos Santos Silva

Hipersuperfície com Curvatura Média Constante na Esfera

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Maxwell Mariano de Barros**.

Dissertação aprovada em 08 de fevereiro de 2013, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(Orientador) Dr. Maxwell Mariano de Barros (UFMA)

Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório (UFAL)

Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo (UFMA)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família. Em especial aos meus pais Luiz Silva Filho e Maria Dalva dos Santos Silva.

AGRADECIMENTOS

Ao meu querido orientador, Maxwell Mariano pelo carinho, amizade, paciência e apoio.

Ao Antonio José da Silva por todo incentivo e por está sempre disposto a me ajudar esse trabalho é um pouco seu também...

Ao corpo docente do mestrado pelos conhecimentos adquiridos, professor Marcos Araujo, Nivaldo Costa Muniz,Maxwell Mariano, Axel Peter Winterhalder que foram meus professores durante o curso, gostaria de agradecer ainda aos professores Luís Fernando e Valeska Martins pelo apoio e amizade.

Ao professor Feliciano, pela disponibilidade em participar da banca e por corrigir esta dissertação em tempo recorde.

Aos meus companheiros de jornada Fabiano Pablo e Sonia Rocha.

A Capes pelo auxilio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos um resultado obtido por H. Alencar e M. do Carmo, que classifica as hipersuperfices com curvatura média constante na esfera unitária de dimensão $n+1$.

Palavras-chave: Geometria Riemanniana, Curvatura Média, Hipersuperfícies, Laplaciano.

ABSTRACT

In this work we present a result obtained by H. Alencar and M. do Carmo, which classify hypersurfaces with constant mean curvature in the unit sphere of dimension $n+1$. Keywords: Riemannian Geometry, Mean Curvature, hypersurfaces, Laplacian.

SUMÁRIO

Page

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Sejam M^n uma variedade diferenciável orientada de dimensão n e $f : M^n \to S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão de M na esfera unitária $S^{n+1}(1)$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$. Escolha um campo normal unitário η ao longo de f, e denotemos por $A : T_pM \to T_pM$ a aplicação linear auto-adjunta associada a segunda forma fundamental da f ao longo de η, isto é,

$$\langle AX, Y \rangle = \langle B(X,Y), \eta \rangle$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de $S^{n+1}(1)$ e X, Y campos de vetores tangentes em M.

A é uma aplicação linear e simétrica e pode ser diagonalizada em uma base ortonormal $e_1, ..., e_n$ de T_pM, ou seja,

$$Ae_i = k_i e_i, \quad i = 1, ..., n$$

onde os k_i são os autovalores associados aos autovetores $e_1, ..., e_n$.

Denotemos por

$$H = \frac{1}{n} \sum_i k_i,$$

a Curvatura Média de f e por

$$|A|^2 = \sum_i k_i^2,$$

o quadrado da norma do operador de Weingarten

Quando f é uma imersão mínima vale.

Teorema 1.0.1. *Sejam M^n compacta, $f : M^n \to S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma hipersuperfície mínima e A o operador de Weingarten. Assuma que $| A |^2 \leq n$, para todo $p \in M$. Então*

(i) $| A |^2 \equiv 0$ (e M é totalmente geodésica) ou $| A |^2 \equiv n$.

(ii) $| A |^2 \equiv n$ se, e somente se, M^n é um toro de Clifford em S^{n+1}, isto é, M^n é o produto de esferas $S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$, $n_1 + n_2 = n$, de raios apropriados.

O item (i) deve-se a Simons, ver [8]. A caracterização em (ii) foi obtida independentemente por Chern, do Carmo e Kobayashi em [9] e por Lawson em [4]. O resultado no item (ii) é local.

Defina a aplicação linear $\phi : T_pM \to T_pM$

$$\langle \phi X, Y \rangle = H\langle X, Y \rangle - \langle AX, Y \rangle$$

É facilmente verificado que trace $tr\phi = 0$ e que

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i,j}(k_i - k_j)^2 \quad i, j = 1, ..., n$$

de modo que $|\phi|^2 = 0$ se, e somente se M é totalmente umbílica.

H(r)-toro, para $0 < r < 1$, é a hipersuperfície em $S^{n+1}(1)$ obtida pela imersão do produto $S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ e tem curvaturas principais dadas, em alguma orientação, por

$$k_1 = ... = k_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \text{ e } k_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

ou o simétrico desses valores na orientação oposta.

Seja M^n compacta e orientada e, seja $f : M^n \to S^{n+1}(1)$ com curvatura média constante H, escolha uma orientação para M tal que $H \geq 0$. Para cada H, seja,

$$P_H(x) = x^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx - n(H^2 + 1)$$

e seja B_H o quadrado da raiz positiva de $P_H(x)$.

Nesta dissertação provaremos um resultado que classifica as hipersuperfícies na esfera S^{n+1}. O teorema a seguir generaliza o teorema 1.0.1 para hipersuperfícies com curvatura média na esfera e foi obtido em [**?**] por H. Alencar e M. do Carmo, a saber:

Teorema 1.0.2. *(Alencar-Do Carmo)Sejam M^n uma variedade compacta de dimensão n, $f : M^n \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão com curvatura média constante H e $\phi : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ o tensor simétrico dado por*

$$\langle \phi X, Y \rangle = H\langle X, Y \rangle - \langle A, Y \rangle.$$

Suponha que $|\phi|^2 \leq B_H, \ \forall p \in M$. Então

i)$|\phi|^2 \equiv 0$ (e M totalmente umbílica) ou $|\phi|^2 \equiv B_H$, *ii)* $|\phi|^2 \equiv B_H$ *se e somente se*

a) $H = 0$ *e* M^n *é um toro de Clifford em* $S^{n+1}(1)$

b) $H \neq 0$ *e* $n \geq 3$*, e* M^n *é um H(r)-toro com* $r^2 < \frac{n-1}{n}$

c) $H \neq 0$ *e* $n = 2$*, e* M^n *é um H(r)-toro com* $r^2 \neq \frac{n-1}{n}$.

Na literatura essa ϕ tem o nome de *parte sem traço da segunda forma fundamental*

Capítulo 2

VARIEDADES

2.1 Preliminares

Uma variedade é um espaço topológico que localmente se assemelha a um espaço Euclidiano.Tal semelhança permite o estabelecimento da diferenciação parcial, e de todas as características essenciais de cálculos em variedades. O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, é o conjunto de todas as n-uplas $p = (p_1, ..., p_n)$ de números reais. O produto interno natural de $\mathbb{R}^n$ é o produto $p.q = \sum p_i q_i$ com norma $|p| = \sqrt{p.p}$. A métrica resultante $d(p, q) = |p - q|$. É compatível com a topologia do $\mathbb{R}^n$.

Uma função real f definida em uma aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ é suave (ou equivalente, C^∞) se f possui derivadas parciais de todas as ordens continuas para todo ponto de $\mathcal{U}$.

Seja $u^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com $1 \leq i \leq n$ a função que associa cada ponto $p = (p_1, ..., p_n)$ a sua coordenada p_i. As $u^1, ..., u^n$ são chamadas de funções coordenada do $\mathbb{R}^n$.

Uma aplicação φ de um aberto $\mathcal{U}$ do $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ é diferenciável se cada uma das funções reais $u^i \circ \varphi$ é diferenciável, $(1 \leq i \leq n)$.

Nosso propósito agora é definir Variedades diferenciáveis. Seja S um espaço topológico. Um sistema de coordenadas em S é um homeomorfismo ξ de um aberto $\mathcal{U}$ de S em um aberto $\xi(\mathcal{U})$ do $\mathbb{R}^n$. Escrevemos $\xi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$ para cada $p \in \mathcal{U}$. As funções resultantes $x^1, ..., x^n$ são chamadas de funções coordenadas de ξ. Assim

$$\xi = (x^1, ..., x^n) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$$

. Chamaremos de n a dimensão de ξ.

Dois sistemas de coordenadas n-dimensional ξ e η em S são chamados *admissíveis* se as funções $\xi \circ \eta^{-1}$ e $\eta \circ \xi^{-1}$ são ambas diferenciáveis. Explicitamente, se $\xi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ e $\eta : V \to \mathbb{R}^n$, então $\eta \circ \xi^{-1}$ definida no conjunto aberto $\xi(\mathcal{U} \bigcap \mathcal{V})$ e tomando valores em $\eta(\mathcal{U} \bigcap \mathcal{V})$ e $\xi \circ \eta^{-1}$,definida no conjunto aberto ξ são necessariamente diferenciáveis no sentido Euclidiano.

Definição 2.1.1. Um Atlas $\mathcal{A}$ de dimensão n em um espaço topológico S é uma coleção de sistemas de coordenadas n-dimensionais em S tal que:

A1) Cada ponto de S está contido no domínio de algum sistema de coordenada em $\mathcal{V}$, e

A2) Quaisquer dois sistemas de coordenadas em $\mathcal{A}$ são admissíveis.

Um atlas $\mathcal{C}$ em S é dito maximal se $\mathcal{C}$ contém cada sistema de coordenadas em S que é admissível com todos os sistemas de coordenadas em $\mathcal{C}$.

Lema 2.1.2. *Cada atlas $\mathcal{A}$ em S está contido em um único atlas maximal.*

Demonstração. ver [6] pagina 2. □

Lembramos que um Espaço topológico S é um Espaço de Hausdorff se quaisquer dois pontos distintos de S podem ser separados por conjuntos abertos disjuntos.

Definição 2.1.3. Uma variedade M diferenciável é um espaço de Hausdorff munido com um atlas completo.

A dimensão $n = dimM$ de uma variedade M é a dimensão do seu atlas. A notação M^n indica que M é uma variedade diferenciável de dimensão n.

Se M^n é uma variedade diferenciável, uma carta local (ou um sistema de coordenadas local de M^n) é por definição um par $(\mathcal{U}, \varphi)$ onde $\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas pertencente ao atlas maximal de M. Se $p \in \mathcal{U}$ e $\varphi(p) = (x_1(p), x_2(p), ..., x_n(p))$ o conjunto $\mathcal{U}$ é chamado de uma *vizinhança coordenada* de p e os números $x_i(p)$ são chamadas de *coordenadas locais* de p.

Sejam M^n uma variedade diferenciável e $\mathcal{U} \subset M$ uma vizinhança coordenada de p. Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in U$ se dado um sistema de coordenadas $\xi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ a função $f \circ \xi^{-1} : \xi(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em p. A função $f : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável em M se for diferenciável em todos os pontos de M. Vamos denotar o conjunto de todas as funções diferenciáveis de M por $\mathfrak{F}(M)$.

Diferenciabilidade é uma propriedade local. Ou seja $\varphi : M \to N$ é diferenciável em $p \in M$ quando a restrição de φ para alguma vizinhança de p é diferenciável. A aplicação φ é diferenciável se é diferenciável em cada ponto de M.

Definição 2.1.4. Um difeomorfismo $\varphi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável que tem inversa diferenciável.

Aplicações Identidade de variedades, composições de difeomorfismos, e inversas de difeomorfismos são exemplos de difeomorfismos.

2.1.1 Vetores Tangente

Definição 2.1.5. Seja p um ponto na variedade M. Um vetor tangente a M em p é uma função de valores reais $v : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$ que é

(i) $\mathbb{R}$-linear: $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, e

(ii) Leibniziniana: $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ onde $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

Para cada ponto $p \in M$ temos o conjunto de todos os vetores tangentes de M em p será denotado por T_pM. As definições de adição e multiplicação escalar definidas abaixo fazem de T_pM um espaço vetorial sobre os números reais $\mathbb{R}$.

$$(v + w)(f) = v(f) + w(f), \tag{2.1}$$

$$(av)(f) = av(f) \ \forall f \mathfrak{F}(M), a \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

Munido dessas operações, T_pM é chamado de Espaço Tangente de M em p.

Para definir a diferenciação parcial em uma variedade, o esquema é para mover a função f de volta ao espaço euclidiano através de um sistema de coordenadas e, em seguida, tomar as derivadas parciais.

Definição 2.1.6. Seja $\xi = (x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenada de M em p. Se $f \in \mathfrak{F}(M)$, seja

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi p) \qquad (1 \leq i \leq n),$$

onde $u^1, ..., n^n$ são as funções coordenadas de $\mathbb{R}^n$.

A seguinte função

$$\partial_i \mid_p = \frac{\partial}{\partial x_i} : \mathfrak{F}(M) \to \mathbb{R}$$

associa cada função $f \in \mathfrak{F}(M)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, mostra-se que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ é um vetor tangente a M em p. Podemos imaginar $\partial_i \mid_p$ como sendo o vetor tangente da i-ézima curva coordenada passando por p.

O suporte supp$f$ de $f \in \mathfrak{F}(M)$ é o fecho do conjunto $\{p \in m : f(p) \neq 0\}$. Assim M - supp$f$ é o maior conjunto aberto no qual o f é identicamente nula.

Lema 2.1.7. *Seja $v \in T_p(M)$. (1) Se $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ são iguais em um vizinhança de p, então $v(f) = v(g)$. (2) Se $h \in \mathfrak{F}(M)$ é constante numa vizinhança de p, então $v(h) = 0$.*

Demonstração. 1) Por linearidade é suficiente mostrar que se $f = 0$ em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p, então em p, $v(f) = 0$. Assim sendo sejam f tal que $f = 0$ numa vizinhança de p e g uma função diferenciável em p com suporte em $\mathcal{U}$;1) $fg = 0$ em toda M. Mas $v(0) = v(0+0) = v(0) + v(0)$ implica $v(0) = 0$. assim

$$0 = v(fg)(p) = v(f)(p)g(p) + f(p)v(g)(p) = v(f)(p)g(p)$$

suponha $g(p) \neq 0$ portanto $v(f) = 0$ em p.

2) Em 1) podemos assumir que h tem valor constante c em toda M. Se **1** é a função constante de valor **1**, então

$$v(1) = v(1.1) = v(1)1 + 1v(1) = 2v(1)$$

Portanto $v(1) = 0$ e $v(h) = v(c.1) = cv(1) = 0$.

O item (2) é um caso particular de 1). □

Teorema 2.1.8. *Seja $\xi = (x^1, ..., x^n)$ um sistema de coordenadas de M em p,então os vetores coordenados $\partial_1|_p, ..., \partial_n|_p$ formam uma base no $T_p(M)$; e*

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\partial_i|_p \quad \forall v \in T_p(M)$$

Demonstração. Podemos trabalhar apenas numa vizinhança coordenada $\mathcal{U}$ de ξ. Uma vez que $v(c) = 0$ sem perda de generalidade podemos assumir que $\xi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Escolhendo se necessário $\mathcal{U}$ de modo que $\xi(\mathcal{U}) = \{q \in \mathbb{R}^n : |q| < \varepsilon\}$ para algum ε. Se g é uma função diferenciável em $\xi(\mathcal{U})$ tal que, para cada $1 \leq i \leq n$ define

$$g_i(q) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tq)dt \quad \forall q \in \xi(\mathcal{U})$$

Mostra-se pelo teorema fundamental do cálculo que

$$g = g(0) + \sum g_i u^i \;\; em \;\; \xi(\mathcal{U})$$

Então se $f \in \mathfrak{F}(M)$, fazendo $g = f \circ \xi^{-1}$ temos

$$f = f(p) + \sum f_i x^i \;\; em \;\; \mathcal{U}$$

Aplicando v em f, temos

$$v(f) = 0 + \sum v(f_i)x^i(p) + \sum f_i(p)v(x^i) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)v(x^i)$$

. Isso vale para toda $f \in \mathfrak{F}(M)$, então os vetores tangentes v e $\sum v(x^i)\partial_i|_p$ são iguais.

Resta mostramos que os vetores $\partial_i|_p$ são linearmente independentes. De fato, se $\sum a_i \partial_i|_p = 0$, então a aplicando em x^j, temos

$$0 = \sum_i a_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \sum_i a_i \delta_{ij} = a_j$$

□

Em particular, a dimensão (espaço vetorial) de T_pM é a mesma dimensão de M.

2.1.2 *Aplicações Diferenciáveis*

Definição 2.1.9. Seja $\varphi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Em cada ponto ponto $p \in M$ a função

$$d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi p}N$$

que associa o vetor $v \in T_pM$ ao vetor $v_\varphi \in T_{\varphi p}N$ é chamada diferencial da função φ em p, onde.

$$v_\varphi = d\varphi_p(v)(g) = v(g \circ \varphi)$$

para todo $v \in T_pM$ e $g \in \mathfrak{F}(N)$. Daí resulta que a aplicação diferencial é linear.

Lema 2.1.10. *Seja $\varphi : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável. Se ξ é um sistema de coordenadas de p em M, e η é um sistema de coordenadas de $\varphi(p)$ e N, então*

$$d\varphi_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (y^i \circ \varphi)}{\partial x^j}(p) \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_{\varphi p} \quad (1 \leq j \leq m)$$

.

Demonstração. Seja $w \in T_{\varphi p}N$. Podemos escrever w em função da base do $T_{\varphi p}N$ da seguinte forma $w = \sum w(y^i) \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_{\varphi p}$. Pela definição de diferencial de uma aplicação,

$$w(y^i) = d\varphi_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right)(y^i) = \frac{\partial (y^i \circ \varphi)}{\partial x^j}(p)$$

□

A matriz de $d\varphi$ com respeito as bases coordenadas é,

$$\left(\frac{\partial(y^i \circ \varphi)}{\partial x^j}\right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

chamada de matriz Jacobiano de φ relativo a ξ e η.

Lema 2.1.11. *Sejam $\varphi : M \to N$ e $\psi : N \to P$ são aplicações diferenciáveis. Então para cada $p \in M$,*

$$d(\psi \circ \varphi)_p = d\psi_{\phi p} \circ d\varphi_p$$

Demonstração. Seja $v \in T_pM$ e $g \in \mathfrak{F}(P)$, então

$$d(\psi \circ \varphi)(v)(g) = (v \circ g \circ \psi \circ \varphi) = d\varphi(v)(g \circ \psi) = (d\psi d\varphi(v))(g)$$

□

Teorema 2.1.12. *Seja $\varphi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. A diferencial $d\varphi_p$ no ponto $p \in M$ é um isomorfismo linear, se e somente existe uma vizinhança V de um ponto $p \in M$ tal que $\varphi|V$ é um difeomorfismo de V na vizinhança $\varphi(V)$ de $\varphi(p)$ em N.*

2.2 Campos de Vetores

Um campo de vetores V em uma variedade M é uma função que atribui a cada ponto $p \in M$ um vetor tangente $V_p \in T_pM$. Intuitivamente V é um conjunto de flechas, uma em cada ponto de M. Se V é um campo de vetores em M e $f \in \mathfrak{F}(M)$, então Vf denota a função com valores reais em M dada por

$$(Vf)(p) = V_p(f) \quad \forall p \in M.$$

Então V é diferenciável se Vf é diferenciável para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Seja $f \in \mathfrak{F}(M)$ e V, W campos diferenciáveis, vale de maneira óbvia:

i)$(fV)_p = f(p)\, V_p$,

ii) $(V + W)_p = V_p + W_p$ pata todo $p \in M$.

Se V e W são diferenciáveis, então os campos $V + W$ e fV também o são.

Estas duas operações tornam $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos diferenciáveis em M, um módulo sobre o anel $\mathfrak{F}(M)$.

Se $\xi = \left(x^1, \ldots, x^m\right)$ é um sistema de coordenadas em $\mathcal{U} \subset M$, então para cada $1 \leq i \leq n$ o campo de vetores ∂_i em $\mathcal{U}$ que associa cada $p \in \mathcal{U}$ ao vetor tangente $\partial_i \mid_p$ é chamado de *campo de vetores coordenado* em ξ. Estes campos de vetores são diferenciáveis, pois $\partial_i\left(f\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ o são.

Segue-se imediatamente pelo teorema da base que para cada campo de vetor V temos $V = \sum V\left(x_i\right)\partial_i$em $\mathcal{U}$.

Uma derivada em $\mathfrak{F}(M)$ é uma aplicação $\mathfrak{D} : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ tal que

1. $\mathbb{R}$-linear: $\mathfrak{D}\left(af + bg\right) = a\mathfrak{D}\left(f\right) + b\mathfrak{D}\left(g\right), \left(a, b \in \mathbb{R}\right)$, e

2. Leibniziana: $\mathfrak{D}\left(fg\right) = \mathfrak{D}\left(f\right)g + f\mathfrak{D}\left(g\right)$.

A definição de vetor tangente mostra que para um campo de vetor $V \in \mathfrak{X}\left(M\right)$ a função $f \to Vf$ é uma derivação em $\mathfrak{F}\left(M\right)$. Por outro lado, cada derivação $\mathfrak{D}$ em $\mathfrak{F}\left(M\right)$ vem de um campo vetorial.

De fato, cada ponto $p \in M$ define $V_p : \mathfrak{F}\left(M\right) \to \mathbb{R}$ por $V_p\left(f\right) = \mathfrak{D}\left(f\right)\left(p\right)$. As propriedades (1) e (2) acima implicam que V_p é um vetor tangente a M em p; assim V é um campo de vetor bem definido e M. Mais ainda, $Vf = \mathfrak{D}\left(f\right) \in \mathfrak{F}\left(M\right)$ para toda $f \in \mathfrak{F}\left(M\right)$, então V é diferenciável e determina a derivada $\mathfrak{D}$.

Se $X, Y \in \mathfrak{X}\left(M\right)$ e $f : M \to \mathbb{R}$ em geral $X(Yf)$ e $Y(Xf)$ não são campos de vetores. Entretanto o seguinte lema é válido.

Lema 2.2.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores numa variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z satisfazendo*

$$Zf = (XY - YX)f \ \ \forall f \in \mathfrak{F}(M)$$

Demonstração. Provaremos a unicidade deste campo de vetores. Admitamos a existência de Z. Consideremos um sistema de coordenadas qualquer no aberto $\mathcal{U} \subset$, podemos escrever

$$X(p) = \sum_i a_i(p)\frac{\partial}{\partial^i}\ ,\ \ Y(p) = \sum_i b_i(p)\frac{\partial}{\partial^i}$$

logo,

$$\begin{aligned}(XY)f(p) &= X(p).(Y(p)f) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j(p)\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[a_i(p)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(p)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i(p)\frac{\partial b_j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i(p)b_j(p)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i\frac{\partial b_j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)(p)\end{aligned}$$

Analogamente,

$$(YX)(f) = \sum_{i,j=1}^{n} b_j\frac{\partial a_i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{i,j=1}^{n} b_j a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned}Zf = (XY - YX)(f) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i\frac{\partial b_j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - \sum_{i,j=1}^{n} b_j\frac{\partial a_i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\frac{\partial b_j}{\partial x^i} - b_i\frac{\partial a_j}{\partial x^i}\right)\right)\frac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^{n} c_j\frac{\partial f}{\partial x^j}\end{aligned}$$

Mostrando a unicidade de Z. A diferenciabilidade é decorrente da definição. □

O campo de vetores $[X, Y] = XY - YX$ é denominado *colchete* de X e Y.

Lema 2.2.2. *Se $X, : Y$ e Z são campos de vetores diferenciáveis de vetores em M, a, $b \in \mathbb{R}$ e f, $g : M \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então*

1. R-bilinearidade $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ e $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$

2. anticomutativa $[X, Y] = -[Y, X]$

3. identidade de Jacobi $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Demonstração. 1) $[aX + bX, Z] = (aX + bY)Z - Z(aX + bY) = aXZ + bYZ - aZX - bZX = a[X, Z] + b[Y, Z]$;

2) $[X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X]$;

3)

$$[[X,Y],Z]=[X,Y]Z-Z[X,Y]=XYZ-YXZ-ZXY+ZYX$$
$$[[Y,Z],X]=[Y,Z]X-X[Y,Z]=YZX-ZYX-XYZ+XZY$$
$$[[Z,X],Y]=[Z,X]Y-Y[Z,X]=ZXY-XZY-YZX+YXZ$$

Somando as três parcelas acima obtemos a identidade de Jacobi.

A operação colchete em $\mathfrak{X}(M)$ R-bilinear, não é $\mathfrak{F}(M)$-bilinear.

De fato, $[fX, gY]=(fX)(gY)-(gY)(fX)$

Considerando um sistema de coordenadas qualquer no aberto $U\subset M$, podemos escrever

$X=\sum a_i\frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y=\sum b_i\frac{\partial}{\partial x^i}$,

onde cada a_i, b_j são funções diferenciáveis de U em $\mathbb{R}$. Então temos que $[fX,gY]=(fX)(gY)-(gY)(fX)$

$$\begin{aligned}
(fX)(gY) &= \sum_i fa_i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_j gb_j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&= \sum_i fa_i\left(\sum_j gb_j\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_j\frac{\partial gb_j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&= \sum_i fa_i\left(\sum_j gb_j\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_j\left(b_j\frac{\partial g}{\partial x^i}+g\frac{\partial b_j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\\
&= \sum_{i,j} fa_igb_j\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i,j} fa_i\left(b_j\frac{\partial g}{\partial x^i}+g\frac{\partial b_j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\\
&= \sum_{i,j} fa_igb_j\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i,j} fa_ib_j\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}+\sum_{i,j} fa_ig\frac{\partial b_j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\\
&= \sum_{i,j} fa_igb_j\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+f\left(\sum_{i,j} a_ib_j\frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)+\sum_{i,j} fa_ig\frac{\partial b_j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\\
&= \sum_{i,j} fa_igb_j\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+f\left(\sum_i a_i\frac{\partial g}{\partial x^i}\right)\left(\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)+\sum_{i,j} fa_ig\frac{\partial b_j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j};
\end{aligned}$$

analogamente,

$$(gY)(fX)=\sum_{j,i} gb_jfa_i\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^i}+g\left(\sum_j\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\left(\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)+\sum_{j,i} gb_jf\frac{\partial a_i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
[fX, gY] &= (fX)(gY) - (gY)(fX) \\
&= \sum_{i,j} g a_i f b_j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + g\left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\left(\sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sum_{j,i} g a_i f \frac{\partial b_j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{j,i} f b_j g a_i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \\
&- f\left(\sum_j b_j \frac{\partial g}{\partial x^j}\right)\left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \sum_{j,i} f b_j g \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= gX(f)Y + gf\sum_{i,j}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - fY(g)X \\
&= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.
\end{aligned}
$$

□

2.3 O Fibrado Tangente e o Fibrado cotangente

Seja M uma varidade diferenciável, chamamos de *fibrado tangente* de M

$$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$$

Um ponto de TM será denotado por X_p se $X_p \in T_pM$. Denotaremos por π a projeção natural de TM em M, isto é

$$\pi : TM \to M$$

definida por $\pi(X_p) = p$.

Temos que TM possui uma estrutura da variedade diferenciável canônica cujas cartas locais são constituídas da seguinte forma: a cada carta local de M, $(\mathcal{U}, \varphi) = (\mathcal{U}, x^1, ..., x^n) \in \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}$ é o atlas que define a estrutura diferenciável em M, associamos a carta local TM seguinte

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}, \phi) := (\pi^{-1}(\mathcal{U}); x^1 \circ \pi, ..., x^n \circ \pi, x^1, ..., x^n)$$

onde x^i são as funções reais definidas em $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ através de $x^i(X_p) = X_p(x^i)$. Na verdade, as coordenadas locais de cada ponto $X_p \in \pi^{-1}(\mathcal{U}$ são dadas coordenadas locais $x^i(p)$ de $p = \pi(X_p)$ e pelas coordenadas de $X_p \in T_pM$ na base de vetores coordenados $\partial_i|_p$, isto é, $X_p = \sum x^i \partial_i|_p$.

Vemos portanto que a aplicação $\phi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}^{2n}$:

$$\phi : X_p \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) \mapsto \Big(x^1(p), ..., x^n(p), x^1(X_p), ..., x^n(X_p)\Big) \in \mathbb{R}^{2n}$$

define uma bijeção de $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ sobre o aberto $\varphi(\mathcal{U}) \times \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$. Definimos então uma topologia em TM que tem como base os conjuntos da forma $\{\phi^{-1}(O)\}_{(\phi,O)}$, onde O é um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ e ϕ é aplicação associada a $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}$, como definida acima. Desta forma TM fica munido de uma estrutura de variedade de dimensão $2n$. Consideremos o fibrado cotangente T^*M

$$T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

onde T_p^*M é o espaço dual a T_pM, isto é o espaço formas lineares $\theta_p : T_pM \to \mathbb{R}$. Um ponto de T^*M será denotado por θ_p.

A topologia e a estrutura diferenciável definem-se de maneira análoga à do fibrado tangente.

2.4 Referencial Móvel, K-Formas

Definição 2.4.1. Uma *1-forma* θ em uma variedade M é uma função que associa cada ponto p a um elemento θ_p do espaço cotangenteT_pM^*.

Seja θ uma 1-forma em M e X um campo de vetores em M, então θX é uma a função de valores reais em M cujo valor em cada ponto p é o valor de θ_p em X_p.

A 1-forma θ é diferenciável se θX é diferenciável em todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}^*(M)$ o conjunto de todas as 1-formas de M .

Podemos munir $\mathfrak{X}^*(M)$ com uma estrutura de módulo, isto é

$$(\theta + \omega)_p = \theta_p + \omega_p, \qquad (f\theta)_p = f(p)\,\theta_p$$

para todo $p \in M$. Assim $\mathfrak{X}^*(M)$ é um módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$.

A diferencial de $f \in \mathfrak{F}(M)$ é uma 1-forma df tal que $(df)(v) = v(f)$ para cada vetor tangente v de M. Claramente df é uma 1-forma uma vez que em cada ponto p a função $(df)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ é linear, e se $V \in \mathfrak{X}(M)$ a função $(df)(V) = Vf$ é diferenciável.

Se $x^1, \ldots, x^m$ é um sistema de coordenadas em $\mathcal{U} \subset M$ temos assim as 1-formas coordenadas $dx^1, \ldots, dx^m$ em $\mathcal{U}$.

Para cada ponto em $\mathcal{U}$, $dx^1, \ldots, dx^m$ fornecem uma base dual para os campos de vetores coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_m$ uma vez que $dx_i(\partial_j) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}$. Mostra-se que para cada 1-forma θ,

$\theta = \sum \theta\left(\partial_i\right) dx_i \qquad$ em $\mathcal{U}$,

Lema 2.4.2. *A diferencial tem as seguintes propriedades:*

1. $d : \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ *é R-linear.*

2. *Regra do produto: Se* $f, g \in \mathfrak{F}(M)$*, então* $d(fg) = gdf + fdg$*.*

3. *Se* $f \in \mathfrak{F}(M)$ *e* $h \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$*, então* $d(h(f)) = h'(f)\, df$*.*

Dado um espaço vetorial V denotemos por $\wedge^k(V)$ o conjunto das aplicações k-lineares alternadas $w : V \times \cdots \times V \longrightarrow R$, onde $V \times \cdots \times V$ tem exatamente k fatores. Altenadas no sentido de

$w(u_1, \cdots, u_k) = -w\left(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_j, \cdots, u_{j-1}, u_i, \cdots, u_k\right), \qquad j > i.$

Definição 2.4.3. (forma exterior)Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma k-forma exterior w em M é uma escolha, para cada $p \in M$, de um $w(p) \in \wedge^k\left(T_pM\right)$.

Dados uma k-forma exterior w e uma parametrização $x_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \longrightarrow M$ em uma vizinhança de $p \in M$, dizemos que a k-forma exterior w_α, em $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, dada por $w_\alpha(q)(v_1, \cdots, v_k) = w(x_\alpha(q))\left(d(x_\alpha)_q(v_1), \cdots, d(x_\alpha)_q(v_k)\right), \qquad v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ é a representação de w na parametrização x_α, neste trabalho adotaremos a seguinte notação: $w_\alpha(v_1, \cdots, v_k) = w(d(x_\alpha)(v_1), \cdots, d(x_\alpha)(v_k)), \qquad v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Se mudarmos o sistema de coordenadas para $\left(x_\beta, U_\beta\right)$, obtemos que

$$\left(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha\right)^* w_\beta = w_\alpha,$$

onde

$$\left(f^* w\right)(p)(v_1, \cdots, v_k) = w(f(q))\left(df_q(v_1), \cdots, df_q(v_k)\right) \qquad v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n,$$

para uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow R^n$ e uma k-forma w em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.4.4. Uma forma diferenciável de ordem k (ou k-forma diferenciável) na variedade M^n é uma k-forma exterior cuja representação em um sistema de coordenadas (logo em todos) é diferenciável.

É interessante notar que todas as operações definidas para formas diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$, como diferencial e integral, podem ser extendidas as formas em M^n através de sua representação local.

Dada uma forma diferenciável w em uma variedade M, dw é a forma em M cuja representação local é dw_α. Obviamente, dw está bem definida, pois

$$dw_\alpha = d\left(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha\right)^* w_\beta = \left(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha\right)^* dw_\beta.$$

Seja w uma 1-forma diferenciável uma variedade diferenciável M e, sejam X e Y campos vetoriais diferenciáveis em M. É possível mostrar que

$$dw\,(X, Y) = X\,(w\,(Y)) - Y\,(w\,(X)) - w\,([X, Y])\,.$$

Mais geralmente, se $X_1, \cdots, X_{k+1}$ são campos diferenciáveis e w é uma k-forma, então

$dw\,(X_1, \cdots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i w\,(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_{k+1}) +$
$\sum_{i<1}^{k+1} (-1)^{i+j} w\left(\left[X_i, X_j\right], X_1 \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_{j-1}, X_{j+1}, \cdots, X_{k+1}\right).$

Definição 2.4.5. O produto exterior de duas 1-formas lineares w_1 e w_2 em um espaço vetorial V é a forma bilinear alternada

$$w_1 \wedge w_2(v_1, v_2) = w_1\,(v_1)\, w_2\,(v_2) - w_1\,(v_2)\, w_2\,(v_1)\,, \qquad v_1, v_2 \in V.$$

Além disso, se $w_1, \cdots, w_n$ é uma base do espaço das formas lineares V^*, então $w_i \wedge w_j$, $i, j = 1, \cdots, n$, formam uma base para o espaço vetorial $\wedge^2\left(V^*\right)$ das formas bilineares de $V \times V$.

Em geral, uma base $\{v_1, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial V é também denominado *referencial* em V

Definição 2.4.6. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ campos vetoriais numa variedade diferenciável M^n tal que $\{X_1(p), ..., X_n(p)\}$ é uma base de T_pM para todo $p \in M$. A aplicação

$$\begin{aligned} F : M &\to TM \\ p &\mapsto F(p) = (X_1(p), ..., X_n(p)) \end{aligned}$$

é dita um referencial móvel para M. Por simplicidade, diremos que $X_1, ..., X_n$ é um referencial móvel para M. Um referencial móvel é dito ortonormal em uma variedade Riemanniana M se $X_1(p), ..., X_n(p)$ são ortonormais em p, para todo $p \in M$.

Consideremos um referencial móvel $X_1, ..., X_n$ numa variedade riemanniana M. Podemos definir as n 1-formas duais w_i por $w_i(X_j) = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker para $i, j = 1, ..., n$. Logo

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(X(p))X_i(p), \ \ \forall X(p) \in T_pM,$$

ou simplesmente, $dI = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i X_i$, onde dI indica a identidade do espaço tangente.

Lema 2.4.7. *(Cartan) Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Sejam $w_1, \cdots, w_r : V \to R$, $r \leq n$, formas lineares de V linearmente independentes. Suponhamos que existam 1-formas lineares $\theta_1, \cdots, \theta_r$ satisfazendo:*

$$\sum_{i=1}^{r} w_i \wedge \theta_i = 0$$

Então

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} w_j, \qquad i, j = 1, \cdots, r, \qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

Proposição 2.4.8. *Sejam $X_1, ..., X_n$ um referencial móvel numa variedade M e $w_i, \ i = 1, ..., n$ as n 1-formas duais associadas ao referencial móvel indicado. Então existem únicas 1-formas w_{ij} tais que (i) $w_{ij} = -w_{ji}$ (onde as w_{ij} são ditas formas de conexão) (ii) $dw_i = \sum\limits_{k=1}^{n} w_{ik} \wedge w_k$ (primeira equação de estrutura das 1-formas w_i)*

Demonstração. Suponha a existência das n^2 formas w_{ij}, primeiro provaremos inicialmente a unicidade. Como $w_i(p), \ i = 1, ..., n$ formam uma base uma base do espaço $(T_pM)^* = \Lambda^1(T_pM)$ das 1-formas em T_pM, para cada $p \in M$, existem unicos a_{ij}^k e b_{ij}^k satisfazendo.

$w_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ij}^k w_k$ e $dw_i = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,k=1}^{i} (w_j \wedge w_k)$

onde $b_{jk}^i = -b_{kj}^i$

o item (ii) implica

$$-dw_i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}^i (w_j \wedge w_k) = \sum j = 1^n (w^j \wedge w_{ij}) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{ij}^k (w_j \wedge w_k)$$

ou seja

$$a_{ij}^k = -\frac{1}{2} b_{jk}^i$$

Daí segue

$$a_{ij}^k - a_{ik}^j = -\frac{1}{2}b_{jk}^i + \frac{1}{2}b_{kj}^i = -\frac{1}{2}b_{jk}^i - \frac{1}{2}b_{jk}^i = b_{jk}^i$$

Permutando i, j, k

$$\begin{aligned} a_{ij}^k - a_{ik}^j &= -b_{jk}^i, & (2.3)\\ a_{jk}^i - a_{ji}^k &= -b_{ki}^j, & (2.4)\\ a_{ki}^j - a_{kj}^i &= -b_{ij}^k, & (2.5) \end{aligned}$$

Somando (2.3) e (2.4) e subitraindo (2.5), temos

$(a_{ij}^k - a_{ik}^j) + (a_{jk}^i - a_{ji}^k) - (a_{ki}^j - a_{kj}^i) = -(b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k)$

$2a_{ij}^k = -(b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k)$

$a_{ij}^k = -\frac{1}{2}(b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k)$

Visto que b_{ij}^k é único para todo $i, j, k = 1, ..., n$, garantimos a unicidade de w_{ij}. Basta provar a existência de w_{ij}. Tomemos

$w_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ij}^k w_k,$

onde $a_{ij}^k = -\frac{1}{2}(b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k)$. Como a_{ij}^k está bem definido, $w_i j$ está bem definido. Além disso,

$$\begin{aligned} a_{ij}^k &= -\frac{1}{2}(b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k) = \frac{1}{2}(b_{kj}^i + b_{ik}^j - b_{ji}^k)\\ &= -a_{ji}^k \end{aligned}$$

logo

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k w_k = -\sum_{k=1}^{n} a_{ji}^k w_k = -w_{ji}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{n} w_k \wedge w_{ik} &= -\sum_{k=1}^{n} w_k \wedge (a_{ik}^j w_j)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}^i (w_k \wedge w_j) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{ji}^k (w_k \wedge w_j) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{ik}^j (w_k \wedge w_j)\\ &= dw_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{ij}^k (w_k \wedge w_j) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{ik}^j (w_k \wedge w_j)\\ &= dw_i \end{aligned}$$

□

2.5 Orientabilidade

Definição 2.5.1. Uma variedade M é orientável desde que exista uma coleção $\mathcal{O}$ de sistemas coordenados em M cujos dominios cobrem M e tal que para cada ξ, $\eta \in \mathcal{O}$ o determinante da função jacobiano $J(\xi, \eta) = det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ é positivo. ($\mathcal{O}$ é chamado *atlas da orientação* de M.)

2.6 Tensores

Se V é um módulo sobre o corpo K, seja V^* o conjunto de todas as funções K-lineares de V em K. A definição habitual de adição de funções e multiplicação por elementos de K, faz de V^* um módulo sobre K, o chamado módulo dual de V.

Se $V_i = V$ para $1 \leq i \leq s$, a notação $V_1 \times ... \times V_s$ é abreviado para V^s.

Definição 2.6.1. Para inteiros $r \geq 0$, $s \geq 0$, a função K-multilinear $A : (V^*)^r \times V^s \to K$ é chamado de tensor (r, s) sobre V.

O conjunto $\mathfrak{T}_s^r(V)$ de todos os tensores do tipo (r, s) sobre V é um módulo sobre K, com as definições usuais de adição de funções e multiplicações por elemento de K. Um tensor do tipo $(0, 0)$ sobre V é simplesmente um elemento de K.

Um campo de tensores em uma variedade M é um tensor sobre $\mathfrak{X}(M)$. Assim, o tensor A do tipo (r, s) é uma aplicação $\mathfrak{F}(M)$-multilinear

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{F}(M).$$

O conjunto $\mathfrak{T}_s^r(M)$ de todos os tensores do tipo (r, s) sobre V é um módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$. Para o caso de $r = 0$, $s = 0$, o campo de tensores do tipo (0, 0) é uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$; ou seja, $\mathfrak{T}_0^0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

Se ω é uma 1-forma numa variedade diferenciável M, então a função $X \to \omega(X)$ é $\mathfrak{F}(M)$-linear de $\mathfrak{X}(M)$ para $\mathfrak{F}(M)$, portanto é um campo de tensor $(0, 1)$.

Cada campo de tensor $(0, 1)$ é conseguido dessa forma apartir de uma única 1-forma, e portanto podemos escrever

$$\mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M).$$

Se V é um campo de vetores diferenciável em M, definimos

$$V(\theta) = \theta(V)$$

para todo $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$. A função $V : \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ é $\mathfrak{F}(M)$-linear, portanto é um campo de tensores $(1,0)$. Cada campo de tensor $(1,0)$ é conseguido dessa forma apartir de um único campo de vetor, logo

$$\mathfrak{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}(M).$$

Um tensor T é um objeto pontual. Fixe $p \in M$ e seja U uma vizinhança de p em M onde é possível definir campos $E_1, \ldots, E_m \in \mathfrak{X}(M)$, de que em cada $q \in U$, os vetores $\{E_i\}$, $i = 1, \ldots, m$, forma uma base de T_qM; diremos, neste caso que $\{E_i\}$ é um *referencial móvel* em U. Sejam

$$Y_1 = \sum_{i1} y_{i1} E_{i1}, \ldots Y_r = \sum_{ir} y_{ir} E_{ir},\ i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, m,$$

as restrições a U dos campos $Y_1, \ldots, Y_r$, expressas no referencial móvel $\{E_i\}$.

Por linearidade,

$$T(Y_1, \ldots, Y_r) = \sum_{i_1, \ldots, i_r} y_{i1} \ldots y_{ir} T(E_1, \ldots, E_m).$$

As funções $T(E_1, \ldots, E_m) = T_{i_1, \ldots, i_r}$em U são chamadas as componentes de T no referencial $\{E_i\}$.

2.7 Variedade Riemanniana

Definição 2.7.1. Uma *forma bilinear simétrica* em um espaço vetrorial sobre os reais V é uma função R-bilinear $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, e a consideramos simétrica quando: $b(v, w) = b(w, v)$ para todo $v, w \in V$.

Definição 2.7.2. Uma forma bilinear simétrica b em V é

1. *Definida positiva (negativa)* se para $v \neq 0$ temos $b(v, v) > 0$ (< 0),

2. *Semidefinida positiva (negativa)* se $b(v, v) \geq 0$ (≤ 0) para todo $v \in V$,

3. *Não-degenerada* se $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implica $v = 0$.

   Se b é uma forma bilinear e simétrica em V, então para qualquer subespaço W de V a restrição $b \mid (W \times W)$ denotada por $b \mid W$, é simétrica e bilinear.

Definição 2.7.3. Uma *métrica Riemanniana* ou uma *estrutura Riemaniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa cada $p \in M$ a um produto escalar $\langle\, ,\, \rangle_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$,(i.e. uma forma bilinear simétrica e positiva definida), essa correspondência varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é um sistema de coordenadas para $p \in \mathcal{U} \subset M$, então

$$g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \mid_p \rangle$$

é diferenciável em $\mathcal{U}$ para cada $i, j = 1, \ldots, m$.

Exemplo (Variedade do Produto). Sejam M, N variedades diferenciáveis. No produto cartesiano $M \times N = \{(p_1, p_2)\, p_1 \in M,\, p_2 \in N\}$ para cada par de cartas $\{(U, \xi)\}$ e $\{(V, \varphi)\}$ de M e N respectivamente, definimos a função

$$\psi(p_1, p_2) = (\xi(p_1), \varphi(p_2)),\ (p_1, p_2) \in U \times V$$

Verifica-se que a união dos pares $\{(U \times V, \psi)\}$ é uma estrutura diferenciável em $M \times N$. Com tal estrutura diferenciável, $M \times N$ é chamada de Variedade produto de M por N.

Em relação a esta estrutura diferenciável as projeções $\pi_1 : M \times N \to M$ e $\pi_2 : M \times N \to N$ são aplicações diferenciáveis. Se M e N possuem estruturas riemannianas $\langle\, ,\, \rangle_1$ e $\langle\, ,\, \rangle_2$, respectivamente, então podemos introduzir uma métrica riemanniana em $M \times N$ por

$$\langle u, v \rangle_{(p_1, p_2)} = \langle d\pi_{1(p_1,p_2)}(u), d\pi_{2(p_1,p_2)}(v) \rangle_1 + \langle d\pi_{2(p_1,p_2)}(u), d\pi_{2(p_1,p_2)}(v) \rangle_2,$$

onde $(p_1, p_2) \in M \times N$ e u, $v \in T_{(p_1,p_2)}(M \times N)$. Portanto, a variedade produto é uma variedade riemanniana.

2.8 Variedades Imersas.

Definição 2.8.1. Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é chamado uma *isometria* se :

$$\langle v, u \rangle_p = \langle df_p(v), df_p(u) \rangle_{f(p)}$$

para todo $p \in M$, $u, v \in T_pM$.

Seja $f : M^m \to N^{m+k}$ é uma imersão. Se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por

$$\langle v, u \rangle_p = \langle df_p(v), df_p(u) \rangle_{f(p)}$$

Para $u, v \in T_pM$.

A métrica de M é chamada *métrica induzida* por f, e f é uma *imersão isométrica.* Portanto, se P é uma subvariedade da variedade Riemanniana M, P torna-se uma subvariedade Riemanniana de M, cuja métrica é induzida pelo mergulho $i : P \to M$.

2.9 Conexão

Definição 2.9.1. Sejam $u^1, \ldots, u^m$ são coordenadas naturais em $\mathbb{R}^m$. Se V e $W = \sum W^i \partial_i$ são vetores em $\mathbb{R}^m$, então o campo de vetores

$$\nabla_V W = \sum V(W_i)\,\partial_i$$

é chamado *derivada covariante natural* de W com respeito a V.

Definição 2.9.2. Uma conexão ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
3. $\nabla_X(fY) = X(f)\,Y + f\nabla_X Y$

   onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{F}(M)$

Proposição 2.9.3. *Seja M uma variedade Riemanniana. Se $V \in \mathfrak{X}(M)$, seja V^* uma 1-forma de M tal que*

$$V^*(X) = \langle V, X \rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Então a função $V \to V^*$ *é um isomorfismo* $\mathfrak{F}(M)$*-linear de* $\mathfrak{X}(M)$ *para* $\mathfrak{X}(M)$.

Teorema 2.9.4. *Em uma variedade Riemanniana M existe apenas uma conexão* ∇ *tal que*

4. $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$, e

5. $X\langle V, W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle$,

para todo $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Suponhamos que a conexão ∇ satisfaz (4) e (5). Então □

1. (a) **a.** $W\langle V, X\rangle = \langle \nabla_W V, X\rangle + \langle V, \nabla_W X\rangle$
   b. $V\langle X, W\rangle = \langle \nabla_V X, W\rangle + \langle X, \nabla_V W\rangle$
   c. $X\langle W, V\rangle = \langle \nabla_X W, V\rangle + \langle W, \nabla_X V\rangle$

Somando *a* e *b* e subtraindo de *c*, teremos

$$\begin{aligned}
W\langle V, X\rangle + V\langle X, W\rangle - X\langle W, V\rangle &= \langle \nabla_W V, X\rangle + \langle V, \nabla_W X\rangle + \langle \nabla_V X, W\rangle \\
&+ \langle X, \nabla_V W\rangle - \langle \nabla_X W, V\rangle - \langle W, \nabla_X V\rangle \\
&= \langle D_W V, X\rangle + \langle V, \nabla_W X - \nabla_X W\rangle \\
&+ \langle W, \nabla_V X - \nabla_X V\rangle + \langle X, \nabla_V W\rangle \\
&= \langle X, \nabla_W V + \nabla_V W\rangle \\
&+ \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [V, X]\rangle \\
&= \langle X, [W, V] + \nabla_V W + \nabla_V W\rangle \\
&+ \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [V, X]\rangle \\
&= \langle X, [W, V]\rangle + 2\langle X, \nabla_V W\rangle \\
&+ \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [V, X]\rangle
\end{aligned}$$

$$2\langle \nabla_V W, X\rangle = V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle.$$

Se existir outra conexão $\overline{\nabla}$ satisfazendo as condições do teorema então automaticamente $\overline{\nabla}$ satisfaz a equação acima. Consequentemente $\nabla_V W, X = \overline{\nabla}_V W, X$. ∇ é chamado de *conexão de Levi-Civita* de M, e é caracterizada pela *fórmula de Koszul*

$2\langle\nabla_V W,\, X\rangle \;=\; V\langle W,\, X\rangle + W\langle X,\, V\rangle - X\langle V,\, W\rangle - \langle V,\, [W,\, X]\rangle + \langle W,\, [X,\, V]\rangle +$ $\langle X,\, [V,\, W]\rangle$.

Mostraremos agora a existência de uma conexão livre de torsão e compatível com a métrica riemanniana. Para isso, defina como na $\nabla_V W$ pela fórmula de Koszul. Esta conexão é livre de torção. De fato,

$$\begin{aligned}
2\langle\nabla_V W,\, X\rangle &= V\langle W,\, X\rangle + W\langle X,\, V\rangle - X\langle V,\, W\rangle - \langle V,\, [W,\, X]\rangle + \langle W,\, [X,\, V]\rangle + \langle X,\, [V,\, W]\rangle \\
2\langle\nabla_W V,\, X\rangle &= W\langle V,\, X\rangle + W\langle X,\, V\rangle - X\langle V,\, W\rangle - \langle W,\, [V,\, X]\rangle + \langle V,\, [X,\, W]\rangle + \langle X,\, [W,\, V]\rangle
\end{aligned}$$

Logo

$$\langle\nabla_V W - \nabla_W V,\, X\rangle = \langle[W,V],X\rangle,\ \ \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Portanto,

$$[W,V] = \nabla_V W - \nabla_W V.$$

A conexão que definimos é compatível com a métrica riemanniana, pois para quaisquer $V,\, W,\, X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
\langle\nabla_V W,\, X\rangle + \langle\nabla_V X,\, W\rangle &= \frac{1}{2}(W\langle V,\, X\rangle \,+\, V\langle W,\, X\rangle \,-\, X\langle W,\, Z\rangle) \\
&\quad -\frac{1}{2}((\langle[W,\, V],\, X\rangle \,+\, \langle[V,\, X],\, W\rangle \,+\, \langle[W,\, X],\, V\rangle \\
&\quad +\frac{1}{2}(X\langle V,\, W\rangle \,+\, V\langle X,\, W\rangle \,-\, W\langle X,\, V\rangle) \\
&\quad -\frac{1}{2}((\langle[X,\, V],\, W\rangle \,+\, \langle[V,\, W],\, X\rangle \,+\, \langle[X,\, W],\, V\rangle \\
&= V\langle W,\, X\rangle.
\end{aligned}$$

Definição 2.9.5. Seja $x^1, \ldots, x^m$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de uma variedade Riemanniana M. Os símbolos de Christoffel neste sistema de coordenadas, são as funções de valores reais Γ_{ij}^k em U tal que

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum \Gamma_{ij}^k \partial_k \qquad (1 \leq i,\, j \leq n)\,.$$

Uma vez que $\left[\partial_i,\, \partial_j\right] = 0$, mostra-se de (4) que $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$, portanto $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Proposição 2.9.6. *Para um sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_m$ em U,*

1. $\nabla_{\partial_i}\left(\sum W_j \partial_j\right) = \sum_k \left\{\frac{\partial W_k}{\partial x_i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W_j\right\} \partial_k$, Onde os símbolos de Christoffel são dados por

2. $\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right\}$.

Demonstração. (1) é uma consequência imediata de (3). Da fórmula de Koszul, temos

$$2 \left\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_m \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{jm} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g_{im} \right) - \frac{\partial}{\partial x_m} \left(g_{ij} \right).$$

Da definição dos símbolos de Christoffel, temos

$$2 \left\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_m \right\rangle = 2 \sum_a \Gamma_{ij}^{a} g_{am}.$$

logo,

$$\sum_a \Gamma_{ij}^{a} g_{am} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{jm} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g_{im} \right) - \frac{\partial}{\partial x_m} \left(g_{ij} \right) \right\}$$

multiplicando ambos os membros por $\sum_m g^{mk}$

$$\begin{aligned}
\sum_m g^{mk} \left(\sum_a \Gamma_{ij}^{a} g_{am} \right) &= \sum_m g^{mk} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{jm} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g_{im} \right) - \frac{\partial}{\partial x_m} \left(g_{ij} \right) \right\} \\
\sum_a \Gamma_{ij}^{a} \left(\sum_m g^{mk} g_{am} \right) &= \frac{1}{2} \sum_m g^{mk} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{jm} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g_{im} \right) - \frac{\partial}{\partial x_m} \left(g_{ij} \right) \right\} \\
\Gamma_{ij}^{k} &= \frac{1}{2} \sum_m g^{mk} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g_{jm} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(g_{im} \right) - \frac{\partial}{\partial x_m} \left(g_{ij} \right) \right\}
\end{aligned}$$

□

Definição 2.9.7. Seja V um campo de vetores em uma variedade Riemanniana M. A (Levi-Civita) derivada covariante ∇_V é o único tensor derivada em M talque

$$\nabla_V f = V f$$

para $f \in \mathfrak{F}(M)$ e $\nabla_V W$ é derivada covariante de Levi-Civita para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Do ponto de vista das formas diferenciais, dado um referencial móvel ortonormal $\{e_i\}$, as formas de conexão dadas pela Proposição 1.3.1 satisfazem a seguinte relação

$$w_{ij}(X) = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle,$$

onde ∇ é a conexão riemanniana. Mostremos que os w_{ij} assim definidos satisfazem a primeira equação de estrutura e $w_{ij} = -w_{ji}$, sendo neste caso, w_{ij} as formas de conexão do referencial ortonormal $e_i, ..., e_n$. Com efeito,

$$\begin{aligned} dw_i(e_j, e_k) &= e_k(w_i(e_i)) - w_i([e_j, e_k]) = -w([e_j, e_k]) \\ &= -\langle [e_j, e_i], e_i \rangle = \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle + \langle \nabla_{e_j} e_k, e_i \rangle \\ &= \sum_{l=1}^{n} (w_l \wedge w_{il})(e_j, e_k), \end{aligned}$$

para todo $k, j = 1, ..., n$. Logo

$$dw_i = \sum_{l=1}^{n} (w_l \wedge w_{il}).$$

Além disso, como a conexão riemanniana é compatível com a métrica riemanniana,

$$w_{ij} = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle = -\langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle = -w_{ji}(e_k), \ \forall k = 1, ..., n.$$

Usando a linearidade da forma w_{ij}, obtemos

$$w_{ij} = -w_{ji}.$$

Definição 2.9.8. Seja T um tensor de ordem r. A diferencial covariante ∇T de T é o tensor de ordem $r+1$ dado por

$$\nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z) = Z(T(Y_1, ..., Y_r) - T(\nabla_Z Y_1, ..., Y_r) - ... - T(Y_1, ..., \nabla_Z Y_r) \tag{2.6}$$

para todo $Y_1, ..., Y_r, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é o tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, ..., Y_r) = \nabla T(Y_1, ..., Y_r, Z).$$

Em um referencial ortonormal $\{e_1\}$ as componentes $T_{i_1 \ldots i_r j} = \nabla_Z T(e_{i_1}, ..., e_{i_r}, e_j)$ de um tensor T satisfazem

$$\sum_{k=1}^{n} T_{i_1 \ldots i_r k} w_k = dT_{i_1 \ldots i_r} + \sum_{k=1}^{n} T_{k i_2 \ldots i_r} w_{k i_1} + ... + \sum_{k=1}^{n} T_{i_1 \ldots i_{r-1} k} w_{k i_r}.$$

Demonstração. De fato, como $w_{ij}(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle$, obtemos que

$$\begin{aligned} T_{i_1 \ldots i_r j} &= \nabla T(e_{i_1}, ..., e_{i_r}, e_j) \\ &= e_j(T(e_{i_1}, ..., e_{i_r})) - T(\nabla_{e_j} e_{i_1}, ..., e_{i_r}) - ... - T(e_{i_1}, ..., \nabla_{e_j} e_{i_r}) \\ &= dT_{i_1 \ldots i_r j}(e_j) - T\left(\sum_{k=1}^{n} w_{i_1 k}(e_j) e_k, e_{i_2}, ..., e_{i_n} \right) - ... - T\left(e_{i_1}, ..., e_{i_{n-1}}, \sum_{k=1}^{n} w_{i_r k}(e_j) e_k \right). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n} T_{i_1...i_r j} w_k = \left(dT_{i_1...i_r j} + \sum_{k=1}^{n} T_{k i_2 ... i_r} w_{k i_1} + ... + \sum_{k=1}^{n} T_{i_1 ... i_{r-1} k} w_{k i_r} \right) (e_j),$$

para todo $j = 1, .., n$. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} T_{i_1...i_r k} w_k = dT_{i_1...i_r} + \sum_{k=1}^{n} T_{k i_2 ... i_r} w_{k i_1} + ... + \sum_{k=1}^{n} T_{i_1 ... i_{r-1} k} w_{k i_r}.$$

□

Proposição 2.9.9. *Seja M uma variedade com conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:*

1. *$\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + DWdt$.*

2. *$\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.*

3. *Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, i.e., $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.*

Definição 2.9.10. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇. Um campo vetorial V ao longo da curva $\alpha : I \to M$ é chamado paralelo quando $\nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} V = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 2.9.11. *Seja M uma variedade com uma conexão ∇. Seja $\alpha : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 uma vetor tangente a M em $\alpha(t_0)$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de α, tal que $V_0(t_0) = V_0$, ($V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de α)*

Demonstração. ver [2] pagina 58. □

2.10 Curvatura

Definição 2.10.1. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$

dada por

$$R\,(X,\,Y)\,Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,\,Y]} Z = \nabla_{[X,\,Y]} Z - [X,\,Y]\,Z,\;\; Z \in \mathfrak{X}\,(M)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Podemos intuitivamente interpretar R como uma maneira de medir o quanto M deixa de ser euclidiana.

O tensor R pode ser visto como uma função $\mathbb{R}$-multilinear em vetores tangentes. Se $x, y \in T_pM$ o operador linear

$$R(x,y) : T_pM \to T_pM$$

levando cada z em $R(x,y)z$ é chamado um *operador curvatura*. As seguintes são as simetrias da curvatura.

Proposição 2.10.2. *O tensor curvatura R satisfaz as seguintes propriedades para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$:*

a. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(Y,Z)X, W\rangle + \langle R(Z,X)Y, W\rangle = 0$

b. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y,Z)X, W\rangle$

c. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y,Z)W, X\rangle$

d. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$

O item a. é conhecido como a ***Primeira Identidade de Bianchi***

As simetrias do tensor curvatura R conduzem para uma simetria, não tão óbvia, da derivada covariante ∇R, chamada segunda identidade de Bianchi

Proposição 2.10.3 (Segunda identidade de Bianchi). *Sejam $x,\, y,\, z \in T_pM$, então*

$$(\nabla_z R)\,(x,\,y) + (\nabla_x R)\,(y,\,z) + \left(\nabla_y R\right)(z,\,x) = 0.$$

Lema 2.10.4. *Em uma vizinhança de um sistema de coordenadas $x^1, \cdots, x^n$,*

$$R(\partial_k, \partial_l)\partial_j = \sum R^i_{jkl},$$

e as componentes de R são dadas por

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}.$$

Demonstração. para campos de vetores coordenados, temos

$$R_{\partial_k \partial_l} \partial_j = \nabla_{\partial_l} \left(\nabla_{\partial_k} \partial_j \right) - \nabla_{\partial_k} \left(\nabla_{\partial_l} \partial_j \right).$$

$$\nabla_{\partial_l} \left(\sum \Gamma_{kj}^{m} \partial_m \right) = \sum_m \frac{\partial}{\partial x_l} \Gamma_{kj}^{m} \partial_m + \sum \Gamma_{kj}^{m} \Gamma_{lm}^{r} \partial_r.$$

$$\left\{ \sum_i \frac{\partial}{\partial x_l} \Gamma_{kj}^{i} + \sum_m \Gamma_{lm}^{i} \Gamma_{kj}^{m} \right\} \partial_i.$$

desenvolvendo de forma análoga a outra parcela da diferença e subtraindo as duas expressões conseguidas chega-se ao resultado procurado. □

2.10.1 Curvatura seccional

Definição 2.10.5. Considere $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional do espaço tangente T_pM e $\{v, w\}$ uma base de σ: A curvatura seccional de M em p segundo σ é definido por:

$$k(\sigma) = \frac{R(v, w, v, w)}{||v \wedge w||^2}$$

onde $||v \wedge w||^2 = ||v||^2.||w||^2 - \langle v, w \rangle^2$ e $R(v, w, v, w) = \langle R(v, w)v, w \rangle$

Lema 2.10.6. *A curvatura seccional independe da base.*

Demonstração. Tomando uma nova base $\{x, y\}$, podemos escrever v, w como combinação linear de x, y.

$$v = ax + by,$$

(1)

$$w = cx + dy,$$

(2) Devemos mostrar que

$$\frac{R(v, w, v, w)}{||v||^2.||w||^2 - \langle v, w \rangle^2} = \frac{R(x, y, x, y)}{||x||^2.||x||^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

Cálculo de $\langle R(v, w)v, w \rangle$

Substituindo (1) e (2) em $R(v, w)v$, temos:

$$\begin{aligned} R(v, w)v &= R(ax + by, cx + dy)(ax + by) \\ &= R(ax + by, cx + dy)ax + R(ax + by, cx + dy)by \\ &= aR(ax + by, cx + dy)x + bR(ax + by, cx + dy)y \end{aligned}$$

Calculando separadamente $R(ax+by,cx+dy)x$

$$\begin{aligned} R(ax+by,cx+dy)x &= R(ax,cx+dy)x+R(by,cx+dy)x \\ &= R(ax,cx)x+R(ax,dy)x+R(by,cx)x+R(by,dy)x \\ &= acR(x,x)x+adR(x,y)x+bcR(y,x)x+bdR(y,y)x \\ &= adR(x,y)x-bcR(x,y)x \\ &= (ad-bc)R(x,y)x \end{aligned}$$

da mesma forma, temos que

$R(ax+by,cx+dy)y=(ad-bc)R(x,y)y$

ou seja,

$$R(v,w)v=a(ad-bc)R(x,y)x+b(ad-bc)R(x,y)y$$

agora,

$$\begin{aligned} &\langle R(v,w)v,w\rangle = a(ad-bc)\langle R(x,y)x,w\rangle+b(ad-bc)\langle R(x,y)y,w\rangle \\ = \;& a(ad-bc)\langle R(x,y)x,cx+dy\rangle+b(ad-bc)\langle R(x,y)y,cx+dy\rangle \\ = \;& a(ad-bc)\langle R(x,y)x,cx\rangle+a(ad-bc)\langle R(x,y)x,dy\rangle \\ + \;& b(ad-bc)\langle R(x,y)y,cx\rangle+b(ad-bc)\langle R(x,y)y,dy\rangle \\ = \;& ac(ad-bc)\langle R(x,y)x,x\rangle+ad(ad-bc)\langle R(x,y)x,y\rangle \\ + \;& bc(ad-bc)\langle R(x,y)y,x\rangle+bd(ad-bc)\langle R(x,y)y,y\rangle \\ = \;& ad(ad-bc)\langle R(x,y)x,y\rangle-bc(ad-bc)\langle R(x,y)x,y\rangle \\ = \;& ((ad)^2-adbc-adbc+(bc)^2)\langle R(x,y)x,y\rangle \\ = \;& (ad-bc)^2\langle R(x,y)x,y\rangle. \end{aligned}$$

Com cálculos simples que

$$||v||^2||w||^2-\langle v,w\rangle^2=(ad-bc)^2(||x||^2||y||^2-\langle x,y\rangle^2)$$

O que finaliza o lema. $\square$

Proposição 2.10.7. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n, $n\geq 2$, munido de um produto interno $\langle,\rangle$. Sejam $R,R':V\times V\times V\to V$ aplicações trilineares que satisfazem as condições da Prop() para*

$$(x,y,z,w)=\langle R(x,y)z,w\rangle \;\; e \;\; (x,y,z,w)'=\langle R'(x,y)z,w\rangle,$$

onde σ é o subespaço bidimensional gerado por x, y. Se para todo $\sigma \subset V$ tivermos $K(\sigma) = K'(\sigma)$ então $R = R'$.

Demonstração. Suponhamos que $K(\sigma) = K'(\sigma)$ para todo σ, então

$$(x, y, x, y) = (x, y, x, y)'$$

para quaisquer $x, y \in V$ linearmente independentes. Mostremos que

$$(x, y, z, w) = (x, y, z, w)'.$$

Como

$$(x+y, y, x+z, y) = (x, y, x, y) + (x, y, z, y) + (z, y, x, y) + (z, y, z, y)$$
$$(x+y, y, x+z, y) = (x, y, x, y) + (x, y, z, y) + (x, y, z, y) + (z, y, z, y)$$
$$(x+y, y, x+z, y) = (x, y, x, y) + 2(x, y, z, y) + (z, y, z, y)$$

obtemos

$$\begin{aligned}(x, y, x, y) &= \frac{1}{2}((x+z, y, x+z, y) - (x, y, x, y) - (z, y, z, y)) \\ &= \frac{1}{2}((x+z, y, x+z, y)' - (x, y, x, y)' - (z, y, z, y)') \\ &= (x, y, x, y)'\end{aligned}$$

para todo $x, y, z \in V$. Usando o que acabamos de provar, temos

$$(x, y+t, z, y+t) = (x, y+t, z, y+t)',$$

donde

$$(x, y, z, t) + (x, t, z, y) = (x, y, z, t)' + (x, t, z, y)'$$

que podemos escrever

$$(x, y, z, t) - (x, y, z, t)' = (x, t, z, y) - (x, t, z, y)'$$

Logo, a expressão $(x, y, z, w) - (x, y, z, w)'$ é invariante pela permutação dos três primeiros elementos e, consequentemente,

$$\begin{aligned} 0 &= (x,y,z,w)+(y,z,x,w)+(z,x,y,w)-((x,y,z,w)+(y,z,x,w)+(z,x,y,w)) \\ &= (x,y,z,w)-(x,y,z,w)'+(y,z,x,w)-(y,z,x,w)'+(z,x,y,w)-(z,x,y,w)' \\ &= 3((x,y,z,w)-(x,y,z,w)'), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(x,y,z,w) = (x,y,z,w)'.$$

Portanto, $R = R'$. □

Os espaços de curvatura constante, ou seja, variedades Riemannianas com curvatura seccional constante têm um papel importante no desenvolvimento da geometria Riemanniana. Estes espaços são dotados de uma propriedade importante que é a de possuir um número significativo de isometrias locais. Dentro deste contexto, destacaremos o seguinte resultado:

Sejam M uma variedade Riemanniana, p um ponto de M e $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $n = \dim M$, uma base ortonormal de T_pM. Escreva $R_{ijkl} = \left\langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \right\rangle$, $i, j, k, l = 1, \cdots, n$. Então $K(\sigma) = K_o$ para todo $\sigma \subset T_pM$, se e só se

$$R_{ijkl} = K_o \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{2.7}$$

onde
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad i = j \\ 0, & se \quad i \neq j \end{cases}$$
Em outras palavras, $K(\sigma) = K_0$ para todo $\sigma \subset T_pM$ se e só se $R_{ijij} = -R_{ijji} = K_o$ para todo $i \neq j$, e $R_{ijkl} = 0$ nos outros casos.

De forma geral temos:

$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = K_0\{\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle\}$ com $X,Y,Z,W \in T_pM$

A forma bilinear $\mathfrak{R} : TM \times TM \to C^\infty(M)$ que associa a cada par de campos (X,Y), o traço da aplicação $Z \mapsto R(X,Z)Y$, é denominado *Tensor de Ricci* e é dada por

$$\mathfrak{R}(X,Y) = \frac{1}{n-1} tr(Z \mapsto R(X,Z)Y).$$

A *A curvatura de Ricci* na direção $X \in TM$, com $|X| = 1$ é definida como

$$Ric(X) = \frac{1}{n-1}\Re(X,X).$$

Se X é um campo unitário e $X(p) = v$, $p \in M$ e $v \in T_pM$, então a *curvatura de Ricci* na direção de X e no ponto p é escrita como $Ric_p(v)$ ao invés de $\frac{1}{n-1}\Re(X,X)$. Como o traço de uma aplicação bilinear independe da base escolhida, tomemos $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal com $v = e_i$, para algum i. Então temos que

$$\begin{aligned}
Ric_p(v) &= \frac{1}{n-1}\Re(X,X) \\
&= \frac{1}{n-1}tr(Z \mapsto R(X,Z)Y) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(v,e_i)v, e_i\rangle \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} K(v,e_i)
\end{aligned}$$

Observamos que a curvatura de Ricci é uma média obtida das combinações das curvaturas seccionais numa dada direção $X(p) = v$. Ao considerarmos essa média nas n-direções estaremos com a expressão da curvatura escalar.

A *curvatura escalar* é uma função $\rho : M \to \mathbb{R}$ de M no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ dada por

$$\rho(p) = \frac{1}{n(n-1)}tr((X,Y) \mapsto \Re(X,Y))$$

Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$\begin{aligned}
\rho(p) &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ric(e_i) \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} K(e_i, e_j)) \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j=1}^{n-1} K(e_i, e_j); com i \neq j
\end{aligned}$$

Definiremos a seguir gradiente, divergência, laplaciano.

Definição 2.10.8. (Gradiente de f). Sejam M uma variedade riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$. O campo vetorial $gradf : M \to TM$ definido por

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle = df_p(v),\ \ p \in M,\ \ v \in T_pM$$

é denominado gradiente de f. Em outras palavras, grad f é o dual na métrica riemanniana da forma df.

Definição 2.10.9. (Divergência e Laplaciano). Sejam M uma variedade riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$. A divergência de X é a função div $X : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$\operatorname{div} X(p) = \text{traço da aplicação linear } (Y(p) \to (\nabla_Y X)(p)).$$

O Laplaciano de M é *operador* $\triangle : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ dado por

$$\triangle f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f),\ \forall f \in \mathcal{D}(M).$$

Considerando um referencial ortonormal $\{e_i\}$ num aberto $\mathcal{U} \subset M$, podemos escrever, em $\mathcal{U}$, $df = \sum_{i=1}^{n} f_i w_i$, onde w_i, $i = 1, ..., n$ são as n 1-formas duais associadas ao referencial $\{e_i\}$. A função f_i é dita a *derivada* de f na direção de e_i. Além disso, $f_i = df(e_i)$, isto é, grad $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$. A *derivada covariante* de df é dada por

$$\nabla(df) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(w_i \otimes w_j),$$

onde

$$(w_i \otimes w_j)(e_k, e_l) \text{ e } \textstyle\sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j = df_i + \sum_{j=1}^{n} f_i w_{ji}$$

A forma bilinear $\nabla(df)$ é denominada *hessiana* de f na métrica de M. O traço dessa forma bilinear, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ii} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \triangle f$$

é exatamente o *Laplaciano de f*.

Capítulo 3

SUBVARIEDADES

Definição 3.0.10. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ é uma *imersão* se $df : T_pM \to T_{f(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset N$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que ϕ é um *mergulho*.Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma *subvariedade* de N.

Se $\phi : M^m \to N^n$ é uma imersão,então $m \leq n$; a diferença $n - m$ é chamada *codimensão* da imersão f.

O teorema da aplicação inversa garante que se $f : M^m \to N^n$, $m \leq n$; uma imersão. Para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $V \subset M$ em p tal que a restrição $f|_V$ é um mergulho. Ou seja localmente M é subvariedade de N.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_{f(p)}\overline{M}$ decompõe $T_{f(p)}\overline{M}$ na soma direta

$$T_{f(p)}\overline{M} = T_pM + T_pM^{\perp},$$

onde $T_pM = df_p\left(T_pM\right)$ e $T_pM^{\perp} = \left(df_p\left(T_pM\right)\right)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_{f(p)}\overline{M}$.

Se $v \in T_{f(p)}\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \qquad v^T \in T_pM \qquad e \qquad v^N \in T_pM^{\perp}.$$

Denominamos v^T *componente tangencial* de v e v^N a *componente normal* de v. Tal decomposição é evidentimente diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \to \left(p, v^T\right) \qquad e \qquad (p, v) \to \left(p, v^N\right)$$

são diferenciáveis.

A partir da decomposição acima, obtemos o *fibrado normal* em M

$$TM^{\perp} = \bigcup_{p \in M} T_p M^{\perp}.$$

Neste caso,

$T\overline{M}|_{f(M)} = \left\{ X \in T\overline{M}; \pi\left(X\right) \in f\left(M\right), \pi : T\overline{M} \to \overline{M} \text{ é a projeção} \right\} = TM \oplus TM^{\perp}.$

As projeções

$$()^T : T\overline{M} \mid_{f(M)} \to TM$$

e

$$()^N : T\overline{M} \mid_{f(M)} \to TM^T$$

são ditas tangencial e normal, respectivamente. A conexão riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M e suas respectivas extensões locais a M são $\overline{X}$ e $\overline{Y}$, denotamos por em M por

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}\right)^T.$$

é fácil mostrar que ∇ é a conexão riemanniana de M. Ver [6] página 99.

Seja $\boldsymbol{X}\left(U\right)^{\perp}$ o conjunto dos campos de vetores em U normais a $F(U) \approx U$.

A aplicação $B : \boldsymbol{X}\left(U\right) \times \boldsymbol{X}\left(U\right) \to \boldsymbol{X}\left(U\right)^{\perp}$ dada por

$$B\left(X, Y\right) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é denominada *segunda forma fundamental* de f e independe das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.

Proposição 3.0.11. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}\left(U\right)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}\left(U\right) \times \mathfrak{X}\left(U\right) \to \mathfrak{X}\left(U\right)^{\perp}$ dada por*

$$B\left(X, Y\right) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é blinear e simétrica.

Demonstração. Pelas propriedades de linearidade de uma conexão, conclui-se imediatamente que B é aditiva em x e Y e que $B(fX, Y) = fB(X, Y)$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. Resta mostrar que $B(X, fY) = fB(X, Y)$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$.Indicaremos por $\overline{f}$ uma extensão de f a $\overline{\mathcal{U}}$, temos

$$
\begin{aligned}
B(X, fY) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{f}\overline{Y}) - \nabla_X(fY) \\
&= \overline{f}\overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y}) + \overline{X}(\overline{f})\overline{Y} - f\nabla_X(Y) - X(f)Y.
\end{aligned}
$$

Como em M, $f = \overline{f}$ e $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$, concluímos que as duas ultimas parcelas se anulam, donde $B(X, fY) = fB(X, Y)$, o que mostra que B é bilinear.

Para mostrar que B é simétrica, utilizaremos a simetria da conexão Riemanniana, obtemos

$$
\begin{aligned}
B(X, Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \\
&= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - \nabla_X Y + \nabla_Y X - \nabla_Y X \\
&= [\overline{X}, \overline{Y}] - [X, Y] + B(Y, X) = B(Y, X),
\end{aligned}
$$

Pois, em M, $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$. Provando a simetria. $\square$

A aplicação

$$
\begin{aligned}
H_\eta : T_pM \times T_pM &\to \mathbb{R} \\
(x, y) &\mapsto H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle
\end{aligned}
$$

é uma forma bilinear simétrica. Onde $x = X(p)$ e $y = Y(p)$.

Definição 3.0.12. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é denominada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η.

A aplicação H_η é bilinear e simétrica no espaço vetorial T_pM. Portanto existe uma única aplicação autoadjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$ associada a H_η satisfazendo

$$\langle A_\eta x, y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle \ \ \forall x, y \in t_pM$$

Proposição 3.0.13. *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in t_pM^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T$$

Demonstração. Seja $y \in M$ e X, Y extensões locais de x, y respectivamente, e tangentes a M. Então usando o fato de $\langle N, Y\rangle = 0$ e $\langle N, N\rangle = 1$, temos,

$$\begin{aligned} \langle A_\eta(x), y\rangle &= \langle B(X,Y)(p), N\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) \\ &= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p) - \langle \nabla_X Y, N\rangle(p) = \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p) \\ &= X\langle Y, N\rangle(p) - \langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle(p) = \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle \end{aligned}$$

para todo $y \in t_p M$. □

A componente normal de $\overline{\nabla}_X \eta$, denominada *conexão normal* $\nabla^\perp$ da imersão é definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} \nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp &\longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp \\ (X, \eta) &\longmapsto \nabla^\perp_X \eta := (\overline{\nabla}_X \eta)^N. \end{aligned}$$

Explicitamente,

$$\nabla^\perp_x N = (\overline{\nabla}_X \eta)^N = \overline{\nabla}_x N - (\overline{\nabla}_X \eta)^T = \overline{\nabla}_x N + A_\eta.$$

Em que esta conexão normal $\nabla^\perp$ possui as propriedades usuais de uma conexão, isto é, é linear em X, aditiva em η, e

$$\nabla^\perp_X (f\eta) = f \nabla^\perp_X \eta + X(f)\eta, \ \ f \in C^\infty(M).$$

Se a codimensão for um podemos dispensar o índice η. Então,

$$A(x) = -\overline{\nabla}_x N,$$

em que A é chamado **operador forma** ou **operador de Weingarten**.

Ainda para o caso em que a codimensão é um e $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$, N pode ser pensado como uma aplicação de $M \to S^n(1)$ e $dN_p(x) = \overline{\nabla}_x N$. Logo,

$$A(x) = dN,$$

em que A é a **aplicação de Gauss** e $\nabla^\perp_X \eta \equiv 0$.

Proposição 3.0.14. *As seguintes equações se verificam:*

a) Equação de Gauss

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(X,Y)Z, T\rangle - \langle B(Y,T), B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T), B(Y,Z)\rangle,$$

b) Equação de Codazzi

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta)$$

c) Equação de Ricci

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [A_\eta, A_\zeta]X, Y\rangle,$$

onde $[A_\eta, A_\zeta]$ *indica o operador* $A_\eta \circ A_\zeta = A_\zeta \circ A_\eta$.

Demonstração. Sabemos que $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)$ *fórmula de Gauss* e $\nabla^{\perp}_X \eta = \overline{\nabla}_X \eta + A_\eta(X)$. Considere a equação $\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z$, calculando cada membro da equação separadamente, obtemos:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z &= \overline{\nabla}_Y(\nabla_X Z + B(X,Z)) \\
&= \overline{\nabla}_Y\nabla_X Z + \overline{\nabla}_Y B(X,Z) \\
&= \nabla_Y\nabla_X Z + B(\nabla_X Z, Y) + \nabla^{\perp}_Y B(X,Z) - A_{B(X,Z)}Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + B(Y,Z)) \\
&= \overline{\nabla}_X\nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X B(Y,Z) \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + B(\nabla_Y Z, X) + \nabla^{\perp}_X B(Y,Z) - A_{B(Y,Z)}X
\end{aligned}$$

e

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + B([X,Y],Z).$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + B(\nabla_X Z, Y) + \nabla^{\perp}_Y B(X,Z) - A_{B(X,Z)}Y \\
&- B(\nabla_Y Z, X) - \nabla^{\perp}_X B(Y,Z) + A_{B(Y,Z)}X + B([X,Y],Z)
\end{aligned}$$

Tomando o produto interno com T, os termos na direção normal se anulam e temos que

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle A_{B(X,Z)}Y,T\rangle + \langle A_{B(Y,Z)}X,T\rangle$$

Usando o fato de $\langle A_\eta X, Y\rangle = \langle B(X,Y), \eta\rangle$ temos

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(X,Y)Z, T\rangle - \langle B(Y,T), B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T), B(Y,Z)\rangle,$$

Isso prova o item (a)

Da equação de Gauss ocorre o caso particular

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2. \tag{3.1}$$

No caso de hipersuperfície $f : M^n \to M^{n+1}$ a equação de Gauss (3.1) admite ma expressão mais simples. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para $A_\eta = A$ é diagonal, isto é, $A(e_i) = k_i e_i,\ i = 1, ..., n$, em que $k_1, ..., k_n$ são os autovalores de A. Então $H(e_i, e_i) = k_i$ e $H(e_i, e_j) = 0$, se $i \neq j$. Portanto (3.1) se escreve

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = k_i k_j$$

Provaremos agora item (b). Sabemos que

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + B(\nabla_X Z, Y) + \nabla_Y^\perp B(X,Z) - A_{B(X,Z)}Y \\ &- B(\nabla_Y Z, X) - \nabla_X^\perp B(Y,Z) + A_{B(Y,Z)}X + B([X,Y],Z)\end{aligned}$$

fazendo o produto interno com η os termos que estão na direção tangente se anulam, ou seja

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(X,Y)Z, \eta\rangle &= \langle B(\nabla_X Z, Y), \eta\rangle + \langle \nabla_Y^\perp B(X,Z), Y), \eta\rangle - \langle B(\nabla_Y Z, X), \eta\rangle\rangle \\ &- \langle \nabla_X^\perp B(Y,Z), \eta\rangle + \langle B(\nabla_X Y, Z), \eta\rangle - \langle B(\nabla_Y X, Z), \eta\rangle\end{aligned}$$

temos por definição que

$$-(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z,\eta) = -\langle \nabla_X^\perp B(Y,Z), \eta\rangle + \langle B(\nabla_X Y, Z), \eta\rangle + \langle B(Y, \nabla_X Z), \eta\rangle$$

e

$$(\overline{\nabla}_Y B)(X,Z,\eta) = \langle \nabla_Y^\perp B(X,Z), \eta\rangle - \langle B(\nabla_Y X, Z), \eta\rangle - \langle B(X, \nabla_Y Z), \eta\rangle$$

Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, por (2.7),a equação de Codazzi se reduz a

$$(\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) = (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Além disso, se a codimensão é um a equação de Codazzi se escreve

$$\langle \nabla_X A_\eta Y, Z \rangle - \langle A_\eta(\nabla_Y X), Z \rangle = \langle \nabla_Y A_\eta X, Z \rangle - \langle A_\eta(\nabla_Y X), Z \rangle$$

e portanto

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X)$$

onde utilizamos a seguinte notação

$$\nabla A(X, Y) = (\nabla_Y A)(X) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X).$$

Para obter a equação de Ricci, calculemos $\overline{R}(X, Y)\eta = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \eta - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \eta + \overline{\nabla}_{[X,Y]}\eta$. Calculando cada uma das parcelas temos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \eta &= \overline{\nabla}_Y(\nabla^\perp_X \eta - A_\eta X) - \overline{\nabla}_Y \nabla^\perp_X \eta - \overline{\nabla}_Y A_\eta X \\ &= \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \eta - A_{\nabla^\perp_X \eta} Y - \nabla_Y A_\eta X - B(Y, A_\eta X) \end{aligned}$$

$$\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \eta = \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \eta - A_{\nabla^\perp_Y \eta} X - \nabla_X A_\eta Y - B(X, A_\eta Y)$$

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}\eta = \nabla^\perp_{[X,Y]}\eta - A_\eta[X, Y]$$

logo,

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y)\eta &= R^\perp(X, Y)\eta - A_{\nabla^\perp_X \eta} Y - \nabla_Y A_\eta X - B(Y, A_\eta X) \\ &+ A_{\nabla^\perp_Y \eta} X + \nabla_X A_\eta Y + B(X, A_\eta Y) - A_\eta[X, Y] \end{aligned}$$

Tomando o produto interno com ζ, os termos na direção tangente se anulam.

$$\langle \overline{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle - \langle B(A_\eta X, Y), \zeta \rangle + \langle B(X, A_\eta Y), \zeta \rangle$$

usando $\langle A_\eta X, Y\rangle = \langle B(X,Y), \eta\rangle$

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta, \zeta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\eta, \zeta\rangle - \langle A_\zeta A_\eta X, Y\rangle + \langle A_\zeta X, A_\eta Y\rangle$$

Como A é uma aplicação auto-adjunta

$$\begin{aligned}
\langle \overline{R}(X,Y)\eta, \zeta\rangle &= \langle R^{\perp}(X,Y)\eta, \zeta\rangle - \langle A_\zeta A_\eta X, Y\rangle + \langle A_\eta A_\zeta X, Y\rangle \\
&= \langle R^{\perp}(X,Y)\eta, \zeta\rangle - \langle (A_\eta A_\zeta - A_\zeta A_\eta)X, Y\rangle \\
&= \langle R^{\perp}(X,Y)\eta, \zeta\rangle - \langle [A_\eta, A_\zeta]X, Y\rangle.
\end{aligned}$$

□

Definição 3.0.15. Uma imersão $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ é geodésica em p se, para todo $\eta \in T_pM^{\perp}$, a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão f é totalmente geodésica se for geodésica em todo ponto de M.

Definição 3.0.16. Uma imersão $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ é mínima se, para todo $p \in M$ e todo $\eta \in T_pM^{\perp}$ tem-se $trA_\eta = 0$. nesse caso dizemos também que M é mínima.

Tomando $\{e_1, ..., e_n\}$ como uma referencial ortonormal de vetores de T_pM, o vetor *curvatura média* de f em p é definido por

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{n}.(trB)$$

em que $trB = \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)$. Observe que $\overrightarrow{H}$ independe da escolha da base $\{e_1, ..., e_n\}$. De forma que escolhendo esta tal que diagonalisa A_η temos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{H} &= \frac{1}{n}(B(e_1, e_1) + ... + B(e_n, e_n)) \\
&= \frac{1}{n}(k_1 N + ... + k_n N) \\
&= \frac{(k_1 + ... + k_n)}{n}.N.
\end{aligned}$$

em que N é um vetor normal a M. Portanto

$$\begin{aligned} H_\eta &= \langle \overrightarrow{H}, \eta \rangle = \langle \frac{1}{n} trB, \eta \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \langle \langle B(e_i, e_i), \eta \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \langle \langle A_\eta(e_i), e_i \rangle = \frac{1}{n} trA_\eta \end{aligned}$$

Observe que se $trA_\eta = 0$, ou seja, $k_1 + ... + k_n = 0,\ \forall p$, temos que $H(p) = 0\ \forall p$.

O quadrado da norma da segunda forma fundamental de f é dado por:

$$||B||^2 = ||A||^2 = tr(A \circ A^t) = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

Como uma aplicação dos resultados desta secção e de uso fundamental em nosso trabalho, adaptaremos os resultados às hipersuperfícies.

Suponhamos que a codimensão da imersão $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ seja igual a 1, isto é, m=1. O conjunto $f(M) \subset \overline{M}$ é denominado *hipersuperfície*. Sejam $p \in M$, $\eta \in T_pM^\perp$, $|\eta = 1$. Vimos que $T_{f(p)}\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp$, logo η fica univocamente determinado se exigirmos que a base $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ de $T_{f(p)}\overline{M}$ tenha a mesma orientação de $\{e_1, ..., e_n\}$. Seja $\{w_1, ..., w_n\}$ um correferencial dual associado ao referencial $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ de $\mathfrak{X}(M)$. A segunda forma fundamental pode ser considerada como o tenspr bilinear dado por

$$B(X, Y) = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \eta \rangle,\ \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Ou seja,

$$B = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(w_i \oplus w_j),\ h_{ij} = h_{ji} = B(e_i, e_j).$$

Como A_η é uma aplicação simétrica, existe uma base ortonormal de T_pM formada por autovetores próprios $\{e_1, ..., e_n\}$ de A_η com autovalores $k_1, ..., k_n$, isto é $A_\eta(e_i) = k_i e_i$, onde $1 \leq i \leq n$.

Neste caso denominamos os e_i as *direções principais* de f e os k_i as curvaturas principais de f.

O determinante $\det(A_\eta) = k_1, ..., k_n$ é denominado *curvatura de Gauss-Kronecker* de f e $H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$ é denominado *curvatura média* de f.

3.1 Toro de Clifford

Nesta seção veremos algumas propriedades básicas da família simples de hipersuperfícies da esfera euclidiana unitária $S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Em particular o toro de Clifford, do qual calcularemos as suas curvaturas principais. Iniciaremos com algumas considerações sobre variedade produto e sobre produto de imersões.

Sejam $M,\ N,\ \overline{M}$ e $\overline{N}$ variedades Riemannianas, $f : M \to \overline{M}$ e $g : N \to \overline{N}$ imersões isométricas. Considere em $M \times N$ e $\overline{M} \times \overline{N}$ as métricas produto e a imersão isométrica $f \times g : M \times N \to \overline{M} \times \overline{N}$. Sejam $\nabla^M,\ \nabla^N,\ \overline{\nabla}^{\overline{M}}$ e $\overline{\nabla}^{\overline{N}}$ as conexões Riemannianas de $M,\ N,\ \overline{M}$ e $\overline{N}$, respectivamente e

$$\nabla_X^{M\times N} Y = \nabla_{X_M}^M Y_M + \nabla_{X_N}^N Y_N$$

e

$$\overline{\nabla}_U^{\overline{M}\times\overline{N}} V = \overline{\nabla}_{U_{\overline{M}}}^{\overline{M}} V_{\overline{M}} + \overline{\nabla}_{U_{\overline{N}}}^{\overline{N}} V_{\overline{N}}$$

onde, $X = (X_M, X_N)$ e $Y = (Y_M, Y_N)$ são os campos de vetores tangentes a $M \times N$. $U = (U_{\overline{M}}, U_{\overline{N}})$ e $V = (V_{\overline{M}}, V_{\overline{N}})$ os campos de vetores a $\overline{M} \times \overline{N},\ X_M,\ Y_N \in \mathfrak{X}(M)$ e $X_N,\ Y_N \in \mathfrak{X}(N), U_{\overline{M}},\ V_{\overline{M}} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ e $U_N,\ V_N \in \mathfrak{X}(\overline{N})$.

Sejam B_f, B_g as segundas formas fundamentais de f e g, respectivamente, com os operadores forma associados $A_\eta^f : TM \to TM$ e $A_\mu^g : TM \to TM$ para $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ e $\mu \in \mathfrak{X}(N)^\perp$ e u, v tangentes a M e w, z tangentes a N, temos:

$$\langle A_\eta^f u, v\rangle = \langle B_f(u,v), \eta\rangle \text{ e } \langle A_\eta^g w, z\rangle = \langle B_g(w,z), \eta\rangle$$

Assim,

$$B_{f\times g}(X,Y) = (B_f(X_M, Y_M), B_g(X_N, Y_N))$$

é a segunda forma fundamental da imersão produto $f \times g$.

Seja $N = (\eta, \mu)$ normal a $M \times N$, com η normal a M e μ normal a N tal que $|\eta|^2 + |\mu|^2 = 1$. Vamos encontrar o operador A_N associado a $f \times g$.

$$\begin{aligned}
\langle A_N X, Y\rangle &= \langle B_{f\times g}(X,Y), N\rangle \\
&= \langle (B_f(X_M, Y_M), B_g(X_N, Y_N)), (\eta, \mu)\rangle \\
&= \langle B_f(X_M, Y_M), \eta\rangle + \langle B_g(X_N, Y_N), \mu\rangle \\
&= |\eta| \langle A^f_{\frac{\eta}{|\eta|}} X_M, Y_M\rangle + |\mu| \langle A^g_{\frac{\mu}{|\mu|}} X_N, Y_N\rangle
\end{aligned}$$

Portanto, para a imersão produto $f \times g$ o operador forma na direção normal N é

$$\begin{aligned} A_N X &= |\eta| A^f_{\frac{\eta}{|\eta|}} X_M \oplus |\mu| A^g_{\frac{\mu}{|\mu|}} X_N \\ &= (|\eta| A_{\frac{\eta}{|\eta|}} \circ \pi_1^f X + |\mu| A_{\frac{\mu}{|\mu|}} \circ \pi_2^g X) \end{aligned}$$

onde, π_1 é a projeção sobre M e π_2 é a projeção sobre N.

Dados dois números inteiros positivos n_1 e n_2 com $n_1 + n_2 = n$ e dois números reais r_1 e r_2 tal que $r_1^2 + r_2^2 = 1$, o produto $S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$ das esferas $S^{n_i}(r_i) = \{p_i \in \mathbb{R}^{n_i+1} : |p_i| = r_i\}$, $i = 1,2$ é uma hipersuperfície compacta da esfera $S^{n+1}(1)$ chamada usualmente de *Toro de Clifford*. Se $p = (p_1, p_2)$ é um ponto de $M = S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$, *o vetor unitário normal* a M neste ponto é definido por:

$$N(p_1, p_2) = \left(-\frac{r_2}{r_1} p_1, \frac{r_1}{r_2} p_2 \right). \tag{3.2}$$

Temos então que

$$|N| = \sqrt{\left| -\frac{r_2}{r_1} p_1 \right|^2 + \left| \frac{r_1}{r_2} p_2 \right|^2} = 1$$

Mostremos agora que N é normal a M. Precisamos provar que o produto interno entre N e uma vetor tangente qualquer de T_pM é igual a zero.

De fato, seja $v = (v_1, v_2) \in T_pM$, e

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

definida por

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

uma parametrização de uma curva em M, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v = (v_1, v_2)$, sendo $\alpha_1(t) \in S_1^n(r_1), \alpha_2(t) \in S_2^n(r_2)$. Observamos diretamente que

$$\langle \alpha_1(t), \alpha_1(t) \rangle = |\alpha_1(t)|^2 = r_1^2$$

$$\langle \alpha_2(t), \alpha_2(t) \rangle = |\alpha_2(t)|^2 = r_2^2,$$

derivando o primeiro dos produtos internos, temos

$$\langle \alpha_1'(t), \alpha_1(t) \rangle = 0$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Em particular, para $t = 0$, segue que $\langle \alpha_1'(0), \alpha_1(0) \rangle = 0$, ou seja $\langle p_1, v_1 \rangle = 0$. De modo análogo mostra-se que $\langle p_2, v_2 \rangle = 0$. Conseqüentemente

$$\langle N, v \rangle = \left\langle \left(-\frac{r_2}{r_1} p_1, \frac{r_1}{r_2} p_2 \right), (v_1, v_2) \right\rangle = -\frac{r_2}{r_1} \langle p_1, v_1 \rangle + \frac{r_1}{r_2} \langle p_2, v_2 \rangle = 0,$$

para todo $v \in T_p M$. Portanto N é normal a M como desejamos mostra.

Observamos que

$$N(\alpha(t)) = \left(-\frac{r_2}{r_1} \alpha_1(t), \frac{r_1}{r_2} \alpha_2(t) \right),$$

temos

$$Av = -\frac{\partial N(\alpha(t))}{\partial t} = \left(\frac{r_2}{r_1} \alpha_1'(t), -\frac{r_1}{r_2} \alpha_2'(t) \right).$$

Para $v = (\alpha_1'(0), 0) \in T_{p_1} S(r_1)$, temos $Av = \frac{r_2}{r_1}(\alpha_1'(0), 0) = \frac{r_2}{r_1} v$, portanto $\frac{r_2}{r_1}$ é uma curvatura principal. De modo análogo, $v = (0, \alpha_2'(0)) \in T_{p_2} S(r_2)$, vemos que $-\frac{r_1}{r_2}$ também é uma curvatura principal. Assim, o operador A pode ser representado matricialmente como

$$A = \begin{pmatrix} \frac{r_2}{r_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_2}{r_1} & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & -\frac{r_1}{r_2} & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & -\frac{r_1}{r_2} \end{pmatrix}$$

Observando a matriz, vemos que $trA = n_1 \frac{r_2}{r_1} - n_2 \frac{n_1}{n_2}$.

Para fins de adequação ao contexto utilizado, melhoria da notação e simplificação na computação do operador forma da imersão, provaremos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.1. *Seja* $\psi : f \times g : S^{n-m}(r_1) \times S^m(r_2) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$*,* $r_1^2 + r_2^2 = 1$*, a imersão do produto, então as curvaturas principais de* ψ*, consideradas na mesma orientação, são dadas por*

$$k_1 = \ldots = k_{n-m} = \frac{r_1}{r_2}$$

e

$$k_{n-m+1} = ... = k_n = -\frac{r_2}{r_1}$$

Demonstração. Considere as imersões canônicas

$$f : S^{n-m}(r_1) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-m+1}$$

$$g : S^m(r_2) \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$$

$$i : S^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$$

Seja ψ o produto dessas imersões tal que $\psi : f \times g : S^{n-m}(r_1) \times S^m(r_2) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$. Sejam os pontos $p \in S^{n-m}(r_1)$ e $q \in S^m(r_2)$, isto é, $|p| = r_1$ e $|q| = r_2$. Para um ponto (p, q) da variedade produto $S^{n-m}(r_1) \times S^m(r_2)$ temos $|(p, q)|^2 = |p|^2 + |q|^2 = r_1^2 + r_2^2$. Vale ressaltar que dada uma imersão $\bar{i} : S^n(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ temos que a aplicação Normal de Gauss na esfera de raio r é dada por $N(p) = -\frac{p}{|p|}$; portanto segue que $-dN_p(v) = \frac{1}{r}(v) = \frac{1}{r}Id$.Vimos neste capitulo que, seja $N : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, então

$$-dN_p(v) = -(\overline{\nabla}_v N) = A_N(v)$$

onde A é um operador forma e $\overline{\nabla}$ é a conexão de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sendo assim para as imersões $f : S^{n-m}(r_1) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-m+1}$, $g : S^m(r_2) \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ e $i : S^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, teremos operadores forma associados:$A^f_\eta = \frac{1}{r_1}Id,\ A^g_\mu = \frac{1}{r_2}Id,\ A^i_N = Id$ com $\eta(p) = -\frac{p}{r_1}$ e $\mu(q) = -\frac{q}{r_2}$.

Da definição (3.2) de vetor normal ao toro no ponto $(p, q) \in S^{n-m}(r_1) \times S^m(r_2)$, o vetor normal é dado por

$$N(p_1, p_2) = \left(-\frac{r_2}{r_1}p, \frac{r_1}{r_2}q\right)$$

e o operador forma na sua direção será

$$A_N = r_2(A^f)_{-\frac{p}{r_1}} \circ \pi_1 - r_1(A^g)_{-\frac{q}{r_2}} \circ \pi_2.$$

Temos assim:

$$A_N(X, 0) = r_2(A^f)_{-\frac{p}{r_1}} X = \frac{r_2}{r_1}X$$

e

$$A_N(0, Y) = -r_1(A^g)_{-\frac{q}{r_2}} Y = -\frac{r_1}{r_2}Y.$$

Tomando uma base ortonormal de vetores de $f \times g$ dada por

$$\{(e_1, 0), (e_2, 0), ..., (e_{n-m}, 0), (0, h_{n-m+1}), (0, h_{n-m+2}), ..., (0, h_n)\},$$

onde $\{e_i\}$ diagonaliza A^f_η e $\{h_i\}$ diagonaliza A^g_μ, temos as curvaturas principais dadas por

$$k_1 = ... = k_{n-m} = \frac{r_1}{r_2}$$

e

$$k_{n-m+1} = ... = k_n = -\frac{r_2}{r_1}$$

$\square$

3.2 Laplaciano de um Tensor Simétrico

Sejam M^n uma variedade riemanniana e $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial móvel ortornormal em M. E seja $w_1, ..., w_n$ as n 1-formas duais com relação a este referencial. Seja $\phi = \sum_{i,j=1}^n \phi_{ij}(w_i \otimes w_j)$ um tensor simétrico definido em M, em que para cada $p \in M$, temos que $\phi(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ é um tensor simétrico ou seja $\phi_{ij} = \phi_{ji}$, onde $(w_i \otimes w_j)(X, Y) = w_i(X)w_j(Y)$ e suponha que ϕ satisfaça a equação de Codazzi, ou seja,

$$\phi_{ijk} = \phi_{ikj}, \ \forall i, j, k = 1, ..., n.$$

Devemos determinar o Laplaciano de $|\phi|^2 = \sum_{i,j=1}^n \phi_{ij}^2$. Primeiramente calculemos, o Laplaciano de $\phi_{ij} : M \to \mathbb{R}$.

Usando a derivada covariante de ϕ definida na pagina XX ,temos

$$\sum_{k=1}^n \phi_{ijk} w_k = d\phi_{ij} + \sum_{k=1}^n \phi_{kj} w_{ki} + \sum_{k=1}^n \phi_{ik} w_{kj} \tag{3.3}$$

de forma análoga encontramos a segunda derivada covariante de ϕ.

$$\sum_{l=1}^n \phi_{ijkl} w_l = d\phi_{ijk} + \sum_{k=1}^n \phi_{ljk} w_{li} + \sum_{l=1}^n \phi_{ilk} w_{lj} + \sum_{l=1}^n \phi_{ijl} w_{lk} \tag{3.4}$$

Assim,

$$\sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ijkl}(w_l\wedge w_k) = \sum_{k=1}^{n}(d\phi_{ijk}\wedge w_k)+\sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ljk}(w_{li}\wedge w_k) \quad (3.5)$$
$$+ \sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ilk}(w_{lj}\wedge w_k)+\sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ijl}(w_{lk}\wedge w_k) \quad (3.6)$$

Calculando a diferencial exterior de (3.3), obtemos

$$\sum_{k=1}^{n}d(\phi_{ijk}w_k) = \sum_{k=1}^{n}d\phi_{kj}\wedge w_{ki}+\sum_{k=1}^{n}\phi_{kj}dw_{ki} \quad (3.7)$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}d\phi_{ik}\wedge w_{kj}+\sum_{k=1}^{n}\phi_{ik}dw_{kj} \quad (3.8)$$

pois $d(d\phi_{ij})=0$. Visto que

$$\sum_{k=1}^{n}d(\phi_{ijk}w_k)=\sum_{k=1}^{n}d\phi_{ijk}\wedge w_k+\sum_{k=1}^{n}\phi_{ijk}dw_k \quad (3.9)$$

igualando (3.7) e (3.9), temos

$$\sum_{k=1}^{n}d\phi_{ijk}\wedge w_k = -\sum_{k=1}^{n}\phi_{ijk}dw_k+\sum_{k=1}^{n}d\phi_{kj}\wedge w_{ki}+\sum_{k=1}^{n}\phi_{kj}dw_{ki} \quad (3.10)$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}d\phi_{ik}\wedge w_{kj}+\sum_{k=1}^{n}\phi_{ik}dw_{kj} \quad (3.11)$$

Da mesma forma aplicando em (3.5) o resultado encontrado em (3.10),

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ijkl}(w_l\wedge w_k) &= \sum_{k=1}^{n}(d\phi_{ijk}\wedge w_k)+\sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ljk}(w_{li}\wedge w_k)\\
&+ \sum_{k=1}^{n}d\phi_{ik}\wedge w_{kj}+\sum_{k=1}^{n}\phi_{ik}dw_{kj}\\
&= -\sum_{k=1}^{n}\phi_{ijk}dw_k+\sum_{k=1}^{n}d\phi_{kj}\wedge w_{ki}+\sum_{k=1}^{n}\phi_{kj}dw_{ki}\\
&+ \sum_{k=1}^{n}d\phi_{ik}\wedge w_{kj}+\sum_{k=1}^{n}\phi_{ik}dw_{kj}+\sum_{k,l=1}^{n}\phi_{ljk}(w_{li}\wedge w_k)\\
&+ \sum_{k=1}^{n}d\phi_{ik}\wedge w_{kj}+\sum_{k=1}^{n}\phi_{ik}dw_{kj}
\end{aligned}$$

E usando (3.3),

$$d\phi_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \phi_{kjl} w_l - \sum_{l=1}^{n} \phi_{lj} w_{lk} - \sum_{l=1}^{n} \phi_{kl} w_{lj}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} d\phi_{kj} \wedge w_{ki} = \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kjl} w_l \wedge w_{ki} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{lj} w_{lk} \wedge w_{ki} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kl} w_{lj} \wedge w_{ki},$$

$$\sum_{k=1}^{n} d\phi_{ik} \wedge w_{kj} = \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ikl} w_l \wedge w_{kj} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{lk} w_{li} \wedge w_{kj} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{il} w_{lk} \wedge w_{kj},$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ijkl}(w_l \wedge w_k) &= \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kjl} w_l \wedge w_{ki} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{lj} w_{lk} \wedge w_{ki} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kl} w_{lj} \wedge w_{ki} \\
&+ \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{kj} w_{kl} \wedge w_{li} + \sum_{k=1}^{n} \phi_{kj} \Omega_{ki} + \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ikl} w_l \wedge w_{kj} \\
&- \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{lk} w_{li} \wedge w_{kj} - \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{il} w_{lk} \wedge w_{kj} + \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ik} w_{kl} \wedge w_{lj} \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik} \Omega_{kj} + \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ljk} w_{li} \wedge w_k + \sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ikl} w_{lj} \wedge w_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \phi_{kj} \Omega_{ki} + \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik} \Omega_{kj},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

logo

$$\sum_{k,l=1}^{n} \phi_{ijkl}(w_l \wedge w_k) = -\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} \phi_{mj} R_{mikl} + \sum_{m=1}^{n} \phi_{im} R_{mjkl} \right) (w_k \wedge w_l).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\phi_{ijkl} - \phi_{ijlk} &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{n} \phi_{mj} R_{mikl} + \sum_{m=1}^{n} \phi_{im} R_{mjkl} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{n} \phi_{mj} R_{milk} + \sum_{m=1}^{n} \phi_{im} R_{mjlk} \right) \\
&= -\sum_{m,k=1}^{n} \phi_{mj} R_{milk} - \sum_{m,k=1}^{n} \phi_{im} R_{mjlk},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi_{ijkl} - \phi_{ijlk} = -\sum_{m,k=1}^{n} \phi_{mj} R_{milk} - \sum_{m,k=1}^{n} \phi_{im} R_{mjlk} \tag{3.13}$$

Como no referencial ortonormal $e_1, ..., e_n$ o laplaciano da função ϕ_{ij} é dado por $\sum_{k=1}^{n} \phi_{ijkk}$, onde obtemos

$$\begin{aligned}
\triangle\phi_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ijkk} - \phi_{ikjk}) + \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ikjk} - \phi_{ikkj}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ikkj} - \phi_{kkij}) + \left(\sum_{k=1}^{n} \phi_{kk}\right)_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ijkk} - \phi_{ikjk}) + \sum_{k=1}^{n}(\phi_{ikkj} - \phi_{kkij}) + \left(\sum_{k=1}^{n} \phi_{kk}\right)_{ij} \\
&- \sum_{m,k=1}^{n} \phi_{mk} R_{mikj} - \sum_{m,k=1}^{n} \phi_{im} R_{mkkj}.
\end{aligned}$$

Lembrando que o tensor ϕ_{ij} satisfaz a equação de Codazzi $\phi_{ijk} = \phi_{ikj}$,logo

$$\triangle\phi_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} \phi_{kk}\right)_{ij} - \sum_{m,k=1}^{n} \phi_{mk} R_{mikj} - \sum_{m,k=1}^{n} \phi_{im} R_{mkkj}. \tag{3.14}$$

Observação: Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. Tomando $g = f^2$ temos que $dg = 2fdf$. Assim, $g_i = 2ff_i$, onde $df = \sum_{i=1}^{n} f_i w_i$. Daí

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} g_{ij} w_j &= dg_i + \sum_{j=1}^{n} g_j w_j = d(2ff_j w_j) + \sum_{j=1}^{n} 2ff_j w_j \\
&= 2f_i df + 2fdf_i + \sum_{j=1}^{n} 2ff_j w_j = 2f_i df + 2f\left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j\right).
\end{aligned}$$

Portanto, $g_{kk} = 2ff_{kk} + 2f_k^2$ e

$$\triangle g = 2f\triangle f + 2\sum_{k=1}^{n} f_k^2.$$

Como $|\phi|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}^2$ e $tr\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ij}$, temos,

$$\triangle|\phi|^2 = 2\sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}\triangle\phi_{ij} + 2\sum_{i,j,k=1}^{n} \phi_{ijk}^2.$$

Arrumando, temos

$$\frac{1}{2}\triangle|\phi|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}\triangle\phi_{ij} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \phi_{ijk}^2$$

Onde a norma de $\nabla\phi$ é definida por $|\nabla\phi|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} \phi_{ijk}^2$. Assim,

$$\frac{1}{2}\triangle|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}(tr\phi)_{ij} - \sum_{i,j,k,m=1}^{n} \phi_{ij}\phi_{mk}R_{mikj} - \sum_{i,j,k,m=1}^{n} \phi_{ij}\phi_{im}R_{mkkj}.$$

Escolhendo um referencial ortonormal $e_1, ..., e_n$ tal que $\phi_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$. Tal condição é sempre possível, pois ϕ é bilinear simétrica. Pois

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i R_{ijij} = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j R_{ijij}$$

podemos simplificar a equação anterior dessa forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\triangle|\phi|^2 &= |\nabla\phi|^2 + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(tr\phi)_{ii} - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j R_{jiji} - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2 R_{ijji} \\
&= |\nabla\phi|^2 + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(tr\phi)_{ii} - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j R_{ijij} + \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2 R_{ijij} \qquad (3.15) \\
&= |\nabla\phi|^2 + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(tr\phi)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2 R_{ijij} - \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j R_{ijij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} [(\lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2)R_{ijij}] = \sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}.$$

Portanto finalizando, o Laplaciano de $|\phi|^2$ é dado por

$$\frac{1}{2}\triangle|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(tr\phi)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2. \qquad (3.16)$$

Em [**?**] é encontrado o resultado desta secção.

Capítulo 4

PRINCIPAL RESULTADO

4.1 Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante na Esfera

Sejam M^n uma variedade orientada de dimensão n e $f : M^n \to S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão de M na esfera unitária $S^{n+1}(1)$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$. Escolha um campo normal unitário η ao longo de f, e denotemos por $A_\eta : T_pM \to T_pM$ a aplicação linear auto-adjunta associada a segunda forma fundamental da f ao longo de η, isto é,

$$\left\langle A_\eta X, Y \right\rangle = \langle B(X,Y), \eta \rangle$$

Na verdade, $\langle AX, Y\rangle = \langle B(X,Y), \eta\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \eta \right\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_X Y, \eta \right\rangle - \langle \nabla_X Y, \eta\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_X Y, \eta \right\rangle$ onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de $S^{n+1}(1)$ e X, Y campos de vetores tangentes em M.

A aplicação linear e simétrica e pode ser diagonalizada em uma base ortonormal $e_1, ..., e_n$ de T_pM, ou seja,

$$Ae_i = k_i e_i, \qquad i = 1, ..., n$$

onde os k_i são os autovalores associados aos autovetores $e_1, ..., e_n$.

Denotemos por

$$H = \frac{1}{n} \sum_i k_i$$

a curvatura média de f e

$$|A|^2 = \sum_i k_i^2$$

O quadrado da norma do operador de Weingarten

Quando f é uma imersão mínima vale.

Teorema 4.1.1. *Sejam M^n compacta, $f : M^n \to S^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ uma hipersuperfície mínima e A o operador de Weingarten. Assuma que $\mid A \mid^2 \leq n$, para todo $p \in M$. Então*

(i) $\mid A \mid^2 \equiv 0$ (e M é totalmente geodésica) ou $\mid A \mid^2 \equiv n$.

(ii) $| A |^2 \equiv n$ *se, e somente se,* M^n *é um toro de Clifford em* S^{n+1}*, isto é,* M^n *é o produto de esferas* $S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$*,* $n_1 + n_2 = n$*, de raios apropriados.*

O item (i) deve-se a Simons, ver [8]. A caracterização em (ii) foi obtida independentemente por Chern, do Carmo e Kobayashi em [9] e por Lawson em [4]. O resultado no item (ii) é local.

Defina a aplicação linear $\phi : T_pM \to T_pM$

$$\langle \phi X, Y \rangle = H\langle X, Y \rangle - \langle AX, Y \rangle$$

note que $tr(\phi) = \sum_i (H - k_i) = 0$

De fato, dada uma base ortonormal $e_1, ..., e_n$ de T_pM

$$\left\langle \phi(e_i), e_j \right\rangle = H \left\langle e_i, e_j \right\rangle - \left\langle Ae_i, e_j \right\rangle = H \left\langle e_i, e_j \right\rangle - \left\langle k_i e_i, e_j \right\rangle = \left\langle (H - k_i)e_i, e_j \right\rangle$$

Logo,

$$\phi e_i = (H - k_i)e_i$$

Agora,

$$\sum_i (H - k_i) = \sum_i H - \sum_i k_i = nH - nH = 0$$

Portanto,

$$tr(\phi) = \sum_i (H - k_i) = 0$$

E além disso,

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i,j} (k_i - k_j)^2 \quad i, j = 1, ..., n$$

De fato, temos que $\phi e_i = (H - k_i)e_i$, o que implica $|\phi|^2 = \sum_i (H - k_i)^2$ tomando,

$$\mu_i = H - k_i \tag{4.1}$$

segue,

$$|\phi|^2 = \sum_i (H - k_i)^2 = \sum_i \mu_i^2$$

de (4.1) temos,

$$k_i - k_j = (H - \mu_i) - (H - \mu_j) = \mu_j - \mu_i$$

assim,

$$\sum_{i,j} (k_i - k_j)^2 = \sum_{i,j} (\mu_i - \mu_j)^2 = \sum_{i,j} (\mu_i^2 + \mu_j^2 - 2\mu_i\mu_j)$$

logo,

$$\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2=\sum_{i,j}(\mu_i)^2+\sum_{i,j}(\mu_j)^2-2\sum_{i,j}\mu_i\mu_j$$

daí,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2 &= \sum_j\left(\sum_i\mu_i^2\right)+\sum_i\left(\sum_j\mu_j^2\right)-2\left(\sum_i\mu_i\right)\left(\sum_j\mu_j\right)\\ &= n|\phi|^2+n|\phi|^2-2(tr\phi)^2\\ &= 2n\sum_i|\phi|^2\end{aligned}$$

logo segue,

$$|\phi|^2=\frac{1}{2n}\sum_{i,j}(k_i-k_j)^2$$

Portanto $|\phi|^2\equiv 0 \quad \Leftrightarrow M$ é totalmente umbílica.

$H(r)$-toro em $S^{n+1}(1)$ é obtido considerando as imersões canônicas de.

$$S^{n-1}(r)\subset\mathbb{R}^n$$

$$S^1(\sqrt{1-r^2})\subset\mathbb{R}^2,$$

$0<r<1$, onde o valor entre parênteses denota o raio da correspondente esfera, e a imersão do produto:

$$S^{n-1}(r)\times S^1(\sqrt{1-r^2})\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^2$$

Pela escolha feita $H(r)$-toro$\subset S^{n+1}$ e possui curvaturas principais em alguma orientação, por

$$k_1=...=k_{n-1}=\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\ e\ k_n=-\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

ou o simétrico desses valores na orientação oposta.

Seja M^n compacta e orientada e, seja $f : M^n \to S^{n-1}(1)$ com curvatura média constante, escolha uma orientação para M talque $H\geq 0$. Para cada H, seja,

$$P_H(x)=x^2+\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx-n(H^2+1) \tag{4.2}$$

e seja B_H o quadrado da raiz positiva de $P_H(x)$.

Note que $H = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{n} \Rightarrow B_0 = B_H = n$.

Podemos então enunciar o teorema principal, ver [3].

Teorema 4.1.2. *(Alencar-Do Carmo)*

Suponha que $|\phi|^2 \leq B_H,\ \ \forall p \in M$. *Então*

i)$|\phi|^2 \equiv 0$ *(e M totalmente umbílica) ou* $|\phi|^2 \equiv B_H$,

ii) $|\phi|^2 \equiv B_H$ *se e somente se*

a) $H = 0$ *e* M^n *é um toro de Clifford em* $S^{n+1}(1)$

b) $H \neq 0$ *e* $n \geq 3$, *e* M^n *é um H(r)-toro com* $r^2 < \frac{n-1}{n}$

c) $H \neq 0$ *e* $n = 2$, *e* M^n *é um H(r)-toro com* $r^2 \neq \frac{n-1}{n}$

Demonstração. Seja $e_1, ..., e_n$ um referencial ortonormal, o qual diagonaliza ϕ em cada ponto de M, isto é, $\phi e_i = \mu_i e_1$ e seja ∇ a conexão induzida em M.

Inicialmente é feito o calculo do laplaciano de ϕ ,visto que dada uma variedade riemanniana e uma aplicação linear simétrica sobre o espaço tangente de M, que satisfaz formalmente a equação de Codazzi, por (3.16) tal laplaciano é dado por

$$\frac{1}{2}\triangle|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \sum_i \mu_i(tr\phi)_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2 \tag{4.3}$$

onde R_{ijij} é a curvatura seccional do plano e_i, e_j e $\mu_i = H - k_i$. Como $tr\phi \equiv 0$, a hessiana de $tr\phi$ é identicamente nula e portanto $(tr\phi)_{ii} = 0\ \ \forall i = 1, ..., n$. Ou seja a equação (4.3) fica

$$\frac{1}{2}\Delta\,|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2 \tag{4.4}$$

Cálculo de $\sum\limits_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2$

Segundo a definição de ϕ e a formula de Gauss

$$K_{M^n} - K_{S^{n+1}} = k_i k_j$$

o que implica,

$$R_{ijij} - 1 = k_i k_j \Rightarrow R_{ijij} = 1 + k_i k_j = 1 + (H - \mu_i)(H - \mu_j)$$

Daí,

$$R_{ijij} = 1 + \mu_i\mu_j - H(\mu_i + \mu_j) + H^2$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i - \mu_j)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(1+\mu_i\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 - \frac{1}{2}H\sum_{i,j}(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 \\
&+ \frac{1}{2}H^2\sum_{i,j}(\mu_i-\mu_j)^2 \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Calculando

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j}(1+\mu_i\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\mu_i-\mu_j)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mu_i\mu_j(\mu_i-\mu_j)^2 \\
&= \frac{1}{2}2n\sum_i \mu_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mu_i\mu_j(\mu_i^2 - 2\mu_i\mu_j + \mu_j^2) \\
&= n\sum_i \mu_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mu_i^3\mu_j - \sum_{i,j}\mu_i^2\mu_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\mu_i\mu_j^3 \\
&= n|\phi|^2 + \frac{1}{2}\sum_i \mu_i^3\sum_j \mu_j - \sum_i \mu_i^2\sum_j \mu_j^2 + \frac{1}{2}\sum_i \mu_i\sum_j \mu_j^3 \\
&= n|\phi|^2 + \frac{1}{2}\sum_i \mu_i^3 tr\phi - |\phi|^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}tr\phi\sum_j \mu_j^3 \\
&= n|\phi|^2 + \sum_i \mu_i^3 tr\phi - |\phi|^4 \\
&= n|\phi|^2 - |\phi|^4
\end{aligned}$$

e como $\sum_{i,j}(\mu_i-\mu_j)^2 = 2n|\phi|^2$ logo (4.5) fica

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i-\mu_j)^2 = n|\phi|^2 - |\phi|^4 - \frac{1}{2}H\sum_{i,j}(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 + nH^2|\phi|^2 \qquad (4.6)$$

Por outro lado, segue-se que

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 = n\sum_i \mu_i^3 \qquad (4.7)$$

pois,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j}(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 &= \sum_{i,j}(\mu_i^3 - \mu_i^2\mu_j - \mu_i\mu_j^2 + \mu_j^3) \\
&= \sum_{i,j}\mu_i^3 + \sum_{i,j}\mu_j^3 = 2n\sum_i \mu_i^3
\end{aligned}$$

Daí

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\mu_i+\mu_j)(\mu_i-\mu_j)^2 = n\sum_i \mu_i^3$$

Portanto, substituindo (4.7) em (4.6), teremos que

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\mu_i-\mu_j)^2 = n|\phi|^2 - |\phi|^4 + nH^2|\phi|^2 - nH\sum_i \mu_i^3$$

Logo a expressão (4.3) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2}\triangle|\phi|^2 = |\nabla\phi|^2 - |\phi|^4 + n|\phi|^2 + nH^2|\phi|^2 - nH\sum_i \mu_i^3 \tag{4.8}$$

Precisamos estimar $\sum_i \mu_i^3$. Para isso precisamos do seguinte lema, provado pela professora Walci Santos em [7] cujas desigualdades foram firmadas por Okumura em [5]

Lema 4.1.3. *Sejam μ_i, $i = 1, ..., n$, números reais tais que $\sum_i \mu_i = 0$ e $\sum_i \mu_i^2 = \beta^2$, onde $\beta \geq 0$.Então*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_i \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3$$

onde a igualdade ocorre no lado direito (lado esquerdo) se e somente se os $(n-1)$ dos μ_i são não positivos e iguais ($(n-1)$ dos μ_i são não-negativos e iguais)

Demonstração. Se $\beta = 0$

$$\sum_i \mu_i^2 = 0 \Rightarrow \mu_i \ \ e \ \ \sum_m i\mu_i^3 = 0 \ \ \forall i = 1, ..., n$$

Suponhamos $\beta > 0$ e considere a função $g = \sum\limits_i \mu_i^3$ e as condições $f = \sum\limits_i \mu_i = 0$ e $h = \sum\limits_i \mu_i^2 = \beta^2$

Devemos determinar o valor máximo sujeito a condição

$$f(\mu_1, ..., \mu_n) = 0 \ \ e \ \ h(\mu_1, ..., \mu_n) = \beta^2$$

Usando o método do multiplicador de Lagrange,

$$\nabla g = \tilde{\alpha}\nabla f + \tilde{\lambda}\nabla h$$

$$(3\mu_1^2,...,3\mu_n^2) = \tilde{\alpha}(1,...,1) + \tilde{\lambda}(2\mu_1,...,2\mu_n)$$

seja,

$$3\mu_i = \tilde{\alpha} + 2\tilde{\lambda}\mu_i \quad \forall i = 1,...,n$$

fazendo $\lambda = \frac{2}{3}\tilde{\lambda} \quad e \quad \alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{3}$

Segue-se que os pontos críticos são dados pelos valores dos μ_i que satisfazem a equação quadrática.

$$\mu_i^2 - \lambda\mu_i - \alpha = 0, \quad \forall i = 1,...,n$$

Fazendo a e $-b$ as raízes da equação acima. Visto que $\sum_i \mu_i = 0$, após uma reenumeração se necessário, os μ_i são dados por

$$\mu_1 = ... = \mu_p = a \geq 0 \quad e \quad \mu_{p+1} = ... = \mu_n = -b \leq 0$$

Uma vez que, nos pontos críticos.

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \sum_i \mu_i^2 = pa^2 + (n-p)b^2, && (4.9) \\ 0 &= \sum_i \mu_i = pa - (n-p)b, && (4.10) \\ g &= \sum_i \mu_i^2 = pa^3 - (n-p)b^3, && (4.11) \end{aligned}$$

Temos de (4.9) que $p \neq 0 \quad e \quad p \neq n$ pois,

$$p = 0 \Rightarrow nb = 0 \Rightarrow b = 0$$

e de (4.9) $\beta^2 = nb^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0$. Absurdo, uma vez que, por hipótese que $\beta > 0$.

$$p = n \Rightarrow na = 0 \Rightarrow a = 0$$

de (4.9) $\beta^2 = na^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0$ Absurdo, pelo mesmo motivo anterior.

De (4.10) temos

$$a = \frac{n-p}{p}b$$

Substituindo em (4.9) obtemos

$$
\begin{aligned}
\beta^2 &= p\left(\frac{n-p}{p}\right)^2 b^2+(n-p)^2=\left(\frac{(n-p)^2}{p}+n-p\right)b^2 \\
&= \left(\frac{n^2-2np+\cancel{p^2}+np-\cancel{p^2}}{p}\right)b^2=\frac{n(n-p)}{p}b
\end{aligned}
$$

Logo,

$$b^2=\frac{p}{n(n-p)}\beta^2$$

Substituindo em (4.9) obtemos

$$
\begin{aligned}
\beta^2 &= pa^2+(n-p)\frac{p}{n(n-p)}\beta^2 \\
\beta^2 &= pa=\frac{p}{n}\beta^2 \Rightarrow n\beta^2=npa+p\beta^2 \Rightarrow npa^2=(n-p)\beta^2 \\
a^2 &= \left(\frac{n-p}{np}\right)\beta^2
\end{aligned}
$$

Substituindo esse valores em (4.11)

$$
\begin{aligned}
g &= (pa)a^2-((n-p)b)b^2=pa\left(\frac{(n-p)}{np}\right)\beta^2-(n-p)b\left(\frac{p}{n(n-p)}\right)\beta^2 \\
&= \left(\left(\frac{n-p}{n}\right)a-\frac{p}{n}b\right)\beta^2
\end{aligned}
$$

Assim g decresce quando p cresce, portanto g atinge seu valor máximo quando $p=1$ e mínimo quando $p=n-1$.

Quando $p=1$

$$\mu_1=a\geq 0 \quad e \quad \mu_2=...=\mu_n=-b\leq 0$$

e

$$
\begin{aligned}
g &= a^3-(n-1)b^3=(n-1)^3b^3-(n-1)b^3=((n-1)^3-(n-1))b^3 \\
&= ((n-1)((n-1)^2-1))b^3=(n-1)(n^2-2n)b^3=n(n-1)(n-2)b^3 \\
&= n(n-1)(n-2)\frac{1}{n(n-1)}.\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3=\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3
\end{aligned}
$$

Quando $p=n-1$,

$$\mu_1 = ... = \mu_{n-1} = a \geq 0 \quad e \quad \mu_n = -b \leq 0$$

$$\begin{aligned} g &= (n-1)a^3 - b^3 = (n-1)\frac{1}{(n-1)^3}b^3 - b^3 = \frac{1}{(n-1)^2}b^3 - b^3 \\ &= \left(\frac{1}{(n-1)^2} - 1\right)b^3 = \frac{1-(n-2)^2}{(n-1)^2}.\frac{(n-1)}{n}.\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\beta^3 \\ &= (\cancel{1} - n^2 + 2n - \cancel{1}).\frac{1}{n^2}.\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \\ &= -\frac{n(n-2)(n-1)}{(n-1)n\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 = -\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \end{aligned}$$

Donde concluímos que

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3 \leq \sum_i \mu_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\beta^3$$

□

Usando o Lema4.1.3 obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &\geq |\nabla\phi|^2 - |\phi|^4\nabla + n(H^2+1)|\phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3 \qquad (4.12) \\ &= |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2 \underbrace{\left(-|\phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| + n(H^2+1)\right)}_{-P_H(|\phi|)} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\triangle|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2(-P_H(|\phi|)) \qquad (4.13)$$

Calculando as raízes de P_H obtemos

$$x' = -\frac{1}{2}\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n(n-2)^2}{n-1}H^2 + 4n(H^2+1)} = \sqrt{B_H} > 0$$

e

$$x'' = -\frac{1}{2}\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n(n-2)^2}{n-1}H^2 + 4n(H^2+1)} < 0$$

Note que

$$P_H(x) < 0, \quad x' < x < x''$$

Como $0 \leq |\phi| \leq \sqrt{B_H}$ temos que $P_H(|\phi|) \leq 0$

Integrando ambos os lados de (4.13), e usando o teorema de Stokes e as hipóteses, concluímos que

$$0 = \int\limits_M \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq \int\limits_M |\nabla\phi|^2 + \int\limits_M |\phi|^2(P_H|\phi|) \geq 0$$

Daí $|\nabla\phi|^2 = 0$ e $|\phi|^2 = 0$ ou $P_H(|\phi|) = 0 \Rightarrow |\phi|^2 = B_H$

Isso completa a prova de (i).

Como vimos no inicio $|\phi|^2 = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i,j}(k_i - k_j)^2 = 0 \Leftrightarrow M$ é totalmente umbílica.

ii) Queremos mostrar a classificação de M quando $|\phi|^2 = B_H$.

Quando $H = 0$, temos $B_H = n$ e, consequentemente $|\phi|^2 = |A|^2 = n$. O item a) é satisfeito pois, do Teorema 41.1, obtemos que M^n é um toro de Clifford em $S^{n-1}(1)$, isto é, $M^n = S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$, onde $r_1^2 + r_2^2 = 1$ e $n_1 + n_2 = n$.

Agora quando $H \neq 0$, temos que

$|\nabla\phi| = 0$ e $P_H(|\phi|) = |\phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| - n(H^2+1) = 0,$

De

$$P_H(|\phi|) = |\phi|^2 + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| - n(H^2+1) = 0$$

$$n(H^2+1) - |\phi|^2 = \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|$$

Como $|\phi|^2 > 0$ podemos multiplicar ambos os membros por $|\phi|^2$

$$|\phi|^2(n(H^2+1) - |\phi|^2) = \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3 \tag{4.14}$$

Usando o fato que $|\nabla\phi| = 0$ em (4.8) temos

$$\frac{1}{2}\triangle|\phi|^2 = |\phi|^2(n(H^2+1) - |\phi|^2) - nH\sum_i \mu_i^3$$

Substituindo (4.14) e usando (4.13) segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\triangle|\phi|^2 &= \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3 - nH\sum_i \mu_i^3 \\ &\geq |\phi|^2(-P_H(|\phi|)) = 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ou seja

$$nH\sum_i \mu_i^3 \geq \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3$$

Se $nH\sum_i \mu_i^3 > \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3$, implicaria em $\frac{1}{2}\triangle|\phi|^2 > 0$ e teríamos $\int\limits_M \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 > 0$ o que é um absurdo pois $\int\limits_M \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = 0$. portanto

$$nH\sum_i \mu_i^3 = \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3$$

Quando temos essa igualdade o Lema 4.1.3 afirma que os $(n-1)$ dos $\mu_i's$ são iguais e não-positivos. Como $\mu_i = H - k_i$, esta afirmação é valida também para os $k_i's$. Assim, renumerando se necessário, podemos supor,

$$k_1 = ... = k_{n-1} \quad , \quad k_n \neq k_1$$

Como $\nabla\phi = 0$ temos que $\mu_i = const$ para cada $1 \leq i \leq n$. Portanto, $k_i = H - \mu_i = const$.

Nesta situação, se $n \geq 3$, por um clássico resultado de Cartan [1] em que M é uma hipersuperfície isoparamétrica (isto é todas as suas curvaturas principais são constantes) imersa na $S^{n+1}(1)$. Segue-se que M é um $H(r)$-toro.

Para identificar qual $H(r)$-toro aparece. Observe que; do Lema 4.1.3
$nH\sum_i \mu_i^3 = \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3$, se e somente se

$$\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_{n-1} = a < 0 \quad e \quad \mu_n = b > 0$$

,

logo $\sum_i \mu_i = (n-1)a + b = 0$ e $b = -(n-1)a$. Portanto

$$\begin{aligned} |\phi|^2 = \sum_i \mu_i^2 &= (n-1)a^2 + b^2 = (n-1)a^2 + (-(n-1)a)^2 \\ &= [n-1+n^2-2n+1)a^2 = (n^2-n)a^2 = n(n-1)a^2 \end{aligned}$$

ou seja, $a = -\frac{|\phi|}{\sqrt{n(n-1)}}$ e $b = \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\phi|$ logo os μ_i' ficam

$$\mu_1 = ... = \mu_{n-1} = -\frac{|\phi|}{\sqrt{n(n-1)}} \quad e \quad \mu_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\phi|$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
k_1 &= H - \mu_1 = H + \frac{|\phi|}{\sqrt{n(n-1)}} \\
&\vdots \\
k_{n-1} &= H - \mu_{n-1} = H + \frac{|\phi|}{\sqrt{n(n-1)}} \\
k_n &= H - \mu_n = H - \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\phi| \\
n.k_1.k_n &= n(H-\mu_1)(H-\mu_n) = n\left(H + \frac{|\phi|}{\sqrt{n(n-1)}}\right)\left(H - \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\phi|\right) \\
&= n\left(H^2 - \sqrt{\frac{n-1}{n}}H|\phi| + \frac{H|\phi|}{\sqrt{n(n-1)}} - \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}|\phi|^2\right) \\
&= n\left(H^2 - \left(\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}\right)H|\phi| - \frac{1}{n}|\phi|^2\right) \\
&= n\left(H^2 - \frac{n-1-1}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| - \frac{1}{n}|\phi|^2\right) \\
&= nH^2 - |\phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|
\end{aligned}$$

Donde,

$$nk_1k_n = -n \Rightarrow k_1k_n = -1$$

Como $k_1 > 0$ temos $k_n < 0$, $k_n < k_1$ e $H > 0$. Segue que o H(r)-toro é dado por

$$S^{n-1}(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}), k_1 = ... = k_{n-1} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}, \; K_n = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{(n-1)k_1 + k_n}{n} = \frac{(n-1)\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} - \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}{n} = \frac{\frac{(n-1)(1-r^2)-r^2}{r\sqrt{1-r^2}}}{n} \\
&= \frac{n - nr^2 - 1 + r^2 - r^2}{nr\sqrt{1-r^2}} = \frac{(n-1) - nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}} > 0
\end{aligned}$$

Logo,

$$(n-1) - nr^2 > 0 \Rightarrow r^2 < \frac{n-1}{n}$$

terminando a prova do item (ii-b).

Para o caso (ii-c) $(n = 2)$, observamos que $M^2 \subset S^3(1)$ é uma superfície isoparamétrica em $S^3(1)$, desta forma, ou é totalmente umbílica ou é um $H(r)$-toro.

Tendo em vista que $|\phi|^2 \neq 0$, então M^2 é um $H(r)$-toro. Seguindo o mesmo processo do item b), obtemos $k_2 k_1 = -1$

Logo

$k_1 > k_2, k_1 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} > 0, k_2 = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} < 0$ e $H = \frac{1-2r^2}{2r\sqrt{1-r^2}} > 0$

ou

$k_1 < k_2, k_1 = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} < 0, k_2 = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} > 0$ e $H = \frac{2r^2-1}{2r\sqrt{1-r^2}} > 0$

Como $H \neq 0$ temos $r^2 \neq \frac{1}{2}$, o que conclui o item c).

$\square$

REFERÊNCIAS

[1] CARTAN, E. Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques. *Math. Z. 45* (1939), 335–367.

[2] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[3] H.ALENCAR, AND DO CARMO, M. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. *Proc. Amer.Math. Soc. 120* (1994), 1223–1229.

[4] LAWSON, B. Local rigidity therems for minimal hypersurfaces. *Ann. of Math.(2) 89* (1996), 187–197.

[5] OKUMURA, M. Hypersurfaces and a pinching problem on the second fundamnetal tensor. *Amer. J. Math. 96* (1974), 207–213.

[6] O'NEILL, B. *Semi-riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1983.

[7] SANTOS, W. Submanifolds with parallel mean curvature in spheres. *An. Acad. Bras.Ciên. 64* (1992), 215–219.

[8] SIMONS, J. Minimal varieties in riemannian manifolds. *Ann. of Math.(2) 88* (1968), 62–105.

[9] S.S. CHERN, M.P. DO CARMO, S. K. Minimal submanifolds of a sfhere with second fundamental form of constant length. *Functional Analysis and Related Fields(F. Browder, ed.), Springer-Verlag, Berlin* (1970), 59–75.