



PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Sonia Rocha Santos Sousa

Problema Misto para um Sistema Acoplado Não-Linear

São Luís - MA

2014

Sonia Rocha Santos Sousa

Problema Misto para um Sistema Acoplado Não-Linear

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Marcos Antonio Ferreira de Araújo**.

São Luís - MA

2014

Sonia Rocha Santos Sousa

Problema Misto para um Sistema Acoplado Não-Linear

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Marcos Antonio Ferreira de Araújo**.

Dissertação aprovada em 26 de fevereiro de 2014, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(ORIENTADOR) **Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo** (UFMA)

Dr. Maxwell Mariano de Barros (UFMA)

Dr. Nivaldo Muniz (UFMA)

DEDICATÓRIA

Aos meus pais.

Ao meu orientador.

Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agrago a Deus.

Aos meus pais, Alfredo da Silva Sousa e Francisca Rocha Santos, e a minha irmã, Jackeline Rocha, pelo encorajamento e apoio.

Ao professor Marcos Antonio Ferreira de Araújo pela orientação, amizade (chegando a ser um paizão pra mim) e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do Departamento de Matemática pelos seus ensinamentos, especialmente os professores Maxwell Mariano de Barros e Nivaldo Muniz pela grande força que me deram, aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional e também aos meus amigos do mestrado, Leonardo, Greyciane, Launé, Jorge, Jadevilson, Felipe, Calado, Laerte e especialmente Fabiano e Danielle, meus irmãos de coração, que estiveram comigo em todos os momentos.

RESUMO

Investigaremos a existência e unicidade de soluções para o problema misto associado a um sistema não-linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + |u|^{\rho} u + \theta = f \\ \theta_t - \Delta \theta + u_t = g \end{array} \right.$$

Onde M é uma função real positiva, e f e g são funções reais conhecidas.

Palavras-chaves: Equação de Evolução, Espaços de Sobolev, Faedo-Galerkin, Imersão de Sobolev.

ABSTRACT

We investigate the existence and uniqueness of solutions to the mixed problem associated with the nonlinear system:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + |u|^{\rho} u + \theta = f \\ \theta_t - \Delta \theta + u_t = g \end{array} \right.$$

where M is a positive real function, and f and g are known real functions.

Keywords: Evolution equation, Sobolev spaces, Faedo-Galerkin, immersion Sobolev.

SUMÁRIO

	Page
Capítulo 1: Introdução	9
Capítulo 2: Preliminares	11
2.1 Noções Sobre Distribuições Escalares	11
2.1.1 Espaço das Funções Testes e Derivada Distribucional	11
2.1.2 Convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$	13
2.1.3 Convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$:	14
2.2 Espaços de Sobolev	18
2.2.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$	18
2.2.2 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$	20
2.2.3 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,p}(\Omega)$	22
2.2.4 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais	24
2.3 Soma Hilbertiana, Base Hilbertiana	30
2.4 Sobre o Prolongamento de Soluções	30
Capítulo 3: Problema Misto para um Sistema Acoplado Não-Linear.	33
3.1 Notação e Resultado Principal	33
3.2 Passagem ao Limite	46
3.3 Verificação das Condições Iniciais	52
3.4 Unicidade	54
Referências	57

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com bordo suave Γ (fronteira regular Γ). Seja Q o cilindro $Q = \Omega \times]0, T[$ e Σ o bordo lateral. Denotamos a norma usual em $H_0^m(\Omega)$ por $\|\cdot\|$ e a norma usual em $L^2(\Omega)$ por $|\cdot|$, onde $H_0^m(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$, e $H^m(\Omega)$ é o espaço padrão de Sobolev.

Consideremos o sistema não-linear:

$$u_{tt} - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + |u|^\rho u + \theta = f \text{ em } Q \quad (1.1)$$

$$\theta_t - \Delta \theta + u_t = g \text{ em } Q \quad (1.2)$$

$$u = \theta = 0 \text{ em } \Sigma \quad (1.3)$$

$$u(0) = u_0; \quad u'(0) = u_1; \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (1.4)$$

Quando $M(s)$ é uma constante positiva α e $\theta = 0$, a parte dinâmica do sistema acima é uma perturbação não-linear da equação linear de onda $u_{tt} - \alpha \Delta u = f$. Quando $M(s) = m_0 + m_1 s$ com m_0 e m_1 constantes positivas e $\theta = 0$, a equação (1.1) é uma perturbação não-linear do modelo de Kirchhoff-Carrier que descreve pequenas vibrações de uma corda esticada quando a tensão assume apenas uma componente vertical em cada ponto da corda. Para $\theta = 0$, Hosoya-Yamada [12], investigou a existência, unicidade e regularidade das soluções. Em [11], L. A. Medeiros estudou a equação (1.1) quando $\theta = 0$ e a perturbação não-linear igual a u^2 . Finalmente, em [8] Maciel-Lima, estudou a existência e solução local fraca do problema misto para a equação perturbada Kirchhoff-Carrier

$$u'' - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + \lambda |u|^\rho u = f,$$

quando $\lambda = -1$, $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função de classe C^1 , tal que $M(s) \geq m_0 > 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$, onde $\rho \in \mathbb{R}$ e satisfaz $0 < \rho \leq 2/(n-4)$ se $n \geq 5$ ou $\rho \geq 0$ se $n = 1, 2, 3$ ou 4 .

Para outras perturbações do operador de Kirchhoff-Carrier, entre vários trabalhos podemos citar D'ancona-Spagnolo [3], e Bisognin [2]. A descrição matemática de pequenas vibrações transversais de cordas elásticas, fixadas nas extremidades, é uma questão antiga. As primeiras investigações sobre esse problema foram feitas por d'Alembert (1717-1793) e Euler (1707-1783). Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais (x, u) em $\mathbb{R}^2$. Suponhamos que a corda está em posição de repouso no eixo $0x$ com extremidades fixadas nos pontos M e N . Se $u(x, t)$ é o deslocamento vertical de um ponto X da corda, com coordenada x , no tempo t , o modelo matemático proposto por d'Alembert, na notação moderna é: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, onde $c^2 = \frac{\tau_0}{m}$, com τ_0 a tensão inicial e m a massa da corda MN .

D'Alembert observou que a configuração dos deslocamentos da corda são dados por:

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

onde ϕ e ψ , por d'Alembert, são funções arbitrárias.

Um outro modelo para o mesmo problema físico dos deslocamentos horizontais das cordas elásticas foi proposto por Kirchhoff e Carrier, que vamos encontrar como um caso particular de extremidades que se deslocam. Se τ_0 é a tensão inicial, isto é, a tensão na posição de repouso, o modelo de Kirchhoff-Carrier para pequenas vibrações de uma corda elástica, com extremidades fixadas, é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\tau_0}{m} + \frac{k}{2mL} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Note que $k = \sigma E$, E é o módulo de elasticidade de Young, do material da corda X da área da seção transversal da corda na posição de repouso. Observe também que o modelo de d'Alembert é uma linearização de Kirchhoff-Carrier.

Neste trabalho, discutiremos a existência de uma solução para o sistema não-linear acoplado (1.1)-(1.3), onde são impostas as hipóteses apropriadas para M, ρ, f e g . Para a prova da existência, empregaremos o método de aproximação de Galerkin, como mais um argumento de compacidade.

Capítulo 2

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos as notações e resultados fundamentais utilizados no desenvolvimento do trabalho, introduzindo os conceitos de Distribuição e Espaços de Sobolev, com base nos quais define-se uma solução fraca de uma equação diferencial parcial. Destacamos, também, resultados básicos de Análise Funcional sem, contudo, nos dedicarmos às demonstrações, apenas indicaremos as referências bibliográficas onde as mesmas poderão ser encontradas.

2.1 Noções Sobre Distribuições Escalares

2.1.1 Espaço das Funções Testes e Derivada Distribucional

Antes de definirmos o espaço das funções testes, serão feitas algumas considerações sobre as notações.

Por um *multi-índice* entendemos uma n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos e designamos por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice α . Sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, o operador derivação é denotado por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, temos $D^0 u = u$, isto é, o operador derivação neste caso é a identidade.

Em particular, sendo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Neste caso, temos as seguintes possibilidades:

$$\alpha = (1, 1), \quad \alpha = (2, 0) \quad \text{e} \quad \alpha = (0, 2), \quad \text{com} \quad |\alpha| = 2$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. O suporte de u , denotado por $\text{supp}(u)$, é definido como sendo o fecho, em Ω , do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω em que u não se anula. Simbolicamente tem-se:

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega$$

Como consequência da definição, vemos que o $\text{supp}(u)$ é o menor fechado fora do qual u se anula e deduzimos as seguintes relações:

- $\text{supp}(u + v) \subset \text{supp}(u) \cup \text{supp}(v)$
- $\text{supp}(uv) \subset \text{supp}(u) \cap \text{supp}(v)$
- $\text{supp}(\lambda u) = \lambda \text{supp}(u), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

Embora o suporte de uma função contínua seja um fechado de Ω , existem funções cujo suporte não é um compacto. De fato, seja $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $u(x) = 1, \forall x \in (0, 1)$. Notemos que $\text{supp}(u) = (0, 1)$, que não é um conjunto compacto da reta.

Tendo em vista nosso interesse na classe das funções cujo suporte seja um conjunto compacto de Ω , iniciamos representando por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que têm suporte compacto contido em Ω . O seguinte exemplo clássico mostra que o conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ é não-vazio.

Exemplo 2.1.1. Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, denotemos por $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 e raio r , isto é, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}$. Se $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ é tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$, definamos $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x - x_0\|^2 - r^2}\right), & \text{se } \|x - x_0\| < r \\ 0, & \text{se } \|x - x_0\| \geq r \end{cases}$$

Para mostrarmos que $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, consideramos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

e observamos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e se $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\theta(x) = r^2 - \|x - x_0\|^2$, então $\theta \in C^\infty(\Omega)$ e $\varphi = f \circ \theta \in C^\infty(\Omega)$. Desde que $\text{supp}(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$, o qual é compacto, segue que $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Das propriedades do supp estabelecidas anteriormente, vê-se facilmente que $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial e $\text{supp}(D^\alpha u) \subset \text{supp}(u)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, quando u for suficientemente derivável.

É possível introduzir uma topologia em $C_0^\infty(\Omega)$, denominada *topologia limite indutivo*, que faz deste espaço um espaço topológico denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e cujos objetos serão denominados *funções testes*.

2.1.2 Convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$

Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções testes converge para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ quando:

(i) Existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

$$\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \text{ e } \text{supp}(\varphi) \subset K$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre K , para todo multi-índice α .

Por *distribuição escalar* sobre Ω entendemos uma forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma forma $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$T(\alpha\varphi + \psi) = \alpha T(\varphi) + T(\psi), \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

e T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$. O valor da distribuição T em φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$ e por $\mathcal{D}'(\Omega)$ estaremos representando a coleção de todas as formas lineares contínuas $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Dadas T e S em $\mathcal{D}'(\Omega)$ definimos:

$$(i) \langle T + S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$(ii) \langle \alpha T, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

Munido destas operações, $\mathcal{D}(\Omega)$ torna-se um espaço vetorial denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω .

2.1.3 Convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$:

Uma sequência de distribuições escalares $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a distribuição escalar T , em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando:

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Com esta noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico.

Dizemos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω , e denotamos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. As funções localmente integráveis serão utilizadas, inicialmente, para *gerar* distribuições escalares, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.2. Dada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ definimos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Então, T_u é uma distribuição escalar sobre Ω . De fato, a linearidade de T_u segue da linearidade da integral e para comprovarmos sua continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções testes sobre Ω que converge para uma função teste φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Temos:

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_n \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| &= |\langle T_u, \varphi_n - \varphi \rangle| \leq \int_{\Omega} |u(x)| |(\varphi_n - \varphi)(x)| dx \\ &\leq \max_{x \in K} |(\varphi_n - \varphi)(x)| \int_K |u(x)| dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

onde K é um compacto de Ω que contém $\text{supp}(\varphi_n - \varphi)$, $\forall n$.

A distribuição T_u , definida no exemplo (2.1.2), é dita *gerada* pela função localmente integrável u .

Lema 2.1.3. (Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então,*

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração. Ver [11]. □

Do Lema de Du Bois Raymond segue que cada função numérica u , localmente integrável em Ω , determina de maneira unívoca uma distribuição T_u , no seguinte sentido: se u, v forem localmente integráveis em Ω , então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ q.s. em Ω . De fato,

$$\begin{aligned} T_u = T_v &\Leftrightarrow \langle T_u, \varphi \rangle = \langle T_v, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx \\ &\Leftrightarrow \int_{\Omega} (u - v) \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ &\Leftrightarrow u - v = 0 \text{ q.s. em } \Omega. \end{aligned}$$

Por esta razão, identificamos a função u com a distribuição T_u por ela definida e podemos concluir que o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$, das funções localmente integráveis, se identifica com uma parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$. Simbolicamente,

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ T_u; u \in L^1_{loc}(\Omega) \right\} \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

No exemplo dado a seguir, construiremos uma distribuição que não é gerada por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$. Isto mostra que de fato $L^1_{loc}(\Omega)$ é uma parte própria de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 2.1.4. Fixado $x_0 \in \Omega$ definimos δ_{x_0} em $\mathcal{D}(\Omega)$ do seguinte modo:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma distribuição sobre Ω , denominada distribuição de Dirac ou medida de Dirac. No entanto, mostra-se que não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\delta_{x_0} = T_u$; isto é $\delta_{x_0} = T_u$ não é uma distribuição gerada por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, suponhamos que exista $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Em particular, se $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ é definida por

$$\psi(x) = \varphi(x) \|x - x_0\|^2$$

teremos:

$$0 = \psi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \psi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \|x - x_0\|^2 dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Pelo lema (2.1.3), tem-se que $u(x) \|x - x_0\|^2 = 0$ q.s. em Ω e portanto $u(x) = 0$ q.s. em Ω .

Logo, $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, isto é, $\varphi(x_0) = 0, \forall \varphi \in \Omega$, o que é um absurdo.

A noção de derivada fraca de uma função foi proposta inicialmente por Sobolev, motivado pela fórmula de integração por partes do cálculo.

Dada uma função u continuamente derivável em $\mathbb{R}$, no sentido de Newton-Leibniz, então para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ temos:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} u'(x) \varphi(x) dx \quad (2.1)$$

porque φ se anula fora de um compacto da reta.

Motivados pela fórmula (2.1), Sobolev-Schwartz definiram a derivada de uma distribuição.

Inicialmente, vejamos como Sobolev definiu a derivada de uma função localmente integrável em $\mathbb{R}$. Dizemos que a distribuição $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ possui derivada fraca quando

existir uma distribuição $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} v(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad (2.2)$$

A função v denomina-se *derivada fraca* de u .

Para uma distribuição qualquer de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, Schwartz formulou o seguinte conceito: dado $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, define-se a *derivada distribucional* de T como sendo a forma linear $\frac{dT}{dx} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (2.3)$$

No caso em que T e $\frac{dT}{dx}$ são definidas por funções localmente integráveis u e v , respectivamente, então (2.2) e (2.3) coincidem. Agora, se $u \in C^1(\mathbb{R})$ então (2.2) e (2.3) identificam-se a (2.1), isto é, a derivada no sentido clássico identifica-se à derivada no sentido das distribuições.

Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice. A derivada distribucional de ordem α de T é a distribuição $D^\alpha T$ definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (2.4)$$

Antes de apresentarmos os espaços de Sobolev, ressaltamos dois fatos interessantes:

(i) A aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$T \mapsto D^\alpha T$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$, isto é:

$$T_n \rightarrow T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \Rightarrow D^\alpha T_n \rightarrow D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (2.5)$$

(ii) A derivada de uma distribuição localmente integrável pode não ser localmente integrável. Isto motivará o conceito para Espaços de Sobolev.

Exemplo 2.1.5. Seja u a função de Heaviside definida em $\mathbb{R}$ do seguinte modo:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Esta função é localmente integrável em $\mathbb{R}$, no entanto sua derivada não o é. De fato:

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

para toda função $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Portanto, $u' = \delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

A função de Heaviside embora derivável no sentido de Sobolev, a derivada u' não é derivável no mesmo sentido, pois $u' = \delta_0$ não é localmente integrável. Entretanto, segue-se da equação (2.4) que cada distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

2.2 Espaços de Sobolev

2.2.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Dado Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis à Lebesgue $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $x \rightarrow |u(x)|^p$ é integrável, em Ω , no sentido de Lebesgue. A norma de $u \in L^p(\Omega)$ é dada por:

$$|u|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

No caso $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis à Lebesgue e essencialmente limitadas em Ω , isto é, existe $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C, \text{ q.s. em } \Omega.$$

Cada constante C é denominada *majorante essencial* de $|u|$ e a norma de $u \in L^\infty(\Omega)$ é

definida por:

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{x \in \Omega} \{C; |u(x)| \leq C, \text{ q.s. em } \Omega\} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Sendo $|u|_{L^\infty(\Omega)}$ um dos majorantes essenciais de $|u|$, segue da definição que

$$|u(x)| \leq |u|_{L^\infty(\Omega)}, \text{ q.s. em } \Omega.$$

O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$; munido de sua respectiva norma, torna-se espaço de Banach. No caso em que $p = 2$ o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, cuja norma e produto interno serão denotados e definidos, respectivamente, por

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \text{ e } (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

Na teoria dos espaços L^p ressaltamos três desigualdades básicas: a Desigualdade de Young (DY), a Desigualdade de Hölder (DH) e a Desigualdade de Minkowski (DM)

- (DY) Desigualdade de Young: Seja $1 < p < \infty$ e q o expoente conjugado de p , isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ são não negativos, então:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

- (DH) Desigualdade de Hölder: Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p . Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ então:

$$uv \in L^1(\Omega) \text{ e } |uv|_{L^1(\Omega)} \leq |u|_{L^p(\Omega)} |v|_{L^q(\Omega)}.$$

- (DM) Desigualdade de Minkowski: Se $u, v \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, então:

$$|u + v|_{L^p(\Omega)} \leq |u|_{L^p(\Omega)} + |v|_{L^p(\Omega)}.$$

Definição 2.2.1. Sejam V e H dois espaços com $V \subset H$. Diremos que V está imerso continuamente em H quando a aplicação inclusão $i : V \rightarrow H$ for contínua.

Com a definição acima, estabelecemos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'\Omega, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Proposição 2.2.2. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ com $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência de (u_n) , que ainda denotaremos por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que:

- (i) $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.s. em Ω ;
- (ii) Existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$, q.s. em Ω .

Demonstração. Ver [3]. □

2.2.2 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Desde que $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$, segue que toda função $u \in L^p(\Omega)$ pode ser identificada com a distribuição por ela definida. Assim, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, que são também distribuições escalares sobre Ω . No entanto, $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Isto motiva o conceito de um novo espaço de Banach, que será denominado *Espaço de Sobolev* e definido a seguir. Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções u de $L^p(\Omega)$ para as quais as derivadas distribucionais $D^\alpha u$ estão em $L^p(\Omega)$, com $|\alpha| \leq m$. A norma de cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ é definida por:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \text{se } p = \infty$$

O espaço normado $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach denominado *Espaço de Sobolev*. No caso em que $p = 2$ o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, separável continuamente imerso em $L^2(\Omega)$, e denotado por $H^m(\Omega)$. Em símbolos, temos:

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m \right\}$$

com norma e produto interno dados, respectivamente, por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad ((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Para uma melhor compreensão, ilustraremos alguns casos particulares do espaço $H^m(\Omega)$.

- Em dimensão $n = 1$:

$$H^1(a,b) = \{ u \in L^2(a,b); u' \in L^2(a,b) \}$$

com norma e produto escalar

$$\|u\|^2 = \int_a^b |u(x)|^2 dx + \int_a^b |u'(x)|^2 dx \quad \text{e} \quad ((u,v)) = \int_a^b u(x) v(x) dx + \int_a^b u'(x) v'(x) dx.$$

- Em dimensão $n \geq 2$:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}$$

com norma e produto escalar

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx.$$

$$((u,v))_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo, se $1 < p < \infty$, e separável quando $1 \leq p < \infty$.

2.2.3 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,p}(\Omega)$

Embora o espaço das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Por esta razão, define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é:

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Se $1 \leq p < \infty$ e q é o expoente conjugado de p , representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

O espaço $H_0^m(\Omega)$ pode ser caracterizado por meio do *Operador de Traço*. De fato, inicialmente observamos que se Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular, então

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{ \varphi|_{\overline{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \}$$

é denso em $H^m(\Omega)$ e, dessa forma, dado $\varphi \in H^m(\Omega)$ existe uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ na norma de $H^m(\Omega)$ e anotamos:

$$\varphi|_{\Gamma} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu|_{\Gamma},$$

onde o limite é considerado na norma de $H^m(\Omega)$. Para generalizar este conceito de restrição à fronteira consideramos o operador traço:

$$\gamma : H^m(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (2.6)$$

definido por $\gamma(\varphi) = (\gamma_0\varphi, \gamma_1\varphi, \dots, \gamma_{m-1}\varphi)$, sendo

$$\gamma_j\varphi = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^j \varphi_\nu}{\partial \eta^j} \Big|_{\Gamma}, j = 0, 1, \dots, m-1$$

e $\frac{\partial^j \varphi_\nu}{\partial \eta^j}$ é a j -ésima derivada normal de φ_ν na direção da normal exterior η . Anotamos

$$\gamma_0 \varphi = \varphi|_{\Gamma}, \quad \gamma_1 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma}, \quad \gamma_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \Big|_{\Gamma}, \quad \text{etc.}$$

A aplicação γ dada em (2.6), denomina-se *aplicação traço de ordem m* . Esta aplicação é linear, contínua, sobrejetiva e temos:

$$\ker(\gamma) = H_0^m(\Omega).$$

Vejamos, agora, alguns casos particulares da aplicação traço que utilizamos neste trabalho.

- Caso $m = 1$.

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \text{onde } \gamma_0 \varphi = \varphi|_{\Gamma}$$

é linear, contínua e sobrejetiva. Temos, $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\Gamma} = 0\}$ e γ_0 admite uma inversa à direita linear e contínua $\gamma_0^{-1} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$. Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\left\| \gamma_0^{-1} \xi \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| \xi \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \quad \forall \xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

- Caso $m = 2$.

$$\gamma : H^2(\Omega) \rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

onde $\gamma \varphi = (\gamma_0 \varphi, \gamma_1 \varphi) = (\varphi|_{\Gamma}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma})$ e temos:

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega); \varphi|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

Teorema 2.2.3. (Imersão de Sobolev) Se $s > 0$ e $1 < p < n$, então: (a) $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, se $n > sp$ e $p \leq r \leq np/(n - sp)$, (b) $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, se $n = sp$ e $p \leq r < \infty$

Demonstração. Ver [4].

□

Corolário 2.2.4. Se $mp < n$ e $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Demonstração. Ver [4]. □

Teorema 2.2.5. Se $s_1 > s_2$ então $H^{s_1}(\Omega)$ está imerso compactamente em $H^{s_2}(\Omega)$. Em particular, $H^{\frac{1}{2}}(\Omega) \xhookrightarrow{c} H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Demonstração. Ver [8]. □

Observação. Em [8] e [13] os autores estabelecem resultados de imersões no caso de Espaços de Sobolev de ordem fracionária e, também, para Espaços de Traços do tipo $H^s(\Gamma)$, usando teoria de interpolação.

2.2.4 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Seja X um espaço de Banach, cuja norma será representada por $\| \cdot \|$ e no intervalo $(0, T) \subset \mathbb{R}, T > 0$, consideremos a medida de Lebesgue dt . Denominamos *função simples* toda função $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ que assume apenas um número finito de valores não nulos, onde cada valor não nulo é assumido num conjunto mensurável de medida finita. Toda função simples possui uma representação canônica da forma

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i}(t) \cdot \varphi_i,$$

onde $\varphi_i \in X$ e $E_i \subset (0, T)$ é mensurável, com $m(E_i) < \infty$, $i = 1, \dots, k$. Os vetores φ_i são distintos e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos. Aqui χ_{E_i} representa a função característica do conjunto E_i e estes são dados por

$$E_i = \{t \in (0, T); \varphi(t) = \varphi_i\}.$$

Definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^k m(E_i) \cdot \varphi_i.$$

Teorema 2.2.6. *Seja $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tais que*

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\| dt = 0. \quad (2.7)$$

Existe uma única função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ tal que $\|u(t)\|$ e $\|\varphi_n(t) - u(t)\|$ são mensuráveis (à Lebesgue) em $(0, T)$, $\forall n$, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_n(t) - u(t)\| dt = 0. \quad (2.8)$$

Demonstração. Ver [9]. □

Corolário 2.2.7. *Nas condições do Teorema (2.2.6), a sequência $\left(\int_0^T \varphi_n(t) dt \right)$ converge em X e seu limite é unicamente determinado por u . Este limite é, por definição, a Integral de Bochner da função u e é denotado por $\int_0^T u(t) dt$*

Demonstração. Ver [9]. □

Desta forma, a integral de Bochner da função vetorial u , é o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_n(t) dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X .

Dizer que uma função vetorial u é integrável no sentido de Bochner-Lebesgue ou simplesmente $\mathfrak{B}$ -integrável, significa que ela pode ser aproximada em X , quase sempre em $(0, T)$, por uma sequência de funções simples satisfazendo (2.7) e consequentemente (2.8).

Uma função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ é dita *fracamente mensurável* (ω -mensurável) quando a função numérica $t \rightarrow \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, para qualquer funcional $\Phi \in X'$.

Dizemos que u é *fortemente mensurável* (s-mensurável) quando existir uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\varphi_n(t) \rightarrow u(t), \text{ em } X, \text{ quase sempre em } (0, T).$$

Em particular, quando u é s -mensurável, então a função numérica $t \mapsto \|u(t)\|$ é mensurável à Lebesgue.

Teorema 2.2.8. (S. Bochner) Uma função $u : (0, T) \rightarrow X$ é $\mathfrak{B}$ -integrável se, e somente se, é s -mensurável e a função numérica $t \mapsto \|u(t)\|$ é integrável.

Demonstração. Ver [9]. □

Corolário 2.2.9. Sejam X e Y dois espaços de Banach. Se $u : (0, T) \rightarrow X$ é $\mathfrak{B}$ -integrável e se $T : X \rightarrow Y$ é um operador linear limitado, então a função vetorial $T_u : (0, T) \rightarrow Y$ definida por $(T_u)(t) = T(u(t))$ é $\mathfrak{B}$ -integrável e é válida a relação

$$\int_0^T T(u(t)) dt = T \left(\int_0^T u(t) dt \right).$$

Demonstração. Ver [9]. □

Corolário 2.2.10. Se $u : (0, T) \rightarrow X'$ é $\mathfrak{B}$ -integrável, então para cada $v \in X$ temos

$$\left\langle \int_0^T u(t) dt, v \right\rangle_{X', X} = \int_0^T \langle u(t), v \rangle_{X', X} dt.$$

Demonstração. Ver [9]. □

Num espaço de Hilbert H com produto interno $(\cdot, \cdot)$ onde os funcionais lineares limitados são identificados, via o Teorema da Representação de Riesz, com o produto interno, obtemos do corolário (2.2.10) a seguinte relação

$$\left(\int_0^T u(t) dt, v \right) = \int_0^T (u(t), v) dt, \forall v \in H,$$

quando $u : (0, T) \rightarrow H$ for $\mathfrak{B}$ -integrável.

Dado $T > 0$, um número real, denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função numérica $t \mapsto \|u(t)\|_X$ está em $L^p(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; H)$ é também um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T ((u(t), v(t)))_H dt.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \rightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$ com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Lema 2.2.11. (Imersão) *Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos que $X \hookrightarrow Y$, isto é, $X \subset Y$ com imersão contínua. Se $1 \leq s \leq r \leq \infty$, então*

$$L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^s(0, T; Y).$$

Demonstração. Ver [9]. □

Lema 2.2.12. *Se $u \in L^p(0, T; X')$, $1 \leq p \leq \infty$, e $v \in X$ então $t \mapsto \langle u(t), v \rangle_{X', X} \in L^p(0, T)$. Em particular, se H é um espaço de Hilbert, então $t \mapsto (u(t), v)_H \in L^p(0, T)$.*

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0, T; X')$, onde p e q são expoentes conjugados. No caso, $p = 1$ o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$.

Lema 2.2.13. Se p e q são índices conjugados, $u \in L^p(0, T; X)$ e $v \in L^q(0, T; X')$, então a função numérica $t \mapsto \langle v(t), u(t) \rangle_{X', X} \in L^1(0, T)$

Demonstração. Ver [9]. □

Observamos que o espaço de Banach $L^p(0, T; L^p(\Omega))$ se identifica, via o Teorema de Fubini, com o espaço $L^p(Q)$, $1 \leq p \leq \infty$, sendo Q o cilindro $\Omega \times (0, T)$. De fato, vejamos o caso em que $1 \leq p < \infty$. Dada uma função $u \in L^p(0, T; L^p(\Omega))$, então para cada $t \in (0, T)$ temos que $u(t) \in L^p(\Omega)$ e portanto $u(t)$ é uma função de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cujo valor em x será denotado por $u(x, t)$. Assim,

$$\int_0^T |u(t)|_{L^p(0, T)}^p dt = \int_0^T \int_{\Omega} |u(x, t)|^p dx dt = \int_Q |u(x, t)|^p dQ = |u|_{L^p(Q)}^p.$$

Dado $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, definimos o operador $T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$ por:

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t) \varphi(t) dt,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner em X . A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(0, T)$ em X e por esta razão é denominada distribuição vetorial.

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X , o qual denotaremos $\mathcal{D}'(0, T; X)$. Por $C^0([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$, representaremos o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Por $C_w^0([0, T]; X)$, denotaremos o espaço das funções $u : [0, T] \rightarrow X$ tais que a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X', X}$ é contínua em $[0, T]$, $\forall v \in X'$. Uma tal função u é denominada *fracamente contínua* e no caso em que $X = H$ é um espaço de Hilbert, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \mapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$.

Lema 2.2.14. Sejam V e H espaços de Hilbert, V imerso continuamente em H , $u \in L^p(0, T; V)$ e $u' \in L^p(0, T; H)$, com $1 \leq p \leq \infty$, então

$$u \in C^0([0, T]; H) \cap C_w^0([0, T]; V).$$

Demonstração. Ver Lions [7]. □

Lema 2.2.15. (Lema de Compacidade de Aubin-Lions) *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach reflexivos tais que, $B_0 \xhookrightarrow{c} B \hookrightarrow B_1$. Se $1 < p_0, p_1 < \infty$ e $T > 0$, então o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}$, está compactamente imerso em $L^{p_0}(0, T; B)$.

Demonstração. Ver Lions [7]. □

Como consequência do Lema de Compacidade de Aubin-Lions, temos que se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^{p_0}(0, T; B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^{p_1}(0, T; B_1)$, então $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada em W . Daí, segue da imersão compacta, que existe uma sub-sequência $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de (u_ν) tal que $(u_{\nu_k}) \rightarrow u$ forte em $L^{p_0}(0, T; B)$.

Lema 2.2.16. (Lions) *Sejam G um aberto limitado de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_m e g funções de $L^q(G)$, $1 < q < \infty$, satisfazendo*

$$\|g_m\|_{L^q(G)} \leq c \text{ e } g_m \rightarrow g \text{ q.s. em } G.$$

Então:

$$g_m \rightarrow g \text{ em } L^q(G) \text{ fraco}$$

.

Demonstração. Ver [7]. □

2.3 Soma Hilbertiana, Base Hilbertiana

Definição 2.3.1. Seja $(E_n)_{n \geq 1}$ uma sucessão de subespaços fechados de um espaço de Hilbert H . Dizemos que H é soma Hilbertiana dos E_n e escrevemos $H = \bigoplus_n E_n$ se:

- (i) Os E_n são dois a dois ortogonais, isto é, $(u, v) = 0, \forall u \in E_m, \forall v \in E_n, m \neq n$.
- (ii) O subespaço gerado pelos E_n é denso em H .

Teorema 2.3.2. Suponhamos $H = \bigoplus_n E_n$ e denotemos por P_{E_n} a projeção de H sobre E_n . Se $u \in H$ e $u_n = P_{E_n} u$, então:

- (i) $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, isto é, $u = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k u_n$.
- (ii) $|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2$ (igualdade de Bessel-Parseval).

Reciprocamente, dada uma sucessão (u_n) de H , com $u_n \in E_n, \forall n$, e $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$, então a série $\sum_n u_n$ é convergente em H e $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ verifica $u_n = P_{E_n} u$.

Demonstração. Ver [3]. □

Definição 2.3.3. Uma seqüência (w_ν) de vetores de H é chamada base Hilbertiana se:

- (i) $(w_\nu, w_\mu) = \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1, & \text{se } \nu = \mu \\ 0, & \text{se } \nu \neq \mu \end{cases}$;
- (ii) As combinações lineares finitas dos w_ν são densas em H .

Resulta do Teorema (2.3.2) que se $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma base Hilbertiana de H , então para todo $u \in H$ tem-se:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, w_\nu) w_\nu, \quad \text{e} \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, w_\nu)|^2.$$

Teorema 2.3.4. Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.

Demonstração. Ver [3]. □

2.4 Sobre o Prolongamento de Soluções

Seja D um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{m+1}$ cujos elementos serão denotados por (t, x) , $x \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}$ e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função não necessariamente contínua. Se existe uma função $x(t)$, absolutamente contínua, definida em algum intervalo da reta I tal que $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$ e

$$x' = f(t, x) \text{ para quase todo } t \in I \quad (2.9)$$

então dizemos que $x(t)$ é uma solução de (2.9) sobre I .

Dado $(t_0, x_0) \in D$ consideremos o seguinte problema do valor inicial associado a (2.9)

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \quad (2.10)$$

As seguintes condições sobre f são denominadas *Condições de Carathéodory*:

1. $f(t, x)$ é mensurável em t , para cada x fixo;
2. $f(t, x)$ é contínua em x , para cada t fixo;
3. Para cada compacto $K \subset D$, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que

$$|f(t, x)| \leq m_K(t), \forall (t, x) \in D.$$

Teorema 2.4.1. (Carathéodory)

Sobre o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{m+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, $a > 0$, $b > 0$ consideremos $f : R \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo as condições de Carathéodory. Existe uma solução $x(t)$ de (2.10) em algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $(\beta > 0)$.

Demonstração. Ver [11]. □

Corolário 2.4.2. Se $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ é aberto e f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D , então o problema (2.10) tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.

Seja $\varphi(t)$ uma solução de (2.9) sobre I . Por um *prolongamento* de φ ao intervalo $I_1 \supset I$, entendemos uma solução φ_1 de (2.9) definida em I_1 tal que $\varphi_1(t) = \varphi(t)$, $\forall t \in I$.

Teorema 2.4.3. Seja D um aberto limitado e conexo do $\mathbb{R}^{m+1}$ e suponha que f satisfaça as duas primeiras condições de Carathéodory sobre D e que exista uma função integrável $m(t)$ tal que $|f(t, x)| \leq m(t)$, para todo $(t, x) \in D$. Seja φ uma solução de (2.9) sobre o intervalo aberto (a, b) então:

- (i) existem $\varphi(a+0)$, $\varphi(b-0)$;
- (ii) se $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então φ pode ser prolongada até $(a, b+\delta]$ para algum $\delta > 0$.
Análogo para a ;
- (iii) $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$ (∂D fronteira de D);
- (iv) se f estende-se a $\overline{D}$ sem que ele perca suas propriedades, então $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$.

Demonstração. Ver [11]. □

Corolário 2.4.4. *Seja $D = [0, T] \times B$, $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^m; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições do Teorema (2.4.3). Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = x_0, |x_0| \leq b \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I , onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha $|\varphi(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0, T]$.

Demonstração. Ver [11]. □

Capítulo 3

PROBLEMA MISTO PARA UM SISTEMA ACOPLADO NÃO-LINEAR.

3.1 Notação e Resultado Principal

Faremos as seguintes suposições:

$$M \in C^1[0, \infty) \text{ e } M(s) \geq m_0 > 0 \text{ para } s \geq 0. \quad (3.1)$$

$$0 < \rho \leq \frac{2}{n-2} \text{ se } n \geq 5 \text{ e } 0 \leq \rho < \infty \text{ se } n = 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \quad (3.2)$$

$$f, g \in C^0(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (3.3)$$

O resultado principal deste trabalho será dado no teorema a seguir:

Teorema 3.1.1. *Assumindo-se (3.1)-(3.3). Para $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, e $\theta_0 \in H_0^1(\Omega)$, existem $T_0 \in \mathbb{R}$, $0 < T_0 < T$ tal que (1.1)-(1.4) tem única solução fraca $\{u, \theta\}$ em $[0, T_0]$ satisfazendo (1.1)-(1.2) no seguinte sentido:*

$$\frac{d}{dt} (u'(t), \omega) + M \left(\int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \right) a(u(t), \omega) + (|u(t)|^\rho u(t), \omega) + (\theta(t), \omega) = (f(t), \omega)$$

$$\frac{d}{dt} (\theta(t), \omega) + a(\theta(t), \omega) + (u'(t), \omega) = (g(t), \omega)$$

para todo $\omega \in H_0^1(\Omega)$ no sentido das distribuições $D'(0, T)$.

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \theta'(0) = \theta_0$$

Demonstração. Sejam $\omega_1, \dots, \omega_m$ os autovetores do Laplaciano em Ω e seja V_m o espaço gerado pelos m-primeiros autovetores. Agora, consideremos o seguinte sistema aproximado:

$$(u_m''(t), \omega_k) - M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\Delta u_m(t), \omega_k) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), \omega_k) + (\theta_m(t), \omega_k) = (f(t), \omega_k) \quad (3.4)$$

$$(\theta_m'(t), \omega_k) - (\Delta \theta_m(t), \omega_k) + (u_m'(t), \omega_k) = (g(t), \omega_k) \quad (3.5)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ fortemente em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad (3.6)$$

$$u'_m(0) = u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ fortemente em } H_0^1(\Omega) \quad (3.7)$$

$$\theta_m(0) = \theta_{0m} \rightarrow \theta_0 \text{ fortemente em } H_0^1(\Omega) \quad (3.8)$$

onde $1 \leq k \leq m$. Existem subsequências c_{km} e d_{km} tal que

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^m c_{km}(t) \omega_k \text{ e } \theta_m(t) = \sum_{k=1}^m d_{km}(t) \omega_k$$

são as únicas soluções locais do sistema acima em algum intervalo $[0, t_m[$, onde $t_m \in [0, T[$.

O sistema aproximado acima encontra-se nas condições do Teorema de Caratheodory e, portanto, possui solução $\{u_m, \theta_m\}$ definida no intervalo $(0, t_m)$, $0 < t_m \leq T$.

As estimativas obtidas a seguir nos permitirão estender as soluções $\{u_m, \theta_m\}$ para o intervalo $[0, T[$.

Estimativa (i): Multiplicando-se (3.4) por $c'_{km}(t)$ e multiplicando-se (3.5) por $d_{km}(t)$, e somando-se em seguida sobre k , temos:

$$\begin{aligned} & (u''_m(t), c'_{km}(t) \omega_k) - M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\Delta u_m(t), c'_{km}(t) \omega_k) + \\ & + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), c'_{km}(t) \omega_k) + (\theta_m(t), c'_{km}(t) \omega_k) = (f(t), c'_{km}(t) \omega_k) \\ & (u''_m(t), u'_m(t)) - M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\Delta u_m(t), u'_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t)) + \\ & + (\theta_m(t), u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

De,

$$(\theta'_m(t), d_{km}(t) \omega_k) - (\Delta \theta_m(t), d_{km}(t) \omega_k) + (u'_m(t), d_{km}(t) \omega_k) = (g(t), d_{km}(t) \omega_k)$$

resulta,

$$(\theta'_m(t), \theta_m(t)) - (\Delta \theta_m(t), \theta_m(t)) + (u'_m(t), \theta_m(t)) = (g(t), \theta_m(t)) \quad (3.10)$$

A partir de (3.9), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 - \underbrace{M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 \right)}_{\Omega} + \underbrace{\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p dt}_{\Omega} + (\theta_m(t), u'_m(t)) = \\ & = (f(t), u'_m(t)) \end{aligned}$$

onde $p = \rho + 2$.

Analisando-se o 2º e o 3º termo da igualdade acima, temos:

Segundo termo: $M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2$

Seja $\widehat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(s) ds$, então: $\widehat{M} \left(\|u_m(t)\|^2 \right) = \int_0^{\|u_m(t)\|^2} M(s) ds$. Portanto,

$$\frac{d}{dt} \widehat{M} \left(\|u_m(t)\|^2 \right) = M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2$$

Terceiro termo: $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p dt$

Fazendo-se $p = \rho + 2$, e derivando-se pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dt} \left(|u_m(t)|^{\rho+2} \right) = (\rho+2) |u_m(t)|^{\rho+2-1} u'_m(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(|u_m(t)|^{\rho+2} \right) = (\rho+2) |u_m(t)|^{\rho+1} u'_m(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(|u_m(t)|^{\rho+2} \right) = (\rho+2) |u_m(t)|^{\rho} u_m(t) u'_m(t)$$

$$\frac{1}{\rho+2} \frac{d}{dt} \left(|u_m(t)|^{\rho+2} \right) = |u_m(t)|^{\rho} u_m(t) u'_m(t)$$

$$\int |u_m(t)|^{\rho} u_m(t) u'_m(t) dt = \frac{1}{\rho+2} \frac{d}{dt} \int_0^t |u_m(t)|^{\rho+2} dt = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p dt$$

Das análises do segundo e do terceiro termos, temos:

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \underbrace{M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2}_{\frac{d}{dt} \widehat{M} \left(\|u_m(t)\|^2 \right)} + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p dt + (\theta_m(t), u'_m(t)) = \\ & = (f(t), u'_m(t)) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \widehat{M} \left(\|u_m(t)\|^2 \right) + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(t)|^p dt + (\theta_m(t), u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t))$$

Da igualdade acima, obtemos:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ |u'_m(t)|^2 + \widehat{M} \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \right\} + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p}_{\text{onde } p = \rho + 2} = \underbrace{-(\theta_m(t), u'_m(t)) + (f(t), u'_m(t))}_{\text{Cada membro dessa igualdade corresponde a uma equação, então:}}$$

onde $p = \rho + 2$. Cada membro dessa igualdade corresponde a uma equação, então:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ |u'_m(t)|^2 + \widehat{M} \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \right\} + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \quad (3.11)$$

$$-(\theta_m(t), u'_m(t)) + (f(t), u'_m(t)) \quad (3.12)$$

$$\bullet \underbrace{(\theta'_m(t), \theta_m(t))}_{\text{}} - \underbrace{(\Delta \theta_m(t), \theta_m(t))}_{\text{}} + (u'_m(t), \theta_m(t)) = (g(t), \theta_m(t))$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_m(t)\|^2 + (u'_m(t), \theta_m(t)) = (g(t), \theta_m(t))$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ |\theta_m(t)|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 \right\} = - (u'_m(t), \theta_m(t)) + (g(t), \theta_m(t)) \quad (3.13)$$

Definindo-se:

$$E(u(t), \theta(t)) = \frac{1}{2} \left\{ |u'_m(t)|^2 + |\theta(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) + \|\theta(t)\|^2 \right\} + \frac{1}{p} \|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p$$

onde $\widehat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(s) ds$.

Usando-se a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ nas equações (3.12) e (3.13), obtemos:

$$\begin{aligned} -(\theta_m(t), u'_m(t)) + (f(t), u'_m(t)) &\leq \frac{1}{2} |\theta_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|f(s)\|^2 + \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|^2 \\ - (u'_m(t), \theta_m(t)) + (g(t), \theta_m(t)) &\leq \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2} |\theta_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \|g(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\theta_m(t)\|^2 \end{aligned}$$

Somando-se (3.12) e (3.13), usando-se a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ e a desigualdade de Poincaré, integramos de 0 a $t \leq t_m$ para obter:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\{ |u'_m(t)|^2 + |\theta_m(t)|^2 + m_0 \|u_m(t)\|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 \right\} + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &\leq E(u_m(t), \theta_m(t)) \\ &\leq E(u_{0m}, \theta_{0m}) + \frac{1}{2} \int_0^T \|f(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^T \|g(s)\|^2 ds + \frac{3}{2} \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \frac{3}{2} \int_0^t |\theta_m(s)|^2 ds \end{aligned}$$

De (3.6)-(3.8) e da hipótese (3.3), segue da desigualdade de Gronwall que

$$\begin{aligned} &|u'_m(t)|^2 + |\theta_m(t)|^2 + m_0 \|u_m(t)\|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &\leq \left\{ 2E(u_0, \theta_0) + \int_0^T \|f(s)\|^2 ds + \int_0^T \|g(s)\|^2 ds \right\} e^T \end{aligned}$$

Quando estendemos a solução aproximada $\{u_m(t), \theta_m(t)\}$ para o intervalo $[0, T]$, teremos as estimativas

$$|u'_m(t)| \leq C_1, \quad \|u_m(t)\| \leq C_2, \quad \text{e} \quad \|\theta_m(t)\| \leq C_1 \quad (3.14)$$

onde $C_1 = \left\{ 2E(u_0, \theta_0) + \int_0^T \|f(s)\|^2 ds + \int_0^T \|g(s)\|^2 ds \right\} e^T$ e $C_2 = C_1 m_0^{-1}$.

A partir de agora denotaremos por C várias constantes positivas independentes de m e t e t em $[0, T]$.

Estimativa (ii): observe que os sistemas (3.4) e (3.5) são equivalentes a

$$(u''_m(t), \omega) - M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\Delta u_m(t), \omega) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), \omega) + (\theta_m(t), \omega) = (f(s), \omega) \quad (3.15)$$

$$(\theta'_m(t), \omega) - (\Delta \theta_m(t), \omega) + (u'_m(t), \omega) = (g(t), \omega) \quad (3.16)$$

Para todo $\omega \in V_m$. Se $u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \omega_j$, então $-\Delta u'_m(t) = \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t) (-\Delta \omega_j) = \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t) \lambda_j \omega_j$. Logo, $-\Delta u_m(t) \in V_m$. Tomando-se $\omega = -\Delta u'_m(t)$ na equação aproximada (3.15), obtemos:

$$\underbrace{(u''_m(t), -\Delta u'_m(t))}_{\text{}} - M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \underbrace{(\Delta u_m(t), -\Delta u'_m(t))}_{\text{}} + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u'_m(t)) +$$

$$+ (\theta_m(t), -\Delta u'_m(t)) = (f(t), -\Delta u'_m(t))$$

Analisando-se os termos destacados na igualdade acima, temos:

$$\begin{aligned} \bullet (u''_m(t), -\Delta u'_m(t)) &= - \int_{\Omega} u''_m \Delta u'_m dx = - \int_{\Omega} \nabla u''_m \nabla u'_m dx - \int_{\Gamma} u''_m \frac{\partial u'_m}{\partial \eta} d\Gamma = \\ &= (\nabla u''_m(t), \nabla u'_m(t)) = ((u''_m(t), u'_m(t))) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_m(t)\|^2 \end{aligned}$$

$$\bullet (\Delta u_m(t), -\Delta u'_m(t)) = - \int_{\Omega} \Delta u_m \Delta u'_m dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta u_m(t)|^2$$

De modo análogo, deduzimos que: $(f(t), -\Delta u'_m(t)) = (\nabla f(t), \nabla u'_m(t))$,

$$(\theta_m(t), -\Delta u'_m(t)) = (\nabla \theta_m(t), \nabla u'_m(t)) \text{ e}$$

$(|u_m(t)|^\rho u_m(t), -\Delta u'_m(t)) = (\nabla |u_m(t)|^\rho u_m(t), \nabla u'_m(t))$. Aqui, usamos as hipóteses sobre $f \in C^0(0, T; H_0^1(\Omega))$

Substituindo-se os resultados encontrados na equação (3.15), temos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_m(t)\|^2 + M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta u_m(t)|^2 + (\nabla |u_m(t)|^\rho u_m(t), \nabla u'_m(t)) + (\nabla \theta_m(t), \nabla u'_m(t))$$

$$= (\nabla f(t), \nabla u'_m(t))$$

De onde resulta,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|u'_m(t)\|^2 + M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) |\Delta u_m(t)|^2 \right\} = \\ & = - (\nabla |u_m(t)|^\rho u_m(t), \nabla u'_m(t)) + M' \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) |\Delta u_m(t)|^2 - \\ & - (\nabla u'_m(t), \nabla \theta_m(t)) + (\nabla f(t), \nabla u'_m(t)) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Verificaremos agora, o cálculo feito para encontrar o segundo termo do segundo membro da equação (3.17): $M' \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) |\Delta u_m(t)|^2$.

Derivando-se o segundo termo entre chaves da equação (3.17), temos:

$$\begin{aligned} & \left[M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) |\Delta u_m(t)|^2 \right]' = M' \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 |\Delta u_m(t)|^2 + \\ & + M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \frac{d}{dt} |\Delta u_m(t)|^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \frac{d}{dt} |\Delta u_m(t)|^2 = \left[M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) |\Delta u_m(t)|^2 \right]' - \\ & - \underbrace{M' \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 |\Delta u_m(t)|^2} \end{aligned}$$

donde, o último termo destacado na igualdade anterior é escrito como:

$$M' \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 |\Delta u_m(t)|^2 = M' \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) |\Delta u_m(t)|^2$$

Tomando-se agora, $\omega = -\Delta \theta_m(t) \in V_m$ na equação (3.16), obtemos:

$$\begin{aligned} & (\theta'_m(t), \omega) - (\Delta \theta_m(t), \omega) + (u'_m(t), \omega) = (g(t), \omega) \\ & (\theta'_m(t), -\Delta \theta_m(t)) - (\Delta \theta_m(t), -\Delta \theta_m(t)) + (u'_m(t), -\Delta \theta_m(t)) = (g(t), -\Delta \theta_m(t)) \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_m(t)\|^2 + |\Delta \theta_m(t)|^2 + (\nabla u'_m(t), \nabla \theta_m(t)) = (\nabla g(t), \nabla \theta_m(t)) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_m(t)\|^2 + |\Delta \theta_m(t)|^2 = - (\nabla u'_m(t), \nabla \theta_m(t)) + (\nabla g(t), \nabla \theta_m(t)) \quad (3.18)$$

Somando-se agora as equações (3.17) e (3.18), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|u'_m(t)\|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 + M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) |\Delta u_m(t)|^2 \right\} + |\Delta \theta_m(t)|^2 = \\ & = - (\nabla |u_m(t)|^\rho u_m(t), \nabla u'_m(t)) + M' \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) |\Delta u_m(t)|^2 - \\ & - 2 (\nabla u'_m(t), \nabla \theta_m(t)) + (\nabla f(t), \nabla u'_m(t)) + (\nabla g(t), \nabla \theta_m(t)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Temos que

$$\begin{aligned} & |(\nabla |u_m(t)|^\rho u_m(t)), \nabla u'_m(t)| \leq \\ & (\rho+1) \int_{\Omega} |u(t)|^\rho |\nabla u_m(t)| |\nabla u'_m(t)| dx (\rho+1) |u(t)|_{L^{\rho q}}^\rho \cdot |\nabla u_m(t)|_{L^r} \cdot \|u'_m(t)\| \end{aligned}$$

com $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$.

A partir das hipóteses (3.2), podemos tomar q e r tais que:

$$0 < \rho \leq \frac{2}{n-2} \text{ se } n \geq 5,$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \Rightarrow \rho \leq \frac{2}{n-2} \Rightarrow 2\rho + 2 \leq \frac{2n}{n-2} = r \Rightarrow \frac{2n}{n-2} \leq r \Rightarrow \frac{1}{r} \geq \frac{n-2}{2n}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{n-2}{2n}$$

$$r = \frac{2n}{n-2}$$

e,

$$\frac{1}{q} \geq \frac{\rho(n-4)}{2n}$$

Da desigualdade de Sobolev:

$$|\nabla u_m(t)|_{L^r} \leq C |u_m(t)|_{H^2} \text{ e } |u_m(t)|_{L^{pq}} \leq C |u_m(t)|_{H^2}$$

e da teoria da regularidade para equações elípticas, temos:

$$|u_m(t)|_{H^2} \leq C |\Delta u_m(t)|$$

(ver, e.g., Friedman [4]).

Portanto,

$$|(\nabla (|u_m(t)|^\rho u_m(t))), \nabla u'_m(t)| \leq C |\Delta u_m(t)|^{\rho+1} \|u'_m(t)\| \quad (3.20)$$

Pela teoria da regularidade para equações elípticas, temos:

$$|u_m(t)|_{H^2} \leq C |\Delta u_m(t)|$$

Para chegarmos à desigualdade acima, consideremos o espaço de Hilbert:

$$H(\Delta, \Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \Delta v \in L^2(\Omega) \right\} \quad (3.21)$$

Com o produto interno,

$$(u, v)_{H(\Delta, \Omega)} = \int_{\Omega} u v dx + \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx$$

$H(\Delta, \Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^2(\Omega)$.

Em $H(\Delta, \Omega)$ considere-se a seminorma:

$$[v]_{\Delta} = \left(\int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

Lembrando que a norma $L^2(\Omega)$ representa-se por $|v|^2 = \int_{\Omega} (v)^2 dx$

Lema 3.1.2. Em $\mathcal{D}(\Omega)$ a norma do $H^2(\Omega)$ e a seminorma $[\]_{\Delta}$ são equivalentes.

Demonstração. Inicialmente, observe-se que se $a_1, a_2, \dots, a_n$ forem números reais, então:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j$$

Portanto, para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tem-se:

$$(\Delta \varphi)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right)^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2}$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência de Gauss para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} dx$$

Daí, resulta que:

$$\int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right)^2 dx + 2 \sum_{i < j} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx \quad (3.23)$$

A norma $H^2(\Omega)$ é dada por:

$$\|\varphi\|_{H^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\varphi)^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx \quad (3.24)$$

Conclui-se de (3.23) e (3.24) que:

$$[\varphi]_{\Delta} \leq \|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \quad (3.25)$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\varphi)^2 dx = C \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq C_0 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx = C_0 [\varphi]_{\Delta}^2$$

Portanto, aplicando-se esta desigualdade a (3.24) conclui-se que:

$$\|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1 [\varphi]_\Delta$$

O mostra o lema. □

Voltando-se à equação (3.19), temos que o 2º, 3º, 4º e 5º termos do lado direito da equação (3.19) são limitados como segue:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|u'_m(t)\|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 + M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) |\Delta u_m(t)|^2 \right\} + |\Delta \theta_m(t)|^2 = \\ & = - (\nabla |u_m(t)|^p u_m(t), \nabla u'_m(t)) + \underbrace{M' \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) |\Delta u_m(t)|^2}_{-2 (\nabla u'_m(t), \nabla \theta_m(t)) + (\nabla f(t), \nabla u'_m(t)) + (\nabla g(t), \nabla \theta_m(t))} - \end{aligned}$$

Analisando-se cada um dos termos destacados separadamente, temos:

• **2º termo** : $M' \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) |\Delta u_m(t)|^2$

Lembrando-se que $M_1 = \max \{|M'(s)|; 0 \leq s \leq C_2\} \Rightarrow M' \left(\|u_m(t)\|^2 \right) \leq M_1$, e usando-se as seguintes desigualdades:

$$|(u, v)| \leq |u| |v|, \quad ab \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2), \quad \|u_m(t)\| \leq C_2$$

temos que:

$$(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) = |\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)| \leq |\nabla u_m(t)| |\nabla u'_m(t)|$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & M' \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) |\Delta u_m(t)|^2 \leq \\ & \leq M_1 \cdot |\nabla u_m(t)| \cdot |\nabla u'_m(t)| \cdot |\Delta u_m(t)|^2 \\ & \leq M_1 \cdot \|u_m(t)\| \cdot \|u'_m(t)\| \cdot |\Delta u_m(t)|^2 \\ & \leq M_1 \cdot C_2 \cdot \|u'_m(t)\| \cdot |\Delta u_m(t)|^2 \end{aligned}$$

• **3º termo** : $2 (\nabla u'_m(t), \nabla \theta_m(t))$

Então,

$$2 (\nabla u'_m(t), \nabla \theta_m(t)) \leq \|u'_m(t)\|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 \quad (3.26)$$

•4º termo : $(\nabla f(t), \nabla u'_m(t))$

Então,

$$(\nabla f(t), \nabla u'_m(t)) \leq \frac{1}{2} \|f(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|^2 \quad (3.27)$$

•5º termo : $(\nabla g(t), \nabla \theta_m(t))$

Então,

$$(\nabla g(t), \nabla \theta_m(t)) \leq \frac{1}{2} \|g(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\theta_m(t)\|^2 \quad (3.28)$$

Definindo-se o funcional

$$F(u(t), \theta(t)) = \|u'_m(t)\|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 + M\left(\|u(t)\|^2\right) |\Delta u(t)|^2 + |\Delta \theta(t)|^2$$

Então, por (3.14), temos:

$$\begin{aligned} & \|u'_m(t)\|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 + m_0 \left(\|u_m(t)\|^2 \right) |\Delta u_m(t)|^2 + |\Delta \theta_m(t)|^2 \\ & \leq F(u_m(t), \theta_m(t)) \\ & \leq \|u'_m(t)\|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 + M_2 |\Delta u_m(t)|^2 + |\Delta \theta_m(t)|^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde $M_2 = \max \{M(s); 0 \leq s \leq C_2\}$. Fazendo-se uso das desigualdades (3.20) e (3.26)-(3.29) em (3.19), segue que:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} F(u_m(t), \theta_m(t)) \\ & \leq 2C |\Delta u_m(t)|^{\rho+1} \|u'_m(t)\| + 2M_1 C_2 \|u'_m(t)\| |\Delta u_m(t)|^2 + \|f(t)\|^2 + \|g(t)\|^2 + 3 \|u'_m(t)\|^2 + \\ & + 3 \|\theta_m(t)\|^2 \end{aligned}$$

Por (3.29), temos:

$$\frac{d}{dt} F(u_m(t), \theta_m(t)) \leq C \left\{ F(u_m(t), \theta_m(t))^{\frac{\rho+2}{2}} + F(u_m(t), \theta_m(t))^{\frac{3}{2}} + F(u_m(t), \theta_m(t)) \right\} +$$

$$+ \|f(t)\|^2 + \|g(t)\|^2$$

Um simples cálculo mostra que

$$\frac{d}{dt} F(u_m(t), \theta_m(t)) \leq C \left\{ F(u_m(t), \theta_m(t))^\gamma + \|f(t)\|^2 + \|g(t)\|^2 \right\},$$

com $\gamma = \max \{ ((\rho + 2)/2), (3/2) \}$. Aqui necessitamos do seguinte lema.

Lema 3.1.3. *Seja μ uma função positiva e diferenciável tal que*

$$\mu'(t) \leq \theta(t) + \alpha\mu(t) + \beta\mu^\gamma(t) \quad (3.30)$$

onde $\theta(t)$ é uma função positiva, $\theta \in L^1(0, T)$, α , β e γ são constantes positivas com, $\gamma > 1$. Então existe $T_0 \in \mathbb{R}$, onde, $0 < T_0 < T$, tal que μ é limitada em $[0, T_0]$.

Demonstração. Multiplicando (3.30) por $e^{-\alpha t}$, obtemos:

$$(\mu(t) e^{-\alpha t})' \leq \theta(t) + \beta\mu^\gamma(t) \quad (3.31)$$

(Note que $e^{-\alpha t} \leq 1$). Integrando (3.31) em $[0, t[\subset [0, T[$, obtemos:

$$\mu(t) \leq \left[\mu(0) + \int_0^T \theta(s) ds + \beta \int_0^t \mu^\gamma(s) ds \right] e^{\alpha T}$$

Chamando,

$$K_1 = \left[\mu(0) + \int_0^T \theta(s) ds \right] e^{\alpha T} \quad \text{e} \quad K_2 = \beta e^{\alpha T}$$

Segue que,

$$\mu(t) \leq K_1 + K_2 \int_0^t \mu^\gamma(s) ds \quad (3.32)$$

Se denotarmos $z(t)$ pela função $z(t) = \int_0^t \mu^\gamma(s) ds$, segue que $z(0) = 0$ e $z'(t) = \mu^\gamma(t)$.

Então,

$$\frac{z'(t)}{(K_1 + K_2 z(t))^\gamma} \leq 1$$

Escolhendo T_0 tal que

$$K_1 + K_2 z(t) \leq K_3,$$

onde,

$$K_3 = \left\{ \left[\frac{K_1^{1-\gamma}}{K_2(\gamma-1)} - T_0 \right]^{1/(\gamma-1)} \cdot [K_2(\gamma-1)]^{1/(\gamma-1)} \right\}^{-1}$$

Assim, de (3.32), obtemos $\mu(t) \leq K_3$, se $0 \leq t \leq T_0$. Daí, concluímos a prova do lema. $\square$

Pelo lema (3.1.3), existe $T_0 > 0$, tal que

$$F(u_m(t), \theta_m(t)) \leq C \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_0$$

Lembrando-se que foi definido anteriormente o funcional:

$$F(u(t), \theta(t)) = \|u'_m(t)\|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 + M\left(\|u(t)\|^2\right) |\Delta u(t)|^2 + |\Delta \theta(t)|^2$$

Então, por (3.14), temos,

$$\begin{aligned} & \|u'_m(t)\|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 + m_0\left(\|u_m(t)\|^2\right) |\Delta u_m(t)|^2 + |\Delta \theta_m(t)|^2 \\ & \leq F(u_m(t), \theta_m(t)) \\ & \leq \underbrace{\|u'_m(t)\|^2}_{\text{termo 1}} + \underbrace{\|\theta_m(t)\|^2}_{\text{termo 2}} + M_2 \underbrace{|\Delta u_m(t)|^2}_{\text{termo 3}} + \underbrace{|\Delta \theta_m(t)|^2}_{\text{termo 4}} \end{aligned}$$

Como $F(u_m(t), \theta_m(t)) \leq C$, então cada termo da desigualdade acima também o é. Daí,

$$\|u'_m(t)\| \leq C \tag{3.33}$$

$$\|\theta_m(t)\| \leq C \quad (3.34)$$

$$|\Delta u_m(t)| \leq C \quad (3.35)$$

$$|\Delta \theta_m(t)| \leq C \quad (3.36)$$

Para $0 \leq t \leq T_0$. Pondo $\omega = \theta'_m(t)$ em (3.16), temos:

$$\begin{aligned} (\theta'_m(t), \theta'_m(t)) - (\Delta \theta_m(t), \theta'_m(t)) + (u'_m(t), \theta'_m(t)) &= (g(t), \theta'_m(t)) \\ (\theta'_m(t), \theta'_m(t)) &= (g(t), \theta'_m(t)) + (\Delta \theta_m(t), \theta'_m(t)) - (u'_m(t), \theta'_m(t)) \\ |\theta'_m(t)|^2 &= (g(t), \theta'_m(t)) + (\Delta \theta_m(t), \theta'_m(t)) - (u'_m(t), \theta'_m(t)) \\ |\theta'_m(t)|^2 &\leq |g(t)| |\theta'_m(t)| + |\Delta \theta_m(t)| |\theta'_m(t)| + |u'_m(t)| |\theta'_m(t)| \\ |\theta'_m(t)|^2 &\leq (|g(t)| + |\Delta \theta_m(t)| + |u'_m(t)|) |\theta'_m(t)| \\ |\theta'_m(t)| &\leq |g(t)| + |\Delta \theta_m(t)| + |u'_m(t)| \end{aligned}$$

Agora, usando a imersão de Sobolev $H_0^1 \hookrightarrow L^2(\Omega)$, segue de (3.33) e (3.35) que:

$$|\theta'_m(t)| \leq C + |g(t)| \quad \text{ou} \quad |\theta'_m(t)|^2 \leq C + 2|g(t)|^2$$

onde,

$$\begin{aligned} |\theta'_m(t)| &\leq |g(t)| + \underbrace{|\Delta \theta_m(t)|} + \underbrace{|u'_m(t)|} \\ |\theta'_m(t)| &\leq |g(t)| + C \\ |\theta'_m(t)| &\leq C + |g(t)| \end{aligned}$$

Integrando-se de 0 a T_0 , temos:

$$\int_0^{T_0} |\theta'_m(t)|^2 dt \leq C \quad (3.37)$$

Estimativa (iii): Pondo $\omega = u''_m(t)$ na equação (3.15), temos:

$$\begin{aligned}
& (u_m''(t), u_m''(t)) - M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\Delta u_m(t), u_m''(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m''(t)) + (\theta_m(t), u_m''(t)) \\
& = (f(t), u_m''(t)) \\
& |u_m''(t)|^2 = M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\Delta u_m(t), u_m''(t)) - (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m''(t)) - (\theta_m(t), u_m''(t)) + \\
& + (f(t), u_m''(t))
\end{aligned}$$

Estimando-se, obtemos:

$$\begin{aligned}
|u_m''(t)|^2 & \leq M_2 |\Delta u_m(t)| |u_m''(t)| + |u_m(t)|_{L^{2(\rho+1)}}^{\rho+1} |u_m''(t)| + |\theta_m(t)| |u_m''(t)| + |f(t)| |u_m''(t)| \\
|u_m''(t)|^2 & \leq \left(M_2 |\Delta u_m(t)| + |u_m(t)|_{L^{2(\rho+1)}}^{\rho+1} + |\theta_m(t)| + |f(t)| \right) |u_m''(t)| \\
|u_m''(t)| & \leq M_2 |\Delta u_m(t)| + |u_m(t)|_{L^{2(\rho+1)}}^{\rho+1} + |\theta_m(t)| + |f(t)|
\end{aligned}$$

Por (3.3), segue que $H_0^1(\omega) \hookrightarrow L^2(\rho+1)$. Usando-se as equações (3.14) e (3.33) e o teorema da imersão de Sobolev, de (3.35), temos:

$$|u_m''(t)| \leq M_2 \underbrace{|\Delta u_m(t)|} + \underbrace{|u_m(t)|_{L^{2(\rho+1)}}^{\rho+1}} + \underbrace{|\theta_m(t)|} + \underbrace{|f(t)|}$$

$$|u_m''(t)| \leq C \quad (3.38)$$

3.2 Passagem ao Limite

Pelas estimativas (3.14) e (3.33), temos que (u_m) e (θ_m) são limitadas em $L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ e $L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega))$, respectivamente.

De (3.33) a sequência (u_m') é limitada em $L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega))$, e por (3.38), a sequência (u_m'') é limitada em $L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$. Como a imersão de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$ é compacta, podemos extrair uma subsequência, mais uma vez indicada por $x(u_m)$, tal que:

$$u_m \rightarrow u \quad \text{fortemente em} \quad L^2\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right)$$

Analogamente, de (3.34), (3.37) a imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e do lema de

Aubin-Lions, segue que,

$$\theta_m \rightarrow \theta \quad \text{fortemente em} \quad L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$$

Lema 3.2.1. (Lema de Compacidade de Aubin-Lions): *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach reflexivos tais que $B_0 \xhookrightarrow{c} B \hookrightarrow B_1$. Se $1 < p_0, p_1 < \infty$ e $T > 0$, então o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0); u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}$, está compactamente imerso em $L^{p_0}(0, T; B)$.

Das estimativas (3.14) e (3.33), conclui-se que existem subsucessões u_ν de u_m e θ_ν de θ_m tal que,

$$u_\nu \rightharpoonup u \quad \text{fraco} * \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \quad (3.39)$$

$$u_\nu'' \rightharpoonup u'' \quad \text{fraco} * \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)) \quad (3.40)$$

Temos que (3.40) é equivalente a

$$(u_\nu'', \omega_k) \rightharpoonup (u'', \omega_k) \quad \text{fraco} * \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T_0; L^\infty(0, T_0)) \quad (3.41)$$

De (3.40) ou (3.41) podemos tomar o limite no 1º termo da equação aproximada (3.4), quando $m \rightarrow \infty$.

CONVERGÊNCIA DE: $M \left(\|u_m(t)\|^2 \right) (\Delta u_m(t), \omega)$

Temos que,

$$(\Delta u_m(t), \omega) = (\Delta u_m(t), -\Delta u_m'(t)) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta u_m|^2$$

De,

$$-\Delta u_\nu \rightharpoonup -\Delta u \quad \text{fraco} * \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$$

temos que,

$$\int_0^{T_0} (-\Delta u_\nu, \omega) \theta dt \rightarrow \int_0^{T_0} (-\Delta u, \omega) \theta dt, \quad \forall \omega \in L^2(\Omega) \text{ e } \forall \theta \in L^1(0, T_0) \quad (3.42)$$

isto é,

$$(-\Delta u_\nu, \omega) \rightharpoonup (-\Delta u, \omega) \text{ fraco } * \text{ em } L^\infty(0, T_0) \text{ e portanto fraco em } L^2(0, T_0)$$

Observemos que $M\left(\|u_\nu(t)\|^2\right) \rightarrow M\left(\|u(t)\|^2\right)$ em $L^2(0, T_0)$. Temos que $\|u(t)\|^2$ e $|\Delta u_m(t)|$ são limitadas e portanto $(u_m(t))$ é limitada em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $t \in [0, T_0]$, pois

$$\|u_m(t)\|_{H^2} \leq C |\Delta u_m(t)|$$

Logo, (u_m) é limitada em $L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$.

Usando o lema de Aubin-Lions, sejam $p_0 = p_1 = 2$; $B_0 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $B = H_0^1(\Omega) = B_1$. Temos que (u_ν) é limitada em $L^2(0, T_0; B_0)$ e (u'_ν) é limitada em $L^2(0, T_0; B)$, portanto (u_ν) é limitada em W . Pelo lema(3.2.1) de Aubin-Lions, temos que

$$u_\nu \rightarrow u \text{ forte em } L^2\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right) \quad (3.43)$$

Observação: Poderíamos também, considerar $B_0 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $B = H_0^1(\Omega)$ e $B_1 = L^2(\Omega)$. Então,

$$H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \xhookrightarrow{c} H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega)$$

De (3.43), segue que,

$$\int_0^{T_0} |\nabla u_\nu|^2 dt \rightarrow \int_0^{T_0} |\nabla u|^2 dt \quad (3.44)$$

isto é,

$$a(u_\nu)^{\frac{1}{2}} \rightarrow a(u)^{\frac{1}{2}} \text{ em } L^2(0, T_0)$$

Logo existe uma subsucessão, ainda denotada por (u_ν) tal que,

$$a(u_\nu)^{\frac{1}{2}} \rightarrow a(u)^{\frac{1}{2}} \quad \text{q.s. em } [0, T_0] \quad (3.45)$$

Temos que $|M(\xi) - M(\varsigma)| = |M'(\theta)| |\xi - \varsigma|$, $\theta \in]\xi, \varsigma[$ e sendo M' limitada nos compactos de $]0, +\infty[$, resulta

$$|M(\xi) - M(\varsigma)| \leq C |\xi - \varsigma|, \quad \forall \xi, \varsigma \in [0, T_1]$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} |M(a(u_\nu(t), \omega)) - M(a(u(t), \omega))|^2 dt &\leq C \int_0^{T_0} |a(u_\nu(t), \omega) - a(u(t), \omega)|^2 dt \\ &= C \int_0^{T_0} \left(\sqrt{a(u_\nu, \omega)} - \sqrt{a(u, \omega)} \right)^2 \left(\sqrt{a(u_\nu, \omega)} + \sqrt{a(u, \omega)} \right)^2 dt \rightarrow 0, \end{aligned}$$

porque $\left(\sqrt{a(u_\nu, \omega)} - \sqrt{a(u, \omega)} \right)^2$ é limitado e $\sqrt{a(u_\nu, \omega)} \rightarrow \sqrt{a(u, \omega)}$ em $L^2(0, T_0)$.

Logo,

$$M(a(u_\nu(t), \omega)) \rightarrow M(a(u(t), \omega)) \quad \text{em } L^2(0, T_0).$$

ANÁLISE DO TERMO: $|u_m(t)|^\rho u_m$

De(3.14) e (3.33), $H_0^1(\Omega) \xrightarrow{c} L^2(\Omega)$ e do lema (3.2.1) de Aubin-Lions segue que existe uma subsequência denotada por (u_m) tal que,

$$u_m \rightarrow u \quad \text{forte em } L^2(0, T_0; L^2(\Omega)) = L^2(Q) \quad (3.46)$$

existe uma subsequência (u_m) tal que,

$$u_m \rightarrow u \quad \text{quase sempre em } Q \quad (3.47)$$

ou

$$|u_m(t)|^\rho u_m \rightarrow |u|^\rho u \text{ quase sempre em } Q \quad (3.48)$$

Segue de $\|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ e de $|u_m(t)|^\rho u_m \in L^{p'}(Q)$, que

$$(|u_m(t)|^\rho u_m) \text{ é limitada em } L^{p'}(Q) \quad (3.49)$$

De (3.48) e (3.49) e do lema (3.2.1) de Aubin-Lions segue que,

$$|u_m(t)|^\rho u_m \rightharpoonup |u|^\rho u \text{ em } L^{p'}(0, T_0; L^{p'}(\Omega)) = L^{p'}(Q) \quad (3.50)$$

Como $L^{p'}(0, T_0; L^{p'}(\Omega)) = [L^p(0, T_0; L^p(\Omega))]'$, (3.50) implica em

$$\int_0^{T_0} (|u_m(t)|^\rho u_m(t), \omega(t)) dt \rightarrow \int_0^{T_0} (|u(t)|^\rho u(t), \omega(t)) dt, \quad \forall \omega \in L^p(0, T_0; L^p(\Omega)) \quad (3.51)$$

Logo, se $\omega(t) = \theta(t).v$, $\theta \in L^p(0, T_0)$, $v \in L^p(\Omega)$, temos:

$$\int_0^{T_0} (|u_m(t)|^\rho u_m(t), v) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^{T_0} (|u(t)|^\rho u(t), v) \theta(t) dt, \quad \forall \theta \in L^p(0, T_0), \quad \forall v \in L^p(\Omega) \quad (3.52)$$

Agora, multiplicando-se a equação aproximada por $\theta \in \mathcal{D}(0, T_0)$ e integrando de 0 a T_0 , temos,

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} (u_m''(t), v) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} a(u_m(t), v) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} (|u_m(t)|^\rho u_m(t), v) \theta(t) dt = \\ & \int_0^{T_0} (f(t), v) \theta(t) dt \end{aligned} \quad (3.53)$$

$\forall v \in V_{m_0}, \quad m \geq m_0.$

Integrando-se por partes, a 1ª integral de (3.53) se torna

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{T_0} (u'_m(t), v) \theta'(t) dt + \int_0^{T_0} a(u_m(t), v) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} (|u_m(t)|^\rho u_m(t), v) \theta(t) dt = \\
& \int_0^{T_0} (f(t), v) \theta(t) dt,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$\forall v \in V_{m_0}, m \geq m_0$

Tomando-se o limite quando $m \rightarrow \infty$ em (3.53) e usando-se:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} (u'_m(t), \omega(t)) dt \rightarrow \int_0^{T_0} (u'(t), \omega(t)) dt, \quad \forall \omega \in L^1(0, T_0; L^2(\Omega)) \\
& \int_0^{T_0} a(u_m(t), v) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^{T_0} a(u(t), v) \theta(t) dt, \quad \forall \theta \in L^1(0, T_0), \quad \forall v \in V \\
& \int_0^{T_0} (|u_m(t)|^\rho u_m(t), v) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^{T_0} (|u(t)|^\rho u(t), v) \theta(t) dt, \\
& \forall \theta \in L^p(0, T_0), \quad \forall v \in L^p(\Omega)
\end{aligned}$$

segue,

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{T_0} (u'(t), v) \theta'(t) dt + \int_0^{T_0} a(u(t), v) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} (|u(t)|^\rho u(t), v) \theta(t) dt = \\
& \int_0^{T_0} (f(t), v) \theta(t) dt
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$\forall v \in V_{m_0}$

Mas,

$$- \int_0^{T_0} (u'(t), v) \theta'(t) dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} (u'(t), v) \theta(t) dt$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} (u'(t), v) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} a(u(t), v) \theta(t) dt + \int_0^{T_0} (|u(t)|^\rho u(t), v) \theta(t) dt = \\
& \int_0^{T_0} (f(t), v) \theta(t) dt
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$\forall \theta \in \mathcal{D}(0, T_0), \quad \forall v \in V_{m_0} \quad (\forall v \in V)$

ou,

$$\frac{d}{dt} (u'(t), v) + a(u(t), v) + (|u(t)|^\rho u(t), v) = (f(t), v), \quad (3.57)$$

$\forall v \in V$ no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$. Do que foi exposto, verificamos que tomando-se o limite nas equações (3.4)-(3.5), quando $m \rightarrow \infty$, temos que u, θ é uma solução fraca do sistema (1.1)-(1.4).

3.3 Verificação das Condições Iniciais

Seja $\psi \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ com $\psi(T) = 0$ e $\psi(0) = 1$, e $\omega \in L^2(\Omega)$. De $u'_v \rightharpoonup u'$ fraco $*$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, resulta:

$$\int_0^T (u'_v, \psi \omega) dt \rightarrow \int_0^T (u', \psi \omega) dt$$

Integrando-se por partes o resultado acima e notando-se que $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, temos :

$$-(u_v(0), \omega) - \int_0^T (u_v, \psi' \omega) dt \rightarrow -(u(0), \omega) - \int_0^T (u, \psi' \omega) dt \quad (3.58)$$

Observe que $(u_v(0))$ converge para u_0 forte em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Também da convergência $u_v \rightharpoonup u$ fraco $*$ em $L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega))$, resulta que (u_v) converge para u fraco estrela em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Decorre então,

$$-(u_v(0), \omega) - \int_0^T (u_v, \psi' \omega) dt \rightarrow -(u_0, \omega) - \int_0^T (u, \psi' \omega) dt \quad (3.59)$$

Da unicidade dos limites (3.58) e (3.59), segue que $(u(0), \omega) = (u_0, \omega)$. Como $\omega \in L^2(\Omega)$ foi arbitrário, conclui-se que:

$$u(0) = u_0$$

Aplicando-se o mesmo método, mostra-se que,

$$u_v(t) \rightarrow u(t) \text{ fraco em } L^2(\Omega), \quad \forall t \in [0, T]$$

Para isto é suficiente trabalhar em $L^\infty(0, t; L^2(\Omega))$ e escolher $\psi \in C^1([0, t]; \mathbb{R})$ com $\psi(0) = 0$ e $\psi(t) = 1$.

Para calcular $u'(0)$, retorne-se à equação aproximada (3.4). Seja $\psi^1([0, t]; \mathbb{R})$, $\psi(0) = 1$ e $\psi(T) = 0$. Multiplique-se (3.4) por ψ , integrando-se por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} & -(u'_\nu(0), \omega) - \int_0^T (u'_\nu, \psi' \omega) dt + \int_0^T a(u_\nu, \psi \omega) dt + \\ & + \int_0^T (|u_\nu(t)|^\rho u_\nu(t), \psi \omega) dt + \int_0^T (\theta_\nu(t), \psi \omega) dt = \int_0^T (f(t), \omega) dt \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Tomando-se o limite quando $\nu \rightarrow \infty$ e observando-se que,

$$\int_0^T a(u_\nu(t), \omega(t)) dt \rightarrow \int_0^T a(u(t), \omega(t)) dt$$

e

$$\int_0^T (u'_\nu(t), \omega(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), \omega(t)) dt$$

resulta,

$$\begin{aligned} & -(u_1, \omega) - \int_0^T (u', \psi' \omega) dt + \int_0^T a(u, \psi \omega) dt + \\ & + \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), \psi \omega) dt + \int_0^T (\theta(t), \psi \omega) dt = \int_0^T (f(t), \psi \omega) dt \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega) \quad (3.60) \end{aligned}$$

De (1.1), obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u'', \psi \omega) dt + M \left(\int_0^T |\nabla|^2 dx \right) (-\Delta u, \psi \omega) + \\ & + \int_0^T (|u|^\rho u, \psi \omega) dt + \int_0^T (\theta, \psi \omega) dt = \int_0^T (f, \psi \omega) dt \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

e integrando-se por partes, temos:

$$\begin{aligned} & -(u'(0), \omega) - \int_0^T (u', \psi' \omega) dt + \int_0^T a(u, \psi \omega) dt + \\ & + \int_0^T (|u|^\rho u, \psi \omega) dt + \int_0^T (\theta, \psi \omega) dt = \int_0^T (f, \psi \omega) dt \quad (3.61) \end{aligned}$$

Comaparando-se (3.60) e (3.61), decorre que $u'(0) = u_1$, pois $\omega \in H_0^1(\Omega)$ foi arbitrário. E fazendo-se cálculos análogos, verificamos que $\theta(0) = \theta_0$.

3.4 Unicidade

Sejam $[u, \theta]$ e $[\hat{u}, \hat{\theta}]$ soluções de (1.1)-(1.4) nas condições do teorema (3.1.1). Sejam $\omega = u - \hat{u}$ e $v = \theta - \hat{\theta}$. Então $[\omega, v]$ satisfaz,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\omega', z) + M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) (\nabla \omega, \nabla z) + (|u|^\rho u - |\hat{u}|^\rho \hat{u}, z) + (v, z) \\ = M \left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx \right) (\nabla \hat{u}, \nabla z) - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) (\nabla \hat{u}, \nabla z) \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\frac{d}{dt} (v, z) + (\nabla v, \nabla z) + (\omega', z) = 0 \quad (3.63)$$

$$\omega(0) = 0, \quad \omega'(0) = 0 \quad \text{e} \quad v(0) = 0 \quad (3.64)$$

Tomando-se $z = \omega'$ em (3.62) e $z = v$ em (3.63), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\omega'|^2 + M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \frac{d}{dt} \|\omega\|^2 + \int_{\Omega} (|u|^\rho u - |\hat{u}|^\rho \hat{u}) \omega' dx + (v, \omega') \\ = M \left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx \right) (\nabla \hat{u}, \nabla \omega') - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) (\nabla \hat{u}, \nabla \omega') \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\frac{d}{dt} |v|^2 + \|v\|^2 + (\omega', v) = 0 \quad (3.66)$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$. Adicionando-se (3.65) e (3.66), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\omega'|^2 + M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \frac{d}{dt} \|\omega\|^2 + \frac{d}{dt} |v|^2 + \|v\|^2 = \\ = \int_{\Omega} (|\hat{u}|^\rho \hat{u} - |u|^\rho u) \omega' dx - 2(v, \omega') + \\ M \left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx \right) (\nabla \hat{u}, \nabla \omega') - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) (\nabla \hat{u}, \nabla \omega') \\ \leq \left| \int_{\Omega} (|\hat{u}|^\rho \hat{u} - |u|^\rho u) \omega' dx \right| + 2|(v, \omega')| + \\ \left| M \left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx \right) - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \right| |(\nabla \hat{u}, \nabla \omega')| \end{aligned}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Holder, com $\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (|\hat{u}|^{\rho} \hat{u} - |u|^{\rho} u) \omega' dx \right| &\leq (\rho + 1) \int_{\Omega} \sup (|u|^{\rho}, |\hat{u}|^{\rho}) |\omega| |\omega'| dx \\ &\leq C \left(\| |u|^{\rho} \|_{L^n(\Omega)} + \| |\hat{u}|^{\rho} \|_{L^n(\Omega)} \right) \|\omega\|_{L^q(\Omega)} \|\omega'\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Pela condição (3.2), obtemos $\rho n \leq q$ e da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, temos:

$$\left| \int_{\Omega} (|\hat{u}|^{\rho} \hat{u} - |u|^{\rho} u) \omega' dx \right| \leq C (\|u\|^{\rho} + \|\hat{u}\|^{\rho}) \|\omega\| \|\omega'\|$$

desde que $u, \hat{u} \in L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$, temos:

$$\left| \int_{\Omega} (|\hat{u}|^{\rho} \hat{u} - |u|^{\rho} u) \omega' dx \right| \leq C \|\omega\| \|\omega'\| \quad (3.67)$$

$$2 |(v, \omega')| \leq 2 |v| \|\omega'\| \quad (3.68)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} &\left| M \left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx \right) - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \right| |(\nabla \hat{u}, \nabla \omega')| \\ &\leq |M'(\xi)| \left| |\nabla \hat{u}|^2 - |\nabla u|^2 \right| |(-\Delta \hat{u})| |\omega'| \end{aligned}$$

onde ξ está entre $|\nabla \hat{u}|^2$ e $|\nabla u|^2$. Então temos,

$$\begin{aligned} &\left| M \left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx \right) - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \right| |(\nabla \hat{u}, \nabla \omega')| \\ &\leq C \left(\|\nabla \hat{u}\| + \|\nabla u\| \right) \left| \|\nabla \hat{u}\| - \|\nabla u\| \right| |(-\Delta \hat{u})| \|\omega'\| \\ &\leq C \|\hat{u} - u\| |(-\Delta) \hat{u}| \|\omega'\| \\ &\leq C \|w\| \|\omega'\| \end{aligned} \quad (3.69)$$

Substituindo-se (3.67)-(3.69) em (3.65) e observando-se que

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \frac{d}{dt} |\nabla \omega|^2 = \frac{d}{dt} \left(M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) |\nabla \omega|^2 \right) - \left[\frac{d}{dt} M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \right] |\nabla \omega|^2$$

obtemos,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ |\omega'|^2 + |v|^2 + M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) |\nabla \omega|^2 \right\} + \|v\|^2 \\ & \leq |v|^2 + C |\omega'|^2 + C \|\omega\|^2 + \left| \frac{d}{dt} M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \right| |\nabla \omega|^2 \\ & \leq C \left\{ |v|^2 + |\omega'|^2 + \|\omega\|^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Integrando-se (3.70) de 0 a $t \leq T_0$, obtemos:

$$\begin{aligned} & |\omega'(t)|^2 + |v(t)|^2 + m_0 \|\omega(t)\|^2 + \int_0^T \|v(s)\|^2 ds \\ & \leq C \int_0^t \left\{ |v(s)|^2 + |\omega'(s)|^2 + \|\omega(s)\|^2 \right\} ds \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall, segue que,

$$|v(s)|^2 + |\omega'(s)|^2 + \|\omega(s)\|^2 \leq 0$$

Isto resulta que $v(t) = \omega(t)$, $\forall t \in [0, T]$. Ou seja, $u(t) = \hat{u}(t)$ e $\theta(t) = \hat{\theta}(t)$, $\forall t \in [0, T]$.

Daí, conclui-se a prova da unicidade.

□

REFERÊNCIAS

- [1] Clark, Marcosndes R. Lima, Osmundo A. *On a mixed problem for a coupled nonlinear system* Electronic journal of diff. equations. **06**(1997)
- [2] Bisignin, E., Perturbation of the Kirchhoff-Carrier's operator by Lipschitz functions, Proceedings of XXXI Bras. Sem. of Analysis, Rio de Janeiro, 1992.
- [3] BRÉZIS, H. *Analyse Fonctionnelle (Théorie et Applications)*, Paris, Masson, 1983.
- [4] CAVALCANTI, M. M. e DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. *Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*, vol. II, 2000.
- [5] CAVALCANTI, M. M. and DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. *On Solvability of Solutions of Degenerate Nonlinear Equations on Manifolds, Differential and Integral Equation*, Vol. 13 (10-12), 2000, 1445-1458.
- [6] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, New York, Wiley, 1989.
- [7] LIONS, J. L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*, Paris, Dunod, 1969.
- [8] LIONS et E. MAGENES. *Problemes aux limites non homogenes et applications*, Vol. 1 et 2, Paris, Dunod, 1968.
- [9] MATOS, M. P. *Integral de Bochner e Espaços $L_p(0; T; X)$* , Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, 1998.
- [10] MEDEIROS, L. A., MIRANDA, M. M. *Introdução aos Espaços de Sobolev a às Equações Diferenciais Parciais*, IM-UFRJ, 1989.
- [11] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P. H. *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, no 9, 1975.
- [12] Friedman, A., *Partial differential equations*, Krieger Publishing Co., Florida, 1989.
- [13] ROBERT A. ADAMS *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press, 1975.