PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Ermerson Rocha Araujo

Ferraduras e estados de equilíbrio

São Luís - MA

2014

Ermerson Rocha Araujo

Ferraduras e estados de equilíbrio

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Dr. Nivaldo Costa Muniz**.

São Luís - MA

2014

Ermerson Rocha Araujo

Ferraduras e estados de equilíbrio

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Dr. Nivaldo Costa Muniz**.

Dissertação aprovada em 25/03/2014, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(Orientador) Dr. Nivaldo Costa Muniz (UFMA)

Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira (UFAL)

Dr. Vanderlei Minori Horita (UNESP)

DEDICATÓRIA

A Deus.

A meus pais José Ribamar e Sheila Cristina e irmão Herbert.

AGRADECIMENTOS

Mesmo que em breves palavras, gostaria de citar aqueles que tornaram possível a conclusão de mais esta etapa na minha vida acadêmica.

A Deus pela ajuda contínua.

Aos meus pais José Ribamar e Sheila Cristina por plantarem em mim a vontade e a necessidade de estudar e mostrarem que, mesmo frente a tanta dificuldade, podemos alcançar nossos objetivos. Ao meu irmão Herbert Rocha por estar presente nessa caminhada, embora em outros mundos (mestre em Química).

Ao Prof. Dr. Nivaldo Costa Muniz pela valiosa orientação, por toda paciência e dedicação todas as vezes que bati em sua porta, pelo entusiasmo e me dar força a continuar nessa trajetória, pela amizade e confiança desde a iniciação científica até aqui. Meu muito obrigado!

Aos Professores Krerley Oliveira e Vanderley Horita por, mesmo de última hora, terem aceitado compor minha banca de dissertação.

A todos os professores do departamento de matemática da UFMA, em especial aos Professores Dr. Maxwell Mariano, Fabiano Borges e Marcos Araújo pelas várias experiências transmitidas e ensinamentos ao longo destes meus 6 anos presente na UFMA.

Aos companheiros de jornada nesse mestrado Ronaldo José (grande parceiro de estudo) e Marcos Azevedo (um grande amigo).

A CAPES pelo auxílio financeiro.

RESUMO

A partir das ferraduras parcialmente hiperbólicas definidas em Díaz et al. [11], vamos mostrar que toda medida ergódica possui expoentes de Lyapunov diferentes de zero. Obteremos a existência de estados de equilíbrio para todo potencial. Além disso, provamos a existência de uma transição de fase para a família de potenciais $\phi_t = t \log |DF_{|_{E^c}}|$.

Palavras-chave: Ergodicidade, Expoentes de Lyapunov, Estados de Equilíbrio.

ABSTRACT

From partially hyperbolic horseshoes defined in Díaz et al. [11], we show that every ergodic measure has non-zero Lyapunov exponents. We obtain the existence of equilibrium states for any potential. Moreover, we prove the existence of a phase transition to the family of potential $\phi_t = t \log |DF_{|_{E^c}}|$.

Keywords: Ergodicity, Lyapunov Exponents, Equilibrium States. .

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na teoria dos Sistemas Dinâmicos normalmente consideramos três tipos de sistemas: os topológicos, os mensuráveis e os diferenciáveis. Mas também, busca-se, de certo modo, uma forma de correlacionar ambos os contextos. Por exemplo, a hiperbolicidade é um ótimo meio de interação. No âmbito conservativo, Oxtoby e Ulam [23] provaram a existência de um residual de sistemas ergódicos no mundo dos homeomorfismos conservativos em uma variedade riemanniana compacta.

Em corroboração, para um sistema $f : X \to X$ onde pedimos o mínimo de regularidade (f é pelo menos contínua e X um espaço métrico compacto), tomemos $h_{\text{top}}(f)$ e o conjunto $\mathcal{M}_1(X, f)$. Uma pergunta interessante é: existe $\mu \in \mathcal{M}_1(X, f)$ tal que $h_\mu(f) = h_{\text{top}}(f)$? Mais geralmente, dada $\phi : X \to \mathbb{R}$ contínua (chamada potencial), existe μ satisfazendo

$$h_\mu(f) + \int \phi d\mu = \sup_{\mathcal{M}_1(X,f)} \left\{ h_\nu(f) + \int \phi d\nu \right\}?$$

Estas medidas, se existirem, recebem o nome de estados de equilíbrio. Tais perguntas são motivadas pelo Princípio Variacional (teorema **(2.3.1)**), provado por Walters em sua forma mais geral. Vale ressaltar que o mesmo faz o elo entre uma grandeza puramente topológica (a pressão) e grandezas de caráter mensurável (entropia métrica).

Esta pergunta juntamente com a unicidade de tais medidas, ainda hoje, é tema de inúmeras pesquisas. Por exemplo, Diaz et al. [10] mostraram que se f é um difeomorfismo tal que restrito a um compacto admitindo decomposição dominada possui entropia expansiva, então toda ϕ possui estado de equilíbrio. Em outro trabalho, Buzzi et al. [9] construiram um aberto de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos tais que, para $\phi \equiv 0$, existem e são únicos os estados de equilíbrio. Além destes, Bowen [6] provou que se $\Lambda_i \subset M$ é uma peça básica de um C^1-difeomorfismo Axioma A $f : M \to M$ e $\phi : \Lambda_i \to \mathbb{R}$ é potencial Hölder, então existe um único estado de equilíbrio, o qual é ergódico.

Um ponto importante nessa linha de pesquisa é encontrar situações onde a existência e/ou a unicidade de tais estados falha. Os primeiros contra-exemplos de inexistências foram dados por Misiurewicz [19] e Gurevič [13]. Além deles, podemos citar Buzzi [8], onde o mesmo mostrou que para qualquer variedade de dimensão maior do que ou igual a 2 e qualquer $1 \leq r < \infty$, sempre existe um difeomorfismo f de classe C^r com $h_{\text{top}}(f) < \infty$ tal que não existe estado de equilíbrio para $\phi \equiv 0$. O problema da unicidade é um dos pontos abordados nesta dissertação.

Nosso objetivo é apresentar propriedades ergódicas para a família de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos definida por Díaz, Horita, Rios e Sambarino em [11], cuja direção central é uni-dimensional. Vamos dar uma breve exposição do que será tratado neste trabalho.

No capítulo 1 trataremos dos principais conceitos da Teoria Ergódica que darão suporte aos capítulos subsequentes. Definiremos uma topologia no conjunto das medidas de probabilidade sobre um dado conjunto com o intuito de conceder meios para garantir convergência entre medidas. Comentaremos sobre condições suficientes para a existência de medida de probabilidade invariante para um dado sistema. Por fim, apresentaremos o famoso Teorema Ergódico de Birkhoff e definiremos ergodicidade em um sistema dinâmico.

No capítulo 2 exploraremos os fundamentos de um dos conceitos mais importantes de toda Teoria Ergódica, a *entropia*. Mostraremos as duas principais definições: do ponto de vista métrico e do topológico. Destacamos ainda o *Princípio Variacional*, um grande teorema que junta ambos os conceitos de entropia. Por fim, abordaremos algumas propriedades úteis dos estados de equilíbrio.

Para finalizar este trabalho vamos tomar posse de toda a estrutura definida em [11] e demonstrar várias propriedades ergódicas da família de difeomorfismos. A saber, mostraremos que toda medida ergódica é hiperbólica. Além disso, provando que a aplicação $\mu \mapsto h_\mu(f) + \int \phi d\mu$ é, para todo potencial ϕ, semicontínua superiormente, garantiremos a existência de estados de equilíbrio. Por fim, voltando nossas atenções para a família de potenciais $\phi_t = t \log |DF_{|_{E^c}}|$, mostramos o aparecimento de uma transição de fase no seguinte sentido: existe $0 < t_0 < \infty$ tal que para $t = t_0$ existe mais de um estado de equilíbrio e para $t > t_0$ existe e é único o estado de equilíbrio.

Capítulo 1

PRELIMINARES EM TEORIA ERGÓDICA

Neste capítulo mostraremos os principais pontos da Teoria Ergódica que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Para maiores detalhes veja Mañé [18], Oliveira [20], Oliveira e Viana [21] e Walters [30].

1.1 Medidas Invariantes

O comportamento dinâmico das transformações que deixam invariante uma certa medida é o principal foco da Teoria Ergódica. Para tal, considere $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ espaços de medida [1].

Definição 1.1.1. Uma transformação $f : X \to Y$ é dita *mensurável* se $f^{-1}(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{X}$. Além disso, dizemos que *f preserva medida* se $\mu(f^{-1}(E)) = \nu(E)\ \forall E \in \mathcal{Y}$.

Na definição acima, se tomarmos $f : X \to X$ e valer $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$, então dizemos que f preserva a medida μ.

Na prática, verificar que uma transformação preserva medida usando a definição nem sempre é uma tarefa simples, todavia se encontrarmos uma álgebra geradora de $\mathcal{Y}$ e mostrarmos que vale a igualdade para cada elemento da álgebra, então a igualdade vale em toda a σ-álgebra. Além disso, a proposição abaixo é uma maneira alternativa de ver se uma transformação preserva uma medida. Para a demonstração veja Oliveira e Viana [21].

Proposição 1.1.2. *Seja $f : X \to X$ uma transformação mensurável e μ uma medida em X. Então f preserva μ se, e somente se,*

$$\int \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu$$

para toda função μ-integrável $\phi : X \to \mathbb{R}$.

[1] Um *espaço de medida* é uma tripla $(A, \mathcal{A}, \eta)$ onde, A é um conjunto qualquer, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de A e η é uma função não-negativa (medida) definida sobre $\mathcal{A}$.

Na verdade, se f preserva medida, então $f^m := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ vezes}}$ preserva medida para todo $m \geq 1$.

Exemplo 1.1.3. (Expansão decimal) A função $g : [0,1] \to [0,1]$ definida por $g(x) = 10x - [10x]$, onde $[10x]$ é o maior inteiro menor que ou igual a $10x$, preserva a medida de Lebesgue (veja seção 1.3.1 de Oliveira e Viana [21]).

Exemplo 1.1.4. (Deslocamento de Bernoulli) Seja $(X, \mathcal{X}, \nu)$ um espaço de probabilidade. Considere $M = X^{\mathbb{N}}$, munido da σ-álgebra produto $\mathcal{M} = \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ e da medida produto $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$. Isto é, M é o conjunto das sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $x_n \in X$ para todo n, $\mathcal{M}$ é a σ-álgebra gerada pelos cilindros[2]

$$[m; A_m, \ldots, A_n] = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_j \in A_j \ para\ m \leq j \leq n\},$$

onde $m \leq n$ e cada A_j é um elemento de $\mathcal{X}$ e a medida μ em cada cilindro é dada por

$$\mu([m; A_m, \ldots, A_n]) = \prod_{j=m}^{n} \nu(A_j).$$

O sistema formado pela aplicação $\varsigma : M \to M$ definida por $\varsigma((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$ juntamente com a medida μ é chamado *deslocamento de Bernoulli*.

Note que $\varsigma^{-1}([m; A_m, \ldots, A_n]) = [m+1; A_m, \ldots, A_n]$, ou seja, a pré-imagem de um cilindro ainda é um cilindro. Assim, ς é mensurável. Além disso,

$$\mu(\varsigma^{-1}([m; A_m, \ldots, A_n])) = \nu(A_m) \cdots \nu(A_n) = \mu([m; A_m, \ldots, A_n]).$$

Pela σ-aditividade de μ, a relação acima vale em todos os elementos da álgebra geradora de $\mathcal{M}$. Daí, o mesmo vale em $\mathcal{M}$. Portanto, μ é invariante por ς.

Na próxima seção vamos estudar o conceito de ergodicidade e veremos que ambas as aplicações dos exemplos acima são ergódicas para as medidas citadas.

Quando existe uma medida finita invariante para um sistema dinâmico, ela fornece informações relevantes para o sistema. Nessa linha, o Teorema de Recorrência de Poincaré garante um fenômeno interessante.

Teorema 1.1.5. (Recorrência de Poincaré) *Sejam $f : X \to X$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita f-invariante. Considere $E \subset X$ mensurável de medida positiva. Então para μ-qtp $x \in E$ existem infinitos valores de* n *para os quais $f^n(x)$ também está em E.*

[2]De outra forma, a família $\mathcal{F}$ das uniões finitas de cilindros disjuntos dois-a-dois é uma álgebra cuja σ-álgebra gerada por ela coincide, a menos de medida nula, com $\mathcal{M}$.

Vamos apresentar um esboço da demonstração deste teorema. Defina

$$E_0 = E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}(E).$$

Note que E_0 é mensurável e que todas as pré-imagens de E_0 são disjuntas duas-a duas. Assim, como μ é finita e invariante, concluimos que $\mu(E_0) = 0$. Agora, se F é o conjunto dos pontos de E que regressam a E apenas um número finito de vezes, então $F \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(E_0)$. Assim, $\mu(F) = 0$. Daí segue a conclusão do teorema.

Nas mesmas condições acima e supondo que X admite base enumerável de abertos, então μ-qtp $x \in X$ é recorrente. Este resultado é conhecido como a versão topológica do Teorema de Recorrência de Poincaré.

A hipótese de finitude da medida não pode ser removida, por exemplo, a medida de Lebesgue (infinita) em $\mathbb{R}$ é preservada por $h(x) = x + 1$, mas nenhum ponto é recorrente.

A partir de agora, vamos trabalhar somente com medidas finitas, mais expecificamente, medidas de probabilidade, uma vez que toda medida finita pode ser transformada em uma probabilidade. Denotaremos por $\mathcal{M}_1(X)$ as probabilidades em X e por $\mathcal{M}_1(X, f)$ as invariantes por uma transformação f. É claro que se $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(X, f)$, então $\alpha\mu + (1-\alpha)\nu \in \mathcal{M}_1(X, f)$ $\forall \alpha \in (0, 1)$. Isto significa que $\mathcal{M}_1(X, f)$ é convexo.

Em tal ambiente surge a seguinte pergunta, em que condições podemos garantir a existência de medidas invariantes? O Teorema de Krylov-Bogoliubov dá essas condições. Todavia, primeiramente iremos estabelecer uma topologia em $\mathcal{M}_1(X)$.

Quando $(X, \mathcal{X})$ [3] é espaço métrico compacto e mensurável, o Teorema 6.2 de Walters [30] juntamente com o Teorema da Representação de Riesz garantem que $\mathcal{M}_1(X)$ pode ser identificado com um subconjunto convexo da bola unitária de $C^0(X)^*$. Nessas condições, podemos induzir uma topologia em $\mathcal{M}_1(X)$ a partir da topologia fraca* de $C^0(X)^*$.

Definição 1.1.6. A *topologia fraca** em $\mathcal{M}_1(X)$ é a topologia menos fina na qual todas as aplicações $\mu \mapsto \int \phi d\mu$ ($\phi \in C^0(X)$) são contínuas. Uma base para esta topologia é dada pela coleção de todos os subconjuntos da forma $V(\mu; \phi_1, \ldots, \phi_n; \varepsilon) = \{\nu \in \mathcal{M}_1(X) : \left|\int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu\right| < \varepsilon \ \forall\ 1 \le i \le n\}$, onde $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$, $n \ge 1$, $\phi_i \in C^0(X)$ e $\varepsilon > 0$.

[3] $\mathcal{X}$ é a σ-álgebra de Borel.

Uma consequência imediata do teorema 6.2 de Walters [30] é que esta topologia é Hausdorff.

Sendo $C^0(X)$ separável, existe uma sequência $(\phi_n)_n$ densa na bola unitária de $C^0(X)$ (veja Lima [17], cap. 8, prop. 5). Defina

$$d(\mu,\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int \phi_n d\mu - \int \phi_n d\nu \right|.$$

A função definida acima é uma métrica em $\mathcal{M}_1(X)$. Com efeito, como $\sup |\phi_n| \leq 1$ $\forall n$, segue que a soma acima é limitada por 2, portanto a função d está bem definida. Observe que todas as condições da definição de distância são elementares com exceção de $d(\mu,\nu) = 0 \Rightarrow \mu = \nu$, todavia como as $\phi_n' s$ são densas na bola unitária de $C^0(X)$, a hipótese implica que $\int \phi d\mu = \int \phi d\nu$ para toda ϕ na bola unitária de $C^0(X)$. Sendo toda função contínua um múltiplo de um elemento da bola unitária, segue que $\int \phi d\mu = \int \phi d\nu$ para toda ϕ contínua. Portanto, novamente pelo teorema 6.2 de Walters [30], $\mu = \nu$.

Proposição 1.1.7. *A topologia gerada pela métrica d coincide com a topologia fraca*.*

Demonstração. Para cada ϕ_n vale $\left| \int \phi_n d\mu - \int \phi_n d\nu \right| \leq 2^n d(\mu,\nu)$. Assim, a aplicação $\mu \mapsto \int \phi_n d\mu$ é contínua em $(\mathcal{M}_1(X), d)$ para todo n. Argumentando de forma análoga ao que foi feito acima, concluimos que para toda $\phi \in C^0(X)$ a aplicação $\mu \mapsto \int \phi d\mu$ é contínua em $(\mathcal{M}_1(X), d)$. Daí, todo aberto na topologia fraca* está contido em um aberto gerado pela distância d. Reciprocamente, seja U um aberto na topologia da métrica. Tome $\mu \in U$, logo existe $\varepsilon_\mu > 0$ tal que $B(\mu, \varepsilon_\mu) = \{\nu \in \mathcal{M}_1(X) : d(\mu,\nu) < \varepsilon_\mu\} \subset U$. Escolha $k(\varepsilon_\mu) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=k(\varepsilon_\mu)+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon_\mu}{2}$$

e tome

$$\delta_\mu = \frac{\varepsilon_\mu}{2} \left(\sum_{n=1}^{k(\varepsilon_\mu)} \frac{1}{2^n} \right)^{-1}.$$

Assim, para toda $\nu \in V(\mu; \phi_1, \ldots, \phi_{k(\varepsilon_\mu)}; \delta_\mu)$, onde as $\phi_i' s$ pertencem ao subconjunto enumerável denso, temos

$$\begin{aligned} d(\mu,\nu) &= \sum_{n=1}^{k(\varepsilon_\mu)} \frac{1}{2^n}\left|\int \phi_n d\mu - \int \phi_n d\nu\right| + \sum_{n=k(\varepsilon_\mu)+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left|\int \phi_n d\mu - \int \phi_n d\nu\right| \\ &< \delta_\mu \sum_{n=1}^{k(\varepsilon_\mu)} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=k(\varepsilon_\mu)+1}^{\infty} \frac{2\sup|\phi_n|}{2^n} \\ &< \varepsilon_\mu. \end{aligned}$$

Por isso, $V(\mu;\phi_1,\ldots,\phi_{k(\varepsilon_\mu)};\delta_\mu) \subset B(\mu,\varepsilon_\mu) \subset U$. Como μ é arbitrária, segue que

$$U \subset \bigcup_{\mu\in U} V(\mu;\phi_1,\ldots,\phi_{k(\varepsilon_\mu)};\delta_\mu).$$

Isto completa a demonstração. ■

O lema abaixo caracteriza a convergência de medidas nesta topologia.

Lema 1.1.8. *Uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ na topologia fraca* se, e somente se,*

$$\int \phi d\mu_n \to \int \phi d\mu$$

para toda função contínua $\phi : X \to \mathbb{R}$.

É fácil ver que $x \mapsto \delta_x$, onde δ_x é a *medida de Dirac* [4] no ponto x, é contínua. Além disso, o próximo lema também é uma boa forma de caracterizar a convergência nessa topologia.

Lema 1.1.9. *Tome (μ_n) convergindo para μ na topologia fraca*. Então:*

1. $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K)$ *para todo K fechado em X.*

2. $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$ *para todo U aberto em X.*

Em particular, se a fronteira de A tem medida zero, temos que $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

A prova pode ser encontrada em Oliveira [20], mas vamos apresentar o argumento da parte final. De $\mu(\partial A) = 0$ temos que $\mu(\mathring{A}) = \mu(A) = \mu(\bar{A})$. Assim, $\limsup \mu_n(A) \leq \limsup \mu_n(\bar{A}) \leq \mu(\bar{A}) = \mu(A) = \mu(\mathring{A}) \leq \liminf \mu_n(\mathring{A}) \leq \liminf \mu_n(A)$. Daí, $\mu_n(A) \to \mu(A)$.

[4] A medida $\delta_x : \mathcal{X} \to [0,\infty]$ é definida por $\delta_x(E) = 1$, se $x \in E$ e $\delta_x(E) = 0$ se $x \notin E$.

Teorema 1.1.10. *A topologia fraca* torna $\mathcal{M}_1(X)$ um espaço métrico compacto.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Oliveira e Viana [21] teorema 2.1.5 e Walters [30] teorema 6.5.

Vamos considerar f contínua, assim $f^{-1}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$. Logo, podemos definir o seguinte operador

$$\begin{array}{rcl} f_* : \mathcal{M}_1(X) & \longrightarrow & \mathcal{M}_1(X) \\ \nu & \longmapsto & f_*\nu(E) := \nu(f^{-1}(E)). \end{array}$$

Para este operador vale $\int \phi d f_*\nu = \int \phi \circ f d\nu$ para toda $\phi : X \to \mathbb{R}$ contínua.

Lema 1.1.11. *Se f é contínua, então f_* é contínua e afim.*

Demonstração. Considere ϕ contínua e $\nu_n \to \nu$ na topologia fraca*. Então $f_*\nu_n \to f_*\nu$, pois

$$\int \phi d f_*\nu_n = \int \phi \circ f d\nu_n \to \int \phi \circ f d\nu = \int \phi d f_*\nu.$$

Tome $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(X)$ e $\alpha \in [0,1]$, então

$$\begin{aligned} f_*(\alpha\mu + (1-\alpha)\nu)(E) &= \alpha\mu(f^{-1}(E)) + (1-\alpha)\nu(f^{-1}(E)) \\ &= \alpha f_*\mu(E) + (1-\alpha) f_*\nu(E) \\ &= (\alpha f_*\mu + (1-\alpha) f_*\nu)(E), \end{aligned}$$

para todo $E \subset \mathcal{X}$. O que mostra que f_* é afim. ∎

Assim, encontrar uma medida invariante por f é equivalente a encontrar um ponto fixo de f_*, pois $f_*\mu(E) = \mu(E)$ se, e somente se, $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$ $\forall E \subset \mathcal{X}$.

Teorema 1.1.12. (de Schauder-Tychonoff) *Seja $F : V \to V$ uma transformação contínua num espaço vetorial topológico V. Suponha que exista um compacto convexo $K \subset V$ tal que $F(K) \subset K$. Então $F(v) = v$ para algum $v \in K$.*

Portanto, como consequência imediata do exposto acima e do Teorema de Schauder-Tychonoff temos

Teorema 1.1.13. (de Krylov-Bogoliubov) *Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua no espaço métrico compacto X. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade em X invariante por f.*

Em particular, pelo Teorema de Recorrência de Poincaré (versão topológica), existem pontos recorrentes. Note que nenhuma das hipóteses do teorema podem ser retiradas.

Exemplo 1.1.14. Seja $g : (0,1] \to (0,1]$ contínua definida por $g(x) = x/2$. Como todo ponto de $(0,1]$ converge para zero, o Teorema de Recorrência de Poincaré garante a inexistência de medidas invariantes. Por outro lado, tomando $g : [0,1] \to [0,1]$ decontínua definida por $g(x) = x/2$ se $x \neq 0$ e $g(0) = 1$. Novamente por Poincaré, se existir, a medida invariante deve ser δ_0. Todavia, tomando o mensurável $E = \{0\}$ segue que δ_0 não é invariante por f.

Proposição 1.1.15. *O conjunto $\mathcal{M}_1(X, f)$ é fechado na topologia fraca*. Consequentemente é compacto.*

Demonstração. Seja μ um ponto aderente a $\mathcal{M}_1(X, f)$. Temos que mostrar que para toda ϕ contínua vale $\int \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu$. Ora, pela continuidade do operador f_* e tomando $\mu_n \to \mu$ na topologia fraca* segue que

$$\begin{aligned}
\int \phi \circ f d\mu &= \int \phi d f_* \mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \phi d f_* \mu_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \phi \circ f d\mu_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \phi d\mu_n \\
&= \int \phi d\mu.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mu \in \mathcal{M}_1(X, f)$. ■

1.2 O Teorema Ergódico de Birkhoff e Ergodicidade

A ergodicidade em uma transformação mensurável funciona como a transitividade para transformações topológicas, isto é, se a transitividade implica na impossibilidade de quebra na análise do sistema (existência de uma órbita densa), da mesma forma, a ergodicidade equivale a dizer que a dinâmica do sistema, do ponto de vista mensurável, é indivisível (todo conjunto invariante tem medida zero ou total). Veremos que as medidas ergódicas estruturam a medidas invariantes assim como os números primos constroem os números inteiros (o *Teorema da Decomposição Ergódica*). Também apresentaremos o Teorema Ergódico de Birkhoff, uma ferramenta chave em Teoria Ergódica e que junto com a ergodicidade fornecem grandes resultados.

Vamos considerar $(X, \mathcal{X}, \mu)$ espaço de medida e $f : X \to X$ transformação mensurável que preserva μ.

Dada uma função mensurável $\phi : X \to \mathbb{R}$, dizemos que ϕ é invariante por f se $\phi \circ f(x) = \phi(x)$ para μ-qtp. Em geral, $\phi \circ f^j(x) = \phi(x)$ $\forall j \geq 1$ e quase todo ponto x. Um conjunto $E \subset \mathcal{X}$ é dito *invariante* se $f^{-1}(E) = E$ a menos de medida nula, ou seja, $\mu(E \Delta f^{-1}(E)) = 0$.

Considere $E \subset \mathcal{X}$ f-invariante, então E^c da mesma forma é f-invariante. Consequentemente, se $0 < \mu(E) < 1$, poderemos restringuir o estudo do sistema pelas transformações $f_{|_E}$ e $f_{|_{E^c}}$. Isto nos coloca na busca por transformações que não podem ser quebradas da forma acima, isto é, sistemas com dinâmica indecomponível. Tal ambiente nos leva a definição de ergodicidade.

Definição 1.2.1. Uma medida de probabilidade μ invariante por $f : X \to X$ é dita *ergódica* para f se para todo conjunto mensurável E f-invariante vale $\mu(E) \in \{0, 1\}$.

Chamamos o *tempo médio de visita* de x ao conjunto mensurável E o valor

$$\tau(E, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{0 \leq j < n \ : \ f^j(x) \in E\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_E(f^j(x))$$

sempre que o limite existir.

O teorema de Birkhoff garante que esse limite existe para μ-qtp. Além disso, se a transformação é ergódica, vale $\tau(E, x) = \mu(E)$ μ-qtp. Na verdade, Birkhoff vai mais longe.

Teorema 1.2.2. (Ergódico de Birkhoff) *Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : X \to X$ uma transformação mensurável preservando μ. Dada qualquer função integrável $\phi : X \to \mathbb{R}$, o limite*

$$\tilde{\phi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x))$$

existe e $\tilde{\phi}(f(x)) = \tilde{\phi}(x)$ para μ-qtp $x \in X$. Além disso, $\tilde{\phi}$ é integrável e vale

$$\int \tilde{\phi} d\mu = \int \phi d\mu.$$

Para uma prova deste Teorema veja Mañé [18]. No caso em que f é ergódica vale

$$\tilde{\phi}(x) = \int \phi d\mu \quad \mu - qtp \quad x \in X.$$

Exemplo 1.2.3. A expansão decimal é ergódica para a medida de Lebesgue (veja Oliveira e Viana [21]).

Exemplo 1.2.4. A rotação $R = R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $x \mapsto x + \alpha(\text{mod } 1)$ (α irracional) do círculo unitário é ergódica para a medida de Lebesgue m. Com efeito, é claro que m é R-invariante [5]. Seja $A \subset \mathbb{S}^1$ invariante com medida positiva e $\epsilon > 0$. Tome $x \in A$ ponto de densidade. Então existe $\delta > 0$ tal que $2\delta < \epsilon$ e $m(A \cap I) > (1-\epsilon)m(I)$, onde $I = (x - \delta, x + \delta)$. Note que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1-\epsilon}{2\delta} \leq k < \dfrac{1}{2\delta}$, pois $l([\frac{1-\epsilon}{2\delta}, \frac{1}{2\delta}]) = \frac{\epsilon}{2\delta} > 1$. Coma A é invariante, $m(A \cap R^n(I)) > (1-\epsilon)m(R^n(I))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

•<u>**Afirmação**</u>: Existem $n_1, \ldots, n_k$ tais que $R^{n_i}(I) \cap R^{n_j}(I) = \emptyset$ para todo $i \neq j$ e $m(\cup_i R^{n_i}(I)) \geq (1-\epsilon)$.

De fato, se d é a distância em $\mathbb{S}^1$ [6], como a órbita de x é densa em $\mathbb{S}^1$, existem $n_1, \ldots, n_k$ tais que $d(x + n_i\alpha, \frac{i}{k}) < \frac{1}{2k} - \delta$, para $i = 1, \ldots, k$. Note que $\frac{1}{2k} - \delta > 0$ pela escolha de k. Daí, $d(x + n_i\alpha, x + n_j\alpha) \geq d(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}) - d(x + n_i\alpha, \frac{i}{k}) - d(x + n_j\alpha, \frac{j}{k}) > \frac{1}{k} - 2(\frac{1}{2k} - \delta) = 2\delta$. Isto implica que $R^{n_i}(I) \cap R^{n_j}(I) = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Além disso, $m(\cup_i R^{n_i}(I)) = \sum_i R^{n_i}(I) = 2k\delta \geq (1-\epsilon)$. Isto prova a afirmação.

Da afirmação segue que

$$\begin{aligned} m(A) &\geq m(A \cap \bigcup_i R^{n_i}(I)) = m(\bigcup_i A \cap R^{n_i}(I)) = \sum_i m(A \cap R^{n_i}(I)) \\ &> (1-\epsilon)\sum_i m(R^{n_i}(I)) = (1-\epsilon)m(\bigcup_i R^{n_i}(I)) \\ &\geq (1-\epsilon)(1-\epsilon). \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, concluimos que $m(A) = 1$.

Proposição 1.2.5. *Seja μ uma probabilidade invariante de uma transformação mensurável $f : X \to X$. Então (f, μ) é ergódico se, e somente se,*

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} \mu(f^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B),$$

para quaisquer A e B mensuráveis.

---

[5] A prova deste fato é análoga à feita no Exemplo **1.2.12**.

[6] A distância d é definida por $d(x,y) := \min\{|x-y|, 1-|x-y|\}$, $x, y \in \mathbb{S}^1 \approx [0,1]/_{0\sim 1}$.

De fato, só precisamos mostrar o limite acima para quaisquer A e B mensuráveis em alguma álgebra geradora da σ-álgebra de X.

Exemplo 1.2.6. O deslocamento de Bernoulli (ς, μ) é ergódico.

•**Afirmação**: Se B e C são uniões finitas de cilindros dois-a-dois disjuntos, então

$$\mu(B \cap \varsigma^{-j}(C)) = \mu(B)\mu(C)$$

para j suficientemente grande.

De fato, suponha que B e C são cilindros, isto é, $B = [k; B_k, \ldots, B_l]$ e $C = [m; C_m, \ldots, C_n]$. Como antes, $\varsigma^{-j}(C) = [m+j; C_m, \ldots, C_n]$ para todo j. Seja agora $j > l - m$, assim $B \cap \varsigma^{-j}(C) = [k; B_k, \ldots, B_l, X, \ldots, X, C_m, \ldots, C_n]$, onde X aparece $m + j - l - 1$ vezes. Daí,

$$\mu(B \cap \varsigma^{-j}(C)) = \prod_{j=k}^{l} \nu(B_j) 1^{m+j-l-1} \prod_{j=m}^{n} \nu(C_j) = \mu(B)\mu(C).$$

Como μ é finitamente aditiva a afirmação segue.

Da afirmação temos

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mu(B \cap \varsigma^{-j}(C) &= \lim_n \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^{l-m} \mu(B \cap \varsigma^{-j}(C)) + \sum_{j=l-m+1}^{n-1} \mu(B)\mu(C) \right] \\
&= \lim_n \frac{1}{n} ((n-1) - (l-m+1) + 1) \mu(B)\mu(C) \\
&= \mu(B)\mu(C),
\end{aligned}$$

para quaisquer B e C na álgebra das uniões finitas de cilindros dois-a-dois disjuntos. Como esta álgebra gera a σ-álgebra de M, o resultado segue da proposição.

Exemplo 1.2.7. Seja p é um ponto periódico de período k para uma transformação mensurável $f : X \to X$, então a medida $\mu_p = \frac{1}{k}(\delta_p + \delta_{f(p)} + \cdots + \delta_{f^{k-1}(p)})$ é invariante e ergódica. De fato, seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ contínua limitada, então

$$\begin{aligned}
\int \phi \circ f \, d\mu_p &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \int \phi \circ f \, d\delta_{f^j(p)} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \phi \circ f(f^j(p)) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \phi(f^j(p)) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \int \phi d\delta_{f^j(p)} = \int \phi \, d\mu_p.
\end{aligned}$$

Assim, μ_p é f-invariante. Considere E mensurável invariante, isto é, $f^{-1}(E) = E$. Daí, $f^{-j}(E) = E\ \forall j \geq 1$. Isto significa que, $f^i(p) \in E\ \forall i = \{0, \ldots, k-1\}$ ou $f^i(p) \notin E\ \forall i = \{0, \ldots, k-1\}$. Daí, $\mu_p(E) \in \{0, 1\}$. Portanto, μ_p é ergódica.

O próximo lema é uma ferramenta útil na demonstração da Proposição **(1.2.10)** e do **Teorema Principal 3**.

Lema 1.2.8. *Se μ e ν são probabilidades f-invariantes tais que μ é ergódica e ν é absolutamente contínua* [7] *com relação a μ, então $\mu = \nu$.*

Definição 1.2.9. Seja C um conjunto convexo. Um ponto $e \in C$ é dito *extremal* se para quaisquer $e_1, e_2 \in C$ tal que $e = te_1 + (1-t)e_2$ e $t \in [0, 1]$ implica $t \in \{0, 1\}$, isto é, e não pode ser escrito como combinação convexa de outros elementos de C.

Na seção anterior vimos que o conjunto $\mathcal{M}_1(X, f)$ é convexo, assim, podemos nos perguntar onde se enquadram as medidas ergódicas f-invariantes dentro deste conjunto. A resposta é dada pela proposição abaixo.

Proposição 1.2.10. *Uma probabilidade invariante μ é ergódica se, e somente se, é um ponto extremal de $\mathcal{M}_1(X, f)$.*

Observe que estamos estabelecendo características das medidas ergódicas para uma transformação f, todavia, uma pergunta natural é se realmente medidas ergódicas existem? O próximo teorema nos dá uma condição suficiente para a existência das mesmas.

Teorema 1.2.11. *Seja $f : X \to X$ contínua e X espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma medida ergódica em $\mathcal{M}_1(X, f)$.*

Demonstração. Como X é métrico compacto, sabemos que podemos escolher $(\phi_j)_j$ subconjunto denso de $C^0(X)$. Fixe ϕ_1 e considere a seguinte função

$$\begin{array}{rccl} \xi_1 & : & \mathcal{M}_1(X, f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \eta & \longmapsto & \int \phi_1 \, d\eta. \end{array}$$

É claro que ξ_1 é contínua na topologia fraca*. Logo, sendo $\mathcal{M}_1(X, f)$ compacto, existe, pelo menos uma, ν tal que

$$\int \phi_1 \, d\nu = \sup_{\eta \in \mathcal{M}_1(X, f)} \int \phi_1 \, d\eta.$$

[7] Veja Definição **(3.3.8)**.

Defina
$$K_1 = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(X,f);\ \int \phi_1 \, d\nu = \sup_{\eta \in \mathcal{M}_1(X,f)} \int \phi_1 \, d\eta \right\}.$$
É fácil ver que K_1 é fechado (logo compacto) e não-vazio.

Por indução, para $j \geq 2$ definimos

$$\begin{array}{rccl} \xi_j & : & K_{j-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \eta & \longmapsto & \int \phi_j \, d\eta. \end{array}$$

e
$$K_j = \left\{ \nu \in K_{j-1};\ \int \phi_j \, d\nu = \sup_{\eta \in K_{j-1}} \int \phi_j \, d\eta \right\}.$$

Dessa forma, construimos uma sequência encaixada de compactos e não-vazios

$$\mathcal{M}_1(X,f) \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_j \supset \cdots .$$

Consequentemente,
$$K = \bigcap_j K_j$$
é não-vazio.

Afirmamos que se $\mu \in K$, então μ é ergódica. Para isto, basta mostrarmos que μ é um ponto extremal. Suponha por absurdo que $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ para algum $0 < \alpha < 1$ e $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(X,f)$. Se mostrarmos que

$$\int \phi \, d\mu_1 = \int \phi \, d\mu_2$$

para toda função $\phi : X \to \mathbb{R}$ contínua estamos feitos, pois o teorema 6.2 de Walters [30] garantiria que $\mu_1 = \mu_2$. Como $(\phi_j)_j$ é densa em $C^0(X)$, é suficiente mostrar que

$$\int \phi_j \, d\mu_1 = \int \phi_j \, d\mu_2 \quad \text{para todo } j.$$

Note que
$$\int \phi_1 \, d\mu = \alpha \int \phi_1 \, d\mu_1 + (1-\alpha) \int \phi_1 \, d\mu_2.$$
Em particular,
$$\int \phi_1 \, d\mu \leq \max \left\{ \int \phi_1 \, d\mu_1, \int \phi_1 \, d\mu_2 \right\}.$$

Por outro lado, como $\mu \in K_1$ segue que

$$\int \phi_1 \, d\mu = \sup_{\eta \in \mathcal{M}_1(X,f)} \int \phi_1 \, d\eta \geq \max \left\{ \int \phi_1 \, d\mu_1, \int \phi_1 \, d\mu_2 \right\}.$$

Por isso,

$$\int \phi_1 \, d\mu = \int \phi_1 \, d\mu_1 = \int \phi_1 \, d\mu_2.$$

Isto significa que $\mu_1, \mu_2 \in K_1$. Assim, de maneira análoga, é possível mostrar que para todo $j \geq 1$ vale

$$\int \phi_j \, d\mu = \int \phi_j \, d\mu_1 = \int \phi_j \, d\mu_2.$$

e $\mu_1, \mu_2 \in K_j$. Isto completa a demonstração. ■

Exemplo 1.2.12. Seja o automorfismo linear $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dado por $f(x, y) = (x + y, y)$.

•<u>**Afirmação**</u>: Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ é a projeção natural e $m := \pi_*(\mathbf{Leb}_{\mathbb{R}^2})$ a medida de Lebesgue em $\mathbb{T}^2$, isto é, $m(E) = \mathbf{Leb}_{\mathbb{R}^2}(\pi^{-1}(E) \cap [0, 1)^2)$. Então m é f-invariante.

Basta provar que $f_* m(E) = m(E)$, onde $E = A \times B$ é um cubo em $\mathbb{T}^2$. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um levantamento de f, então $\pi \circ F = f \circ \pi$. Assim, chamando $C = \pi^{-1}(A \times B) = C_1 \times C_2$ e usando o Teorema de Fubini (veja Bartle [2], teorema 10.10) temos [8]

$$\begin{aligned}
f_* m(A \times B) &= m(f^{-1}(A \times B)) = \mathbf{Leb}(\pi^{-1}(f^{-1}(A \times B)) \cap [0, 1)^2) \\
&= \mathbf{Leb}((f \circ \pi)^{-1}(A \times B)) \cap [0, 1)^2) = \mathbf{Leb}((\pi \circ F)^{-1}(A \times B)) \cap [0, 1)^2) \\
&= \mathbf{Leb}(F^{-1}(\pi^{-1}(A \times B)) \cap [0, 1)^2) = \int_0^1 \int_0^1 \chi_{F^{-1}(C)}(x, y) dx dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (\chi_C \circ F)(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \chi_{C_1}(x + y) \chi_{C_2}(y) dx dy \\
&= \int_0^1 \chi_{C_1 - y}(x) dx \int_0^1 \chi_{C_2}(y) dy = \mathbf{leb}((C_1 - y) \cap [0, 1)) \mathbf{leb}(C_2 \cap [0, 1)) \\
&= \mathbf{leb}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(A) \cap [0, 1)) \mathbf{leb}(\pi_{\mathbb{R}}^{-1}(B) \cap [0, 1)) \\
&= \mathbf{Leb}(\pi^{-1}(A \times B) \cap [0, 1)^2) \\
&= m(A \times B).
\end{aligned}$$

Isto termina a prova da afirmação.

Agora defina $H_y = \mathbb{S}^1 \times \{y\}$, com $y \in [0, 1]$. Note que H_y é invariante por f e a restrição $f_{|H_y} : H_y \to H_y$ é a rotação R_y. Tome m_y a medida de Lebesgue em H_y e observe que ela é invariante por $f_{|H_y}$ (veja [21], seção 1.3.3). Além disso, m_y é ergódica sempre que y é irracional (veja Exemplo **1.2.4**). Daí, novamente pelo Teorema de Fubini

[8] Vamos denotar por **Leb** a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ e por **leb** a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} m(E) &= \int_{\mathbb{T}^2} \chi_E \, dm \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} \left(\int \chi_E \, dm_y \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{S}^1} m_y(E) \, dy. \end{aligned}$$

Como os racionais tem medida de Lebesgue nula, a igualdade não é afetada se considerarmos a integral somente ao subconjunto dos valores irracionais de y. Isto nos diz que m é uma combinação convexa não-enumerável das medidas ergódicas m_y.

Na verdade, o fenômeno que ocorreu no Exemplo **(1.2.12)** é muito mais geral. Sabemos que nenhum número primo pode ser escrito como o produto de números primos (a não ser a decomposição trivial), todavia, qualquer número inteiro tem uma representação em fatores primos. Da mesma forma, pela Proposição **(1.2.10)**, as probabilidades ergódicas são os pontos extremos de $\mathcal{M}_1(X, f)$. Assim estabeleceremos um poderoso resultado que possui a mesma essência do Teorema Fundamental da Aritmética, antes definimos alguns fatos.

Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathscr{P}$ uma partição [9] de X em conjuntos mensuráveis. Consideremos $\pi : X \to \mathscr{P}$ a aplicação que leva todo $x \in X$ ao seu respectivo elemento $\mathscr{P}(x) \in \mathscr{P}$. Dizemos que $P \in \mathscr{P}$ é mensurável se $\pi^{-1}(P)$ é mensurável em X. Denotamos por $\widehat{\mathcal{X}}$ a σ-álgebra em $\mathscr{P}$ definida dessa forma. Uma medida nesse novo espaço mensurável é definida por $\pi_* \mu$, a qual denotaremos por $\widehat{\mu}$.

Observação 1.2.13. Observe que a definição da σ-álgebra em $\mathscr{P}$ faz sentido, pois existem partições com subconjuntos $P \in \mathscr{P}$ tais que $\pi^{-1}(P)$ não é mensurável. Com efeito, considere R_α a rotação irracional de $\mathbb{S}^1$ e tome $B \subset \mathbb{S}^1$ escolhendo um único elemento de cada órbita de R_α. Como não existem pontos periódicos, $B_n = R_\alpha^n(B)$ $(n \in \mathbb{Z})$ são dois-a-dois disjuntos. Se B, e consequentemente B_n, for mensurável temos

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} m(B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m(B_n) = m(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n) = m(\mathbb{S}^1) = 1.$$

Por outro lado, não existe nenhum número real $b = m(B) \geq 0$ tal que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} b = 1$. Logo, B não é mensurável. Considere agora a partição $\mathscr{P}$ de $\mathbb{S}^1$ em pontos. Então $B \subset \mathscr{P}$ é tal que $\pi^{-1}(B)$ é não-mensurável em $\mathbb{S}^1$.

[9] Para definição de partição veja início do próximo capítulo.

Teorema 1.2.14. (da Decomposição Ergódica) *Seja $f : X \to X$ mensurável no espaço métrico completo separável X e μ uma probabilidade f-invariante. Então existe um conjunto mensurável $X_0 \subset X$ com $\mu(X_0) = 1$, uma partição $\mathscr{P}$ de X_0 em subconjuntos mensuráveis e uma família de probabilidades $\{\mu_P; P \in \mathscr{P}\}$ em X, satisfazendo:*

1. *$\mu_P(P) = 1$ $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathscr{P}$;*

2. *$P \mapsto \mu_P(E)$ é mensurável, para todo $E \in \mathcal{X}$;*

3. *μ_P é f-invariante e ergódica $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathscr{P}$;*

4. *$\mu(E) = \int \mu_P(E) d\widehat{\mu}(P)$, para todo $E \in \mathcal{X}$.*

Note que para toda função mensurável e limitada $\phi : X \to \mathbb{R}$ vale

$$\int \phi \, d\mu = \int_{\mathscr{P}} \left(\int \phi \, d\mu_P \right) d\widehat{\mu}(P).$$

Para ver isso, observe que pelo Teorema da Decomposição Ergódica a expressão acima é verdadadeira para funções características, logo, por linearidade, também vale para funções simples. Como toda ϕ mensurável limitada não-negativa pode ser aproximada uniformemente por funções simples, o resultado segue do Teorema da Convergência Dominada. O caso geral segue de $\phi = \phi^+ - \phi^-$ onde $\phi^+, \phi^- \geq 0$.

Capítulo 2
ENTROPIA

Um dos grandes objetivos da matemática é encontrar modelos que, mediante conjugações topológicas, isomorfismos algébricos, etc, possam servir de base para o estudo de estruturas gerais. Para tal fim, buscam-se invariantes que possam dizer quando dois sistemas são (ou não) idênticos em um certo sentido. Mediante isso, Kolmogorov [15], em 1958, e Sinai [28], em 1959, introduziram o conceito de *entropia* na Teoria Ergódica, na tentativa de oferecer um novo invariante de equivalência ergódica. [1] Esta noção surgiu de perguntas como: os deslocamentos $\varsigma : \{1, \ldots, d-1\}^{\mathbb{Z}} \to \{1, \ldots, d-1\}^{\mathbb{Z}}$ e $\varrho : \{1, \ldots, d\}^{\mathbb{Z}} \to \{1, \ldots, d\}^{\mathbb{Z}}$ munidos da medida de Bernoulli são ergodicamente equivalentes? Ornstein [22] utilizando o conceito de entropia deu uma resposta definitiva para o problema acima. A entropia de Kolmogorov-Sinai é conhecida como *entropia métrica*, uma vez que ela se vale de uma medida invariante para o sistema. Basicamente, a entropia mede o grau de desordem das órbitas do sistema. Por outro lado, quando o espaço é compacto e a transformação é contínua, Adler, Konheim e McAndrew [1] definiram, em 1965, um conceito de entropia puramente topológico. A *entropia topológica* mede a taxa de crescimento exponencial das órbitas que podem ser diferenciadas dentro de uma certa precisão. Esta ideia, é melhor vista quando nosso espaço, além de compacto, também é métrico. Nesse contexto, Bowen [4] deu uma nova definição a qual vale em espaços não-compactos, mas que, restrita a compactos, é equivalente a dada em AKM [1]. Neste capítulo vamos definir e apresentar as principais propriedades de ambas as entropias, bem como o resultado que relaciona ambos os conceitos, a saber o *Princípio Variacional* em sua forma mais geral, provada por Walters [29] em 1975. Uma abordagem mais completa dos pontos tratados no capítulo pode ser encontrada em Mañé [18], Oliveira e Viana [21] e Walters [30].

[1] Para definição de sistema ergodicamente equivalente veja, por exemplo, [21].

2.1 Entropia Métrica

Em toda seção vamos considerar $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : X \to X$ uma transformação mensurável que preserva μ.

Uma partição de X é uma família $\mathscr{P} = \{P_j;\ j \in A\}$ finita ou enumerável de subconjuntos mensuráveis tais que

$$\mu(P_i \cap P_j) = 0, \text{ sempre que } i \neq j$$

e

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{P \in \mathscr{P}} P\right) = 0.$$

Denotamos por $\mathscr{P}(x)$ o elemento da partição que contém $x \in X$.

A *entropia* da partição $\mathscr{P}$ é dada por

$$H_\mu(\mathscr{P}) = \sum_{P \in \mathscr{P}} -\mu(P) \log \mu(P),$$

onde convencionamos que $0 \log 0 = 0$.

É fácil ver que, se μ é f-invariante, então $H_\mu(f^{-m}(\mathscr{P})) = H_\mu(\mathscr{P})$ para toda partição $\mathscr{P}$ e todo $m \geq 1$. Pela concavidade da função $\varphi(x) = -x \log x$ e a desigualdade de Jensen, segue que toda partição finita tem entropia finita. A partir daqui, estaremos considerando apenas partições (finitas ou enumeráveis) com entropia finita (veja o Exemplo 9.1.4 em Oliveira e Viana [21] para um caso de $H_\mu(\mathscr{P}) = \infty$).

Exemplo 2.1.1. Considere $X = \{1, \ldots, d\}$ munido da σ-álgebra discreta 2^X. Tome ν medida em 2^X tal que $\nu(\{i\}) = p_i$. Isto significa que devemos ter $\sum_i p_i = 1$. Vamos considerar em $M = X^{\mathbb{N}}$ a partição $\mathscr{P} = \{[0;1], \ldots, [0;d]\}$, então

$$H_\mu(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{d} -\mu([0;i]) \log \mu([0;i]) = \sum_{i=1}^{d} -p_i \log p_i.$$

Dadas $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ partições, dizemos que $\mathscr{P}$ é *menos fina* que $\mathscr{Q}$ se todo elemento de $\mathscr{Q}$ está contido em algum elemento de $\mathscr{P}$, a menos de medida nula. Denotamos por $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}$. Considere uma família enumerável de partições $\mathscr{P}_i$, $i \geq 1$, definimos

$$\bigvee_i \mathscr{P}_i = \{\bigcap_i P_i : \ P_i \in \mathscr{P}_i \text{ para cada } i\} \quad \text{e} \quad \Theta = \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{P}_i\right),$$

onde Θ é a σ-álgebra gerada pela união das $\mathscr{P}_i$'s. É fácil ver que $\bigvee_i \mathscr{P}_i$ é a partição menos fina tal que $\mathscr{P}_i \prec \bigvee_i \mathscr{P}_i$ para todo i.

A partir de uma partição $\mathscr{P}$ de X, vamos denotar por $\mathscr{P}^n$ a partição da forma $\vee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathscr{P})$ para cada $n \geq 1$. Assim,

$$\mathscr{P}^n(x) = \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathscr{P}(f^j(x)))$$

é o elemento de $\mathscr{P}^n$ que contém $x \in X$. Quando f é invertível, podemos definir $\mathscr{P}_{-n}^n = \vee_{j=-n}^{n-1} f^{-j}(\mathscr{P})$. Observe que conhecer $\mathscr{P}^n$ é saber onde um ponto está, onde sua imagem estará e assim sucessivamente até o momento $n-1$. Como $\mathscr{P}^n \prec \mathscr{P}^{n+1}$, então $H_\mu(\mathscr{P}^n) \leq H_\mu(\mathscr{P}^{n+1})$. Além disso, um ponto importante é que a sequência $H_\mu(\mathscr{P}^n)$ é subaditiva, isto dará sentido a próxima definição.

Definimos a *entropia métrica* da transformação f em relação à partição $\mathscr{P}$ por

$$h_\mu(f, \mathscr{P}) = \lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathscr{P}^n) = \inf_n H_\mu(\mathscr{P}^n).$$

Exemplo 2.1.2. Tomemos o deslocamento $\varsigma : M \to M$, onde $M = \{1, \ldots, d\}^{\mathbb{N}}$, munido da medida de bernoulli $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$. Tomando a partição $\mathscr{P} = \{[0;1], \ldots, [0;d]\}$. Note que $\varsigma^{-m}(\mathscr{P}) = \{[m;1], \ldots, [m;d]\}\ \forall m \geq 1$. Segue que $\mathscr{P}^n$ é a partição em cilindros de comprimento n, isto é,

$$\mathscr{P}^n = \{\cap_{j=0}^{n-1} \varsigma^{-j}(P_{i_j}) :\ i_j \in \{1, \ldots, d\}\} = \{[0; a_0, \ldots, a_{n-1}] :\ a_j \in \{1, \ldots, d\}\}.$$

Como $\sum_i p_i = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
H_\mu(\mathscr{P}^n) &= \sum_{a_1,\ldots,a_n=1}^{d} -\mu([0;a_1,\ldots,a_n]) \log \mu([0;a_1,\ldots,a_n]) \\
&= \sum_{a_1,\ldots,a_n=1}^{d} -p_{a_1}\cdots p_{a_n} \log(p_{a_1}\cdots p_{a_n}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{a_1,\ldots,a_n=1}^{d} -p_{a_1}\cdots p_{a_j}\cdots p_{a_n} \log p_{a_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{a_j=1}^{d} -p_{a_j} \log p_{a_j} \sum_{a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_n=1}^{d} p_{a_1}\cdots p_{a_{j-1}} p_{a_{j+1}} \cdots p_{a_n} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{a_j=1}^{d} -p_{a_j} \log p_{a_j} \sum_{a_1=1}^{d} \cdots \sum_{a_{j-1}=1}^{d} \sum_{a_{j+1}=1}^{d} \cdots \sum_{a_n=1}^{d} p_{a_1}\cdots p_{a_{j-1}} p_{a_{j+1}} \cdots p_{a_n} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{a_j=1}^{d} -p_{a_j} \log p_{a_j} \sum_{a_1=1}^{d} p_{a_1} \cdots \sum_{a_{j-1}=1}^{d} p_{a_{j-1}} \sum_{a_{j+1}=1}^{d} p_{a_{j+1}} \cdots \sum_{a_n=1}^{d} p_{a_n} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{a_j=1}^{d} -p_{a_j} \log p_{a_j} = -n \sum_{j=1}^{d} p_j \log p_j.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$h_\mu(\varsigma, \mathscr{P}) = \lim \frac{1}{n} H_\mu(\mathscr{P}^n) = \sum_{j=1}^{d} -p_j \log p_j.$$

Por fim, a *entropia* do sistema (f, μ) é dada por

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathscr{P}} h_\mu(f, \mathscr{P}),$$

onde o supremo é tomado sobre todas a partições com entropia finita. Esta definição não é afetada se tomarmos o supremo sobre todas as partições finitas (veja Rokhlin [26] §9 ou Oliveira e Viana [21] Exercício 9.1.1).

Exemplo 2.1.3. Considere a medida μ_p definida no Exemplo **(1.2.7)**. Note que esta medida toma apenas um número finito de valores. Consequentemente, a entropia $H_{\mu_p}(\mathscr{P})$ só toma um número finito de valores para toda partição enumerável $\mathscr{P}$. Assim, $\lim \frac{1}{n} H_{\mu_p}(\mathscr{P}^n) = 0$ para toda partição $\mathscr{P}$. Portanto, $h_{\mu_p}(f) = 0$.

Naturalmente, encontrar o valor da entropia via a definição não é uma tarefa simples pelo fato de estarmos tratando de um supremo. Todavia, Kolmogorov e Sinai deram um meio relativamente mais simples pelo qual podemos encontar a entropia de um sistema.

Considere $\mathscr{P}$ partição com entropia finita e Θ_f a σ-álgebra gerada pela união de todas as partições $\mathscr{P}^n$. Dizemos que $\mathscr{P}$ é *f-geradora* se $\Theta_f = \mathcal{X}$ a menos de medida nula. Quando f é invertível, o que muda é o fato de Θ_f ser a σ-álgebra gerada pela união das partições $\mathscr{P}^n_{-n}$, fora isso, a definição é a mesma.

Teorema 2.1.4. *Seja $\mathscr{P}_1 \prec \cdots \prec \mathscr{P}_i \prec \cdots$ uma sequência não-decrescente de partições tal que $\Theta = \mathcal{X}$ a menos de medida nula. Então,*

$$h_\mu(f) = \lim_i h_\mu(f, \mathscr{P}_i) = \sup h_\mu(f, \mathscr{P}_i).$$

Demonstração. Ver Oliveira e Viana [21]. ■

Corolário 2.1.5. (**Teorema de Kolmogorov-Sinai**) *Se $\mathscr{P}$ é f-geradora, então*

$$h_\mu(f, \mathscr{P}) = h_\mu(f).$$

Demonstração. Como $\mathscr{P}^n \prec \mathscr{P}^{n+1}$ e $h_\mu(f, \mathscr{P}^n) = h_\mu(f, \mathscr{P})$,[2] o resultado segue do Teorema **(2.1.4)**. ■

É claro que o resultado continua válido se f é invertível.

Exemplo 2.1.6. A partição $\mathscr{P}$ em cilindros do Exemplo **(2.1.2)** é ς-geradora, portanto

$$h_\mu(\varsigma) = \sum_{j=1}^{d} -p_j \log p_j.$$

A próxima proposição e seus comentários nos dizem que a entropia é afim.

Proposição 2.1.7. *Sejam μ e ν probabilidades invariantes por f. Então $h_{t\mu+(1-t)\nu}(f) = th_\mu(f) + (1-t)h_\nu(f)$ para todo $0 < t < 1$.*

Em geral, para $t \in [0,1]$ vale $h_{t\mu+(1-t)\nu}(f) \geq th_\mu(f) + (1-t)h_\nu(f)$. A igualdade em todo $[0,1]$ pode acontecer se μ e ν forem mutuamente singulares [3] ou se f for contínua e X métrico compacto. Para demonstrações veja Katok e Hasselblatt [14], Oliveira e Viana [21] e Walters [30].

Como já foi mencionado, o conceito de entropia foi introduzido com a finalidade de diferenciar sistemas que não são ergodicamente equivalentes. O que estamos dizendo é que dois sistemas ergodicamente equivalentes possuem a mesma entropia. A recíproca é falsa, pois, no caso das rotações do círculo com a medida de Lesbesgue, todas têm entropia nula (Exemplo **2.2.2** + Teorema **2.3.1**), todavia, uma rotação racional (não ergódica) não pode ser ergodicamente equivalente a uma rotação irracional (ergódica).

2.2 Entropia Topológica

Como já mencionado, AKM em [1] deram uma nova definição de entropia como invariante para conjugações topológicas baseados em Kolmogorov-Sinai. Esta definição não se vale de qualquer medida. Aqui exploraremos tal definição e apresentaremos algumas propriedades. Vale ressaltar que Bowen [4] deu uma nova definição de entropia topológica para espaços métricos (não compactos). Aqui não abordaremos esta definição, mas a mesma pode ser encontrada muito bem redigida em Oliveira e Viana [21] e Walters [30].

---

[2] Veja Lema **9.1.13** de Oliveira e Viana [21].

[3] Veja Definição **3.3.8** à frente.

Em toda seção X é espaço topológico compacto e $f : X \to X$ é transformação contínua.

Dada α cobertura aberta de X temos

Definição 2.2.1. Se $N(\alpha)$ denota o número de elementos da subcobertura de α com menor cardinalidade, então o número $H(\alpha) = \log N(\alpha)$ é chamado *entropia* de α.

Tome uma outra cobertura aberta β de X. Similarmente como para partições, $\alpha \vee \beta$ é uma cobertura de X formada pelas interseções dos elementos de α e β. Quando todo elemento de β está contido em algum elemento de α, dizemos que α é *menos fina* que β, escrevemos $\alpha \prec \beta$. Por continuidade, $f^{-j}(\alpha)$ é cobertura de X para todo $j \geq 1$. Assim,

$$\alpha^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\alpha)$$

é cobertura de X para todo $n \geq 1$.

Pela subaditividade da sequência $H(\alpha^n)$ podemos definir a entropia topológica de f com relação a α como

$$h(f,\alpha) = \lim_n \frac{1}{n} H(\alpha^n).$$

Por fim, a *entropia topológica* de f é definida como

$$h_{\text{top}}(f) = \sup\{h(f,\alpha) : \ \alpha \text{ é cobertura aberta de } X\}.$$

Exemplo 2.2.2. Sejam $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo e α uma cobertura finita de $\mathbb{S}^1$. Denote por $\text{Ext}(\alpha)$ o conjunto formado pelos pontos extremos dos intervalos que compõem α. Para cada $n \geq 1$,

$$\text{Ext}(\alpha^n) = \bigcup_{j=0}^{n-1} g^{-j}(\text{Ext}(\alpha)).$$

É claro que $\#\alpha^n \leq \#\text{Ext}(\alpha^n) \leq n\#\text{Ext}(\alpha)$. Daí,

$$h(g,\alpha) = \lim_n \frac{1}{n} H(\alpha^n) \leq \limsup_n \frac{1}{n} \log \#\alpha^n \leq \limsup_n \frac{1}{n} \log n = 0.$$

Considere uma sequência de coberturas abertas α_k de intervalos de comprimento menor que $1/k$. Como $h_{\text{top}}(g) = \lim h(g,\alpha_k)$ para qualquer sequência de coberturas abertas α_k com diam $\alpha_k \to 0$.[4], segue que $h_{\text{top}}(g) = 0$.

[4]Veja Proposição **10.1.9** de Oliveira e Viana [21].

Exemplo 2.2.3. (Deslocamentos de Tipo Finito) Seja $X = \{1, \ldots, d\}$ e $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ uma matriz tal que $A_{ij} \in \{0, 1\}$ $\forall i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Dizemos que A é *matriz de transição* se para todo i existe j tal que $A_{ij} = 1$. Defina

$$\Sigma_A = \{(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}} : \ A_{x_n x_{n+1}} = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Observe que Σ_A é fechado metrizável e para o deslocamento ς vale $\varsigma(\Sigma_A) \subset \Sigma_A$. O deslocamento $\varsigma_A : \Sigma_A \to \Sigma_A$ é chamado *deslocamento de tipo finito*. Então $h_{\text{top}}(\varsigma_A) = \log \lambda_A$, onde λ_A é o maior autovalor da matriz A. Para a demonstração desse fato veja a Proposição **10.2.4** de Oliveira e Viana [21].

O próximo teorema nos diz que a entropia topológica é um invariante por conjugações topológicas.

Teorema 2.2.4. *Considere $f : M \to M$ e $g : N \to N$ transformações contínuas nos compactos M e N. Suponha que exista $\phi : M \to N$ contínua sobrejetora tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$. Então $h_{top}(f) \geq h_{top}(g)$. Em particular, quando ϕ é homeomorfismo, vale a igualdade.*

Demonstração. Seja α uma cobertura aberta de N, então, pela continuidade de ϕ, $\phi^{-1}(\alpha)$ é cobertura aberta de M. Tome $E_0, E_1, \ldots, E_{n-1} \in \alpha$, daí

$$\begin{aligned} \phi^{-1}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(E_j)\right) &= \bigcap_{j=0}^{n-1} \phi^{-1}(g^{-j}(E_j)) \\ &= \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\phi^{-1}(E_j)). \end{aligned}$$

Isto nos diz que $\phi^{-1}(\alpha^n) = (\phi^{-1}(\alpha))^n$. Pela sobrejetividade de ϕ, segue que

$$H([\phi^{-1}(\alpha)]^n) = H(\phi^{-1}(\alpha^n)) = H(\alpha^n)$$

para todo $n \geq 1$. Fazendo n ir para o infinito, $h(f, \phi^{-1}(\alpha)) = h(g, \alpha)$. Agora tomando o supremo sobre todas as coberturas α de N:

$$h_{\text{top}}(g) = \sup_{\alpha} h(g, \alpha) = \sup_{\alpha} h(f, \phi^{-1}(\alpha)) \leq h_{\text{top}}(f).$$

Se ϕ é homeomorfismo, então $\phi^{-1} \circ g = f \circ \phi^{-1}$. Logo, $h_{\text{top}}(f) \leq h_{\text{top}}(g)$. ■

2.3 *Princípio Variacional e Estados de Equilíbrio*

Em AKM [1] foi conjecturado que:

Se $f : X \to X$ é uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Então $h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f) : \ \mu \in \mathcal{M}_1(X,f)\}$.

Este resultado, conhecido como *Princípio Variacional para entropia* foi provado completamente pelos matemáticos Dinaburg, Goodman e Goodwyn. Em [27], David Ruelle introduziu o conceito de pressão na Teoria Ergódica provando o Princípio Variacional para a pressão quando a transformação f é homeomorfismo expansivo e satisfaz a propriedade de especificação, Bowen [4]. Posteriormente, Peter Walters [29] provou o Princípio Variacional em sua versão mais geral.

Vamos considerar $f : X \to X$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto X.

Toda função contínua $\phi : X \to \mathbb{R}$ é chamada *potencial*. Para cada $n \geq 1$, defina $\phi_n : X \to \mathbb{R}$ por $\phi_n = \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ f^j$.

Em Walters [29] aparecem 4 definições equivalentes de pressão, aqui apresentaremos apenas uma. Dada uma cobertura aberta α de X definimos

$$P_n(f,\phi,\alpha) = \inf\left\{\sum_{A\in\gamma} \sup_{x\in A} e^{\phi_n(x)};\ \gamma \text{ é subcobertura finita de } \alpha^n\right\}.$$

Pela subaditividade da sequência $\log P_n(f,\phi,\alpha)$, existe o limite

$$P(f,\phi,\alpha) = \lim_n \frac{1}{n}\log P_n(f,\phi,\alpha).$$

O diâmetro de uma cobertura α é definido como

$$\operatorname{diam}(\alpha) = \sup_{A\in\alpha}\ \sup_{x,y\in A} d(x,y).$$

Por fim, chamamos *pressão* do potencial ϕ relativamente a f ao limite $P(f,\phi)$ definido como

$$P(f,\phi) = \lim_{\operatorname{diam}(\alpha)\to 0} P(f,\phi,\alpha).$$

Walters mostrou que tal limite sempre existe. Dentre todas as propriedades da função $P(f,\cdot) : C^0(X) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ apresentadas em Walters [29], as que queremos destacar são:

- $P(f,0) = h_{\text{top}}(f)$.

  Para ver isto, note que $P_n(f,0,\alpha) = N(\alpha^n)$ para todo $n \geq 1$. Daí, $P(f,0,\alpha) = h(f,\alpha)$ para toda cobertura aberta α. Portanto, $P(f,0) = h_{\text{top}}(f)$.

- $P(f,\cdot)$ é Lipschitz se $h_{\text{top}}(f) < \infty$.

  Note que $P(f,\phi + c) = P(f,\phi) + c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ e $\phi \leq \xi$ implica $P(f,\phi) \leq P(f,\xi)$. Daí, como $\phi \leq \xi + \|\phi - \xi\|$, segue que $P(f,\phi) \leq P(f,\xi) + \|\phi - \xi\|$. Analogamente, $P(f,\xi) \leq P(f,\phi) + \|\phi - \xi\|$. Logo, $|P(f,\phi) - P(f,\xi)| \leq \|\phi - \xi\|$. Em particular, $P(f,\cdot)$ é contínua.

- $P(f,\cdot)$ é convexa se $h_{\text{top}}(f) < \infty$.

  É fácil ver que $h_{\text{top}}(f) + \inf \phi \leq P(f,\phi) \leq h_{\text{top}}(f) + \sup \phi$ para todo potencial ϕ. Logo, a hipótese $h_{\text{top}}(f) < \infty$ implica que $P(f,\phi) < \infty$ para todo potencial ϕ. Vamos mostrar que $P(f,(1-t)\phi + t\psi) \leq (1-t)P(f,\phi) + tP(f,\psi)$ para quaisquer $\phi, \psi \in C^0(X)$ e todo $t \in [0,1]$. Com efeito, escreva $\xi = (1-t)\phi + t\psi$, então $\xi_n = (1-t)\phi_n + t\psi_n$ $\forall n \geq 1$. Pela desigualdade de Hölder temos,

$$
\begin{aligned}
\sum_{A\in\gamma} \sup_{x\in A} e^{\xi_n(x)} &= \sum_{A\in\gamma} \sup_{x\in A} [(e^{\phi_n(x)})^{1-t}(e^{\psi_n(x)})^t] \leq \sum_{A\in\gamma} [\sup_{x\in A} e^{\phi_n(x)}]^{1-t} [\sup_{x\in A} e^{\psi_n(x)}]^t \\
&\leq \left(\sum_{A\in\gamma} \left([\sup_{x\in A} e^{\phi_n(x)}]^{1-t} \right)^{\frac{1}{1-t}} \right)^{1-t} \left(\sum_{A\in\gamma} \left([\sup_{x\in A} e^{\psi_n(x)}]^t \right)^{\frac{1}{t}} \right)^t \\
&= \left(\sum_{A\in\gamma} \sup_{x\in A} e^{\phi_n(x)} \right)^{1-t} \left(\sum_{A\in\gamma} \sup_{x\in A} e^{\psi_n(x)} \right)^t
\end{aligned}
$$

  para qualquer família finita γ de subconjuntos de X. Por conseguinte, para qualquer cobertura α

$$
P_n(f,\xi,\alpha) \leq P_n(f,\phi,\alpha)^{1-t} P_n(f,\psi,\alpha)^t \quad \text{para todo } n \geq 1.
$$

  Logo, $P(f,\xi,\alpha) \leq (1-t)P(f,\phi,\alpha) + tP(f,\psi,\alpha)$. Fazendo o $\operatorname{diam}(\alpha) \to 0$ concluimos que $P(f,\cdot)$ é convexa.

Agora apresentaremos, sem demonstração, o principal resultado desta seção.

Teorema 2.3.1. (Princípio Variacional) *Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto X. Então, para todo potencial ϕ,*

$$
P(f,\phi) = \sup \left\{ h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu : \ \mu \in \mathcal{M}_1(X,f) \right\}.
$$

Se para uma dada medida de probabilidade μ vale $h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu = P(f,\phi)$, então essa medida recebe o nome de *estado de equilíbrio* para o potencial ϕ. No caso particular quando $\phi \equiv 0$, a probabilidade μ também recebe o nome de *medida de máxima entropia*.

Ainda hoje são desenvolvidas pesquisas com objetivo de saber sob quais condições tal supremo é atingido, a saber, os **Teoremas Principais 2** e **3** do presente trabalho.

Denotando por $\mathcal{M}_\phi(X,f) \subset \mathcal{M}_1(X,f)$ o conjunto dos estados de equilíbrio de ϕ e assumindo que $h_{\text{top}}(f) < \infty$, temos que:

- $\mathcal{M}_\phi(X,f)$ é convexo e $\mu \in \mathcal{M}_\phi(X,f)$ se, e somente se, quase toda componente ergódica de μ pertence a $\mathcal{M}_\phi(X,f)$.

- Se $\mathcal{M}_\phi(X,f)$ é não vazio, então as medidas ergódicas contidas nele são os pontos extremais.

Definição 2.3.2. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função no espaço métrico X. Dizemos que f é *semicontínua superiormente* (*scs*) em $x_0 \in X$ quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$, então

$$f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Equivalemtemente,

$$f(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} f(x).$$

Quando X é compacto, então f possui cota superior. Com efeito, pela definição de supremo, existe $(x_n)_n$ sequência em X tal que $f(x_n) \to \sup f$. Como X é compacto, podemos extrair uma subsequência $(x_{n_j})_j$ de $(x_n)_n$ tal que $x_{n_j} \to x \in X$. Sendo f semicontínua superiormente, $f(x) \geq \limsup_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = \sup f$. Daí, $f(x) = \sup f$.

Proposição 2.3.3. *Se a função entropia de* f ($\mu \mapsto h_\mu(f)$) *é semicontínua superiormente então* $\mathcal{M}_\phi(X,f)$ *é compacto* (na topologia fraca*) *e não vazio, para qualquer potencial* ϕ.

Demonstração. Como $\mathcal{M}_1(X,f)$ é compacto, é suficiente mostrar que $\mu \mapsto h_\mu(f) + \int \phi \, g\mu$ também é semicontínua superiormente. Tome $\mu_n \to \mu$ na topologia fraca*. Pela hipótese e pelo Lema **(1.1.8)** temos

$$\begin{aligned} h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu &\geq \limsup_n h_{\mu_n}(f) + \limsup_n \int \phi \, d\mu_n \\ &= \limsup_n \left(h_{\mu_n}(f) + \int \phi \, d\mu_n \right). \end{aligned}$$

Portanto, existem estados de equilíbrio para ϕ. Considere ν ponto aderente de $\mathcal{M}_\phi(X,f)$ e tome $(\nu_n)_n \in \mathcal{M}_\phi(X,f)$ tal que $\nu_n \to \nu$. Daí

$$h_\nu(f) + \int \phi \, d\nu \geq \limsup_n \left(h_{\nu_n}(f) + \int \phi \, d\nu_n \right) = P(f,\phi).$$

Logo, $\nu \in \mathcal{M}_\phi(X,f)$. ■

Agora vamos estabelecer alguns conceitos e resultados auxiliares para a conclusão da demonstração do **Teorema Principal 2**. Para mais detalhes veja Phelps [25]. Em particular, iremos discutir a noção de diferenciabilidade para funções $f : U \subset E \to F$, onde U é aberto, E e F são espaços de Banach.

Dizemos que $f : U \subset E \to F$ é *Gâteaux diferenciável* em $x \in U$ se existe um mapa linear e contínuo $\frac{\partial f}{\partial \cdot}(x) : E \to F$ tal que para todo $y \in E$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}.$$

Note que $\frac{\partial f}{\partial (ry)}(x) = r \, \frac{\partial f}{\partial y}(x) \; \forall r \in \mathbb{R}$. Assim, se f é Gâteaux diferenciável, então para todo $\epsilon > 0$ e para todo $y \in E$ existe $\delta = \delta(\epsilon, y) > 0$ tal que

$$\left\| f(x+ty) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial (ty)}(x) \right\|_F < \epsilon \, |t| \, ,$$

sempre que $|t| < \delta$.

Se para algum $y \in E$ o limite acima existe, então dizemos que f tem *derivada direcional* em x na direção de y. Assim, f é Gâteaux diferenciável em x se existem as derivadas direcionais em todas as direções e formam um operador linear contínuo $y \in E \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x)$.

Por outro lado, f é dita *Fréchet diferenciável* em $x \in U$ se existe um mapa linear contínuo $Df(x) : E \to F$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|f(y) - f(x) - Df(x)(y-x)\|_F < \epsilon \, \|y-x\|_E \, ,$$

sempre que $0 < \|y-x\|_E < \delta$. Equivalentemente,

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - Df(x)(y-x)}{\|y-x\|} = 0.$$

Note que se f é Fréchet diferenciável em $x \in U$, então f é Gâteaux diferenciável em

$x \in U$ e vale $Df(x) = \dfrac{\partial f}{\partial}(x)$. Com efeito, para qualquer $y \in E$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+ty)-f(x)}{t} - Df(x)(y) &= \frac{f(x+ty)-f(x)-Df(x)(ty)}{t} \\
&= \pm\frac{f(x+ty)-f(x)-Df(x)(ty)}{\|ty\|}\,\|y\|\,.
\end{aligned}$$

Agora basta fazer $t \to 0$.

Todavia, Gâuteaux diferenciabilidade não implica Fréchet diferenciabilidade. Por exemplo, seja $\xi : E \to \mathbb{R}$ um mapa linear descontínuo e defina $f(x) := \|x\|\,\xi(x)$. Note que f é Gâteaux diferenciável em $x = 0$ com derivada 0, mas f não é Fréchet diferenciável em $x = 0$, pois ξ não é contínua em $x = 0$. Por outro lado, temos o seguinte resultado

Proposição 2.3.4. *Seja $f : U \subset E \to F$ Gâteaux diferenciável em $x \in U$. Se f é D-Lipschitz e E tem dimensão finita, então f é Fréchet diferenciável em $x \in U$.*

Demonstração. É suficiente provar para $y \in S$, onde S é a esfera unitária de E. Seja $\epsilon > 0$. Como $\dim E < \infty$, temos que S é compacta. Assim, existe $C \subset S$ finito tal que $S = \bigcup_{y_j \in C} B(y_j, \epsilon)$. A hipótese implica que existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| f(x+ty_j) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial(ty_j)}(x) \right\|_F < \epsilon\,|t|\,,$$

para todo $|t| < \delta$ e todo j. Dado $y \in S$ existe j tal que $\|y - y_j\| < \epsilon$. Sendo f D-Lipschitz, temos para todo $|t| < \delta$

$$\begin{aligned}
\left\| f(x+ty) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial(ty)}(x) \right\| &\leq \|f(x+ty) - f(x+ty_j)\| \\
&\quad + \left\| f(x+ty_j) - f(x) - \frac{\partial f}{\partial(ty_j)}(x) \right\| \\
&\quad + \left\| t\,\frac{\partial f}{\partial(y_j - y)}(x) \right\| \\
&\leq \left(D + 1 + \left\| \frac{\partial f}{\partial\,\cdot}(x) \right\| \right) |t|\,\epsilon.
\end{aligned}$$

Como δ independe de $y \in S$, segue que f é Fréchet diferenciável em $x \in U$. ∎

Considere agora $g : E \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e convexa no espaço de Banach separável E. Dizemos que um funcional linear limitado $T : E \to \mathbb{R}$ é *tangente* a g

num ponto $x \in E$ se $T(y) \leq g(x+y) - g(x)$ para todo $y \in E$. Se $g : E \to \mathbb{R}$ é Gâteaux diferenciável em $x \in E$, então existe, no máximo, um funcional linear limitado $T : E \to \mathbb{R}$ tangente a g em x. Com efeito, suponha que existam T_1 e T_2 funcionais tangentes a g em $x \in E$ e $y \in E$ tal que $T_1(y) < T_2(y)$. Como T_j é linear, vale $-T_j(y) = T_j(-y) \leq g(x-y) - g(x)$. Assim, para $r > 0$ temos

$$\frac{g(x) - g(x - ry)}{r} \leq T_1(y) < T_2(y) \leq \frac{g(x+ry) - g(x)}{r}.$$

Como $\dfrac{\partial g}{\partial(\alpha y)}(x) = \alpha\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(x)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, fazendo $r \to 0$ temos $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x) < \dfrac{\partial g}{\partial y}(x)$. Contradição!

Além disso, se g é Fréchet diferenciável em $x \in E$, então $Dg(x)$ é tangente a g em x. De fato, g ser Fréchet diferenciável (ou derivável) em $x \in E$ e convexa significa que para todo $y, u, v \in E$ e $0 \leq r \leq 1$ vale $Dg(x)y = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x)$ e $g(ru + (1-r)v) \leq rg(u) + (1-r)g(v)$. Tomando $u = x+y$ e $v = x$, segue que $g(x+ry) \leq rg(x+y) + (1-r)g(x)$, ou seja $g(x+ry) - g(x) \leq r(g(x+y) - g(x))$. Assim, $\dfrac{g(x+ry) - g(x)}{r} \leq g(x+y) - g(x)\ \forall r > 0$. Fazendo $r \to 0$ temos $Dg(x)y \leq g(x+y) - g(x)$.

Mais geralmente, temos o seguinte teorema, devido a Mazur, cuja demonstração pode ser encontrada em Phelps [25] Teorema **1.20**.

Teorema 2.3.5. **(Suavidade de Mazur, 1933)** *Se E é espaço de Banach separável e g uma funcão contínua e convexa definida em um aberto convexo D contido em E, então o conjunto dos pontos $x \in D$ onde $Dg(x)$ existe é residual.*

Assumindo que $h_{\text{top}}(f) < \infty$ e que μ é estado de equilíbrio para um certo potencial ϕ, então o funcional linear $T_\mu : C^0(X) \to \mathbb{R}$ definido por $T_\mu(\xi) = \int \xi d\mu$ é tangente a $P(f, \cdot)$ em ϕ. De fato, pelo Princípio Variacional **(2.3.1)** temos

$$\begin{aligned} T_\mu(\xi) &= \int \xi d\mu = h_\mu(f) + \int (\xi + \phi) d\mu - (h_\mu(f) + \int \phi d\mu) \\ &\leq P(f, \phi + \xi) - P(f, \phi). \end{aligned}$$

Assim, como $P(f, \cdot) : C^0(X) \to \mathbb{R}$ é convexa e contínua, pelo Teorema de Suavidade de Mazur segue que existe um residual $\mathcal{R} \subset C^0(\Lambda)$ tal que $P(f, \cdot)$ é derivável em cada $\phi \in \mathcal{R}$ e $DP(f, \phi)$ é o único funcional linear tangente a $P(f, \cdot)$ em ϕ. Pelo Teorema da Representação de Riesz, cada $\phi \in \mathcal{R}$ tem no máximo um estado de equilíbrio.

Capítulo 3

ERGODICIDADE EM FERRADURAS PARCIALMENTE HIPERBÓLICAS

Neste capítulo iremos definir e analisar nosso modelo de estudo, definido inicialmente em Díaz et al. [11], tendo suas propriedades ergódicas estudas em Leplaideur et al. [16].

3.1 Definição da Família de Ferraduras

Seja em $\mathbb{R}^3$ o cubo $R = I \times I \times I$, onde $I = [0,1]$. Considere $R_0 = I \times I \times [0,1/6]$ e $R_1 = I \times I \times [5/6,1]$. Vamos considerar em $\mathbb{R}^3$ uma família de ferraduras $F = F_{\lambda_0,\lambda_1,\beta_0,\sigma,\beta_1} : R \to \mathbb{R}^3$ definida da seguinte forma (veja Figura (3.1)):

- $F_0(x,y,z) = F_{|R_0}(x,y,z) = (\lambda_0 x, f(y), \beta_0 z)$, com $0 < \lambda_0 < 1/3$ e $\beta_0 > 6$;
- $F_1(x,y,z) = F_{|R_1}(x,y,z) = (3/4 - \lambda_1 x, \sigma(1-y), \beta_1(z-5/6))$, com $0 < \lambda_1 < 1/3$, $0 < \sigma < 1/3$ e $3 < \beta_1 < 4$;

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a transformação tempo 1 do campo de vetores $x' = x(1-x)$.

A aplicação F pode ser estendida para um difeomorfismo que também denotaremos por F.

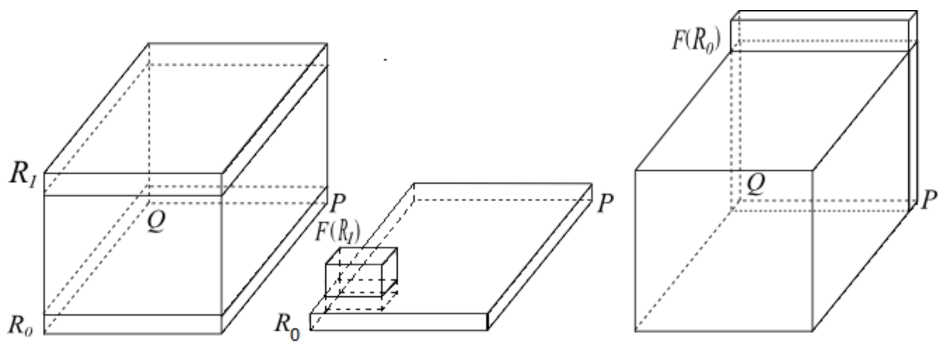

Figura 3.1: F aplicada a R_0 e a R_1.

Observação 3.1.1. (*Cálculo de f*)

O campo $p' = (a - bp)p$, com condição inicial $p(t_0) = p_0$, possui solução dada por

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-a(t-t_0)}}.$$

No caso do campo $x' = x(1 - x)$ com $x(0) = y$ temos,

$$x(t) = \frac{y}{y + (1 - y)e^{-t}}.$$

Para $t = 1$,

$$x(1) = \frac{y}{y + (1 - y)e^{-1}}.$$

Variando as condições iniciais, segue que

$$f(y) = \psi_1(y) = x(1) = \frac{y}{y + (1 - y)e^{-1}}.$$

Para $y \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, temos

$$f^n(y) = \frac{1}{1 - (1 - (1/y))e^{-n}} \tag{3.1}$$

e

$$(f^n)'(y) = \frac{e^{-n}}{y^2}(f^n(y))^2. \tag{3.2}$$

Cada difeomorfismo F é parcialmente hiperbólico, isto é, em cada ponto $x \in R$ o espaço tangente é decomposto em três sub-fibrados DF-invariantes, $E^s(x) \oplus E^c(x) \oplus E^u(x)$, onde $E^u(x)$ é uniformemente expansivo, $E^s(x)$ é uniformemente contrativo e $E^c(x)$ é o fibrado central. Para definições e propriedades de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos veja Bonatti et al. [3], Burns et al. [7] e Pesin [24].

Seja Λ o conjunto maximal invariante de R, ou seja,

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} F^n(R)$$

Da definição de F, $T_\Lambda R = E^s \oplus E^c \oplus E^u$, onde os fibrados são unidimensionais e paralelos aos eixos x, y e z, por isso vamos denotar os pontos em R por (x^s, x^c, x^u). Um segmento da forma $\{x\} \times [a, b] \times \{z\}$ é chamado *curva central*.

Observe que,

$$|DF_{|_{E^c}}(Q)| = |f'(0)| = e > 1 \tag{3.3}$$

e

$$|DF_{|_{E^c}}(P)| = |f'(1)| = e^{-1} < 1. \tag{3.4}$$

Assim, Q é repulsor na direção E^c e P é atrator na direcão E^c.

Como $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, segue que o ponto Q é ponto fixo de índice[1] 1 e P é ponto fixo de índice 2 para F.

Pada cada $X \in \Lambda$ vamos associar a sequência $\iota(X) = (\iota_j(X))_{j\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ definida por

$$\iota_j(X) = i \text{ se, e somente se, } F^j(X) \in R_i,\ i = 0,1.$$

A sequência $\iota(X)$ é chamada *itinerário* de X. Pela definição de F, $F(R_1) \cap R_1 = \emptyset$. Assim, $\iota(X)$ não tem dois 1's consecutivos, por isso $\iota(X) \in \Sigma_{11}$ para todo $X \in \Lambda$,

$$\Sigma_{11} = \{(i_n)_{n\in\mathbb{Z}} :\ i_n = 1 \Rightarrow i_{n+1} = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Mais geralmente, em Díaz et al. [11], foi provado no Lema **(5.2)** que a aplicação itinerário $\iota : \Lambda \to \Sigma_{11}$ é sobrejetiva e define uma semi-conjugação, isto é, vale $\iota \circ F_{|_\Lambda} = \varsigma \circ \iota$, onde $\varsigma : \Sigma_{11} \to \Sigma_{11}$ é o deslocamento.

3.2 Resultados Principais e Expoente de Lyapunov de uma Medida

Dizemos que um difeomorfismo parcialmente hiperbólico f com uma medida de probabilidade invariante μ tem *expoente de Lyapunov negativo* na direção central se para quase todo ponto x temos

$$\lambda(x,v) := \limsup_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \|Df^n(x)v\| < 0$$

para todo $v \in E^c(x)$, onde $\lambda(x,v)$ é o expoente de Lyapunov no ponto x na direção de v. Podemos definir *expoente de Lyapunov positivo* de maneira análoga. Para mais detalhes veja Burns et al. [7].

Definição 3.2.1. Dada $f \in Diff^1(M)$ preservando uma medida de probabilidade μ em M. Dizemos que μ é *hiperbólica* se quase todo ponto $x \in M$ possui todos os expoentes de Lyapunov diferentes de zero.

Mediante isso, nosso primeiro resultado se propõe a mostrar que toda probabilidade ergódica invariante pelo sistema é hiperbólica. Mais especificamente, mostraremos que todo expoente de Lyapunov na direção central para uma medidade probabilidade ergódica μ é negativo, exceto para a medida Delta de Dirac suportada em Q.

[1] O *índice* de um ponto periódico hiperbólico é a dimensão da sua variedade estável.

Dada uma medida de probabilidade ergódica F-invariante μ, seu expoente de Lyapunov central pode ser visto por

$$\lambda^c_\mu = \int \log |DF_{|_{E^c}}| d\mu.$$

Sendo F um C^1-difeomorfismo, temos que $\log |DF_{|_{E^c}}| \in L^1(\mu)$. Como E^c é unidimensional, vale

$$|DF^n_{|_{E^c}}| = \prod_{i=0}^{n-1} |DF \circ F^i_{|_{E^c}}|.$$

O Teorema de Birkhoff (**1.2.2**) diz que para μ-qtp $X \in \Lambda$

$$\begin{aligned}
\lambda^c_\mu &= \int \log |DF_{|_{E^c}}| d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |DF_{|_{E^c}}| \circ F^i(X) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |DF \circ F^i(X)_{|_{E^c}}| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \prod_{i=0}^{n-1} |DF \circ F^i(X)_{|_{E^c}}| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |DF^n(X)_{|_{E^c}}|.
\end{aligned}$$

Teorema Principal 1. Para o modelo definido na seção anterior valem as seguintes afirmações:

1. Para qualquer ponto recorrente $X \in \Lambda$ diferente de Q vale

   $$\liminf_{n\to+\infty} \log |DF^n(X)_{|_{E^c}}| < 0.$$

   Além disso, qualquer medida de probabilidade ergódica F-invariante $\mu \neq \delta_Q$ tem expoente de Lyapunov central negativo.

2. Se $(\mu_k)_k$ é uma sequência de medidas de probabilidade ergódicas F-invariantes tal que $\lambda^c_{\mu_k}$ converge para zero, então $(\mu_k)_k$ converge para $(\delta_Q + \delta_P)/2$ na topologia fraca*.

Em prosseguimento à análise ergódica do nosso modelo, perguntamos se dado um potencial $\phi \in C^0(\Lambda)$, ele admite algum estado de equilíbrio. Nosso próximo resultado responde de maneira afirmativa a essa questão. Na realidade ele diz um pouco mais Ele garante a existência de um conjunto relativamente grande de potenciais para os quais os estados de equilíbrio são únicos.

Teorema Principal 2. Qualquer potencial $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}$ admite um estado de equilíbrio. Mais geralmente, existe um residual em $C^0(\Lambda)$ para o qual cada elemento possui um único estado de equilíbrio.

Como já explanado, a existência e unicidade de estados de equilíbrio foram estudadas por muitos autores nas mais variadas situações. Por exemplo, Goodman [12] provou que qualquer homeomorfismo expansivo em um espaço métrico compacto possui uma medida de máxima entropia. Exigindo um pouco mais do homeomorfismo, ou seja, pedindo que ele satisfaça a propriedade de *especificação*, Bowen [5] provou que para um certo conjunto de potenciais, os estados de equilíbrio são únicos.

Considere a família de potenciais $\phi_t = t \log |DF_{|_{E^c}}|$, $t \geq 0$. Como $F_{|_{E^c}}$ é C^∞ (pois é solução de uma EDO em R_0 e um polinômio em R_1), segue que $DF_{|_{E^c}}$ é β-Hölder contínua, para algum $\beta > 0$. [2] Daí, ϕ_t é α-Hölder contínua. Com efeito, como $DF(X)$ é um isomorfismo, temos $|DF(X)| > 0$ para todo $X \in R$. Assim

$$\begin{aligned}
|\phi_t(X) - \phi_t(Y)| &= |t \log |DF(X)_{|_{E^c}}| - t \log |DF(Y)_{|_{E^c}}|| \\
&= t \left| \log \left| \frac{DF(X)_{|_{E^c}}}{DF(Y)_{|_{E^c}}} \right| \right| \\
&= t \left| \log \left(1 + \frac{|DF(X)_{|_{E^c}}| - |DF(Y)_{|_{E^c}}|}{|DF(Y)_{|_{E^c}}|} \right) \right| \\
&\leq t \left| \log \left(1 + \frac{\left| |DF(X)_{|_{E^c}}| - |DF(Y)_{|_{E^c}}| \right|}{|DF(Y)_{|_{E^c}}|} \right) \right| \\
&\leq t \left| \frac{|DF(X)_{|_{E^c}}| - |DF(Y)_{|_{E^c}}|}{|DF(Y)_{|_{E^c}}|} \right| \\
&\leq \frac{t}{\inf_Z |DF(Z)_{|_{E^c}}|} \left| |DF(X)_{|_{E^c}}| - |DF(Y)_{|_{E^c}}| \right| \\
&\leq \frac{t}{\inf_Z |DF(Z)_{|_{E^c}}|} \left| DF(X)_{|_{E^c}} - DF(Y)_{|_{E^c}} \right| \\
&\leq \frac{t}{\inf_Z |DF(Z)_{|_{E^c}}|} C|X - Y|^\beta,
\end{aligned}$$

onde, na segunda desigualdade, usamos que $\log(1 + x) \leq x$ se $x \geq 0$.

Nosso próximo Teorema mostra que a Hölder continuidade não é uma condição suficiente para garantir a unicidade de estado de equilíbrio, desde que ele exista.

[2] Na verdade, só precisaríamos que $F_{|_{E^c}}$ fosse C^2 para garantir que $DF_{|_{E^c}}$ fosse β-Hölder contínua, para algum $\beta > 0$

Teorema Principal 3. Seja $\phi_t \in C^\infty(\Lambda)$ uma família de potenciais definida por $\phi_t(X) = t\log|DF(X)_{|_{E^c}}|$, $t \geq 0$. Existe um número real positivo t_0 tal que:

1. Para $0 \leq t < t_0$, qualquer estado de equilíbrio de ϕ_t tem expoente de Lyapunov negativo. Além disso, tal medida é singular com respeito a medida δ_Q.

2. Para $t = t_0$, δ_Q é estado de equilíbrio para ϕ_t e existe pelo menos mais um estado de equilíbrio singular com relação a δ_Q.

3. Para $t > t_0$, δ_Q é o único estado de equilíbrio.

3.3 Prova do Teorema Principal 1

Seja (M,d) um espaço métrico compacto. Considere $\mathcal{S} = \{S_i\}_{1\leq i\leq N}$, $N < \infty$, uma coleção finita de funções contínuas em M. Então $(M,\mathcal{S})$ é chamado *Sistema Iterado de Funções*. Se para cada i vale que S_i é contração, então dizemos que o sistema é contrativo.

Vamos considerar o sistema unidimensional iterado de funções $f_0, f_1 : I \to \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned} f_0(y) &= f(y), \\ f_1(y) &= \sigma(1-y). \end{aligned}$$

A dinâmica de F na direção central é modelada pelo sistema iterado de funções gerado por f_0 e f_1.

Para cada $X = (x_0^s, x_0^c, x_0^u) \in \Lambda$ e $k \geq 0$, seja $X_k = F^k(X) = (x_k^s, x_k^c, x_k^u)$. Por definição, a coordenada central x_k^c é dada por

$$x_k^c = f_{i_{k-1}} \circ f_{i_{k-2}} \circ \cdots \circ f_{i_0}(x_0^c) \quad \textit{onde} \ \ \iota(X)^+ = (i_k)_k.^3$$

Observe que $i_0, \ldots, i_{k-2}, i_{k-1} \in \{0,1\}$ e que cada i_j é determinado pelas coordenadas $x_0^u, \ldots, x_{k-2}^u, x_{k-1}^u$.

Dada uma sequência $(i_n)_n \in \Sigma_{11}^+$ e $k \geq 0$, vamos chamar de *k-bloco* a sequência finita $\varrho_k = \varrho_k(i_n) = (i_0, i_1, \ldots, i_k)$ associada a $(i_n)_n$. Para cada k-bloco definamos uma aplicação $\Phi_{\varrho_k} : I \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi_{\varrho_k}(x) = f_{i_k} \circ f_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ f_{i_0}(x).$$

[3] Estamos considerando as sequências unilaterais em Σ_{11}.

Observe que Φ_{ϱ_k} é de classe C^∞ para todo k.

O nosso objetivo é mostrar que o expoente de Lyapunov na direção central é negativo, ou seja, ocorre contração nessa direção. Para tal, vamos nos valer do cálculo da derivada das funções Φ_{ϱ_k}.

Lema 3.3.1. *Para todo $y \in (0,1)$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_{>0}$ vale*

$$|(f_1 \circ f_0^\alpha)'(y)| = \left[\frac{w(\alpha)}{y(1-y)}\right] \cdot \left[1 - \frac{w(\alpha)}{\sigma}\right] \quad \textit{onde} \;\; f_0^\alpha(y) = 1 - \frac{w(\alpha)}{\sigma}.$$

Demonstração. Note que $f_1 \circ f_0^\alpha(y) = w(\alpha)$. Como $y = 0,1 \Rightarrow f_0^\alpha(y) = 0,1$, respectivamente. Temos que $w(\alpha) = 0$ (respectivamente $w(\alpha) = \sigma$) se, e somente se, $y = 1$ (respectivamente $y = 0$). Por isso, $w(\alpha) \in (0, \sigma)$. Da definição de f_1 temos

$$|(f_1 \circ f_0^\alpha)'(y)| = \sigma |(f_0^\alpha)'(y)|. \tag{3.5}$$

Pelas equações (3.1) e (3.2) e pela definição de $f_0^\alpha(y)$ temos

$$|(f_0^\alpha)'(y)| = \frac{e^{-\alpha}}{y^2}(f_0^\alpha(y))^2 = \frac{e^{-\alpha}}{y^2}\left(1 - \frac{w(\alpha)}{\sigma}\right)^2 \tag{3.6}$$

e

$$f_0^\alpha(y) = 1 - \frac{w(\alpha)}{\sigma} = \frac{1}{1-(1-1/y)e^{-\alpha}}.$$

Daí,

$$1-(1-1/y)e^{-\alpha} = \frac{1}{1-w(\alpha)/\sigma} \;\Rightarrow\; \frac{y-1}{y}e^{-\alpha} = 1 - \frac{1}{1-w(\alpha)/\sigma}.$$

Por isso,

$$e^{-\alpha} = \left(\frac{y}{y-1}\right)\left(1 - \frac{1}{1-w(\alpha)/\sigma}\right)$$

Substituindo $e^{-\alpha}$ na equação (3.6) temos

$$\begin{aligned}
|(f_0^\alpha)'(y)| &= \left|\frac{1}{y^2}\left(\frac{y}{y-1}\right)\left(1 - \frac{1}{1-w(\alpha)/\sigma}\right)\left(1-\frac{w(\alpha)}{\sigma}\right)^2\right| \\
&= \left|\frac{w(\alpha)}{\sigma}\left(\frac{y}{y(y-1)}\right)\left(\frac{-1}{1-w(\alpha)/\sigma}\right)\left(1-\frac{w(\alpha)}{\sigma}\right)^2\right| \\
&= \frac{1}{\sigma}\left(\frac{w(\alpha)}{y(1-y)}\right)\left(1-\frac{w(\alpha)}{\sigma}\right) \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.7) em (3.5) obtemos o lema. ∎

Tome uma sequência $(x_n)_n \in \Sigma_{11}^+$, de forma que ela seja a concatenação de blocos do tipo $(0,\ldots,0,1)$, com os $1'$s ocorrendo nas posições k_i's.

$$(x_n) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{\alpha_1 \text{ zeros}}, \overbrace{1}^{k_1}, \underbrace{0,\ldots,0}_{\alpha_2 \text{ zeros}}, \overbrace{1}^{k_2}, \ldots, \underbrace{0,\ldots,0}_{\alpha_i \text{ zeros}}, \overbrace{1}^{k_i}, \ldots)$$

Chame $y \in (0,1)$ de w_0 e considere a seguinte construção

$$\begin{array}{lclcl}
f_0^{\alpha_1}(w_0) = 1 - \frac{w_1}{\sigma} & \Rightarrow & f_1 \circ f_0^{\alpha_1}(w_0) = w_1 & \Rightarrow & \Phi_{\varrho_{k_1}}(w_0) = w_1 \\
f_0^{\alpha_2}(w_1) = 1 - \frac{w_2}{\sigma} & \Rightarrow & f_1 \circ f_0^{\alpha_2} \circ f_1 \circ f_0^{\alpha_1}(w_0) = w_2 & \Rightarrow & \Phi_{\varrho_{k_2}}(w_0) = w_2 \\
\vdots & & & & \\
f_0^{\alpha_i}(w_{i-1}) = 1 - \frac{w_i}{\sigma} & \Rightarrow & (f_1 \circ f_0^{\alpha_i}) \circ \cdots \circ (f_1 \circ f_0^{\alpha_1})(w_0) = w_i & \Rightarrow & \Phi_{\varrho_{k_i}}(w_0) = w_i
\end{array}$$

Note que $w_i \in (0,\sigma)$ para todo i. Pelo Lema **(3.3.1)** e a regra da cadeia

$$\begin{aligned}
\Phi'_{\varrho_{k_i}}(y) &= (f_1 \circ f_0^{\alpha_i})'(w_{i-1}) \cdot (f_1 \circ f_0^{\alpha_{i-1}})'(w_{i-2}) \cdot \ldots \cdot (f_1 \circ f_0^{\alpha_2})'(w_1) \cdot (f_1 \circ f_0^{\alpha_1})'(w_0) \\
&= \left(\frac{w_i}{w_{i-1}(1-w_{i-1})}\right)\left(1 - \frac{w_i}{\sigma}\right) \cdots \left(\frac{w_1}{w_0(1-w_0)}\right)\left(1 - \frac{w_1}{\sigma}\right) \\
&= \frac{w_i(1-w_i/\sigma)}{w_0(1-w_0)} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1-w_j/\sigma}{1-w_j}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Observação 3.3.2. A função $q(x) = x(1-x)$ é crescente em $(-\infty, 1/2]$.

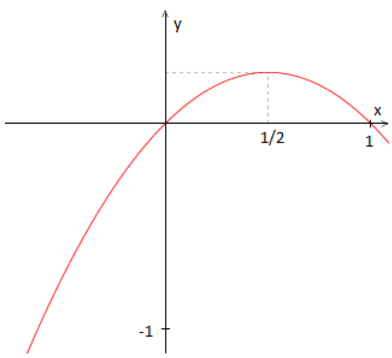

Figura 3.2:

Lema 3.3.3. *Seja uma sequência $(i_n)_n \in \Sigma_{11}^+$ com infinitos $1'$s. Assuma que $i_0 = 1$ e denote por $n_0, n_1, n_2, \ldots$ as sucessivas posições do número 1 em $(i_n)_n$ começando no segundo número 1. Então existe $C > 0$ e uma sequência de números reais positivos $(\delta_j)_{j \geq 0}$ tais que valem as seguintes afirmações:*

1. *C depende somente de n_0.*

2. *Cada δ_j depende somente das posições n_i's, com $i \leq j$, e pertencem ao intervalo $[0,\sigma]$.*

3. *Para cada $i > 0$ e todo $y \in [0,1]$,*

$$|\Phi'_{\varrho_{n_i}}(y)| \leq C \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1-\delta_j/\sigma}{1-\delta_j}.$$

Demonstração. Seja ϱ' o bloco de $(i_n)_n$ começando no primeiro e terminando no segundo símbolo 1. Denote por $N = n_0$ o tamanho do bloco ϱ' e $(i'_n)_n$ a sequência obtida a partir de $(i_n)_n$ pela remoção do bloco ϱ'. Pela regra da cadeia, segue que para todo $k > N$ e $y \in [0,1]$,

$$\Phi'_{\varrho_k}(y) = \Phi'_{\varrho'_{(k-N)}}(\Phi_{\varrho_N}(y)) \cdot \Phi'_{\varrho_N}(y) \tag{3.9}$$

Considere $A = \max\{|\Phi'_{\varrho_N}(\xi)|; \xi \in I\}$. Dessa forma, A depende somente de n_0. Tome $w_0 = \Phi_{\varrho_N}(y)$ e $w_j = \Phi_{\varrho'_{n_j-N}}(w_0)$. Observe que $\Phi_{\varrho_N}(I) \subset (0,\sigma]$ [4]
Definimos

$$\delta_0 = \min \Phi_{\varrho_N}(I) \quad \text{e} \quad \delta_j = \min \Phi_{\varrho'_{n_j-N}}([\delta_0,\sigma]) < \sigma.$$

Evidentemente, cada $\delta_j \in [0,\sigma]$ e depende somente dos $n_i's$, com $i \leq j$.

Das definições de w_j e δ_j, segue que $\sigma > w_0 = \Phi_{\varrho_N}(y) \geq \delta_0$, pois $y \in I$ e $\delta_0 = \min \Phi_{\varrho_N}(I)$. Da mesma forma $\sigma > w_1 = \Phi_{\varrho'_{n_1-N}}(w_0) \geq \min \Phi_{\varrho'_{n_1-N}}([\delta_0,\sigma]) = \delta_1$. Indutivamente, para todo j vale $1/3 > \sigma > w_j \geq \delta_j$. Pela Observação **(3.3.2)**, isto implica que $\delta_0(1-\delta_0) \leq w_0(1-w_0)$, ou seja,

$$\frac{1}{\delta_0(1-\delta_0)} \geq \frac{1}{w_0(1-w_0)}.$$

Pela equação (3.8) temos

$$|\Phi'_{\varrho'_{n_i-N}}(w_0)| = \frac{w_i(1-w_i/\sigma)}{w_0(1-w_0)} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1-w_j/\sigma}{1-w_j}.$$

Observe que cada fator do produto é estritamente menor que 1.[5] Além disso, ele é

---

[4] Note que $f_0^{\alpha}(\sigma) \to 1$ quando $\alpha \to \infty$, daí $0 < \Phi_{\varrho_N}(0) < \sigma$. Além disso $\Phi_{\varrho_N}(1) = \sigma$ e Φ_{ϱ_N} é crescente em I.

[5] $0 < \sigma < 1 \Rightarrow 1/\sigma > 1 \Rightarrow w_j \cdot 1/\sigma > w_j \Rightarrow -w_j \cdot 1/\sigma < -w_j \Rightarrow 1 - w_j/\sigma < 1 - w_j \Rightarrow$
$0 < \dfrac{1-w_j/\sigma}{1-w_j} < 1$

uma função decrescente de $w_j \in [0, \sigma]$.[6] Por isso,

$$
\begin{aligned}
|\Phi'_{\varrho'_{n_i - N}}(w_0)| &= \frac{w_i(1 - w_i/\sigma)}{w_0(1 - w_0)} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1 - w_j/\sigma}{1 - w_j} \\
&\leq \frac{1}{3\delta_0(1 - \delta_0)} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1 - \delta_j/\sigma}{1 - \delta_j} \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Substituindo (3.10) em (3.9) vem

$$
\begin{aligned}
|\Phi'_{\varrho_{n_i}}(y)| &= |\Phi'_{\varrho'_{(n_i - N)}}(w_0)||\Phi'_{\varrho_N}(y)| \\
&\leq \frac{1}{3\delta_0(1 - \delta_0)} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1 - \delta_j/\sigma}{1 - \delta_j} \cdot A
\end{aligned}
$$

Portanto, tomando $C = A/(3\delta_0(1 - \delta_0))$, notamos que C depende somente de n_0. Isto conclui a prova do lema. ∎

Seja $S = \{1, \ldots, d\}^{\mathbb{Z}}$ o conjunto das sequências de d símbolos. Uma sequência $(x_n)_n \in S$ é dita recorrente se dado qualquer bloco $[x_i, \ldots, x_j]$, ele aparece infinitas vezes ao longo de $(x_n)_n$.

Lema 3.3.4. *Seja $(i_n)_n \in \Sigma_{11}^+$ uma sequência recorrente para o deslocamento com $i_0 = 1$. Então existe um número real $a \in (0, 1)$ e uma sequência crescente $(m_j)_{j \geq 0}$ tal que para todo $y \in [0, 1]$,*

$$|\Phi'_{\varrho_{m_j}}(y)| \leq C \cdot a^j,$$

onde C é obtido de $(i_n)_n$ como no Lema **(3.3.3)**.

Demonstração. Pela recorrência de $(i_n)_n$, ela possui infinitos 1's. Logo, podemos aplicar o Lema **(3.3.3)**, bem como nos valer de suas notações.

Como cada fator do produto no Lema **(3.3.3)** é estritamente menor que 1, é suficiente mostrar que existem infinitos fatores limitados por cima de um número estritamente menor que 1. Equivalentemente, basta mostrarmos que, para infinitos valores de j, os δ_j correspondentes estão uniformemente afastados de zero. [7]

---

[6] Seja $g : [0, \sigma] \to \mathbb{R}$ definida por $g(w_j) = \dfrac{1 - w_j/\sigma}{1 - w_j}$. Então $g'(w_j) = \dfrac{-1/\sigma + 1}{(1 - w_j)^2} < 0$. Logo, g é decrescente.

[7] Observe que $\dfrac{1 - \delta_j/\sigma}{1 - \delta_j} = \kappa \Rightarrow \sigma - \delta_j = \sigma\kappa - \delta_j\kappa\sigma \Rightarrow \delta_j = \dfrac{1 - \kappa}{1/\sigma - \kappa}$. Assim, se $0 < \beta \leq \delta_j$, então $\beta \leq \dfrac{1 - \kappa}{1/\sigma - \kappa} \Rightarrow \beta - \beta\kappa\sigma \leq \sigma - \kappa\sigma \Rightarrow \kappa(\sigma - \beta\sigma) \leq \sigma - \beta \Rightarrow \kappa \leq \dfrac{1 - \beta/\sigma}{1 - \beta} < 1$. Portanto, $\dfrac{1 - \delta_j/\sigma}{1 - \delta_j} \leq \dfrac{1 - \beta/\sigma}{1 - \beta} < 1$.

Note que o primeiro bloco de $(i'_n)_n$ é composto de $n_1 - 1$ zeros e um 1. Isto implica que $\Phi_{\varrho'_{n_1-N}}[0,\sigma] \subset [f_1 \circ f_0^{n_1-1}(\sigma), \sigma]$, daí $\delta_1 > f_1 \circ f_0^{n_1-1}(\sigma)$. Pela recorrência de $(i'_n)_n$, segue que este bloco aparece infinitas vezes. Logo, para cada tempo j que ele aparece, usando o mesmo argumento, concluimos que $\delta_{j+1} \in [f_1 \circ f_0^{n_1-1}(\sigma), \sigma]$. Portanto,

$$|\Phi'_{\varrho_{m_j}}(y)| \leq C \prod_{k=1}^{j} \frac{1-\delta_k/\sigma}{1-\delta_k} \leq C \cdot a^j,$$

onde o valor de cada fator do produtório é tomado sobre a sequência de aparecimento do bloco $[\underbrace{0,\ldots,0}_{n_1 \text{ zeros}},1]$ e $a = \dfrac{1-f_1 \circ f_0^{n_1-1}/\sigma}{1-f_1 \circ f_0^{n_1-1}}$. ■

Para cada bloco $\varrho = (i_0, \ldots, i_k)$, associamos o *cilindro* definido por

$$[\varrho] = [i_0, \ldots, i_k] = \{x \in \Lambda;\ F^j(x) \in R_{i_j},\ para\ j = 0, \ldots, k\} = \bigcap_{j=0}^{k} F^{-j}(R_{i_j}) \cap \Lambda.$$

Observe que cada cilindro é fechado e aberto em Λ. Com efeito, pela continuidade de F, segue que $F^{-j}(R_{i_j})$ é fechado para cada $j = 0, \ldots, k$, logo a interseção na definição é um conjunto fechado. Por outro lado,

$$[\varrho]^c = [\widetilde{i_0}, \ldots, i_k] \cup [i_0, \widetilde{i_1} \ldots, i_k] \cup \ldots \cup [i_0, \ldots, \widetilde{i_{k-1}}, i_k] \cup [i_0, \ldots, \widetilde{i_k}],$$

onde $i_q \neq \widetilde{i_q}$ para $q = 0, 1, \ldots, k$. Note que podem existir cilindros vazios, bem como existir um cilindro que contenha um outro presente na união. De qualquer forma, usando o mesmo argumento acima, cada cilindro é fechado, logo a união acima também é fechada. Portanto, $[\varrho]$ é aberto em Λ.

Dizemos que um ponto X tem *frequência positiva* no conjunto $A \subset \Lambda$ se

$$\gamma = \gamma(X, A) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{F^j(X) \in A; 0 \leq j < n\} > 0.$$

Definição 3.3.5. Seja b um número negativo. Um ponto X é dito b-contrativo se

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |DF^n(X)_{|E^c}| \leq b < 0.$$

Na verdade, a hipótese de recorrência da sequência $(i_n)_n$ no Lema **(3.3.4)** não é necessária, bastaria supor que um k-bloco da forma

$$(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}}, 1),$$

com k fixo, aparece infinitas vezes em $(i_n)_n$. Sabendo disso, o próximo lema é uma ferramenta fundamental na demonstração do **Teorema Principal 1**.

Lema 3.3.6. *Seja l um inteiro positivo. Para todo $X \in \Lambda$ com frequência positiva $\gamma > 0$ para o l-bloco $\theta = (1, 0, \ldots, 0, 1)$, existe um número real $a \in (0,1)$, dependendo apenas de l, tal que X é ($\gamma \log a$)-contrativo.*

Demonstração. Tome l um inteiro positivo e considere X com frequência $\gamma > 0$ para o l-bloco $\theta = (1, 0, \ldots, 0, 1)$. Seja $\iota(X)^+$ o itinerário positivo de X. Pelo Lema **(3.3.4)**, a constante $C = C(X)$ depende do primeiro bloco de $\iota(X)^+$ o qual termina no segundo símbolo 1. A sequência $(m_j)_j$ é a sequência de aparecimento do bloco θ. Consequentemente, existe $a \in (0,1)$, dependendo somente do comprimento do cilindro θ, tal que, para todo n satisfazendo $F^n(X) \in \theta$,

$$|DF^{n+(l+1)}(X)_{|_{E^c}}| \leq C(X) \cdot a^{\overbrace{\#\{F^j(X) \in \theta;\ 0 \leq j \leq n\}}^{\text{nº de vezes que } \theta \text{ apareceu até o tempo } n}}. \tag{3.11}$$

Aplicando logarítmos e tomando lim inf em (3.11), segue que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |DF^{n+(l+1)}(X)_{|_{E^c}}| &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log[C(X) \cdot a^{\#\{F^j(X)\in\theta;\ 0\leq j\leq n\}}] \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} [\log C(X) + \#\{F^j(X) \in \theta;\ 0 \leq j \leq n\} \log a] \\
&= \log a \cdot \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{F^j(X) \in \theta;\ 0 \leq j \leq n\} \\
&= \gamma \log a < 0.
\end{aligned}$$

■

Observação 3.3.7. Seja X um ponto recorrente diferente de Q e P, então ele visita infinitas vezes R_1. De fato, pela semi-conjugação, se X visita R_1 apenas um número finito de vezes, então existe k tal que $\varsigma^k(\iota(X)) = (0, 0, 0, \ldots)$. Portanto, tomando $n \geq k$ e fazendo $n \to \infty$, concluimos que X converge para um ponto fixo, logo não pode ser recorrente.

Vamos dar algumas de definições que serão úteis para as demonstrações subsequentes.

Definição 3.3.8. Dadas μ e ν medidas no espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$.

- Dizemos que ν é *absolutamente contínua* em relação a μ se para todo E mensurável tal que $\mu(E) = 0$, então $\nu(E) = 0$. Denotamos por $\nu \ll \mu$

- Dizemos que ν é *mutuamente singular* em relação a μ se existem mensuráveis disjuntos E e F tais que $X = E \cup F$ e $\mu(E) = 0$ e $\nu(F) = 0$. Denotamos por $\mu \perp \nu$

Definição 3.3.9. Se X é um espaço topológico e μ uma medida na σ-álgebra de Borel de X. O *suporte* da medida μ é o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $\mu(V) > 0$ para toda vizinhança V de x. Denotamos tal conjunto por suppμ.

Note que suppμ é fechado. Mais ainda, ele é o menor fechado de medida total.

Exemplo 3.3.10. Tome $\{q_1, q_2, \ldots\}$ uma enumeração de $\mathbb{Q}$. Considere $\mathcal{A}$ a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$ e defina μ por:

$$\mu(E) = \sum_{q_i \in E} \frac{1}{2^i}.$$

Observe que μ está bem definida, visto que a série é limitada. Mais também,

$$\mu(\mathbb{Q}) = \sum_{q_i \in \mathbb{Q}} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Por outro lado, a medida de Lebesgue de $\mathbb{Q}$ é nula. Portanto, μ não é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue. Além disso, o suporte de μ é a reta inteira, pois a medida de qualquer aberto da reta é positiva pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Agora estamos aptos a provar nosso **Teorema Principal 1**.

Demonstração.

(1) - Seja $X \in \Lambda$ um ponto recorrente para F diferente de P e Q. Vamos considerar a sequência $\iota(X)^+$. Pela Observação **(3.3.7)**, $\iota(X)^+$ contém infinitos símbolos 1 e é recorrente em Σ_{11}. Consequentemente, pelo Lema **(3.3.4)** temos,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |DF^n(X)_{|E^c}| &= \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{j} \log |DF^{m_j}(X)_{|E^c}| \\
&= \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{j} \log |\Phi'_{Q_{m_j}}(X_{|E^c})| \\
&\le \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{j} \log(C \cdot a^j) \\
&= \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{j} [\log(C) + \log(a^j)] \\
&= \liminf_{j\to\infty} \frac{1}{j} \cdot j \log a < 0.
\end{aligned}$$

Quando $X = P$, vale o seguinte

$$\begin{aligned} DF^n(P)_{|_{E^c}} &= \prod_{i=0}^{n-1} DF \circ F^i(P)_{|_{E^c}} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} DF(P)_{|_{E^c}} \\ &= (DF(P)_{|_{E^c}})^n \\ &= (f'(1))^n = e^{-n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |DF^n(P)_{|_{E^c}}| = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log e^{-n} = -1.$$

Para concluir o item (1) do Teorema resta provar que toda medida de probabilidade ergódica F-invariante μ diferente de δ_Q tem expoente de Lyapunov negativo na direção central. Vamos considerar dois casos.

- Se $\mu(R_1) = 0$

Note que o suporte de μ está em R_0. Com efeito, pelo fato de $R_0 \cap R_1 = \emptyset$ segue que

$$1 = \mu(R_0) + \mu(R_1) = \mu(R_0).$$

Se existisse $p \in \operatorname{supp}\mu$ tal que $p \notin R_0$, então poderíamos encontrar uma vizinhança V_p de p com $\mu(V_p) > 0$ tal que $V_p \cap R_0 = \emptyset$, pois R_0 é fechado. De $R_0 \subset V_p^c$, segue que

$$\mu(R_0) \le \mu(V_p^c) < 1,$$

o que contradiz $\mu(R_0) = 1$.

Por invariância,

$$\mu(F^{-j}(R_0)) = \mu(R_0) = 1 \ \ \forall j \ge 1, \ \text{ onde } \ F^{-j}(R_0) = \{x \in \Lambda; F^j(x) \in R_0\}.$$

Defina $B = \bigcap_{j\ge 0} F^{-j}(R_0)$, entao $\mu(B) = 1$. Note que $B = [0,0,0,\ldots]$ e é fechado. Consequentemente,

$$\operatorname{supp}\mu \subset [0,0,0,\ldots] \subset R_0.$$

Observe que $[0,0,0,\ldots]$ é o conjunto $[0,1] \times [0,1] \times \{0\}$ e como todo ponto em $[0,0,0,\ldots] \backslash [0,1] \times \{0\} \times \{0\}$ é atraído para P, segue que o cilindro $[0,0,0,\ldots]$ admite somente duas probabilidades ergódicas F-invariantes, a saber δ_P e δ_Q. Por isso, μ deve ser igual a δ_P. Para esta medida temos

$$\begin{aligned}\lambda^c_{\delta_P} &= \int \log |DF_{|_{E^c}}| d\delta_P = \log |DF(P)_{|_{E^c}}| \\ &= \log |f'(1)| = -1.\end{aligned}$$

- Se $\mu(R_1) > 0$

Afirmamos que μ é singular com δ_P e δ_Q. De fato, seja $E = \{Q\}$. Pela ergodicidade de μ, $\tau(E, x) = \mu(E)$ μ-qtp $x \in \Lambda$. Por outro lado, para todo ponto $x \in R_1$, vale $\tau(E, x) = 0$. Como $\mu(R_1) > 0$, segue que $\mu(E) = 0$. De maneira análoga, provamos que μ é singular com δ_P, basta tomar $E = \{P\}$.

Dado o k-bloco

$$\theta_k = [1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ zeros}}, 1],$$

existe $\varepsilon > 0$ e $l \in \mathbb{N}$ tal que $\mu([\theta_l]) > \varepsilon$. Com efeito, considere $\theta_\infty = [1, 0, 0, \ldots]$ e observe que

$$R_1 = [1] = \theta_\infty \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} [\theta_k].$$

Como não existem pontos recorrentes em θ_∞, o Teorema de Recorrência de Poincaré **(1.1.5)** diz que $\mu(\theta_\infty) = 0$. Por isso, sendo $\mu(R_1) > 0$, deve existir $\varepsilon > 0$ e um l-bloco $\theta_l = [1, 0, \ldots, 0, 1]$ tal que $\mu([\theta_l]) > \varepsilon$.

Como

$$\frac{1}{n} \#\{F^j(x) \in \theta_l; 0 \leq j < n\} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\theta_l}(F^j(x)),$$

o Teorema de Birkhoff **(1.2.2)** e a ergodicidade de μ garantem a existência de um conjunto $B_1 \subset \Lambda$ com $\mu(B_1) = 1$ tal que, para todo $x \in B_1$

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\theta_l}(F^j(x)) &= \int \chi_{\theta_l} d\mu \\ &= \mu([\theta_l]) > \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, $\gamma(x, \theta_l) = \mu([\theta_l]) > \varepsilon > 0$ para todo $x \in B_1$. Por outro lado, novamente pela ergodicidade de μ, existe $B_2 \subset \Lambda$ com $\mu(B_2) = 1$ tal que, o expoente de Lyapunov na direção central está bem definido e é igual a λ^c_μ. Tomando $x \in B_1 \cap B_2$, o Lema **(3.3.6)** garante a existência de um número real $a \in (0, 1)$ tal que

$$\lambda^c_\mu \leq \mu([\theta_l]) \cdot \log a < 0.$$

Isto finaliza a demonstração do item (1) do Teorema.

(2) - Se $\mu_k(R_1) = 0$ para infinitos valores de k, então $\lambda^c_{\mu_k}$ possui uma subsequência constante igual a 1 ou igual a -1, o que contradiz o fato de que $\lambda^c_{\mu_k} \to 0$. Daí, $\mu_k(R_1) = 0$ para, no máximo, um número finito de valores de k, os quais, sem perda de generalidade, podem ser ignorados. Assim, suponhamos que $\mu_k(R_1) > 0$ para todo k. Logo, μ_k é singular com δ_P e δ_Q. Tome um l-bloco $\theta_l = [1, 0, \ldots, 0, 1]$. Afirmamos que $\lim_{k\to\infty} \mu_k([\theta_l]) = 0$. De fato, desprezando os j's tais que $\mu_j([\theta_l]) = 0$, podemos assumir que $\mu_k([\theta_l]) > 0$ para todo k. Pelo Lema **(3.3.6)**, existe $a = a(l) \in (0, 1)$ tal que,

$$\lambda^c_{\mu_k} \leq \mu_k([\theta_l]) \cdot \log a < 0.$$

Tomando o limite em k, segue que $\lim_{k\to\infty} \mu_k([\theta_l]) = 0$.

Como $[\theta_l]$ é aberto e fechado em Λ, segue que para qualquer ponto de acumulação μ [8] de $(\mu_k)_k$ na topologia fraca* vale

$$\mu([\theta_l]) = \mu(\overline{[\theta_l]}) = \mu(\text{int}[\theta_l]) + \mu(\partial[\theta_l]) = \mu([\theta_l]) + \mu(\partial[\theta_l]) \Rightarrow \mu(\partial[\theta_l]) = 0.$$

Pelo Lema **(1.1.9)**,

$$\mu_{k_j}([\theta_l]) \to \mu([\theta_l]) \Rightarrow \mu([\theta_l]) = 0.$$

Como l é arbitrário, segue que $\mu([\theta_l]) = 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $\mu([0, 0, \ldots]) = 1$. Por isso $\mu = \alpha\delta_Q + (1 - \alpha)\delta_P$, para algum $\alpha \in [0, 1]$.

Como $\log |DF_{|E^c}|$ é contínua,

$$\lambda^c_{\mu_{k_j}} = \int \log |DF_{|E^c}| d\mu_{k_j} \to \int \log |DF_{|E^c}| d\mu = \lambda^c_\mu.$$

Por hipótese $\lambda^c_{\mu_k} \to 0$, daí

$$0 = \int \log |DF_{|E^c}| d\mu = \int \log |DF_{|E^c}| d(\alpha\delta_Q + (1 - \alpha)\delta_P) = \alpha\lambda^c_{\delta_Q} + (1 - \alpha)\lambda^c_{\delta_P}.$$

Uma vez que, $\lambda^c_{\delta_Q} = 1$ [9] e $\lambda^c_{\delta_P} = -1$, devemos ter $\alpha = 1/2$. Como μ é qualquer, segue que μ_k admite um único ponto de acumulação na topologia fraca*. Por isso,

$$\mu_k \to \frac{1}{2}\delta_Q + \frac{1}{2}\delta_P.$$

Caso contrário, existiria $V \subset \mathcal{M}_1(\Lambda)$ vizinhança de $1/2(\delta_Q + \delta_P)$ tal que $\mu_k \notin V$ para infinitos valores de k. Como $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ é compacto, existiria um ponto de acumulação

[8] Um tal ponto existe pois $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ é espaço métrico compacto.

[9] $\lambda^c_{\delta_Q} = \int \log |DF_{|E^c}| d\delta_Q = \log |DF(Q)_{|E^c}| = \log |f'(0)| = \log e = 1$

diferente de $\frac{1}{2}(\delta_Q + \delta_P)$. ■

Observação 3.3.11. De fato, é possível construir uma sequência de medidas μ_k tal que $\lambda^c_{\mu_k} \to 0$. Veja *Remark 5* de Leplaideur et al. [16].

3.4 Prova do Teorema Principal 2

Nesta seção vamos começar a estudar o problema da existência de estados de equilíbrio de um potencial qualquer. Em nosso caso, responderemos de maneira afirmativa a tal pergunta. Mais ainda, garantiremos a existência de um residual no qual os potenciais admitem único estado de equilíbrio.

Para cada $X = (x^s, x^c, x^u) \in \Lambda$, a *Variedade Central* de X, denotada por $W^c(X)$, é o conjunto de pontos da forma (x^s, y, x^u), com $y \in I$. Observe que todos os pontos em $W^c(X)$ possuem a mesma imagem pela aplicação ι.

Lema 3.4.1. *Seja X um ponto recorrente por F diferente de P e Q. Então*

$$\Lambda \cap W^c(X) = \{X\}.$$

Demonstração.

Seja $\iota(X) = (i_n)_n \in \Sigma_{11}$. Pela Observação **(3.3.7)**, $\iota(X)$ possui infinitos $1'$s, por isso podemos substituir X por algum iterado futuro e assumir que $i_0 = 1$. Como antes, ϱ_k denota o bloco $(i_0, \ldots, i_k)$ e $(i^+_n)_n$ a sequência unilateral de $(i_n)_n$.

O bloco $(i_0, i_1, \ldots)$ começa com a concatenação dos blocos ϱ_{n_0} e $\varrho'_{n_1-n_0}$. Pela recorrência de $(i_n)_n$, sabemos que o bloco $\varrho_{n_0}\varrho'_{n_1-n_0}$ aparece infinitas vezes na sequência $(\ldots, i_{-2}, i_{-1}, i_0)$.

Considere uma sequência decrescente de inteiros $k_j \to -\infty$ tal que, $k_j - k_{j+1} > n_1$ e $\varsigma^{k_j}((i_n))$ coincide com (i_n) nas posições $0, 1, \ldots, n_1$. Note que, por construção, $i_{k_j} = 1$.

Para todo j tome a sequência $(i_{k_j}, i_{k_j+1}, i_{k_j+2}, \ldots)$. Pelo Lema **(3.3.3)**, existe $C = C(j)$ dependendo apenas de n_0. A sequência (m_j) do Lema **(3.3.4)** é a sequência de aparecimento do bloco $\varrho'_{n_1-n_0}$. Consequentemente, o Lema **(3.3.4)** diz que para todo j e todo $y \in [0,1]$ vale

$$|\Phi'_{[(i_{k_j}, i_{k_j+1}, \ldots, i_{-1})]}(y)| \leq C \cdot a^j. \tag{3.12}$$

Seja $L_j \subset I$ a imagem do intervalo I pela aplicação $\Phi_{[(i_{k_j},\ldots,i_{-1})]}$. Observe que todos os pontos em $\Lambda \cap W^c(X)$ têm suas coordenadas centrais pertencentes à intersecção dos L_j, $j > 0$. A expressão (3.12) diz que o diâmetro de L_j converge para zero à medida que j tende para o infinito.[10] Como I é compacto e $\Phi_{[(i_{k_j},\ldots,i_{-1})]}$ é contínua, segue que cada L_j é compacto. Além disso, todos são não-vazios e vale $L_{j+1} \subset L_j$.[11] Portanto, $\bigcap_j L_j$ contém apenas um ponto. Isto conclui a demonstração do lema. ∎

Uma consequência imediata do Lema **(3.4.1)** é que toda curva central contida em Λ não pode conter pontos recorrentes. De fato, seja α uma curva central contida em Λ e $X \in \alpha$. Note que, $\alpha \subset W^c(X)$, daí $\Lambda \cap \alpha \subset \Lambda \cap W^c(X)$. Se X é recorrente, então $\Lambda \cap W^c(X) = \{X\}$. Isto contradiz α estar inteiramente contida em Λ.

A partir de agora, nosso objetivo será mostrar que a função entropia $\mu \mapsto h_\mu(F)$ é semicontínua superiormente (*scs*). Tal fato implicará diretamente na existência de estados de equilíbrio para qualquer potencial. Para isso, vamos construir uma partição geradora com diâmetro pequeno para cada medida μ.

Lema 3.4.2. *Seja μ uma probabilidade F-invariante em Λ. Então toda partição $\mathscr{P}$ de Λ com diâmetro menor que 1/2 é geradora para μ.*

Demonstração.

Seja $\mathscr{P}$ uma partição de Λ com diâmetro menor que $1/2$ e denote por $\mathscr{P}(X)$ o elemento da partição que contém X. Para cada n positivo, tome

$$\mathscr{P}^n_{-n}(X) = \bigcap_{j=-n}^{n} F^{-j}(\mathscr{P}(F^j(X))).$$

Defina $\mathscr{P}^{+\infty}_{-\infty}(X)$ como sendo a interseção de todos os $\mathscr{P}^n_{-n}(X)$. Assim, é suficiente mostrar que $\mathscr{P}^{+\infty}_{-\infty}(X) = \{X\}$ para μ-qtp $X \in \Lambda$.[12] Para tal, vamos considerar o conjunto dos pontos recorrentes em Λ por F, uma vez que o mesmo possui medida total.[13]

[10] $\operatorname{diam} L_j = \sup\{|x-y|;\ x,y \in L_j\} = \sup\{|\Phi'_{[(i_{k_j},\ldots,i_{-1})]}(\xi)||\tilde{x}-\tilde{y}|;\ \tilde{x},\tilde{y},\xi \in I\} \leq$

$C \cdot a^j \sup\{|\tilde{x}-\tilde{y}|;\ \tilde{x},\tilde{y} \in I\} = C \cdot a^j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$

[11] Para todo j vale $f_{i_{k_j-1}} \circ \ldots \circ f_{i_{k_{j+1}}}(I) \subset I$. Portanto, $L_{j+1} = \Phi_{[(i_{k_{j+1}},\ldots,i_{-1})]} = f_{i_{-1}} \circ \ldots \circ f_{i_{k_j}} \circ f_{i_{k_j-1}} \circ \ldots \circ f_{i_{k_{j+1}}}(I) \subset f_{i_{-1}} \circ \ldots \circ f_{i_{k_j}}(I) = \Phi_{[(i_{k_j},\ldots,i_{-1})]} = L_j$

[12] Isto significa que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} \mathscr{P}^n_{-n}(X) = 0$ μ-qtp, logo $\mathscr{P}$ é geradora (ver Mañé [18], pág. 13).

[13] Sendo Λ é compacto, admite base enumerável de abertos. Portanto, pela versão topológica do Teorema de Recorrência de Poincaré, o conjunto dos pontos recorrentes por F é de medida total.

Se X é recorrente, o mesmo acontece com $\iota(X) = (i_n)$ em Σ_{11}. Se a sequência (i_n) possui pelo menos um símbolo 1, então ela contém uma infinidade deles. Como $\mathscr{P}_{-\infty}^{+\infty}(X) \subset \Lambda$, segue que $\mathscr{P}_{-\infty}^{+\infty}(X) \cap W^c(X) \subset \Lambda \cap W^c(X)$.

Pelo Lema **(3.4.1)**, concluimos que o único ponto na variedade central de X que acompanha sua órbita tanto no passado como no futuro, no sentido de pertencer aos mesmos elementos da partição, é o próprio X, isto é, $\mathscr{P}_{-\infty}^{+\infty}(X) \cap W^c(X) = \{X\}$. Além disso, a hiperbolicidade uniforme nas outras duas direções implica $\mathscr{P}_{-\infty}^{+\infty}(X) = \{X\}$.

Por outro lado, se (i_n) não possui qualquer símbolo 1, então X deve estar no conjunto $[0,1] \times [0,1] \times \{0\}$. Por isso, $X = P$ ou $X = Q$. Se $X = Q$, então para qualquer ponto $Y \in (Q,P]$ vale $\lim_{n\to\infty} F^n(Y) = P$. Consequentemente,

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} F^{-j}(\mathscr{P}(Q)) \cap [Q,P] = \{Q\}.$$

Novamente pela hiperbolicidade uniforme nas outras direções, segue que

$$\mathscr{P}_{-\infty}^{+\infty}(Q) = \{Q\}.$$

Se $X = P$, então para cada $Y \in [Q,P)$ vale $\lim_{n\to\infty} F^{-n}(Y) = Q$. De forma análoga,

$$\mathscr{P}_{-\infty}^{+\infty}(P) = \{P\}.$$

Isto completa a demonstração do lema. ■

Considere $(M, \mathcal{A}, f, \mu)$ um sistema dinâmico com M métrico compacto e f contínua. Em [6], Bowen provou que

Proposição 3.4.3. *Suponha que para algum $\varepsilon > 0$ temos $h_\mu(f,\mathscr{P}) = h_\mu(f)$, sempre que μ é uma probabilidade f-invariante e* $\operatorname{diam}(\mathscr{P}) < \varepsilon$. *Então todo $\phi \in C^0(M)$ tem um estado de equilíbrio.*

Para provar esta proposição, Bowen mostrou que, com estas hipóteses, a função $\mu \mapsto h_\mu(f)$ é *scs*, pois isto implica diretamente que a função $\mu \mapsto h_\mu(f) + \int \phi d\mu$ também o é. Como o conjunto das medidas de probabilidade f-invariantes é fechado na topologia fraca* (logo, compacto), segue que todo potencial admite estado de equilíbrio.

Como consequência imediata do Lema **(3.4.2)** e do Teorema de Kolmogorov-Sinai **(2.1.5)** temos

$$h_\mu(F,\mathscr{P}) = h_\mu(F).$$

Isto significa que nosso modelo satisfaz as hipóteses da Proposição **(3.4.3)**. Portanto, todo potencial em Λ admite estado de equilíbrio.

Observação 3.4.4. A entropia topológica de F é finita. Primeiramente, observe que $H_\mu(\mathscr{P}^n) \leq \sum_{j=0}^{n-1} H_\mu(F^{-j}(\mathscr{P})) = \sum_{j=0}^{n-1} H_\mu(\mathscr{P}) = nH_\mu(\mathscr{P})$. Isto nos diz que, $h_\mu(F, \mathscr{P}) \leq H_\mu(\mathscr{P})$. Podemos tomar $\mathscr{P}$ geradora e com entropia finita. Para ver isto, considere $\{U_1, \ldots, U_n\}$ cobertura finita de Λ (pois Λ é compacto) com diâmetro menor que $1/2$. Fazendo $V_j = U_j \backslash (U_1 \cup \cdots \cup U_{j-1})$, com $j = 1, 2, \ldots, n$ e $U_0 = \emptyset$, tome $P_j = V_j \cap \Lambda$. É claro que $\mathscr{P} = \{P_j\,;\, j = 1, \ldots, n\}$ é uma partição com entropia finita de Λ. Além disso, o Lema **(3.4.2)** garante que $\mathscr{P}$ é geradora. Dessa forma, do exposto acima, existe μ tal que $h_{\text{top}}(F) = h_\mu(F) = h_\mu(F, \mathscr{P}) \leq H_\mu(\mathscr{P}) < \infty$.

Pelo Corolário da Proposição 13 (capítulo 8) de Lima [17], segue que Λ é metrizável. Note que $C^0(\Lambda)$ é Banach e separável, uma vez que Λ é métrico compacto. Além disso, a função pressão é convexa, pois $h_{\text{top}}(F) < \infty$. Assim, o Teorema de Mazur **(2.3.5)** garante a existência de um residual $\mathcal{R} \subset C^0(\Lambda)$ tal que $P(F, \phi)$ é derivável em todo $\phi \in \mathcal{R}$. Portanto, dos comentários feitos no fim do capítulo anterior e da Proposição **(3.4.3)**, segue que todo $\phi \in \mathcal{R}$ admite um único estado de equilíbrio. Isto conclui a demonstração **Teorema Principal 2**.

3.5 Prova do Teorema Principal 3

Pela seção anterior, qualquer potencial em $C^0(\Lambda)$ admite pelo menos um estado de equilíbrio e em um conjunto residual eles são únicos. Em particular, cada elemento da família de potenciais $\phi_t = t \log |DF_{|_{E^c}}|$ admite pelo menos um estado de equilíbrio. Todavia, é válido perguntar se existem valores de t para os quais esses estados são únicos? Se existem valores de t para os quais todos os estados de equilíbrio são iguais a uma única medida? Como vimos, o **Teorema Principal 3** responde a tais perguntas. Passemos à sua demonstração.

Vamos denotar por $P(t)$ a pressão topológica do potencial $\phi_t = t \log |DF_{|_{E^c}}|$. Note que a função $t \mapsto P(t)$ é convexa, logo contínua em $\mathbb{R}$, pois $h_{\text{top}}(F) < \infty$.

Observação 3.5.1. A entropia topológica de F é maior que zero. De fato, considere a matriz de transição A de Σ_{11}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que $\gamma_1 = (1-\sqrt{5})/2$ e $\gamma_2 = (1+\sqrt{5})/2$ são os autovalores de A. Assim, $h_{\text{top}}(\varsigma) = \log \gamma_2 > 0$. Pela semi-conjugação ι e como Λ é fechado F-invariante, segue que $h_{\text{top}}(F) \geq h_{\text{top}}(F_{|_\Lambda}) \geq h_{\text{top}}(\varsigma) > 0$.

Considere o seguinte conjunto,

$$\mathcal{T} = \{\xi > 0; \forall t \in [0, \xi) \text{ vale } P(t) > t\}.$$

Por continuidade, o conjunto $\mathcal{T}$ é não vazio, pois $P(0) = h_{\text{top}}(F) > 0$. [14] Defina

$$t_0 := \sup \mathcal{T} \leq \infty.$$

Lema 3.5.2. *Para $t \in [0, t_0)$, qualquer estado de equilíbrio μ_t de ϕ_t é singular com respeito a δ_Q.*

Demonstração.

Por contradição, assumamos que $\mu_t(\{Q\}) > 0$, para algum $t \in [0, t_0)$. Pelo Teorema de Decomposição de Medidas (ver Walters [30]), existe $p \in [0,1]$ e medidas de probabilidades F-invariantes η e ν tais que $\mu_t = p\eta + (1-p)\nu$, $\eta \ll \delta_Q$ e $\nu \perp \delta_Q$. Como δ_Q é ergódica, o Lema **(1.2.8)** diz que $\eta = \delta_Q$. Assim,

$$\begin{aligned} \mu_t(\{Q\}) &= p\underbrace{\delta_Q(\{Q\})}_{=1} + (1-p)\overbrace{\nu(\{Q\})}^{=0,\text{ pois } \nu \perp \delta_Q} \\ &= p. \end{aligned}$$

Ou seja, $\mu_t = \mu_t(\{Q\})\delta_Q + (1-\mu_t(\{Q\}))\nu$. Pela equação (3.3) segue que

$$\begin{aligned} \int \phi_t d\delta_Q &= \phi_t(Q) \\ &= t \log |DF(Q)_{|_{E^c}}| \\ &= t \log |f'(0)| \\ &= t \log e = t. \end{aligned}$$

[14]Se $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto a e $f(a) > g(a)$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in X$ e $|x - a| < \delta$

Uma vez que a entropia métrica é afim (Proposição **(2.1.7)**), temos

$$\begin{aligned}
P(t) &= h_{\mu_t}(F) + \int \phi_t d\mu_t \\
&= h_{\mu_t(\{Q\})\delta_Q+(1-\mu_t(\{Q\}))\nu}(F) + \int \phi_t d(\mu_t(\{Q\})\delta_Q + (1-\mu_t(\{Q\}))\nu) \\
&= \mu_t(\{Q\})\overbrace{h_{\delta_Q}(F)}^{=0} + (1-\mu_t(\{Q\}))h_\nu(F) + \\
&\quad + \mu_t(\{Q\})\overbrace{\int \phi_t d\delta_Q}^{=t} + (1-\mu_t(\{Q\}))\int \phi_t d\nu \\
&= \mu_t(\{Q\})t + (1-\mu_t(\{Q\}))\left(h_\nu(F) + \int \phi_t d\nu\right) \\
&< \mu_t(\{Q\})P(t) + (1-\mu_t(\{Q\}))\left(h_\nu(F) + \int \phi_t d\nu\right).
\end{aligned}$$

Daí,

$$(1-\mu_t(\{Q\}))P(t) < (1-\mu_t(\{Q\}))\left(h_\nu(F) + \int \phi_t d\nu\right).$$

Se $\mu_t(\{Q\}) = 1$, então $0 < 0$. Contradição! Se $\mu_t(\{Q\}) < 1$, então $P(t) < (h_\nu(F) + \int \phi_t d\nu)$. Isto contradiz o Princípio Variacional **(2.3.1)**. ■

Corolário 3.5.3. *Dado $t \in [0, t_0)$ e μ_t qualquer estado de equilíbrio de ϕ_t. Então*

$$\lambda^c_{\mu_t} = \int \log|DF_{|_{E^c}}| d\mu_t < 0.$$

Demonstração. Seja $(\nu_{t,P})$ a decomposição ergódica de μ_t. Assim,

$$\mu_t = \int \nu_{t,P}\, d\widehat{\mu}(P).$$

Considere a seguinte função não-negativa $P \mapsto \nu_{t,P}(\{Q\})$. Uma vez que $\mu_t(\{Q\}) = 0$, pois μ_t é singular com δ_Q, segue que

$$\int \nu_{t,P}(\{Q\}) d\widehat{\mu}(P) = 0.$$

Isto implica que $\nu_{t,P}(\{Q\}) = 0$ para $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathscr{P}$, ou seja, $\nu_{t,P} \neq \delta_Q$. Logo, o **Teorema Principal 1** diz que para esses valores de P temos $\int \log|DF_{|_{E^c}}| d\nu_{t,P} < 0$. Portanto,

$$\lambda^c_{\mu_t} = \int \log|DF_{|_{E^c}}| d\mu_t = \int_{\mathscr{P}} \left(\int \log|DF_{|_{E^c}}| d\nu_{t,P}\right) d\widehat{\mu}(P) < 0.$$

■

Lema 3.5.4. *A função P é decrescente em* $[0, t_0)$.

Demonstração. Seja $t < t'$ em $[0, t_0)$. Tome μ_t e $\mu_{t'}$ estados de equilíbrio de ϕ_t e $\phi_{t'}$. Então,

$$\begin{aligned} P(t') &= h_{\mu_{t'}}(F) + t'\lambda^c_{\mu_{t'}} \\ &= h_{\mu_{t'}}(F) + t\lambda^c_{\mu_{t'}} + (t'-t)\lambda^c_{\mu_{t'}} \\ &\leq P(t) + (t'-t)\cdot\lambda^c_{\mu_{t'}} \\ &< P(t). \end{aligned}$$

A última desigualdade é consequência do Corolário **(3.5.3)**. ■

Lema 3.5.5. t_0 *é um número real positivo.*

Demonstração.

O Lema **(3.5.4)** implica que $P(t)$ é menor que $h_{\text{top}}(F)$ em $[0, t_0)$. Por outro lado, como

$$h_{\delta_Q}(F) + \int \phi_t \delta_Q = t.$$

Isto significa que $P(t)$ é maior ou igual a t. Por isso, $t \leq P(t) < P(0) = h_{\text{top}}(F)$. Tomando o limite em t, segue que $t_0 \leq h_{\text{top}}(F) < \infty$. ■

Observe que o que fizemos foi provar o item (1) do **Teorema Principal 3**. Agora, vamos mostrar que δ_Q e qualquer ponto de acumulação da sequência μ_t, com $t \nearrow t_0$, são estados de equilíbrio de ϕ_{t_0}.

Note que $P(t_0) = t_0$,[15] por isso δ_Q é um estado de equilíbrio de ϕ_{t_0}.[16] Tome μ_t estado de equilíbrio de ϕ_t, para $t \nearrow t_0$, e considere μ ponto de acumulação de μ_t. Pelo Princípio Variacional **(2.3.1)**,

$$h_{\mu_t}(F) = P(t) - t\int \log|DF_{|_{E^c}}|d\mu_t.$$

Tomando o limite ao longo da subsequência t_k tal que $\mu_{t_k} \to \mu$, segue que

$$P(t_k) \to P(t_0)$$

[15] Se $P(t_0) > t_0$, então pela continuidade de P, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\tilde{t} \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ vale $P(\tilde{t}) > \tilde{t}$. Isto contradiz a definição de t_0.

[16] $h_{\delta_Q}(F) + \int \phi_{t_0} d\delta_Q = t_0$, isto é, δ_Q realiza o supremo.

e

$$t_k \int \log |DF_{|_{E^c}}| d\mu_{t_k} \to t_0 \int \log |DF_{|_{E^c}}| d\mu.$$

Daí, $h_{\mu_{t_k}}(F)$ converge. Pela semi-continuidade da entropia

$$h_\mu(F) \geq \limsup_{t_k \to t_0} h_{\mu_{t_k}}(F).$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
P(t_0) &= \limsup_{t_k \to t_0} \left(h_{\mu_{t_k}}(F) + t_k \int \log |DF_{|_{E^c}}| d\mu_{t_k} \right) \\
&\leq \limsup_{t_k \to t_0} h_{\mu_{t_k}}(F) + \limsup_{t_k \to t_0} t_k \int \log |DF_{|_{E^c}}| d\mu_{t_k} \\
&\leq h_\mu(F) + t_0 \int \log |DF_{|_{E^c}}| d\mu \\
&\leq P(t_0),
\end{aligned}$$

isto é, μ é estado de equilíbrio de ϕ_{t_0}. Além disso, a continuidade de $\log |DF_{|_{E^c}}|$ implica

$$\int \log |DF_{|_{E^c}}| d\mu = \lim_{t_k \to t_0} \underbrace{\int \log |DF_{|_{E^c}}| d\mu_t}_{< 0, \text{ pelo Corolário } \mathbf{(3.5.3)}} \leq 0,$$

por isso μ é diferente de δ_Q (ver Walters [30], teorema 6.2). O que prova o item (2).

Por fim, demonstraremos o item (3).

Tome $t > t_0$ e μ_t qualquer estado de equilíbrio para ϕ_t. Observe que

$$\begin{aligned}
t \leq P(t) &= h_{\mu_t}(F) + t\lambda^c_{\mu_t} \\
&= h_{\mu_t}(F) + t_0\lambda^c_{\mu_t} + (t - t_0)\lambda^c_{\mu_t} \\
&\leq \underbrace{P(t_0)}_{= t_0} + (t - t_0)\lambda^c_{\mu_t}.
\end{aligned}$$

Assim, $(t - t_0) \leq (t - t_0)\lambda^c_{\mu_t}$. Isto implica que $\lambda^c_{\mu_t} \geq 1$. Por isso, considerando mais uma vez a decomposição ergódica $(\nu_{t,P})$ de μ_t temos

$$\lambda^c_{\mu_t} = \int_{\mathscr{P}} \left(\int \log |DF_{|_{E^c}}| d\nu_{t,P} \right) d\widehat{\mu}(P) \geq 1.$$

Defina $A = \{P \in \mathscr{P};\ \nu_{t,P} = \delta_Q\}$ e $B = \{P \in \mathscr{P};\ \nu_{t,P} \neq \delta_Q\}$. Daí

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{P}} \left(\int \log |DF_{|_{E^c}}| d\nu_{t,P} \right) d\widehat{\mu}(P) &= \int_A \underbrace{\left(\int \log |DF_{|_{E^c}}| d\nu_{t,P} \right)}_{= 1} d\widehat{\mu}(P) \\
&+ \int_B \underbrace{\left(\int \log |DF_{|_{E^c}}| d\nu_{t,P} \right)}_{< 0, \text{ pelo } \mathbf{T.P.\ 1}} d\widehat{\mu}(P).
\end{aligned}$$

Note que a primeira integral é igual a $\widehat{\mu}(A)$. Se $\widehat{\mu}(B) > 0$, então

$$\lambda^c_{\mu_t} = \int_{\mathscr{P}} \left(\int \log |DF_{|_{E^c}}| d\nu_{t,P} \right) d\widehat{\mu}(P) < \widehat{\mu}(A) < 1,$$

Contradição! Logo, $\nu_{t,P} = \delta_Q$ para $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathscr{P}$. Assim,

$$\mu_t = \int \nu_{t,P} \, d\widehat{\mu}(P) = \delta_Q.$$

Como μ_t é qualquer, isto significa que δ_Q é o único estado de equilíbrio de ϕ_t para $t > t_0$. Mais também, $P(t) = t$ para todo $t > t_0$. Isto completa a prova do **Teorema Principal 3**.

O comportamento gráfico de $P(t)$ pode ser visto na Figura **(3.3)**.

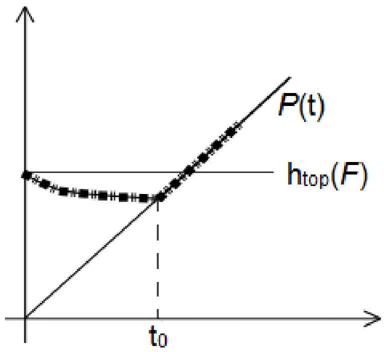

Figura 3.3: Aplicação $t \mapsto P(t)$

REFERÊNCIAS

[1] ADLER, R. L., KONHEIM, A. G., AND MCANDREW, M. H. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc. 114* (1965), 309–319.

[2] BARTLE, R. G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1995. Containing a corrected reprint of the 1966 original [ıt The elements of integration, Wiley, New York; MR0200398 (34 #293)], A Wiley-Interscience Publication.

[3] BONATTI, C., DÍAZ, L. J., AND VIANA, M. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, vol. 102 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. A global geometric and probabilistic perspective, Mathematical Physics, III.

[4] BOWEN, R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc. 153* (1971), 401–414.

[5] BOWEN, R. Some systems with unique equilibrium states. *Math. Systems Theory 8*, 3 (1974/75), 193–202.

[6] BOWEN, R. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, revised ed., vol. 470 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2008. With a preface by David Ruelle, Edited by Jean-René Chazottes.

[7] BURNS, K., DOLGOPYAT, D., AND PESIN, Y. Partial hyperbolicity, Lyapunov exponents and stable ergodicity. *J. Statist. Phys. 108*, 5-6 (2002), 927–942. Dedicated to David Ruelle and Yasha Sinai on the occasion of their 65th birthdays.

[8] BUZZI, J. C^r surface diffeomorphisms with no maximal entropy measure. 26 p.

[9] BUZZI, J., FISHER, T., SAMBARINO, M., AND VÁSQUEZ, C. Maximal entropy measures for certain partially hyperbolic, derived from Anosov systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems 32*, 1 (2012), 63–79.

[10] DÍAZ, L. J., FISHER, T., PACIFICO, M. J., AND VIEITEZ, J. L. Entropy-expansiveness for partially hyperbolic diffeomorphisms. *Discrete Contin. Dyn. Syst. 32*, 12 (2012), 4195–4207.

[11] DÍAZ, L. J., HORITA, V., RIOS, I., AND SAMBARINO, M. Destroying horseshoes via heterodimensional cycles: generating bifurcations inside homoclinic classes. *Ergodic Theory Dynam. Systems 29*, 2 (2009), 433–474.

[12] GOODMAN, T. N. T. Maximal measures for expansive homeomorphisms. *J. London Math. Soc. (2) 5* (1972), 439–444.

[13] GUREVIČ, B. M. Topological entropy of a countable Markov chain. *Dokl. Akad. Nauk SSSR 187* (1969), 715–718.

[14] KATOK, A., AND HASSELBLATT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, vol. 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[15] KOLMOGOROV, A. N. A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms of Lebesgue spaces. *Trudy Mat. Inst. Steklov. 169* (1985), 94–98, 254. Topology, ordinary differential equations, dynamical systems.

[16] LEPLAIDEUR, R., OLIVEIRA, K., AND RIOS, I. Equilibrium states for partially hyperbolic horseshoes. *Ergodic Theory Dynam. Systems 31*, 1 (2011), 179–195.

[17] LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. Textos Universitários [University Texts]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2009.

[18] MAÑÉ, R. *Ergodic theory and differentiable dynamics*, vol. 8 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the Portuguese by Silvio Levy.

[19] MISIUREWICZ, M. Diffeomorphism without any measure with maximal entropy. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 21* (1973), 903–910.

[20] OLIVEIRA, K. *Um primeiro curso sobre teoria ergódica com aplicações*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2005. 25o Colóquio Brasileiro de Matemática. [25th Brazilian Mathematics Colloquium].

[21] OLIVEIRA, K., AND VIANA, M. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. http://w3.impa.br/~viana/out/fte.pdf.

[22] ORNSTEIN, D. Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic. *Advances in Math. 4* (1970), 337–352 (1970).

[23] OXTOBY, J. C., AND ULAM, S. M. Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity. *Ann. of Math. (2) 42* (1941), 874–920.

[24] PESIN, Y. B. *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2004.

[25] PHELPS, R. R. *Convex functions, monotone operators and differentiability*, second ed., vol. 1364 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[26] ROKHLIN, V. A. *Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations*. A series of articles on ergodic theory. 1967.

[27] Ruelle, D. Statistical mechanics on a compact set with Z^v action satisfying expansiveness and specification. *Trans. Amer. Math. Soc. 187* (1973), 237–251.

[28] Sinaĭ, J. On the concept of entropy for a dynamic system. *Dokl. Akad. Nauk SSSR 124* (1959), 768–771.

[29] Walters, P. A variational principle for the pressure of continuous transformations. *Amer. J. Math. 97*, 4 (1975), 937–971.

[30] Walters, P. *An introduction to ergodic theory*, vol. 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.