PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Greiciane Pinto Lima

Hipersuperfícies Kählerianas reais são Cilindros

Sao Luís - MA

2013

Greiciane Pinto Lima

Hipersuperfícies Kählerianas reais são Cilindros

Dissertação apresentada a Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Maxwell Mariano de Barros**.

Sao Luís - MA

2013

Greiciane Pinto Lima

Hipersuperfícies Kählerianas reais são Cilindros

Dissertação apresentada a Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Maxwell Mariano de Barros**.

Dissertação aprovada em 22 de marco de 2012, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(Orientador) Dr. Maxwell Mariano de Barros (UFMA)

Dr. Ivaldo (UFMA)

Dra. Clarice Lispector Alvarenga (UNESP/SJRP)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais Antônio José Sousa Lima e Maria Odete Pinto Lima.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus. À minha família, que sempre me estimulou a estudar e me deu os subsídios necessários para isto. Ao meu namorado Djamilton Campelo, pela paciência e pelo apoio. Ao meu orientador professor Maxwell Mariano de Barros pela orientação, ao professor Ivaldo pela colaboração na orientação e aos demais professores do mestrado, professores Fabiano Borges da Silva, Marcos Antonio Ferreira de Araújo, Nivaldo Costa Muniz, que contribuiram para minha formação acadêmica. E à Sônia Rocha pela companhia e ajuda no primeiro ano de mestrado.

RESUMO

Nesta dissertação apresentaremos a demonstração do Teorema do Cilindro para hipersuperfícies Kählerianas reais, completas e conexas. O resultado citado acima foi provado em 2007 por Luis A. Florit e Fangyang Zheng no artigo *Complete real Kähler Euclidean hypersurfaces are cylinders*, publicado no Ann. Inst. Fourier (Grenoble).

Palavras-chave: Terema do Cilindro. Hipersuperfícies Kählerianas reais.

ABSTRACT

In this work we present the proof of Theorem Cylinder for real, complete and connected Kählerian hypersurfaces . The result mentioned above was proved in 2007 by Luis A. Florit e Fangyang Zheng, in an article *Complete real Kähler Euclidean hypersurfaces are cylinders* published in the Ann. Inst. Fourier (Grenoble).

Keywords: Cylinder's Theorem, real Kählerian hypersurfaces.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Variedades Kählerianas que são imersas isometricamente sobre o espaço Euclidiano real como uma hipersuperfície são chamadas Hipersuperfícies Kählerianas Reais. Tais hipersuperfícies, foram estudadas por T. Takahashi [1972], R. Ryan [1973], K. Abe [1974], M. Dajczer e D. Gromoll [1985], M. Dajczer e L. Rodrigues [1986], [1991], H. Furuhata [1994], entre outros.

Em 1972 T. Takahashi provou em [15] o seguinte resultado:

Teorema 0.0.1. *Para qualquer hipersuperfície Kähleriana real $f : M^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, o índice nulidade relativa v satisfaz que $v \geq 2n-2$, e no conjunto aberto de pontos não planos*

$$U = \{x \in M^{2n} : v(x) = 2n-2\}, \tag{1}$$

Δ é uma distribuição complexa, ou seja, $J\Delta = \Delta$.

Em 1973 P. Ryan [14] determinou todas as hipersuperfícies Kählerianas reais completas e conexas que são formas espaciais com curvatura não nula. Além disso, ele obteve o resultado de que qualquer hipersuperfície Kähleriana real é localmente o produto de duas formas espaciais. Baseado no lema de Takahashi [15], Kinetsu Abe provou em [1] o Teorema do Cilindro para hipersuperfícies Kähelerianas reais:

Teorema 0.0.2. *Seja $f : M^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade de Kähler completa. Então $M^{2n} = \Sigma^2 \times \mathbb{C}^{n-1}$ e $f = f_1 \times \iota$, onde $f_1 : \Sigma^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão isométrica e ι é a aplicação identidade de $\mathbb{C}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{2n-2}$, dado que:*

i. *M^{2n} tem curvatura escalar não negativa, ou*

ii. *M^{2n} tem curvatura escalar estritamente negativa, ou*

iii. *A imersão é real analítica.*

Em 2007, Luis A. Florit e Fangyang Zheng [7] demonstraram este mesmo teorema sem as hipóteses adicionais i, ii, e iii acima. Neste trabalho iremos apresentar a demonstração deste teorema feita por Luis A. Florit e Fangyang Zheng em [7].

Capítulo 1
PRELIMINARES

Este capítulo é um breve resumo das noções básicas sobre Variedades Diferenciáveis, as demonstrações dos resultados foram omitidas em alguns casos, podendo ser encontradas nas referências ao final.

1.1 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1.1 (Variedade Topológica)**.** Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma variedade topológica de dimensão n se satisfaz as seguintes propriedades:

- M é um espaço de Hausdorff: para todo par de pontos $p, q \in M$ existem subconjuntos disjuntos $U, V \subset M$ tais que $p \in U$ e $q \in V$;
- M é separável, ou seja, existe uma base enumerável para a topologia de M;
- M é localmente euclidiana de dimensão n: para todo $p \in M$ existe $U \subset M$ aberto contendo p tal que $\varphi : U \longrightarrow \varphi(\text{U})$ é um homeomorfismo.

Cada par (U, φ) é denominado carta de M, onde U é a vizinhança coordenada de p e φ é um sistema de coordenadas de M.

Definição 1.1.2 (Cartas compatíveis)**.** Duas cartas (U, ϕ) e (V, ψ) de uma variedade topológica M são C^k compatíveis se as aplicações $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V)$ e $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ são C^k. Estas duas aplicações são chamadas mudança de coordenadas entre as cartas. Se $U \cap V = \emptyset$, então as duas cartas são automaticamente C^∞ compatíveis.

Usaremos o termo compatíveis no lugar de C^∞ compatíveis.

Definição 1.1.3. Um atlas em uma variedade topológica M é a coleção $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de cartas C^∞ compatíveis que cobrem M, ou seja, $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Dizemos que um atlas $\mathscr{A}$ em uma variedade topológica M é um atlas maximal se não está contido em nenhum outro atlas de M.

Definição 1.1.4 (Variedade diferenciável)**.** Uma variedade diferenciável C^∞ é uma variedade topológica M juntamente com um atlas maximal $\mathscr{A}$. O atlas maximal é também chamado estrutura diferenciável em M.

Vamos admitir sempre que M^n é uma variedade diferenciável n-dimensional de classe C^∞ e diremos simplesmente que M é uma variedade.

Exemplo 1.1.5 (Exemplos de variedades diferenciáveis)**.**

(a) O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável com uma única carta $(\mathbb{R}^n, u^1, \ldots, u^n)$, onde $u^1, \ldots, u^n$ são as coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n$;

(b) Qualquer subconjunto aberto U de uma variedade M é também uma variedade. Se (V_α, ϕ_α) é um atlas de M, então $(V_\alpha \cap U, \phi_\alpha|_{V_\alpha \cap U})$ é um atlas de U, onde $\phi_\alpha|_{V_\alpha \cap U} : V_\alpha \cap U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ denota a restrição de ϕ_α ao subconjunto $V_\alpha \cap U$. U é chamado subvariedade aberta de M;

(c) Sejam M^m e N^n duas variedades, então $M \times N$ é uma variedade, chamada variedade produto. Se (U_α, ϕ_α) e (V_β, ψ_β) são cartas de M e N, respectivamente, então $(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^{m+n})$ é um atlas em $M \times N$.

Definição 1.1.6. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. A função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $p \in M$ se existe alguma carta (U, ϕ) contendo p em um atlas de M tal que $f \circ \phi^{-1}$, definida no aberto $\phi(U)$ de $\mathbb{R}$, é diferenciável em $\phi(p)$.

Esta definição não depende da carta (U, ϕ). Se (V, ψ) é qualquer outra carta no atlas contendo p, então em $\psi(U \cap V)$

$$f \circ \psi = f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1}$$

é diferenciável em $\psi(p)$. A função f é diferenciável em M quando é diferenciável em todo ponto $p \in M$. O conjunto de todas as funções diferenciáveis de M em $\mathbb{R}$ será denotado por $\mathfrak{F}(M)$.

Definição 1.1.7. Sejam N^n e M^m variedades diferenciáveis. A aplicação $F : N \longrightarrow M$ é diferenciável no ponto $p \in N$ se existe alguma carta (V, ψ) em M contendo $F(p)$ e alguma carta (U, ϕ) em N contendo p tal que a composição $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ é diferenciável em $\phi(p)$.

Esta definição não depende da escolha das cartas. F é diferenciável em N quando é diferenciável em todo $p \in N$.

Definição 1.1.8. Um difeomorfismo entre variedades diferenciáveis N e M é uma aplicação diferenciável $F : N \longrightarrow M$ que tem inversa diferenciável.

Exemplo 1.1.9. Se (U, φ) é uma carta no atlas de M de dimensão n, então φ é diferenciável, pois sendo $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação identidade, $\psi \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável. A aplicação inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow U$ também é diferenciável, basta tomar na definição acima $\psi = \varphi$ e $\phi = I_{\varphi(U)}$, então $\psi \circ \varphi^{-1} \circ I_{\varphi(U)} = I_{\varphi(U)}$ é diferenciável.

Proposição 1.1.10. *Se $F : N \longrightarrow M$ e $G : M \longrightarrow P$ são aplicações diferenciáveis entre variedades, então a composição $G \circ F : N \longrightarrow P$ é diferenciável.*

Proposição 1.1.11. *Seja U um subconjunto aberto de uma variedade M. Se $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo sobre sua imagem, então (U, F) é uma carta no atlas de M.*

Demonstração. Para qualquer carta (U_α, ϕ_α) no atlas de M, ambas $F \circ \phi_\alpha^{-1}$ e $\phi_\alpha \circ F^{-1}$ são diferenciáveis. Portanto (U, F) é compatível com o atlas de M e pela maximilidade do atlas de M, a carta (U, F) está contida no atlas de M. $\square$

O suporte de $f \in \mathfrak{F}(M)$, denotado por supp f, é o fecho do conjunto $\{x \in M : f(x) \neq 0\}$. Assim, $M -$ supp f é o maior conjunto em que f é identicamente zero.

Lema 1.1.12. *Dada qualquer vizinhança U de um ponto $x \in M$, existe uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$, chamada bump função em x, tal que*

(1) $0 \geq f \geq 1$ *em M;*

(2) $f = 1$ *em alguma vizinhança de x;*

(3) *supp $f \subset U$.*

1.2 Espaço tangente

Definição 1.2.1. Seja p um ponto de uma variedade diferenciável M. Um vetor tangente em p é uma função real $X : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ que é

(1) $\mathbb{R}$-linear: $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$ e

(2) Leibniziana: $X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

O conjunto de todos vetores tangentes a M no ponto p é chamado espaço tangente a M no ponto p e denotado por T_pM. Com as operações de adição e multiplicação por escalar usais de funções, T_pM é um espaço vetorial real.

Lema 1.2.2. *Seja M uma variedade diferenciável e suponha $p \in M$ e $X \in T_pM$.*

(a) Se f é constante, então $Xf = 0$;

(b) Se $f(p) = g(p) = 0$ então $X(fg) = 0$

Se U é um conjunto aberto em M, então, como uma subvariedade aberta, U tem espaço tangente T_pU em $p \in U$. Seja $X \in T_pU$, vamos definir $\widetilde{X}(f) = X(f|_U)$ para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$. Evidentemente, $\widetilde{X} \in T_pM$ e a função $X \longrightarrow \widetilde{X}$ é um isomorfismo linear. Podemos então escrever $T_pU = T_pM$.

Definição 1.2.3. Seja $(U, \phi(x^1, \ldots, x^n))$ uma carta diferenciável de M contendo p. Definimos as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ em p por

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial u^i}(\phi(p)) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

onde $u^i, \ldots, u^n$ são as funções coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n$.

Um cálculo simples mostra que a função

$$\partial_i|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

levando cada $f \in \mathfrak{F}(M)$ para $(\partial f / \partial x^i)(p)$ é um vetor tangente de M em p.

Teorema 1.2.4. *Se $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ é um sistema de coordenadas de M em p, então os vetores $\partial_1|_p, \ldots, \partial_n|_p$ formam uma base para o espaço tangente T_pM e*

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\partial_i|_p \ \forall\ v \in T_pM. \tag{1.1}$$

Definição 1.2.5 (Aplicação Diferencial)**.** Seja $F : M^n \longrightarrow N^m$ uma aplicação entre variedades. Para cada $p \in M$ definimos a aplicação $F_* : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$, chamada aplicação diferencial de F no ponto p, por

$$F_*(X)(f) = X(f \circ F).$$

Note que se $f \in \mathfrak{F}(N)$, então $f \circ F \in \mathfrak{F}(M)$, assim $X(f \circ F)$ faz sentido. O operador (F_*X) é claramente linear e para provar a propriedade de Leibniz, se $f, g \in \mathfrak{F}(N)$, então

$$\begin{aligned}(F_*X)(fg) &= X((fg) \circ F)\\ &= X((f \circ F)(g \circ F)) = X(f \circ F)(g \circ F)(p) + f \circ F(p)X(g \circ F)\\ &= (F_*X)(f)g(F(p)) + f(F(p))(F_*X)(g).\end{aligned}$$

e portanto, F_*X é um vetor tangente a N no ponto $F(p)$.

Lema 1.2.6. *Sejam $F : M \longrightarrow N$ e $G : N \longrightarrow P$ aplicações diferenciáveis e seja $p \in M$*

(a) $F_* : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ *é linear;*

(b) $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_pM \longrightarrow T_{G \circ F(p)}P$ *;*

(c) $(I_M)_* = I_{T_pM} : T_pM \longrightarrow T_pM$*;*

(d) Se F é um difeomorfismo, então $F_* : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ *é um isomorfismo.*

Lema 1.2.7. *Seja $F : M^m \longrightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável. Se $\varphi = (x^i, \ldots, x^m)$ é um sistema de coordenadas em p de M e $\psi(y^1, \ldots, y^n)$ é um sistema de coordenadas em $F(p)$ de M. Então*

$$F_{*,p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{F(p)} \qquad (1 \leq j \leq m) \tag{1.2}$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema (1.2.4). $\square$

Assim a matriz $(F_{*,p})$ com respeito a estas bases é dada por

$$\left(\frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}(p)\right) 1 \leq i \leq n, 1 \leq j\, lem. \tag{1.3}$$

chamada matriz jacobina de F no ponto p relativa a φ e ψ.

1.3 Campos Vetoriais

Para qualquer variedade diferenciável M, definimos o *fibrado vetorial tangente de M*, denotado por TM, como a união disjunta de espaços tangentes em todos os pontos de M:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Vamos escrever um elemento dessa união disjunta como o par ordenado (p, X), onde $p \in M$ e $X \in T_pM$. O fibrado tangente vem equipado com uma projeção natural $\pi : TM \longrightarrow M$, definida por $\pi(p, X) = p$.

O fibrado tangente não é apenas a coleção de espaços tangentes. O próximo lema mostra que TM pode ser pensado como uma variedade diferenciável.

Lema 1.3.1. *Para qualquer variedade M de dimensão n, o fibrado vetorial TM tem uma topologia natural e estrutura diferenciável que o torna uma variedade diferenciável de dimensão $2n$. Com essa estrutura diferenciável a aplicação $\pi : TM \longrightarrow M$ é diferenciável.*

Definimos um campo vetorial Y em uma variedade diferenciável M como uma seção da aplicação $\pi : TM \longrightarrow M$, ou seja, Y é uma aplicação contínua $Y : M \longrightarrow TM$, usualmente escrita como $p \longrightarrow Y_p$, com a seguinte propriedade

$$\pi \circ Y = I_M$$

ou equivalentemente, $Y_p \in T_pM$ para cada $p \in M$. Se Y é um campo vetorial em M e $f \in \mathfrak{F}(M)$, então Yf denota a função real em M dada por

$$(Yf)(p) = Y_p(f) \quad p \in M.$$

Dizemos que Y é diferenciável quando Yf é diferenciável para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Seja $Y : M \longrightarrow TM$ um campo vetorial em M e (U, φ) uma carta de M, podemos escrever o valor de Y em qualquer $p \in U$ em termos dos vetores da base coordenada

$$Y_p = \sum_{i=1}^{n} Y^i(p) \left.\frac{\partial}{\partial^i}\right|_p \tag{1.4}$$

onde as n funções $Y^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ são as *funções componentes de* Y na carta dada. A correspondência

$$p \longrightarrow \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

determina um campo vetorial em U, chamado *i-ésimo campo vetorial coordenada* e denotado por $\frac{\partial}{\partial x^i}$ que é difenciável, pois $\frac{\partial}{\partial x^i} f$ é diferenciável.

Sejam X e Y campos vetoriais em M e $f \in \mathfrak{F}(M)$, definimos as seguintes operações

$$\begin{aligned} (fX)_p &= f(p)X_p \\ (X+Y)_p &= X_p + Y_p \qquad \forall p \in M. \end{aligned}$$

Se X e Y são diferenciáveis, então $(X+Y)$ e fX são diferenciáveis. Com estas duas operações o conjunto de todos os campos vetoriais diferenciáveis, denotado por $\mathfrak{X}(M)$, é um módulo sobre o anel $\mathfrak{F}(M)$.

Por exemplo, a expressão em coordenadas locais 1.4 para um campo vetorial Y pode ser escrita como uma equação entre campos vetoriais, em vez de uma equação entre vetores em um ponto:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial^i} \tag{1.5}$$

O próximo Lema mostra que cada vetor tangente em um ponto pode ser estendido a um campo vetorial global diferenciável.

Lema 1.3.2. *Seja M uma variedade diferenciável. Se $p \in M$ e $X \in T_pM$, existe um campo vetorial $\widetilde{X}_p = X$.*

Demonstração. Seja $(x^i, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de p e $\sum X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ a expressão em coordenadas locais de X. Se ψ é uma bump função com suporte em U e tal que $\psi(p) = 1$, o campo vetorial $\widetilde{X}$ definido por

$$\widetilde{X}_q = \begin{cases} \psi(q) \sum X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q, \; q \in U \\ 0, q \notin \operatorname{supp} \psi \end{cases}$$

é facilmente visto como um campo vetorial diferenciável cujo valor em p é igual a X. □

Definição 1.3.3. Uma derivação de $\mathfrak{F}(M)$ é uma função $\mathcal{D} : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ que é

(1) $\mathbb{R}$-linear: $\mathcal{D}(af+bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g)$;

(2) Leibniziana: $\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g)$

A próxima proposição mostra que derivações de $\mathfrak{F}(M)$ podem ser identificadas com campos vetoriais em M.

Proposição 1.3.4. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação $\mathcal{D} : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ é uma derivação se, e somente se, é da forma $\mathcal{D}f = Yf$ para algum campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demonstração. A definição de vetor tangente mostra que para cada campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$ a função $f \longrightarrow Yf$ é uma derivação de $\mathfrak{F}(M)$. Reciprocamente, para cada $p \in M$ defina $Y_p : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $Y_p f = (\mathcal{D}f)(p)$. As propriedades (1) e (2) da Definição 1.3.3 implicam que Y_p é um vetor tangente de M em p; dessa forma, está bem definido o campo vetorial Y em M e, como $Yf = \mathcal{D}f$ para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$, então Y é diferenciável. $\square$

Sempre que conveniente iremos considerar campos vetoriais como derivações de $\mathfrak{F}(M)$. Esta interpretação induz a seguinte operação em campos vetoriais: sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos um operador $[X,Y] : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$, chamado *colchete de Lie de X e Y*, definido por

$$[X,Y]f = XYf - YXf. \tag{1.6}$$

Lema 1.3.5. *O colchete de Lie de qualquer par de campos vetoriais diferenciáveis é um campo vetorial diferenciável*

Demonstração. Pela Proposição (1.3.4) é suficiente mostrar que para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ o colchete de Lie $[X,Y]$ é uma derivação de $\mathfrak{F}(M)$. Para $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ nós calculamos

$$\begin{aligned}
[X,Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) \\
&= XfYg + fXYg + XgYf + gXYf \\
&\quad -YfXg - fYXg - YgXf - gYXf \\
&= fXYg + gXYf - fYXg - gYXf \\
&= f[X,Y]g + g[X,Y]f
\end{aligned}$$

$\square$

O valor do campo vetorial $[X, Y]$ no ponto $p \in M$ é a derivação em p dada pela fórmula

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

Lema 1.3.6 (Propriedades do colchete de Lie)**.** *O colchete de Lie tem as seguintes propriedades* $\forall\ V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$

(a) $\mathbb{R}$*-bilinearidade: para* $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [aV + bW, X] &= a[V, X] + b[W, X] \\ [X, aV + bW] &= a[X, V] + b[X, W] \end{aligned}$$

(b) Anti-simetria:

$$[V, W] = -[W, V]$$

(c) Identidade de Jacobi:

$$[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X, [V, W]] = 0$$

(d) para $f, g \in \mathfrak{F}(M)$,

$$[fV, gW] = fg[V, W] + (fVg)W - (gWf)V.$$

Demonstração. A propriedade (a) segue diretamente da linearidade das derivações e (b) é óbvio. Para provar (c) basta calcular

$$\begin{aligned} [V, [W, X]]f + [W, [X, V]]f + [X, [V, W]]f &= V([W, X]f) - [W, X]Vf + W([X, V]f) \\ &\quad -[X, V]Wf + X([V, W]f) - [V, W]Xf \\ &= VWXf - VXWf - WXVf + XWVf \\ &\quad +WXVf - WVXf - XVWf + VXWf \\ &\quad +XVWf - XWVf - VWXf + WVXf \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para provar (d) basta checar que ambos os lados tem o mesmo efeito em qualquer função $h \in \mathfrak{F}(M)$. □

A aplicação diferencial de $F : M \longrightarrow N$ associa um vetor tangente de M para um vetor tangente de N, mas em geral, não fornece nenhuma maneira de associar campos vetoriais de M para N. Esta dificuldade pode ser superada, de certa forma, como segue.

Definição 1.3.7. Seja $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Os campos de vetores Y em M e Z em N são F-relacionados se

$$F_* Y_p = Z_{F(p)} \qquad p \in M.$$

Lema 1.3.8. *Suponha que $F : M \longrightarrow N$ é diferenciável e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $Z \in \mathfrak{X}(N)$. Então Y e Z são F-relacionados se, e somente se, para toda função real diferenciável f, definida num subconjunto aberto de N,*

$$Y(f \circ F) = (Zf) \circ F. \tag{1.7}$$

Demonstração. Para qualquer $p \in M$ e para qualquer função real diferenciável f definida próxima a $F(p)$,

$$Y(f \circ F)(p) = Y_p(f \circ F) = (F_* Y_p) f$$

e

$$(Zf) \circ F(p) = Z_{F(p)} f$$

assim, a equação acima é verdade se, e somente se, $(F_* Y_p) f = Z_{F(p)} f$ para todo p, ou seja, Y e Z são F-relacionados. □

Proposição 1.3.9. *Seja $F : M \longrightarrow N$ um difeomorfismo. Para todo $Y \in \mathfrak{F}(M)$, existe um único campo vetorial diferenciável em N que é F-relacionado a Y.*

Demonstração. Basta definir $(F_* Y)_{F(p)} = F_*(Y_p)$ que é único e além disso $F_*(X)$ é diferenciável, uma vez que, se $f \in \mathfrak{F}(N)$, a definição leva a fórmula $(F_* Y) g = Y(g \circ F) \circ F^{-1} \in \mathfrak{F}(N)$. □

Proposição 1.3.10 (Naturalidade do colchete de Lie)**.** *Seja $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável e sejam $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(N)$ tais que V_i é F-relacionado a W_i para $i = 1, 2$. Então $[V_1, V_2]$ é F-relacionado a $[W_1, W_2]$.*

Demonstração. Usando o Lema (1.3.8) e o fato de que V_i é F-relacionado a W_i temos

$$V_1V_2(f \circ F) = V_1((W_2 f) \circ F) = (W_1W_2 f) \circ F.$$

Similarmente,

$$V_2V_1(f \circ F) = V_2((W_1 f) \circ F) = (W_2W_1 f) \circ F.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} [V_1, V_2](f \circ F) &= V_1V_2(f \circ F) - V_2V_1(f \circ F) \\ &= (W_1W_2 f) \circ F - (W_2W_1 f) \circ F \\ &= ([W_1, W_2] f) \circ F. \end{aligned}$$

□

Em cada ponto $p \in M$, qualquer função linear $\omega : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada *covetor* em p. O espaço de todos os covetores sobre p, denotado por T_pM^*, é chamado *espaço cotangente de M em p.*

Definição 1.3.11. Uma 1-forma θ em uma variedade M é uma função que associa a cada ponto $p \in M$ um elemento θ_p do espaço cotangente T_pM^*.

Se θ é uma 1-forma em M e X é um campo vetorial em M, denote por θX a função real em M cujo valor em cada ponto $p \in M$ é o valor de θ_p em X_p. Uma 1-forma θ é diferenciável quando θX é diferenciável para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Seja $\mathfrak{X}^*(M)$ o conjunto de todas as 1-formas diferenciáveis em M. Duas 1-formas são adicionadas e uma 1-forma é multiplicada por uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ da seguinte forma

$$(\theta + \omega)_p = \theta_p + \omega_p, \qquad (f\theta)_p = f(p)\theta_p \tag{1.8}$$

para todo $p \in M$. Com estas duas operações, $\mathfrak{X}^*(M)$ é um módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$, chamado módulo dual sobre $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.3.12. A aplicação diferencial de $f \in \mathfrak{F}(M)$ é uma 1-forma df tal que (df)(X) = X(f) para todo vetor tangente X em M.

1.4 Subvariedades

1.4.1 Imersões, Submersões e Mergulhos

Se $F : M \longrightarrow N$ é diferenciável, o posto de F em $p \in M$ é o posto da aplicação linear $F_* : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$; claramente, o posto de F é o posto da matriz de derivadas parciais de F em qualquer carta ou a dimensão de $Im(F_*) \subset T_{F(p)}N$. Se F tem o mesmo posto k em todo ponto, dizemos que F tem posto constante e escrevemos posto $F = k$.

Uma aplicação diferenciável $F : M \longrightarrow N$ é chamada submersão se F_* é sobrejetiva em cada ponto (ou equivalentemente, se posto $F = \dim N$). F é chamada imersão se F_* é injetiva em cada ponto (ou equivalentemente, se posto $F = \dim M$)

Um mergulho diferenciável é uma imersão injetiva $F : M \longrightarrow N$ que é um homeomorfismo sobre sua imagem $F(M) \subset N$ na topologia de subespaço.

Exemplo 1.4.1.

(a) Sejam $M_1, \ldots, M_k$ subvariedades diferenciáveis. Cada projeção $\pi_i : M_1, \ldots, M_k \longrightarrow M_i$ é uma submersão. Em particular a projeção $\mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sobre as n primeiras coordenadas é uma submersão;

(b) Sejam $M_1, \ldots, M_k$ como acima e $p_i \in M_i$ escolhidos arbitrariamente. Cada aplicação $\iota_j : M_j \longrightarrow M_1, \ldots, M_k$ dada por

$$\iota_j(q) = (p_1, \ldots, p_{j-1}, q, p_{j+1}, \ldots, p_k)$$

é um mergulho. Em particular, a inclusão $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ dada por $(x^1, \ldots, x^n) \longrightarrow (x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$ é um mergulho;

(c) Um exemplo de imersão que não é injetora é a curva $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (t^3 - t, t^2)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. De fato, tem-se $f'(t) \neq (0,0)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ e $f(1) = f(-1)$;

(d) A composição de submersões é uma submersão. O mesmo vale para imersões e mergulhos.

1.4.2 O Teorema da Função Inversa e Teorema do Posto

O Teorema da Função Inversa e o Teorema do Posto são resultados sobre aplicações entre subconjuntos abertos do espaço Euclidiano que podem ser estendidos a aplicações entre variedades, é o que veremos nesta seção.

Teorema 1.4.2 (Teorema da Função Inversa para Variedades). *Sejam M e N variedades diferenciáveis, $p \in M$ e $F : M \longrightarrow N$ é uma aplicação diferenciável tal que $F_* : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ é bijetiva. Então existem vizinhanças conexas U_0 de p e V_0 de $f(p)$ tais que $F|_{U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Como F_* é bijetiva, M e N tem a mesma dimensão e então o teorema segue do Teorema da Função Inversa Euclidiana aplicado a representação coordenada de F. □

Corolário 1.4.3. *Sejam M e N variedades diferenciáveis de mesma dimensão e $F : M \longrightarrow N$ é uma imersão ou submersão. Então F é um difeomorfismo local. Se F é bijetiva, ela é um difeomorfismo.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 1.4.2. □

Teorema 1.4.4. *Suponha M e N variedades diferenciáveis de dimensões m e n, respectivamente, e $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável com posto constante k. Para cada $p \in M$ existem coordenadas diferenciáveis $(x^1, \dots, x^m)$ centrada em p e $(v^1, \dots, v^n)$ centrada em $F(p)$ tais que F tem representação coordenada*

$$F(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

Demonstração. Substituindo M e N por vizinhanças coordenadas $U \subset M$ de p e $V \subset N$ de $F(p)$ e substituindo F por sua representação coordenada, o Teorema se reduz ao Teorema do posto para o espaço euclidiano. □

Proposição 1.4.5. *Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n, respectivamente. Se a aplicação diferenciável $F : M \longrightarrow N$ é uma imersão (resp. submersão) no ponto $p \in M$, então ela tem posto constante m (resp. n) em uma vizinhança de p.*

Demonstração. Para uma matriz $n \times m$ o maior valor possível do posto é o mínimo de m e n. Portanto, dizer que F é uma imersão ou submersão em $p \in M$, é a mesma coisa que dizer que o posto de F é máximo em p. O conjunto

$$D_{max}(F) = \{p \in U | F_{*,p} \text{ tem posto máximo em p}\}$$

é um conjunto aberto de U. De fato, se k é máximo, então

$$\begin{aligned} \text{posto}\,(F_{*,p}) = k \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{posto}\,[(\partial f^i/\partial x^j)(p)] = k \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{posto}\,[(\partial f^i/\partial x^j)(p)] \geq k \text{ (uma vez que k é maximal).} \end{aligned}$$

Assim o complemento $U - D_{max}(f)$ é definido por

$$\text{posto}\,[\partial f^i / \partial x^j(p)] < k,$$

o que equivale ao desaparecimento de todas as submatrizes $k \times k$. Como conjunto de nível zero de um número grande, mas finito, de funções contínuas $U - D_{max}(f)$ é fechado e assim $D_{max}(f)$ é aberto. Portanto, se F tem posto máximo em p, então existe uma vizinhança de p contida em $D_{max}(f)$. $\square$

Os seguintes teoremas são casos especiais do teorema do posto constante para variedades.

Teorema 1.4.6 (Forma Local das Imersões)**.** *Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n, respectivamente. Se $F : M \longrightarrow N$ é uma imersão no ponto $p \in M$. Então existem cartas (U, ϕ) centrada em $p \in M$ e (V, ψ) centrada em $F(p) \in N$ tais que, em uma vizinhança de $\phi(p)$*

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0).$$

Teorema 1.4.7 (Forma Local das Submersões)**.** *Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n, respectivamente. Se $F : M \longrightarrow N$ é uma submersão no ponto $p \in M$. Então existem cartas (U, ϕ) centrada em $p \in M$ e (V, ψ) centrada em $F(p) \in N$ tais que, em uma vizinhança de $\phi(p)$*

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1,\ldots,r^m}) = (x^1, \ldots, x^n).$$

1.4.3 Subvariedades Mergulhadas

Subvariedades diferenciáveis são modeladas localmente como a inclusão natural de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^n$, identificando $\mathbb{R}^k$ com o subespaço

$$\{(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) : x^{k+1} = \ldots = x^n = 0\}.$$

Mais geralmente, se U é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, um *k-slice* de U é qualquer subconjunto da forma

$$S = \{(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n\}$$

com $c^{k+1}, \ldots, c^n$ constantes. Claramente, qualquer *k-slice* é homeomorfo a um subconjunto de $\mathbb{R}^k$. Sejam M uma variedade n-dimensional e (U, φ) uma carta diferenciável de M. Se $S \subset U$ tal que $\varphi(S)$ é um *k-slice* de $\varphi(U)$, então dizemos que S é um *k-slice* de U.

Definição 1.4.8. O subconjunto $S \subset M$, M tem dimensão n, é uma subvariedade mergulhada de dimensão k ou uma k-subvariedade mergulhada, se para cada $p \in S$ existe uma carta (U, φ) de M tal que $p \in U$ e $U \cap S$ é um k-slice de U.

Dizemos que a carta (U, φ) em M é *adaptada* para S.

Definição 1.4.9. Se S é uma subvariedade mergulhada de dimensão k em uma variedade M de dimensão n, então $n - k$ é chamado codimensão de S em M.

O proximo teorema explica a razão para o nome *subvariedade mergulhada*.

Teorema 1.4.10. *Seja $S \subset M$ uma subvariedade mergulhada de dimensão k. Com a topologia de subespaço, S é uma variedade topológica de dimensão k, e existe uma única estrutura diferenciável tal que a inclusão $S \hookrightarrow M$ é um mergulho diferenciável.*

A recíproca desse teorema é dada pelo seguinte teorema

Teorema 1.4.11. *A imagem de um mergulho diferenciável é uma subvariedade mergulhada.*

Os últimos dois teoremas podem ser resumidos pelo seguinte corolário.

Corolário 1.4.12. *Subvariedades mergulhadas são precisamente as imagens de mergulhos diferenciáveis.*

Se S é uma subvariedade de M e $F : M \longrightarrow N$ é uma aplicação diferenciável, então a restrição $F|_S$ de F para S é diferenciável, uma vez que $F|_S = F \circ \iota$. Em particular, se $f \in \mathfrak{F}(M)$, então $f|_S \in \mathfrak{F}(S)$. Como a inclusão $S \hookrightarrow M$ é um mergulho, em cada ponto $p \in S$ temos a aplicação linear injetiva $\iota_* : T_pS \longrightarrow T_pM$. Costuma-se ignorar ι_* e considerar o espaço tangente T_pS como um subespaço vetorial de T_pM. Assim um campo vetorial X em M é tangente a uma subvariedade S de M fornecido $X_p \in T_pS$ para todo $p \in S$.

1.4.4 Subvariedades imersas

O termo subvariedade pode ser aplicado a um objeto mais geral: seja S uma variedade diferenciável que é apenas um subconjunto de M. Se a inclusão $\iota : S \longrightarrow M$

é uma imersão, dizemos que S é uma *subvariedade imersa de M*. Assim subvariedades mergulhadas são subvariedades imersas, mas não inversamente, uma vez que variedades imersas não precisam ter a topologia induzida de subespaço. Por exemplo, seja $F : N \longrightarrow M$ uma imersão injetiva, podemos dar ao conjunto imagem $F(N) \subset M$ uma topologia de variedade e estrutura diferenciável únicas tais que $F : N \longrightarrow F(N)$ é um difeomorfismo. Para isto, dizemos que o conjunto $U \subset F(N)$ é aberto se, e somente se, $F^{-1}(U) \subset N$ é aberto e tomamos as aplicações coordenadas diferenciáveis em $F(N)$ como sendo as aplicações da forma $\varphi \circ F^{-1}$, onde φ é uma aplicação coordenada diferenciável em N. Com esta estrutura diferenciável $\iota : F(N) \hookrightarrow M$ é uma imersão injetiva, pois é igual a composição de um difeomorfismo $F : N \longrightarrow F(N)$ seguido da imersão injetiva $F : N \longrightarrow M$. Disto segue a seguinte proposição.

Proposição 1.4.13. *Subvariedades imersas são precisamente as imagens de imersões injetivas.*

Demonstração. Se $N \subset M$ é uma subvariedade imersa, a inclusao $\iota : N \hookrightarrow M$ é uma imersão injetiva. Inversamente se $F : N \longrightarrow M$ é uma imersão injetiva, segue da discussão acima que $F(N)$ é uma subvariedade imersa de M. $\square$

Dadas uma aplicação diferenciável $F : M \longrightarrow N$ variedades e $S \subset M$ uma subvariedade imersa, $F|_S : S \longrightarrow N$ é diferenciável. Porém, quando o contradomínio N é restrito a uma subvariedade imersa $S \subset N$, a aplicação resultante pode não ser diferenciável. A próxima proposição dá condições suficientes para que a aplicação F seja diferenciável quando o domínio é restrito a uma subvariedade imersa.

Proposição 1.4.14. *Sejam $S \subset N$ uma subvariedade imersa e $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável cuja imagem está contida em S. Se $F : M \longrightarrow S$ é contínua, então $F : M \longrightarrow S$ é diferenciável.*

Corolário 1.4.15. *Seja $S \subset N$ uma subvariedade mergulhada, então qualquer aplicação diferenciável $F{:}M \longrightarrow N$ cuja imagem está contida em S é também uma aplicação diferenciável de M em S.*

Mesmo que uma subvariedade imersa $S \subset M$ não seja um subespaço topológico de M, para cada ponto $p \in S$, o espaço tangente T_pS pode ser visto como um subespaço vetorial de T_pM, pelo mesmo motivo dado para subvariedades mergulhadas. Portanto, os resultados a seguir valem tanto para subvariedades imersas, como para subvariedades mergulhadas.

Suponha que $S \subset M$ é uma variedade imersa, e seja Y um campo vetorial diferenciável em M. Se existe um campo vetorial diferenciável $X \in \mathfrak{X}(S)$ que é ι-relacionado a Y, então claramente, Y é tangente a S, porque $Y_p = \iota_* X_p$ está na imagem de ι_* para cada $p \in S$. A próxima proposição mostra que a recíproca é verdadeira.

Proposição 1.4.16. *Seja $S \subset M$ uma subvariedade imersa e seja $\iota : S \hookrightarrow M$ a aplicação inclusão. Se $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é tangente a S, então existe um único campo vetorial em S, denotado por $Y|_S$, que é ι-relacionado a Y.*

Demonstração. Por definição, Y ser tangente a S, significa que cada Y_p está na imagem de $\iota*$ para cada $p \in S$. Assim, para cada $p \in S$ existe $X_p \in T_pS$ tal que $Y_p = \iota_* X_p$. Uma vez que ι_* é injetiva, X_p é único, definimos assim um campo vetorial X em S. Basta agora mostrar que X é diferenciável. É suficiente mostrar que X é diferencivel em uma vizinhança de cada ponto.

Seja p qualquer ponto em S. Uma vez que uma subvariedade imersa é localmente um mergulho, existe uma vizinhança V de p em S que é um mergulho em M. Seja U o domínio de uma carta *slice* para V em M proximo de p, e $S = V \cap U$ que é um *slice* em U e assim é um subconjunto fechado de U. Se $f \in \mathfrak{F}(S)$ é arbitrário, seja $\tilde{f} \in \mathfrak{F}(U)$ uma extensão de f para uma função em U. Então para cada $p \in S$,

$$Xf(p) = X_p(f) = X_p(\tilde{f}|_S) = X_p(\tilde{f} \circ \iota) = \iota_* X_p(\tilde{f}) = Y_p(\tilde{f}) = Y\tilde{f}(p).$$

Disto segue que, $X(f) = (Y\tilde{f})|_S$ que é diferenciável em S. Uma vez que isso vale para uma vizinhança de cada $p \in S$, X é diferencivel. $\square$

Corolário 1.4.17. *Seja M uma variedade diferenciável e S uma subvariedade imersa de M. Se Y_1 e Y_2 são campos vetoriais em M que são tangentes a S, então $[Y_1, Y_2]$ é tangente a S.*

Demonstração. Pela proposição anterior existem campos vetoriais diferenciáveis X_1 e X_2 em S tais que X_i é ι-relacionado a $Y_i, i = 1, 2$. Pela naturalidade do colchete de Lie (Proposição (1.3.10)), $[X_1, X_2]$ é ι-relacionado com $[Y_1, Y_2]$ e portanto é tangente a S. $\square$

1.5 Tensores

Definição 1.5.1. Um campo tensor T ou apenas tensor do tipo (r, s) em uma variedade M é uma função $\mathfrak{F}(M)$-multilinear $T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$.

Dados $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$, T produz uma função real

$$f = T(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \in \mathfrak{F}(M).$$

$\theta^1, \ldots, \theta^r$ são as entradas *contravariantes* e $X_1, \ldots, X_s$ são as entradas *covariantes*. Denotaremos o conjunto de todos os campos de tensores em M do tipo (r, s) por $\mathfrak{T}^r_s(M)$.

Definição 1.5.2 (Produto tensorial)**.** Sejam $T_1 \in \mathfrak{T}^r_s(M)$ e $T_2 \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'}(M)$, definimos o produto tensorial $T_1 \otimes T_2 : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ por

$$T_1 \otimes T_2(\theta^1, \ldots, \theta^{r+r'}, X_1, \ldots, X_{s+s'}) =$$
$$= T_1(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) T_2(\theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'})$$

Por definição $T_1 \otimes T_2$ é um tensor do tipo $(r + r', s + s')$.

A seguir são dadas três interpretações para campos tensor:

(1) Seja ω uma 1-forma diferenciável em uma variedade M. A função $X \longrightarrow \omega(X)$ é $\mathfrak{F}(M)$-linear de $\mathfrak{X}(M)$ em $\mathfrak{F}(M)$, portanto é um campo tensor (0,1). Além disso, esta interpretação dá origem a um isomorfismo $\mathfrak{F}(M)$-linear de $\mathfrak{X}^*(M)$ para $\mathfrak{T}^0_1(M)$, assim, podemos escrever

$$\mathfrak{X}^*(M) = \mathfrak{T}^0_1(M); \tag{1.9}$$

(2) Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, defina a função $V : \mathfrak{X}^*(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ por $X(\theta) = \theta(X)\ \forall\ \theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, V é $\mathfrak{F}(M)$-linear e, portanto, é um tensor (1,0). Todo tensor (1,0) em M dá origem a um único campo vetorial, assim, podemos escrever

$$\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}^1_0(M); \tag{1.10}$$

(3) Se $T : \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é uma aplicação $\mathfrak{F}(M)$-multilinear, defina $\overline{T} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ por

$$\overline{T}(\theta, X_1, \ldots, X_s) = \theta(T(X_1, \ldots, X_s)) \qquad \forall\ \theta \in \mathfrak{X}^*(M) \text{ e } X_i \in \mathfrak{X}(M).$$

$\overline{T}$ é $\mathfrak{F}(M)$-multilinear, e portanto, é um tensor (1,s). Assim, podemos considerar T um tensor (1,s).

Sempre que necessário, faremos uso da identificação dada em (3). Tensores do tipo $(0, s)$ são chamados covariantes, enquanto tensores do tipo $(r, 0)$ com $r \geq 1$ são chamados contravariantes. Por exemplo, funções reais e 1-formas são covariantes. Campos vetoriais são contravariantes.

Proposição 1.5.3. *Seja $x \in M$ e $T \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. Se $\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^r$ e $\omega^1, \ldots, \omega^r$ são 1-formas em M tais que $\tilde{\omega}^i|_x = \omega^i|_x$ $(1 \leq i \leq r)$ e $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_s$ e $X_1, \ldots, X_s$ tais que $\widetilde{X}_j|_x = X_j|_x$ $(1 \leq j \leq s)$. Então*

$$T(\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^r, \widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_s)(x) = T(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)(x). \tag{1.11}$$

Para a demonstração dessa proposição usaremos o seguinte Lema:

Lema 1.5.4. *Se pelo menos uma 1-forma $\omega^1, \ldots, \omega^r$ ou pelo menos um campo vetorial $X_1, \ldots, X_s$ é zero em $x \in M$, então*

$$T(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)(x) = 0.$$

Demonstração. Suponha que $X_s|_x = 0$. Sejam $x^1, \ldots, x^n$ um sistema de coordenadas em uma vizinhança U de x. Então, $X_s = \sum X^i \partial_i$ em U, onde $X^i = X_s(x^i) \in \mathfrak{F}(U)$. Seja f uma *bump função* em x com suporte em U. Então, fX^i é diferenciável em todo M e, similarmente, $f\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto

$$\begin{aligned} f^2 T(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s) &= T(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, f^2 X_s) \\ &= T(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, \sum f X^i f \partial_i) \\ &= \sum_{i=1} f X^i T(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, f\partial_i). \end{aligned}$$

Como $X_s|_x = 0$, cada $X^i(p) = 0$; por definição $f(x) = 1$. Portanto, avaliando a fórmula acima em x temos $T(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)(x) = 0$. $\square$

Prova da proposição. Para facilitar, vamos supor $r = 1$ e $s = 2$. Pela multilinearidade de T, temos

$$\begin{aligned} T(\tilde{\omega}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}) - T(\omega, X, Y) &= T(\tilde{\omega}, \widetilde{X}, \widetilde{Y}) - T(\omega, \widetilde{X}, \widetilde{Y}) \\ &\quad + T(\omega, \widetilde{X}, \widetilde{Y}) - T(\omega, X, Y) \\ &= T(\tilde{\omega} - \omega, \widetilde{X}, \widetilde{Y}) - T(\omega, \widetilde{X} - X, \widetilde{Y}) + T(\omega, X, \widetilde{Y} - Y). \end{aligned}$$

Por hipótese, temos $\tilde{\omega} - \omega = \widetilde{X} - X = \widetilde{Y} - Y = 0$ em x, dessa forma, pelo Lema acima $T(\tilde{\omega}, \widetilde{X}, \widetilde{Y})(x) = T(\omega, X, Y)(x)$ $\square$

Segue imediatamente da Proposição que um campo tensor $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ tem valor T_x em cada ponto $x \in M$ dado pela função $T_x : (T_xM^*)^r \times (T_xM)^s \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como segue.

Se $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in T_xM^*$ e $X_1, \ldots, X_s \in T_xM$, definimos

$$T_x(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, X_1, \ldots, X_s) = T(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(x) \tag{1.12}$$

onde $\theta^1, \ldots, \theta^r$ são quaiquer 1-formas em M tais que $\theta^1|_x = \alpha^i$ $(1 \geq i \geq r)$ e $X_1, \ldots, X_s$ são quaisquer campos vetoriais em M tais que $X_j|_p = X_j$ $(1 \geq j \geq s)$.

É fácil ver que T_x é $\mathbb{R}$-multilinear; então, por definição de tensor T_x é um tensor (r,s) sobre T_xM. Podemos então considerar $T \in \mathfrak{T}_s^r$ como um campo diferenciável em M que atribui a cada $x \in M$ um tensor A_x.

1.6 Variedades Riemannianas

Definição 1.6.1 (Métrica Riemanniana)**.** Uma métrica Riemanniana é um tensor g do tipo $(0,2)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) g é simétrica: $g(X,Y) = g(Y,X)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$;

(ii) g é positiva definida: $g(X,X) \geq 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}M$ e $g(X,X) = 0$ se, e somente se, $X = 0$

Definição 1.6.2 (Variedade Riemanniana)**.** Uma variedade diferenciável M munida de um tensor métrica g chama-se variedade Riemanniana.

Uma variedade Riemanniana é o par ordenado (M, g). Observe que dois tensores métrica diferentes em uma mesma variedade constituem variedades Riemannianas diferentes. Denotaremos simplesmente, quando não houver possibilidade de confusão, por M uma variedade Riemanniana munida com uma métrica g. Seja $x^1, ..., x^n$ um sistema de coordenadas em $U \subset M$. As componentes do tensor métrica g em U são

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j). \tag{1.13}$$

Assim, para campos vetoriais $X = \sum V^i\partial_i$ e $Y = \sum Y^j\partial_j$ temos:

$$g(X,Y) = \sum g_{ij}X^iY^j. \tag{1.14}$$

Exemplo 1.6.3. Para cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ existe um isomorfismo linear natural de $\mathbb{R}^n$ para $T_p\mathbb{R}^n$ que, em termos de coordenadas naturais, leva cada v para $v_p = \sum v^i \partial_i$. Assim o produto interno em $\mathbb{R}^n$ dá origem ao tensor métrica em $\mathbb{R}^n$ com

$$\langle v_p, w_p \rangle = v \cdot w = \sum v^i w^i. \tag{1.15}$$

Portanto $\mathbb{R}^n$ pode ser visto como uma variedade Riemanniana com métrica $\langle\ ,\ \rangle$ chamado *espaço Euclidiano de dimensão n*.

Definição 1.6.4. Sejam M e N variedades Riemannianas com métricas Riemannianas g e h, respectivamente. Dizemos que o difeomorfismo $f : M^m \longrightarrow N^n$ é uma isometria se

$$g(X, Y) = h(f_*X, f_*Y) \qquad \forall\ x \in M\ e\ X, Y \in T_xM. \tag{1.16}$$

Uma vez que f é um difeomorfismo, cada diferencial $f_{*,x}$ é um isomorfismo linear, assim, a condição na métrica implica que cada $f_{*,x}$ é uma *isometrica linear*(isomorfismo linear que preserva produtos escalares).

Exemplo 1.6.5.

(1) A aplicação identidade é uma isometria;

(2) A composição de isometrias é uma isometria;

(3) A inversa de uma isometria é uma isometria.

Definição 1.6.6. Uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow N$ entre variedades Riemannianas é uma isometria local se cada aplicação diferencial $f_{*,x} : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}M$ é uma isometria linear.

Em vista do Teorema da Função Inversa 1.4.2, uma definição equivalente, que justifica o termo *isometria linear*, é a seguinte: cada $x \in M$ tem uma vizinhança U tal que $f|_U$ é uma isometria de U sobre uma vizinhança de $f(x) \in N$.

Se $f : M^m \longrightarrow N^n$ é qualquer aplicação diferenciável entre variedades Riemannianas com métricas g e h, respectivamente, com a propriedade (1.16), então f_* é injetiva em cada $x \in M$, pois $f_{*,x} = 0$ implica que $g(X, Y) = 0\ \forall\ Y \in T_xM$ e portanto $X = 0$. Desta forma uma aplicação diferenciável f com a propriedade (1.16) é uma imersão, denominada *imersão isométrica*. Um *mergulho isométrico* é uma imersão isométrica injetiva.

O capítulo 2 será dedicado ao estudo de Imersões Isométricas.

1.7 Conexão de Levi-Civita

Definição 1.7.1. Uma conexão afim ∇ em uma variedade M é uma função que associa a cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação linear ∇_X de $\mathfrak{X}(M)$ sobre ele mesmo ($\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$) satisfazendo as seguintes condições:

(∇_I) $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$;

(∇_{II}) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$

para $f, g \in \mathfrak{F}(M)$, X, Y $\in \mathfrak{X}(M)$.

O operador ∇_X é chamado derivada covariante com respeito a X.

Teorema 1.7.2. *Em uma variedade Riemanniana M existe uma única conexão ∇ tal que*

(∇_{III}) O tensor torsão T é zero, ou seja, $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$;

(∇_{IV}) g é paralelo, ou seja, $\nabla_X g = 0$.

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

∇ é chamada conexão de Levi-Civita de M e é caracterizada pela fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) \\ &\quad + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Definição 1.7.3. Definimos as funções reais r_{ij}^k em $(U, x^1, ..., x^n)$ por

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k r_{ij}^k \partial_k$$

que são as componentes da conexão Riemanniana, chamadas símbolos de Christoffel.

Fazendo $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_k$ na fórmula de Koszul (1.8) temos

$$r_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\} \tag{1.18}$$

esta fórmula é uma descrição de como o tensor métrica g determina a conexão de Levi-Civita.

Proposição 1.7.4. *Para um sistema de coordenadas $x_1, ..., x_n$ em U temos:*

$$\nabla_{\partial_i}(\sum W^j \partial_j) = \sum_k \left\{ \frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j r^k_{ij} W^j \right\} \partial_k \tag{1.19}$$

onde os símbolos de Christoffel são dados pela fórmula (1.18). Usando (∇_I) podemos calcular qualquer $\nabla_X Y$ em uma vizinhança coordenada.

Demonstração. Consequência imediata de (∇_{II}). □

Definição 1.7.5. Sejam $u^1, \ldots, u^n$ as coordenadas naturais em $\mathbb{R}^n$. Se V e $W = \sum W^i \partial_i$ são campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$, o campo vetorial

$$\nabla_V W = \sum V(W^i)\partial_i \tag{1.20}$$

é chamada derivada covariante natural de W com respeito a V.

Lema 1.7.6. *A conexão ∇ da definição acima é a conexão de Levi-Civita de espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Relativo as coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n$ temos*

(1) $g_{ij} = \delta_{ij}$;

(2) $r^k_{ij} = 0$

para todo $1 \leq i, j, k \leq n$.

Um campo vetorial Y é paralelo se suas derivadas covariantes $\nabla_X Y$ são zero para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto, pelo Lema acima os campos vetoriais coordenados naturais de $\mathbb{R}^n$ são paralelos.

Definição 1.7.7. Seja $f \in \mathfrak{F}(M)$ definimos

$$\nabla_V f = Vf \tag{1.21}$$

para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$

Definição 1.7.8. Dado K um campo tensor do tipo (r, s), a derivada covariante ∇K de K em M é o campo tensor do tipo $(r, s+1)$ definido por:

$$\begin{aligned} (\nabla K)(X; X_1, ..., X_s) &= (\nabla_X K)(X_1, ..., X_s) \\ &= \nabla_X(K(X_1, ..., X_s)) - \sum_{i=1}^{s} K(X_1, ..., \nabla_X X_i, ..., X_s) \end{aligned} \tag{1.22}$$

para campos de vetores $X, X_i \in \mathfrak{X}(M)$.

Dizemos que um campo tensor K em M é paralelo quando $\nabla_X K = 0$ para todo $X \in T_x M$.

1.8 Geodésicas e a aplicação exponencial

1.8.1 Transporte Paralelo

Uma curva diferenciável em uma variedade M é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \longrightarrow M$ onde I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$. Usualmente assumimos que $0 \in I$ e dizemos que α é uma curva começando em p se $\alpha(0) = p$. Para cada $t \in I$ o vetor velocidade de α em t é definido por

$$\alpha'(t) = \alpha_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) \in T_{\alpha(t)}M.$$

Dizemos que $\alpha'(t)$ é o vetor velocidade de α no ponto $\alpha(t)$. O vetor tangente $\alpha'(t)$ age em uma função $f \in \mathfrak{F}(M)$ da seguinte forma

$$\alpha'(t)f = \alpha_* \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) f = \left. \frac{d}{dt} \right|_t (f \circ \alpha) = \frac{d(f \circ \alpha)f}{dt}(t).$$

Agora, seja (U, φ) uma carta com funções coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$. Se $\alpha(t) \in U$, escrevendo $\alpha^i = x^i \circ \alpha$ para i-ésima componente de α nesta carta, então pelo teorema das bases temos

$$\alpha'(t) = \sum (\partial^i)'(t) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\alpha(t)}.$$

Toda curva α em p numa variedade M dá origem a um vetor tangente $\alpha'(0) \in T_pM$. Inversamente, vamos mostrar que todo vetor tangente $X_p \in T_pM$ é o vetor velocidade de alguma curva em p como segue.

Proposição 1.8.1 (Existência de uma curva com vetor velocidade inicial dado)**.** *Para qualquer ponto p em uma variedade M e qualquer vetor tangente $X_p \in T_pM$ existe uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ para algum $\epsilon > 0$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X_p$.*

Demonstração. Seja (U, ϕ) uma carta centrada em p, ou seja, $\phi(p) = (0, \ldots, o)$. Suponha $X_p = \sum a^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ em p. Sejam $u^1, \ldots, u^n$ as coordenadas naturais de $\mathbb{R}^n$. Então $x^i = u^i \circ \phi$. Para encontrar uma curva α em p tal que $\alpha'(0) = X_p$ começaremos com a curva β em $\mathbb{R}^n$ com $\beta(0) = 0$ e $\beta'(0) = \sum a^i \left. \frac{\partial}{\partial u^i} \right|_0$. Em seguida, aplicamos β a M via ϕ^{-1}. O β mais simples é dado por

$$\beta(t) = (a^1 t, \ldots, a^n t), \qquad onde\ t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

onde ϵ é suficientemente pequeno de modo que $\beta(t) \in \phi(U)$. Agora, basta definir $\alpha = \phi^{-1} \circ \beta$. Claramente, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X_p$. □

Proposição 1.8.2. *Sejam $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $\alpha : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável. Para qualquer $t_0 \in I$, o vetor tangente em $t = t_0$ da curva composição $F \circ \alpha : I \longrightarrow N$ é dado por*

$$(F \circ \alpha)'(t_0) = F_*(\alpha'(t_0)).$$

Demonstração. Basta aplicar a definição de vetor tangente para uma curva:

$$(F \circ \alpha)'(t_0) = (F \circ \alpha)_* \frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} = F_* \circ \alpha_* \frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} = F_*(\alpha'(t_0)).$$

□

Pela proposição anterior, podemos calcular a diferencial $F_{*,p}$ usando curvas. Seja $F : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável, vamos calcular F_* para qualquer $p \in M$. Calculamos $F_{*,p}X$ para qualquer $X \in T_pM$, escolhendo uma curva α cujo vetor tangente em $t = 0$ é X, então

$$F_*(X) = (F \circ \alpha)'(0). \tag{1.23}$$

Definição 1.8.3. Dizemos que X é um campo vetorial sobre a uma aplicação $\phi : P \longrightarrow M$ quando $X : P \longrightarrow TM$ é tal que $\pi \circ X = \phi$, onde π é a projeção de TM sobre M.

O vetor velociadade α' é um campo vetorial em α, bem como a restrição X_α de qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$. O conjunto $\mathfrak{X}(\alpha)$ de todos os campos vetoriais diferenciáveis sobre α é um módulo sobre $\mathfrak{F}(I)$.

Proposição 1.8.4. *Seja $\alpha : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável em uma variedade Riemanniana M e Z um campo vetorial sobre α. Então existe uma única função $Z \longrightarrow Z' = \dfrac{DZ}{dt}$ de $\mathfrak{X}(\alpha)$ em $\mathfrak{X}(\alpha)$, chamada derivada covariante induzida, tal que*

(1) $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2' \qquad (a, b \in \mathbb{R})$;

(2) $(hZ)' = \left(\dfrac{dh}{dt}\right) Z + hZ' \qquad (h \in \mathfrak{F}(I))$;

(3) $(X_\alpha)'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}(X) \qquad (t \in I, V \in \mathfrak{X}(M))$;

(4) $(d/dt)g(Z_1, Z_2) = g(Z_1', Z_2) + g(Z_1, Z_2')$

Se $Z' = 0$ dizemos que Z é paralelo. No caso especial em que $Z = \alpha'$, a derivada covariante induzida $Z' = \alpha''$ é chamada aceleração da curva α. Embora Z e α'' não sejam campos vetoriais em M, podemos escrever $Z' = \nabla_{\alpha'} Z$ e portanto $\alpha'' = \nabla_{\alpha'}\alpha'$, mas somente em $\alpha(t)$ onde $\alpha'(t) \neq 0$.

Proposição 1.8.5. *Para uma curva $\alpha : I \longrightarrow M$, seja $a \in I$ e $z \in T_{\alpha(a)}M$. Então existe um único campo vetorial paralelo Z em α tal que $Z(a) = z$.*

A partir desta proposição podemos definir uma função

$$P = P_a^b(\alpha) : T_pM \longrightarrow T_qM$$

que leva cada z para $Z(b)$ que é chamada *transporte paralelo* ao longo de α de $p = \alpha(a)$ para $q = \alpha(b)$.

Lema 1.8.6. *Transporte paralelo é uma isometria linear.*

Demonstração. Com a notação da definição de transporte paralelo, sejam $v, w \in T_pM$ tais que $V(a) = v$ e $W(a) = w$. Uma vez que $V + W$ é paralelo, $P(v + w) = (V + W)(b) = V(b) + W(b) = P(v) + P(w)$. Similarmente, $P(cv) = cP(v)$ e assim, P é linear.

Se $P(v) = 0$, pela unicidade da proposição acima, V pode ser somente o campo vetorial identicamente nulo em α. Portanto, $v = V(a) = 0$. Assim, P é injetiva e como espaços tangentes de M tem a mesma dimensão, P é um isomorfismo linear.

Finalmente, para V e W paralelos temos

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = g(V', W) + g(V, W') = 0$$

Dessa forma, $g(V, W)$ é constante, assim

$$g(P(v), P(w)) = g(V(b), W(b)) = g(V(a), W(a)) = g(v, w)$$

e isto conclui a prova. $\square$

1.8.2 Geodésicas

Definição 1.8.7. Uma geodésica em uma variedade Riemanniana M é uma curva $\gamma : I \longrightarrow M$ cujo campo vetorial γ' é paralelo, equivalentemente, $\gamma'' = 0$.

Corolário 1.8.8. *Sejam $x^1, \ldots, x^n$ um sistema de coordenadas em $U \subset M$. Uma curva γ em U é uma geodésica de M se, e somente se, suas funções coordenadas $x^k \circ \gamma$ satisfazem*

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} r^k_{i,j}(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0 \qquad 1 \leq k \leq n. \tag{1.24}$$

O teorema da existência e unicidade das EDO nos dá o seguinte resultado local.

Lema 1.8.9. *Se $X \in T_pM$ existe um intervalo I contendo 0 e uma única geodésica $\gamma : I \longrightarrow M$ tal que $\gamma'(0) = X$.*

Obviamente $\gamma(0) = p$, dizemos que γ é uma geodésica começando em p com velocidade inicial X.

Lema 1.8.10. *Sejam $\alpha, \beta : I \longrightarrow M$ geodésicas. Se existe um número $a \in I$ tal que $\alpha'(a) = \beta'(a)$, então $\alpha = \beta$.*

Proposição 1.8.11. *Dado qualquer vetor tangente $X \in T_pM$ existe uma única geodésica γ_X em M tal que*

(1) $\gamma_X'(0) = X$;

(2) *o domínio I_X de γ_X é o maior possível. Portanto, se $\alpha : J \longrightarrow M$ é uma geodésica com velocidade inicial X, então $J \subset I$ e $\alpha = \gamma_X|_J$.*

Demonstração. Seja $\mathscr{G}$ a coleção de todas as geodésicas $\gamma : I_\gamma \longrightarrow M$ com velocidade inicial X, pelo Lema (1.8.9) , existe pelo menos uma. O Lema (1.8.10) diz que α e β em $\mathscr{G}$ coincidem em $I_\alpha \cap I_\beta$. Portanto a coleção $\mathscr{G}$ define uma única curva γ_X no intervalo $I = \cap I_\gamma$, que tem as propriedades requeridas. □

Pela propriedade (2) da Proposição (1.8.11) dizemos que γ_X é maximal.

Definição 1.8.12. Dizemos que uma variedade Riemanniana M é geodesicamente completa ou simplesmente, completa, quando toda geodésica maximal está definida em toda reta real.

Exemplo 1.8.13 (Geodésicas no espaço Euclidiano)**.** Como os símbolos de Christoffel desaparecem, a equação geodésica (1.24) torna-se

$$\frac{d^2(u^i \circ \gamma)}{dt^2} \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Assim, $u^i(\gamma(t)) = p^i + tv^i$ para todo t, onde p^i e v^i são constantes arbitrárias. Em notação vetorial, $\gamma(t) = p + tv$. Portanto as geodésicas de $\mathbb{R}^n$ são linhas retas. Em particular, $\mathbb{R}^n$ é completo.

Lema 1.8.14. *Seja X um vetor tangente de M, ou seja, um elemento do fibrado tangente TM. Então existe uma vizinhança $\mathcal{N}$ de $X \in TM$ e um intervalo I contendo 0 tal que $(w, s) \longrightarrow \gamma_w(s)$ é uma função diferenciável de $\mathcal{N} \times \mathcal{I}$ em M.*

1.8.3 A aplicação exponencial

Definição 1.8.15. Seja $o \in M$, $\mathscr{D}_o$ o conjunto de vetores $v \in T_oM$ que tem geodésica maximal γ_v definida pelo menos em $[0,1]$. A aplicação exponencial de M no ponto o é a função

$$exp_o : \mathscr{D}_o \longrightarrow M$$

tal que $exp_o(v) = \gamma_v(1)$ para todo $v \in \mathscr{D}_o$.

Se M é completa, então $\mathscr{D}_o = T_oM$ para todo $o \in M$.

Seja $v \in T_oM$ e $t \in \mathbb{R}$, então a geodésica $s \longrightarrow \gamma_v(ts)$ tem velocidade inicial $t\gamma_v'(0) = tv$. Portanto $\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts)$ para todo s e t de modo que em qualquer um dos lados (portanto ambos) está bem definido. Em particular, se $v \in \mathscr{D}_o$ então

$$exp_o(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

Proposição 1.8.16. *Para cada ponto $o \in M$ existe uma vizinhança $\widetilde{U}$ de 0 em T_oM em que a aplicação exponencial exp_o é um difeomorfismo sobre uma vizinhança U de o em M.*

1.9 Curvatura

Definição 1.9.1 (Curvatura)**.** Seja M uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇. A curvatura Riemanniana R em M é a aplicação $R : \mathfrak{X}(M)^3 \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}. \tag{1.25}$$

Proposição 1.9.2. *A curvatura Riemanniana é um tensor do tipo (1, 3) em M.*

Demonstração. Uma vez que a $\mathbb{R}$-linearidade é óbvio, basta provar que R é $\mathfrak{F}(M)$-linear em cada variável separadamente. Por exemplo, em Y temos:

$$\begin{aligned} R(X,fY)Z &= \nabla_X\nabla_{fY} - \nabla_{fY}\nabla_X - \nabla_{[X,fY]} \\ &= \nabla_X(f\nabla_Y Z) - f\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{Xf.Y+f[X,Y]}Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z + (Xf)\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - (Xf)\nabla_Y - f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= f(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= fR(X,Y)Z \end{aligned}$$

De forma análoga mostramos a $\mathfrak{F}(M)$-linearidade em X e Z. □

Como mostrado anteriormente (ver Seção 1.5), R pode ser considerado como uma função $\mathbb{R}$-multilinear em cada espaço tangente individual. Se $x, y \in T_pM$, o operador linear

$$R(x,y) : T_pM \longrightarrow T_pM$$

que leva cada $z \in T_pM$ para $R(x,y)z$ é chamado operador curvatura.

Proposição 1.9.3. *Se X, Y, Z, V, W* $\in \mathfrak{X}(M)$*, então*

(1)$R(X,Y) = -R(Y,X)$*,*

(2) $g(R(X,Y)V,W) = -g(R(X,Y)W,V)$*,*

(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$*,*

(4) $g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y)$*.*

Em uma vizinhança coordenada $U \subset M$ de um sistema de coordenadas $x_1, \ldots, x_n$, definimos as funções

$$R(\partial_k, \partial_l)\partial_j = \sum_i R^i_{jkl}\partial_i \tag{1.26}$$

onde as componentes de R são dadas por

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^l}r^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}r^i_{lj} + \sum_m r^i_{lm}r^m_{kj} - \sum_m r^i_{km}r^m_{lj}. \tag{1.27}$$

Definição 1.9.4. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n. O campo tensor curvatura Riemanniana R de M é o campo tensor de grau covariante 4 definido por

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_2, X_1) \qquad X_i \in T_xM,\ i = 1, \ldots, 4. \tag{1.28}$$

Proposição 1.9.5. *O tensor curvatura Riemanniana R pode ser considerado como uma aplicação quadrilinear $T_xM \times T_xM \times T_xM \times T_xM \longrightarrow R$ em cada $x \in M$ e satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = -R(X_2, X_1, X_3, X_4)$;

2. $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_4, X_3)$;

3. $R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_1, X_3, X_4, X_2) + R(X_1, X_4, X_2, X_3) = 0$;

4. $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_3, X_4, X_1, X_2)$.

Se R^i_{jkl} e g_{ij} são as componentes do tensor curvatura e do tensor métrica com respeito a um sistema de coordenadas locais, então as componentes R_{ijkl} do tensor curvatura Riemanniana são dadas por $R_{ijkl} = \sum_m g_{im} R^m_{jkl}$.

Definição 1.9.6 (Curvatura seccional)**.** Para cada plano π do espaço tangente T_xM gerado por vetores ortonormais X_1 e X_2, a curvatura seccional $K(\pi)$ do plano π é definida por

$$K(\pi) = R(X_1, X_2, X_1, X_2) = g(R(X_1, X_2)X_2, X_1) \tag{1.29}$$

A curvatura seccional $K(\pi)$ é independente da escolha da base ortonormal X_1, X_2 e o conjunto de valores de $K(\pi)$ para todo plano π em T_xM determina o tensor curvatura Riemanniana em $x \in M$. Se $K(\pi)$ é uma constante para todos os planos π em T_xM e para todo $x \in M$, então M é chamado *espaço de curvatura constante*.

Uma variedade Riemanniana de curvatura constante é chamada *forma espacial*. Algumas vezes, uma forma espacial é definida como uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa de curvatura constante. Denotamos por $M(c)$ uma forma espacial de curvatura constante c. Se M é um espaço de curvatura constante c, então

$$R(X, Y)Z = c(g(Z, Y)X - g(Z, X)Y). \tag{1.30}$$

Proposição 1.9.7. *Se $K = 0$ em x então $R = 0$ em x, isto é, se $K(\pi) = 0$ para todo plano π em T_xM, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in T_xM$.*

Se M tem tensor curvatura $R = 0$ em todo ponto, então dizemos que M é *plana*. Pela Proposição anterior, M é plana se, e somente se, a curvatura seccional K é identicamente nula. Por exemplo, o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é plano: para coordenadas naturais os símbolos de Chrstoffel desaparecem, portanto $R = 0$ pela Equação (1.27).

Capítulo 2

IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Vimos no capítulo anterior que uma imersão isométrica é uma aplicação $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ que é isométrica para todo $x \in M$, ou seja,

$$g(X,Y) = \bar{g}(f_*X, f_*Y)$$

para todo $X, Y \in T_xM$ e para todo $x \in M$, g e $\bar{g}$ são as métricas Riemannianas de M e $\overline{M}$, respectivamente. Se por outro lado, $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ é uma imersão de uma variedade diferenciável M em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ podemos induzir uma métrica Riemanniana em M, fazendo, para cada ponto $x \in M$,

$$g(X,Y) = \bar{g}(f_*X, f_*Y) \qquad X, Y \in T_xM$$

de tal forma que f se torne uma imersão isométrica. Assim, dizer que f é isométrica é equivalente a dizer que g é a métrica induzida por f. De agora em diante, vamos considerar apenas que uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ é uma imersão com métrica induzida g em M. Uma vez que f é localmente um mergulho, ou seja, para cada $x \in M$ existe uma vizinhança U de x tal que a aplicação $f|_U : U \longrightarrow \overline{M}$ é um mergulho, podemos identificar U com $f(U)$, onde $f(U)$ é uma subvariedade mergulhada de $\overline{M}$. Portanto, para cada $x \in M$, temos

$$T_x\overline{M} = T_xM \oplus T_xM^{\perp}$$

onde $T_xM^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_xM em $T_x\overline{M}$. O espaço $T_xM^{\perp}$ é chamado *espaço normal* a M em x e tem dimensão k, igual a codimensão de f. O *fibrado normal* $TM^{\perp}$ é definido como o conjunto $TM^{\perp} = \{(x,\xi);\ x \in M \ e \ \xi \in T_xM^{\perp}\}$. Em relação a decomposição acima, temos as seguintes aplicações

$$\begin{aligned} (\ )^{\perp} &: T\overline{M} \longrightarrow TM^{\perp} \\ (\ )^{\top} &: T\overline{M} \longrightarrow TM \end{aligned}$$

denomidadas projeção normal e projeção tangente, respectivamente.

2.1 Conexão Induzida e a segunda forma fundamental

Sejam $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma imersão com métrica induzida g, $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$ e $\bar{g}$ a métrica Riemanniana de $\overline{M}$. Se X e Y são campos vetoriais locais em M, como f é localmente um mergulho, podemos estendê-los a campos vetoriais locais $\overline{X}, \overline{Y}$ em $\overline{M}$. Definimos $\overline{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$, é possível provar que esta definição não depende das extensões de X e Y. Então temos

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^{\top} + (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}$$

.

Definição 2.1.1. Sejam X e Y campos vetoriais em M. Para cada $x \in M$ definimos

$$(\nabla_X Y)_x = (\overline{\nabla}_X Y)_x^{\top}, \tag{2.1}$$

onde $(\ )^{\top}$ denota a projeção sobre $T_x M$.

Proposição 2.1.2. *∇ é a Conexão de Levi-Civita de M com respeito a métrica induzida g em M.*

Demonstração. Pela definição de ∇, ela é uma conexão afim em M. Para mostrar que ∇ tem torsão nula, calculamos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] &= (\overline{\nabla}_X Y)^{\top} - (\overline{\nabla}_X Y)^{\top} - [X,Y]^{\top} \\ &= (\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_X Y - [X,Y])^{\top} = 0 \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) = X\bar{g}(Y,Z) &= \bar{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(\overline{\nabla}_X Z, Y) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y), \end{aligned}$$

o que significa que $\nabla g = 0$. Assim, ∇ é a conexão de Levi-Civita em M. □

Por outro lado, definimos a *segunda forma fundamental* da imersão isométrica f por

$$\alpha(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp} \tag{2.2}$$

Pelas propriedades da derivada covariante $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ é uma forma bilinear e simétrica sobre $\mathfrak{F}(M)$; logo $\alpha(X,Y)_x$ depende somente de X_x e Y_x.

A conexão no fibrado normal $TM^\perp$ é definida similarmente. Seja ξ um campo vetorial normal em M e X um campo vetorial tangente em M. Para cada ponto $x \in M$ definimos

$$(\nabla^\perp_X \xi)_x = (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp_x, \tag{2.3}$$

onde $(\ )^\perp$ é a projeção sobre $T_xM^\perp$.

Proposição 2.1.3. $\nabla^\perp$ *é uma conexão métrica no fibrado normal* $TM^\perp$ *com respeito a métrica induzida em* $TM^\perp$*.*

Demonstração. É fácil ver que $\nabla^\perp$ define uma conexão afim no fibrado normal $TM^\perp$. Para campos vetoriais normais ξ e η temos

$$X\bar{g}(\xi,\eta) = \bar{g}(\overline{\nabla}_X\xi,\eta) + \bar{g}(\overline{\nabla}_X\eta,\xi) = \bar{g}(\nabla^\perp_X\xi,\eta) + \bar{g}(\nabla^\perp_X\eta,\xi),$$

o que mostra que $\nabla^\perp$ é uma conexão métrica. $\square$

Seja $S(M)$ o fibrado cujo as fibras em cada ponto é um espaço de transformações lineares simétricas $T_xM \longrightarrow T_xM$. Seja $H(M) = Hom(TM^\perp, S(M))$. Para um campo vetorial normal ξ em M e para um campo vetorial tangente X em M, definimos

$$(A_\xi X)_x = -(\overline{\nabla}_X\xi)^\top_x \tag{2.4}$$

em cada ponto $x \in M$. A está bem definido, ou seja, $(A_\xi X)_x$ depende somente de X_x e ξ_x. Obtemos

$$\begin{aligned} g(A_\xi X, Y) - g(A_\xi Y, X) &= -\bar{g}(\overline{\nabla}_X\xi, Y) + \bar{g}(\overline{\nabla}_Y\xi, X) \\ &= \bar{g}(\xi, \overline{\nabla}_X Y) - \bar{g}(\xi, \overline{\nabla}_Y X) = \bar{g}(\xi, [X,Y]) = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, $A_\xi : T_xM \longrightarrow T_xM$ é um operador linear simétrico (ou auto-adjunto). Claramente, A é linear em todas as variáveis e portanto $A \in H(M)$. Chamamos A_ξ de *operador de forma*, *operador de Weingarten*, ou ainda *segunda forma fundamental* da imersão f.

Proposição 2.1.4. *Se* $X, Y \in T_xM$ *e* $\xi \in T_xM^\perp$ *temos*

$$\bar{g}(\alpha(X,Y),\xi) = g(A_\xi X, Y). \tag{2.5}$$

Demonstração. Como $\bar{g}(Y,\xi)=0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= X\bar{g}(Y,\xi) = \bar{g}(\overline{\nabla}_X Y,\xi) + \bar{g}(\overline{\nabla}_X \xi, Y) \\ &= \bar{g}(\alpha(X,Y),\xi) - g(A_\xi X, Y). \end{aligned}$$

$\square$

Assim, provamos o primeiro conjunto de fórmulas básicas para subvariedades, a saber

(I) $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y)$ (Fórmula de Gauss)

(II) $\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi$. (Fórmula de Weingarten)

2.2 Equações de Gauss, Codazzi e Ricci

Seja M uma variedade de dimensão n imersa em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $n+k$. Vamos denotar por R o tensor curvatura de M e por $\overline{R}$ o tensor curvatura de $\overline{M}$. Sejam $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ \overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

Pelas fórmulas de Gauss e Weingarten temos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) = \overline{\nabla}_X\nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X\alpha(Y,Z)) \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^\perp_X\alpha(Y,Z). \end{aligned}$$

Similarmente, obtemos

$$\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^\perp_Y\alpha(X,Z).$$

Por fim, temos

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z).$$

Tomando a parte tangente do tensor curvatura $\overline{R}$ temos

$$\begin{aligned} (\overline{R}(X,Y)Z)^\top &= \nabla_X\nabla_Y Z - A_{\alpha(Y,Z)}X - \nabla_Y\nabla_X Z + A_{\alpha(X,Z)}Y - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= R(X,Y)Z - A_{\alpha(Y,Z)}X + A_{\alpha(X,Z)}Y. \end{aligned}$$

Para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos a equação de Gauss

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\overline{R}(X,Y)Z,W) &= g(R(X,Y)Z,W) - g(A_{\alpha(Y,Z)}X,W) + g(A_{\alpha(X,Z)}Y,W) \\
&= g(R(X,Y)Z,W) - \bar{g}(\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)) + \\
&\quad +\bar{g}(\alpha(Y,W),\alpha(X,Z)).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Em particular, se $K(\pi)$ e $\overline{K}(\pi)$ denotam as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$ do plano π gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_pM$, a equação de Gauss é dada por

$$\begin{aligned}
K(\pi) &= \overline{K}(\pi) + \bar{g}(\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)) - \bar{g}(\alpha(Y,X),\alpha(X,Y)) \\
&= \overline{K}(\pi) + \bar{g}(\alpha(X,X),\alpha(Y,Y)) - \|\alpha(X,Y)\|^2.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Tomando as componentes normais de $\overline{R}$:

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = \alpha(X,\nabla_Y Z) + \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) - \alpha([X,Y],Z).$$

Usando o fato de que $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ e denotando $(\nabla_X \alpha)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$, obtemos da igualdade acima a equação de Codazzi

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla_Y \alpha)(X,Z) \tag{2.8}$$

Definimos o tensor $R^{\perp}$ da conexão normal $\nabla^{\perp}$ por

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi \tag{2.9}$$

para quaisquer campos vetoriais X, Y em M e campo vetorial normal ξ em M. Das fórmulas de Gauss e Weingarten temos

$$\bar{g}(\overline{R}(X,Y)\xi,\eta) = \bar{g}(R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta) + g([A_\eta, A_\xi]X,Y) \tag{2.10}$$

para qualquer campo vetorial normal η em M. A Equação (2.10) é chamada equação de Ricci. Se $R^{\perp} = 0$, então dizemos que a conexão normal de M é *plana*.

Uma forma equivalente da equação de Codazzi é obtida tomando a parte tangente de $\overline{R}(X,Y)\xi$:

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^{\top} = (\nabla_Y A)(X,\xi) - (\nabla_X A)(Y,\xi), \tag{2.11}$$

onde $(\nabla_X A)(Y,\xi) = \nabla_X A_\xi Y - A_\xi(\nabla_X Y) - A_{\nabla^{\perp}_X \xi} Y$.

Agora, vamos definir as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para um ambiente com curvatura seccional constante. Seja $F : M \longrightarrow \overline{M}(c)$ uma imersão isométrica onde $\overline{M}$

tem curvatura seccional constante igual a c. Então o tensor curvatura $\overline{R}$ de M é dado por

$$\bar{R}(X,Y) = c(X \wedge Y)$$

onde $c(X \wedge Y)Z = c(\bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y)$. Assim, para $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi,\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ as equações de Gauss, Codazzi e Ricci reduzem-se, respectivamente, a

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= c\bar{g}((X \wedge Y)Z,W) + \bar{g}(\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)) \qquad (2.12)\\ &\quad -\bar{g}(\alpha(Y,W),\alpha(X,Z)); \\ (\nabla_X\alpha)(Y,Z) &= (\nabla_Y\alpha)(X,Z)\text{ou}, (\nabla_Y A)(X,\xi) = (\nabla_X A)(Y,\xi) \qquad (2.13)\\ \bar{g}(R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta) &= g([A_\xi,A_\eta]X,Y),\ ou, \\ R^{\perp}(X,Y)\xi &= \alpha(X,A_\xi Y) - \alpha(Y,A_\xi X). \qquad (2.14) \end{aligned}$$

Note que quando $\overline{M}$ tem curvatura constante, a conexão normal de M é plana se, e somente se, a segunda forma fundamental de M é comutativa, ou seja, $[A_\xi, A_\eta] = 0$ para todo ξ,η.

2.3 Imersões totalmente geodésicas

Definição 2.3.1. Dizemos que uma imersão $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ é totalmente geodésica no ponto $x \in M$ se a segunda forma fundamental $\alpha(X,Y)_x = 0$ para todo $X,Y \in T_xM$. Se isto vale para todo $x \in M$ dizemos que f é totalmente geodésica.

Proposição 2.3.2. *Uma imersão $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ é totalmente geodésica se, e somente se, toda geodésica de M é também geodésica de $\overline{M}$.*

Demonstração. Se γ é uma geodésica de $\overline{M}$ contida em M então, idependente de f ser totalmente geodésica ou não, γ é uma geodésica de M, basta observar que $\ddot{\gamma} = \gamma'' + \alpha(\gamma',\gamma')$.

Por outro lado, se γ é uma geodésica de M parametrizada pelo comprimento de arco, então $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ e supondo f totalmente geodésica temos $\overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = \nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ e portanto γ é uma geodésica de $\overline{M}$.

Reciprocamente, para todo vetor tangente $X \in T_xM$ temos $\alpha(X,X) = 0$. Então

$$0 = \alpha(X+Y,X+Y) = \alpha(X,X) + 2\alpha(X,Y) + \alpha(Y,Y)$$

isto mostra que $\alpha = 0$ para todo $X \in T_xM$, ou seja, f é totalmente geodésica. $\square$

Note que se $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante c e f é totalmente geodésica em M, M também tem curvatura seccional constante c e $R^{\perp} \equiv 0$. Tais fatos seguem diretamente da equação de Gauss

$$K(\pi) = \overline{K}(\pi) + \bar{g}(\alpha(X,X), \alpha(Y,Y)) - \|\alpha(X,Y)\|^2 = c$$

e da equação de Ricci

$$\bar{g}(R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta) = g([A_{\xi}, A_{\eta}]X, Y) = 0$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$.

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ denominamos *primeiro espaço normal* da imersão f em $x \in M$ o conjunto $N_1(x)$ definido por $N_1^{\perp}(x) = \{\xi \in T_{f(x)}M^{\perp}; A_{\xi} = 0\}$.

Lema 2.3.3. *Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Suponha que exista um subfibrado normal $E \subset TM^{\perp}$ paralelo na conexão normal,(ou seja, $\nabla_X^{\perp}\xi \in E$, $\forall\ \xi \in E$ e $X \in TM$) tal que $N_1(x) \subset E(x)$ para todo $x \in M$. Então $E^{\perp}(x)$ é um subespaço constante H de $\mathbb{R}^{n+k}$ e $f(M) \subset f(x) + H^{\perp}$.*

Demonstração. Se $\xi \in E^{\perp}$, então $\xi \in N_1^{\perp}$. Assim $\overline{\nabla}_X\xi = \nabla_X^{\perp}\xi \in E^{\perp}$, portanto $E^{\perp}(x)$ é um subespaço constante H de $\mathbb{R}^{n+k}$.

Agora fixemos $x \in M$, temos

$$X_q g(f(y) - f(x), v) = g(f_* X_q, v) = 0 \qquad \forall\ q \in M,\ \forall\ X_q \in T_qM,\ \forall\ v \in H$$

pois $H \subset T_qM^{\perp}$. Além disso, a função $g(f(y) - f(x), v)$ é nula em x. Portanto, como $g(f(y) - f(x), v)$ é constante, temos que $g(f(y) - f(x), v) = 0, \forall\ y \in M$. Assim $f(y) - f(x) \in H^{\perp}\ \forall\ y \in M$, ou seja, $f(M) \subset f(x) + H^{\perp}$. □

Seja V um espaço vetorial. Suponha $S \subset V$ um subespaço vetorial de V. Para qualquer vetor $x \in V$ definimos o conjunto

$$x + S = \{x + y : y \in S\} \tag{2.15}$$

chamado *subespaço afim* de V paralelo a S.

Corolário 2.3.4. *Se $f : M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+k}$ é uma imersão isométrica totalmente geodésica, com M conexa, então $f(M)$ é um aberto de um n-subespaço afim de $\mathbb{R}^{n+k}$.*

Demonstração. Aplicando o Lema acima para $E(x) = 0$ para cada $x \in M$, concluímos que $f(M)$ está contida em um num n-subespaço afim $f(x) + H^{\perp}$ de $\mathbb{R}^{n+k}$. Além disso, como a aplicação $f : M^n \longrightarrow f(x) + H^{\perp}$ é uma isometria local, portanto um difeomorfismo local. Logo $f : M^n \longrightarrow f(x) + H^{\perp}$ é uma aplicação aberta e assim $f(M)$ é um subconjunto aberto de $f(x) + H^{\perp}$. □

2.4 Hipersuperfícies

Definição 2.4.1. Uma hipersuperfície é uma imersão isométrica de codimensão igual a 1.

Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Para cada $x \in M$ tomemos um campo vetorial diferenciável unitário normal ξ numa vizinhança U de x, isto é, ξ leva cada $y \in U$ em $\xi_y \in T_yM^{\perp}$ e $\bar{g}(\xi_y, \xi_y) = 1$ para todo $y \in U$. Como a dimensão do espaço normal é igual a 1, existem apenas duas possibilidades de escolher ξ. Seja $X \in T_xM$ e um campo diferenciável $Y \in TM$ então

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) = \nabla_X Y + \bar{g}(\alpha(X, Y), \xi)\xi = \nabla_X Y + \bar{g}(A_\xi X, Y)\xi. \tag{2.16}$$

que é a fórmula de Gauss para hipersuperfícies. Por outro lado, como ξ é unitário, temos $\bar{g}(\overline{\nabla}_X \xi, \xi) = 0$ isto implica que $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$ para todo $X \in TM$. Portanto a fórmula de Weingarten torna-se

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X. \tag{2.17}$$

Dados X, Y, Z campos vetoriais em M e usando o fato de que $\alpha(X, Y) = \bar{g}(A_\xi X, Y)\xi$ temos a equação de Gauss para hipersuperfícies

$$R(X, Y)Z = (\overline{R}(X, Y)Z))^{\top} + (A_\xi X \wedge A_\xi Y)Z. \tag{2.18}$$

onde $(A_\xi X \wedge A_\xi Y)Z = (A_\xi Y, Z)A_\xi X - (A_\xi X, Z)A_\xi Y$. A equação de Codazzi é dada por

$$(\overline{R}(X, Y)\xi)^{\top} = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y, \tag{2.19}$$

onde por definição $(\nabla_X A_\xi)Y = \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi \nabla_X Y$. No caso em que $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante c, as equações de Gauss e Codazzi, respectivamente, reduzem-se a

$$R(X, Y)Z = c(X \wedge Y) + A_\xi \wedge A_\xi Y; \tag{2.20}$$

$$(\nabla_Y A_\xi)X = (\nabla_X A_\xi)Y. \tag{2.21}$$

Seja $f : M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Chamamos de *curvaturas principais* de M no ponto x os autovalores de A_x e de *vetores principais* os autovetores de A_x associados. O Lema seguinte, afirma que as curvaturas principais variam continuamente em M.

Lema 2.4.2. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana e A_x um operador simétrico variando diferencialmente com $x \in M$. Então existem n funções contínuas $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_n$ tais que, para cada x, $\{\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)\}$ são os autovalores de A_x.*

2.5 Índices nulidade e nulidade relativa

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}$ definimos em cada ponto $x \in M$ dois subespaços de T_xM,

$$R_x = \{X \in T_xM : R(X,Y) = \overline{R}(X,Y) \ \forall \ Y \in T_xM\} \tag{2.22}$$

chamado espaço nulidade do tensor curvatura R de M no ponto $x \in M$ e

$$\Delta_x = \{X \in T_xM : \alpha(X,Y) = 0 \ \forall \ Y \in T_xM\} \tag{2.23}$$

chamado espaço nulidade relativa de $x \in M$. Definimos o *índice nulidade de f $\mu(x)$* como a dimensão de R_x e o *índice nulidade relativa de f $v(x)$* como a dimensão de Δ_x. Usando a equação de Gauss, vemos que $\Delta_x \subset R_x$; logo $v(x) \leq \mu(x)$.

Dizer que $\alpha(X,Y) = 0 \ \forall \ Y \in T_xM$ é a mesma coisa de dizer que $AX = 0$, portanto o espaço nulidade relativa pode ser dado por

$$\Delta_x = \ker(A_x) = \{X \in T_xM : AX = 0\}.$$

Lema 2.5.1. *Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+k}(c)$ uma hipersuperfície, onde $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante c. Se posto de $(A_x) \geq 2$ então*

$$\ker(A_x) = \{X \in T_xM : R(X,Y) = c(X \wedge Y) \forall Y \in T_xM\},$$

ou seja, o espaço nulidade relativa coincide com o espaço nulidade.

Demonstração. Dado $X \in \ker(A_x)$ temos $AX = 0$ e portanto $AX \wedge AY = 0$. Pela equação de Gauss temos $R(X,Y) = c(X \wedge Y) + AX \wedge AY = c(X \wedge Y)$, assim $X \in R_x$. Inversamente seja $X \in R_x$ e tome $Y \in T_xM$ tal que $AY \neq 0$ e $g(AX, AY) = 0$, isto é possível pois posto de A_x maior ou igual a dois. Por hípote $AX \wedge AY = 0$, isto implica que $g(AX, AX)AY = g(AY, AX)AX = 0$, mas $AY = 0$, portanto $g(AX, AX) = 0$ o que só é possível se $AX = 0$, ou seja, $X \in \ker A_x$. □

2.6 Aplicação normal de Gauss

Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+1)}$ uma imersão isométrica, onde M é uma variedade orientável. Podemos então, escollher um campo normal unitário $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$. Definimos a *aplicação normal de Gauss* $\phi : M \longrightarrow S^n$ de M na esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$ pela regra $\phi(x) = \xi_x$.

Queremos agora calcular a aplicação diferencial de ϕ no ponto x. Para isto, observemos que o isomorfismo linear (via transporte paralelo em $\mathbb{R}^{n+1}$) P_x de $T_x\mathbb{R}^{(n+1)}$ em $T_{\phi(x)}\mathbb{R}^{n+1}$ leva f_*T_xM em $T_{\phi(x)}S^n$. Como a discussão é local, numa vizinha U de x onde f é um mergulho podemos identificar T_xM com f_*T_xM e assim dizer que T_xM e $T_{\phi(x)}S^n$ são paralelos, assim podemos identificá-los e vemos que

$$\phi_*(X) = (\phi \circ c)'(0) = \bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X \tag{2.24}$$

onde $c : I \longrightarrow M$ é uma curva diferenciável com $c(0) = x$ e $c'(0) = X$. Segue-se que $A_\xi = -\phi_*$.

Proposição 2.6.1. *Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica com M orientável. Se a aplicação normal de Gauss ϕ é um difeomorfismo, então f é um mergulho.*

Lema 2.6.2. *Uma hipersuperfície $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é plana se, e somente se, o posto da aplicação normal de Gauss é no máximo igual a 1.*

Demonstração. Num ponto $x \in M$ podemos diagonalizar o operador auto-adjunto A_ξ com relação a uma base ortonormal $X_1, \ldots, X_n$ de T_xM, de tal maneira que $A_\xi X_i = \lambda_i X_i$. A curvatura seccional do plano gerado por X_i e X_j é igual a

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \langle \alpha(X_i, X_i), \alpha(X_j, X_j) \rangle - \langle \alpha(X_i, X_j), \alpha(X_i, X_j) \rangle \\ &= \langle A_\xi X_i, X_i \rangle \langle \alpha A_\xi X_j, X_j \rangle - \langle A_\xi X_i, X_j \rangle \langle A_\xi X_i, X_j \rangle \\ &= \lambda_i \lambda_j. \end{aligned}$$

Portanto $K_{ij} = 0 \Leftrightarrow$ no máximo um dos $\lambda_i' s \neq 0 \Leftrightarrow A_\xi$ tem posto no máximo igual a um. Por outro lado, vimos que a derivada da aplicação normal de Gauss ϕ é $\phi_* = -A_\xi$; logo $K_\sigma = 0$ para todo plano σ se, e somente se, o posto da aplicação normal de Gauss é no máximo igual a 1. $\square$

2.7 Recobrimento Riemanniano

Definição 2.7.1. Uma aplicação diferenciável $P : \widetilde{M} \longrightarrow M$ é um recobrimento de M se para cada $x \in M$ existe uma vizinhança conexa U tal que P aplica cada componente de $P^{-1}(U)$ difeomorficamente sobre U.

As propriedades topológicas ou propriedades de variedades atribuidas ao recobrimento $P : \widetilde{M} \longrightarrow M$ referem-se às propriedades da variedade recobrimento $\widetilde{M}$.

Teorema 2.7.2. *Toda variedade conexa tem um recobrimento simplesmente conexo.*

Um recobrimento simplesmente conexo é chamado *recobrimento universal*.

Definição 2.7.3. Um recobrimento Riemanniano $P : \widetilde{M} \longrightarrow M$ é um recobrimento entre variedades Riemannianas que é uma isometria local.

Observações

1. Se $P : \widetilde{M} \longrightarrow M$ é um recobrimento de uma variedade Riemanniana M com métrica g, então atribuindo a $\widetilde{M}$ a métrica induzida, P torna-se um recobrimento Riemanniano, ou seja, uma isometria local. De fato, definimos a métrica Riemanniana em $\widetilde{M}$ por

$$\tilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})_{\tilde{x}} = g(P_*\widetilde{X}, P_*\widetilde{Y})_{P(\tilde{x})} \qquad \forall\ \tilde{x} \in \widetilde{M}, \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in T_{\tilde{x}}\widetilde{M}. \tag{2.25}$$

   Por definição P é um difeomorfismo local, em particular P_* é injetiva e por 2.25 preserva a métrica.

2. Se $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície, então $f \circ P : \widetilde{M}^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, por ser composição de duas imersões isométricas e por manter codimensão 1, também é uma hipersuperfície.

Denotando o tensor segunda forma fundamental de $f \circ P$ por $\widetilde{A}$ para algum campo normal unitário ξ. A proposição seguinte mostra a relação entre A e $\widetilde{A}$.

Proposição 2.7.4. *Em cada $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, $\widetilde{A}_{\tilde{x}} = \pm P_*^{-1}(A_{P(\tilde{x})}P_*)$.*

Demonstração. Seja $\widetilde{X}$ um campo vetorial em $\widetilde{M}$. Pela fórmula de Weingarten para hipersuperfícies, temos

$$\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\tilde{\xi} = -(f \circ P)_*(\widetilde{A}\widetilde{X}) = -f_*(P_*(\widetilde{A}\widetilde{X})),$$

onde $\tilde{\xi}$ é um campo vetorial normal unitário em $\widetilde{M}$ sobre $f \circ P$. Por outro lado, todo campo vetorial X de M é escrito localmente de maneira única como $P_*(\widetilde{X})$ para algum $\widetilde{X} \in T\widetilde{M}$, pois P é uma isometria local.

Consideremos, ξ um campo vetorial normal unitário em M sobre f, temos

$$\overline{\nabla}_{P_*\widetilde{X}}\xi = -f_*A(P_*(\widetilde{X})).$$

Como $(f \circ P)_*(T_{\tilde{x}}\widetilde{M}) = f_*(P_*(T_{\tilde{x}}\widetilde{M})) = f_*(T_{P(\tilde{x})}M)$, temos $\tilde{\xi}_{\tilde{x}} = \pm\xi_{P(\tilde{x})}$. Portanto, para cada $\tilde{x} \in \widetilde{M}$,

$$(\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\tilde{\xi})_{\tilde{x}} = (\overline{\nabla}_{P_*\widetilde{X}} \pm \xi)_{P(\tilde{x})} = \pm(\overline{\nabla}_{P_*\widetilde{X}}\xi)_{P(\tilde{x})},$$

ou seja, $f_*(P_*(\widetilde{A}_{\tilde{x}}\widetilde{X})) = \pm f_*A_{P(\tilde{x})}(P_*(\widetilde{X}))$. Como f_* é injetora, temos $P_*(\widetilde{A}_{\tilde{x}}\widetilde{X}) = \pm A_{P(\tilde{x})}(P_*(\widetilde{X}))$, $\forall \widetilde{X} \in T\widetilde{M}$. E, sendo P_* injetora, temos

$$\widetilde{A}_{\tilde{x}}\widetilde{X} = \pm P_*^{-1}(A_{P(\tilde{x})}(P_*\widetilde{X}))$$

$\square$

Capítulo 3

VARIEDADES INTEGRAIS E FOLHEAÇÕES

3.1 Distribuição tangente e o Teorema de Frobenius

Definição 3.1.1 (Distribuição)**.** Uma distribuição de dimensão k ou um campo de k-planos em uma variedade diferenciável M de dimensão n é uma correspondência D que associa a cada ponto $x \in M$ um subespaço vetorial $D_x \subset T_xM$ de dimensão k.

Dizemos que D é diferenciável se a união de todos esses subespaços forma um subfibrado diferenciável $D = \bigcup_{x \in M} D_x \subset TM$, ou equivalentemente, se para cada ponto $x \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ com campos vetoriais diferenciáveis $Y_1, Y_2, ..., Y_k : U \longrightarrow TM$ tais que $Y_1|_q, ..., Y_k|_q$ formam uma base para D_q em cada $q \in U$. Neste caso, dizemos que D é gerada localmente por $Y_1, ..., Y_k$.

Dizemos que D é involutiva se, para qualquer par de seções locais diferenciáveis de D (ou seja, campos de vetores X, Y definidos em um conjunto aberto de M tais que $X_x, Y_x \in D_x \; \forall \; x$) temos que $[X, Y]$ também é uma seção local de D $([X, Y]_x \in D_x \; \forall x)$.

Definição 3.1.2 (Variedade Integral)**.** Seja $D \subset TM$ uma distribuição diferenciável em M. Uma subvariedade imersa $N \subset M$ é chamada variedade integral de D se $T_xN = D_x \; \forall \; x \in N$.

Se cada ponto x de M está contido em uma variedade integral de D, dizemos que D é uma distribuição integrável.

Proposição 3.1.3. *Toda distribuição integrável é involutiva.*

Demonstração. Seja $D \subset TM$ uma distribuição integrável. Suponha X e Y seções diferenciáveis locais de D definidas em algum subconjunto aberto $U \subset M$. Seja x qualquer ponto em U e seja N uma variedade integral de D que contem x. Então X e Y são tangentes a N. Pelo Corolário 1.4.17 $[X, Y]$ é tangente a N e portanto, $[X, Y]_x \in D_x$. $\square$

Lema 3.1.4. *Seja $D \in TM$ uma distribuição. Se em uma vizinhança de todo ponto de M existe um base ortonormal local diferenciável $V_1, ..., V_k$ para D tal que, $[V_i, V_j]$ é uma seção local de D para cada $i, j = 1, ..., k$, então D é involutiva.*

Demonstração. Suponha que a hipótese seja verdadeira e que X e Y são seções locais de D em algum subconjunto $U \subset M$. Dado $x \in M$, escolha uma base ortonormal local $V_1, ..., V_k$ satisfazendo as hipóteses em uma vizinhança de x e escreva $X = \sum X^i V_i$ e $Y = \sum Y^j V_j$, temos

$$\begin{aligned} [X,Y] &= [X = \sum X^i V_i, Y = \sum Y^j V_j] \\ &= \sum_{i,j=1} X^i Y^j [V_i, V_j] + \sum_{i,j=1} (X^i V_i Y^j) V_j - \sum_{i,j=1} (Y^j V_j X^i) V_i. \end{aligned}$$

Disto segue que esta expressão é uma seção de D. $\square$

Dada uma distribuição diferenciável $D \subset TM$, dizemos que a carta diferenciável (U, φ) em M é plana em D se $\varphi(U)$ é um produto de conjuntos conexos abertos $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e para todo $x \in U$, D é gerado pelos k primeiros vetores coordenada $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}$. Dizemos que D é completamente integrável se existe uma carta plana em D em uma vizinhança de cada ponto $x \in M$. Cada *slice* da forma $x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n$,onde $c^{k+1}, \ldots, c^n$ são constantes, é uma variedade integral de D. Disto segue que, se D é completamente integrável, cada ponto $x \in M$ está numa variedade integral de D, portanto, D é integrável e pela Proposição 3.1.3 D é involutiva. A recíproca é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.1.5 (Frobenius)**.** *Toda distribuição involutiva é completamente integrável.*

Proposição 3.1.6 (Estrutura local de variedades integrais)**.** *Seja D uma distribuição involutiva de dimensão k em uma variedade diferenciável M e seja (U, φ) uma carta plana de D. Se N é qualquer variedade integral de D, então $N \cap U$ é uma união disjunta enumerável de subconjuntos abertos de k-slices paralelos de U, cada qual aberto em N e mergulhado em M.*

Demonstração. Como a aplicação inclusão $\iota : N \longrightarrow M$ é contínua, $N \cap U = \iota^{-1}(U)$ é aberto em N e, portanto, consiste de uma união enumerável de componentes conexas, cada uma das quais é um subconjunto aberto em N.

Seja V qualquer componente de $N \cap U$, vamos mostrar primeiro que V está contido em um único *slice* de U. Uma vez que $dx^{k+1}, \ldots, dx^n$ definem formas locais para D, segue que a restrição destas 1-formas a V são zero. Como V é conexa, isto implica que $x^{k+1}, \ldots, x^n$ são constantes em V e, portanto, V encontra-se em um único *k-slice* S de U. Como S está mergulhada em M, a inclusão $V \hookrightarrow M$ é também diferenciável em S pelo Corolário 1.4.15.

Assim, a inclusão $V \hookrightarrow S$ é uma imersão injetiva entre variedades de mesma dimensão e, portanto, um difeomorfismo local, uma aplicação aberta, e um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto de S. A aplicação inclusão $V \hookrightarrow M$ é uma composição de mergulhos diferenciáveis $V \hookrightarrow S \hookrightarrow M$, deste modo é um mergulho diferenciável. $\square$

Definição 3.1.7. Seja M uma variedade riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇. Uma distribuição D em M é dita totalmente geodésica ou auto-paralela, se $\nabla_X Y \in D$ para quaisquer $X, Y \in D$. Se $\nabla_X Y \in D$ para quaisquer $X \in TM$ e $Y \in D$ a distribuição é chamada paralela.

3.2 Folheações

Definição 3.2.1. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k e classe C^r em M está definida por uma coleção de cartas locais

$$M \supset U_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{R}^n \qquad i \in I$$

da variedade tais que:

(1) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$;

(2)Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $h_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ tem a forma

$$h_{ji}(x,y) = (h^1(x,y), h^2(y)) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

e são de classe C^r.

As componentes conexas de $\varphi^{-1}(x, y_0), y_0$ constante, são denominadas placas de U_i. Elas são subvariedades mergulhadas de U_i de dimensão k. Pela condição (2) se $\alpha_i \subset U_i$ e $\alpha_j \subset U_j$ são placas, então ou $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$, ou $\alpha_i \cap \alpha_j$ é aberto em α_i e α_j.

Se $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ é a projeção $\pi(x,y) = x$, definimos $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ por $f_i = \pi \circ \alpha_i$. As placas de U_i são então as componentes conexas de $f_i^{-1}(y_0), y_0 \in \mathbb{R}^{n-k}$. Assim podemos tomar a seguinte definição equivalente:

Definição 3.2.2. Uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k e de classe C^r está definida por uma coleção de submersões

$$f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

tais que:

(1) Para todo $i \in I$, U_i é aberto em M e $\bigcup_{i\in I} U_i = M$;

(2) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ existem homeomorfismos de classe C^r $g_{ij} : \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ tais que $f_j = g_{ij} \circ f_i$ nos pontos de $U_i \cap U_j$.

Uma folha de $\mathcal{F}$ é um subconjunto conexo que é união maximal de placas de $\mathcal{F}$, ou seja, se L é uma folha e α é uma placa com $\alpha \cap L \neq \emptyset$ então $\alpha \subset L$. Segue da definição que toda folha é uma subvariedade imersa de M de dimensão k e que M é a união disjunta das folhas de $\mathcal{F}$. Assim podemos tomar a seguinte definição equivalente:

Definição 3.2.3. Uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r e dimensão k em uma variedade diferenciável M de dimensão n é uma decomposição de M em subvariedades conexas imersas de dimensão k com as seguintes propriedades:

(1) Dado $x \in M$ existe uma única subvariedade da decomposição acima que passa por x. Esta subvariedade é chamada de folha de $\mathcal{F}$ por x e será denotada por $L(x)$;

(2) Dado $x_0 \in M$ existe uma carta (U, φ) tal que $\varphi(U)$ é um produto de conjuntos abertos e conexos $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e cada folha da folheação intersepta U ou no conjunto vazio ou em uma união enumerável de k-slices da forma $x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n$.

Exemplo 3.2.4 (Exemplos de Folheações)**.**

(a) A coleção de todos os subespaços k-dimensionais afins de $\mathbb{R}^n$ paralelos ao $\mathbb{R}^k$ é uma folheação de dimensão k de $\mathbb{R}^n$;

(b) A coleção de todos raios abertos da forma $\{\lambda x_0 : \lambda > 0\}$ é uma folheação de dimensão 1 de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$;

(c) A coleção de todas as esferas centradas em 0 é uma folheação $(n-1)$-dimensional de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$;

(d) Se M e N são variedades diferenciáveis conexas, a coleção de subconjuntos da forma $\{q\} \times N$ com q variando sobre M forma uma folheação de $M \times N$, onde cada uma das folhas é difeomorfa a N. Por exemplo, a coleção de todos os círculos da forma $S^1 \times \{q\} \subset T^2$, onde $q \in S^1$ produz uma folheação do toro T^2;

(e) Sejam M e N subvariedades diferenciáveis de dimensão m e n, respectivamente, e $f : M \longrightarrow N$ uma submersão, pelo teorema local das submersões as componentes conexas das subvariedades $f^{-1}(y)$ definem uma folheação de codimensão n. Neste caso todas as folhas de $\mathcal{F}$ são mergulhadas.

O principal fato sobre folheações é que elas estão em uma correspondência injetiva com distribuições involutivas. Uma direção, expressa no próximo Lema é uma consequência direta da definição.

Lema 3.2.5. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma variedade diferenciável M. A coleção de espaços tangentes das folhas de $\mathcal{F}$ forma uma distribuição involutiva em M.*

O teorema de Frobenius nos permite concluir a seguinte recíproca, que é mais profunda que o Lema anterior.

Teorema 3.2.6 (Teorema global de Frobenius)**.** *Seja D uma distribuição involutiva em uma variedade diferenciável M. A coleção de todas as variedades integrais conexas maximais de D forma uma folheação de M.*

Este teorema é uma consequência do seguinte Lema.

Lema 3.2.7. *Suponha $D \subset TM$ uma distribuição involutiva e seja $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma coleção de variedades integrais conexas de D com um ponto em comum. Então cada $N = \bigcup_\alpha N_\alpha$ tem uma única estrutura de variedade, fazendo de N uma variedade integral conexa de D em que cada N_α é uma subvariedade aberta.*

Prova do teorema global de Frobenius. Para cada $p \in M$, seja L_p a união de todas as variedades integrais conexas de D contendo p. Pelo Lema anterior, L_p é uma variedade integral conexa de D contendo p que é claramente maximal. Se quaisquer duas variedades integrais maximais conexas L_p e $L_{p'}$ se intersetam, sua união $L_p \cup L_{p'}$ é uma variedade integral contendo p e p', pela maximalidade $L_p = L_{p'}$. Assim, duas variedades maximais ou são disjuntas ou são idênticas.

Se (U, φ) é qualquer carta plana de D, então $L_p \cap U$ é uma união enumerável de subconjuntos abertos de *slices*, pela Proposição (3.1.6). Para qualquer tal *slice* S, se $L_p \cap S$ não é o vazio nem todo S, então $L_p \cup S$ é uma variedade integral conexa contendo L_p propriamente, o que contradiz a maximalidade de L_p. Portanto $L_p \cap U$ é precisamente a união enumerável de *slices*, assim a coleção $\{L_p : p \in M\}$ é a folheação desejada. $\square$

3.3 Teorema de Ferus

Considere uma variedade Riemanniana M^{2n} e D uma distribuição diferenciável definida em um aberto $U \subset M$ que é involutiva e possui folhas totalmente geodésicas. Defina a distribuição $D^{\perp}$ em U atribuindo para cada $x \in U$ o complemento ortogonal $D_x^{\perp}$ de D_x em T_xM. Associamos para cada $X \in D$ a aplicação

$$\begin{aligned} C_X \quad : \quad & D^{\perp} \longrightarrow D^{\perp} \\ & Y \longrightarrow C_X Y = -P(\nabla_Y X), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $P : TU \longrightarrow D^{\perp}$ é a projeção ortogonal. A aplicação

$$\begin{aligned} C \quad : \quad & D \times D^{\perp} \longrightarrow D^{\perp} \\ & (X, Y) \longrightarrow C(X, Y) = C_X Y \end{aligned}$$

é um campo tensor pois,

$$\begin{aligned} C(fX, Y) = C_{fX} Y &= -P(\nabla_Y fX) \\ &= -P(f\nabla_Y X + (Yf)X) \\ &= -P(f\nabla_Y X) \\ &= -fP(\nabla_Y X) \\ &= fC_X Y \\ &= fC(X, Y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C(X, fY) = C_X fY &= -P(\nabla_{fY} X) \\ &= -fP(\nabla_Y X) \\ &= fC_X Y \\ &= fC(X, Y) \end{aligned}$$

para todo $f \in \mathfrak{F}(U)$. Observe que $D^{\perp}$ é involutiva se, e somente se, C_X é simétrica para todo $X \in D$. Neste caso, C_X é operador forma na direção de X da inclusão das folhas de $D^{\perp}$ em M.

Sejam $Z \in D$ e $Y \in D^{\perp}$. Como $\nabla_Z W \in D$ para todo $W \in D$, temos que

$$0 = Zg(Y, W) = g(\nabla_Z Y, W) + g(\nabla_Z W, Y) = g(\nabla_Z Y, W)$$

portanto

$$\nabla_Z Y \in D^{\perp} \tag{3.2}$$

para todo $Z \in D$ e $Y \in D^{\perp}$. Em particular, definimos a derivada covariante de C_X por

$$(\nabla_Z C_X)Y = \nabla_Z C_X Y - C_X \nabla_Z Y. \tag{3.3}$$

Proposição 3.3.1. *O operador $C_{\gamma'}$ ao longo de uma geodésica γ contida numa folha de D, satisfaz a seguinte equação diferencial*

$$\frac{D}{dt} C_{\gamma'} = C_{\gamma'}^2 + P(R(.,\gamma')\gamma'). \tag{3.4}$$

Demonstração. Seja $Y \in TM$ e $Z \in D$. Por (3.2) temos $\nabla_Z P(Y) \in D^{\perp}$. Assim $\nabla_Z(Y - P(Y)) \in D$. Além disso

$$P(\nabla_Z X) = P(\nabla_Z(Y - P(Y))) + \nabla_Z P(Y) = \nabla_Z P(Y) \tag{3.5}$$

Sejam $X \in D$ uma extensão local de γ' e $Y \in D^{\perp}$. Ao longo de γ, por (3.5) e por (3.3), temos que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X C_X)Y &= \nabla_X C_X Y - C_X \nabla_X Y \\
&= \nabla_X(-P(\nabla_Y X)) + P(\nabla_{\nabla_X Y} X) \\
&= -P(\nabla_X \nabla_Y X) + P(\nabla_{\nabla_X Y} X) \\
&= P(R(Y,X)X - \nabla_Y \nabla_X X + \nabla_{[Y,X]} X) + P(\nabla_{\nabla_X Y} X) \\
&= P(R(Y,X)X) - P(\nabla_Y \nabla_X X) + P(\nabla_{\nabla_Y X} X - \nabla_{\nabla_X Y} X) + P(\nabla_{\nabla_X Y} X) \\
&= P(R(Y,X)X) + P(\nabla_{\nabla_Y X} X)
\end{aligned}$$

onde $P(\nabla_Y \nabla_X X) = -C_{\nabla_X X} Y = 0$ pois $\nabla_X X = 0$ ao longo de γ. Sendo

$$P(\nabla_{\nabla_Y X} X) = -CXP(\nabla_Y X) = -C_{\gamma'}(-C_{\gamma'} Y) = C_{\gamma'}^2 Y,$$

obtemos que

$$\frac{D}{dt} C_{\gamma'} Y = C_{\gamma'}^2 Y + P(R(Y,\gamma')\gamma')$$

□

Definição 3.3.2. Seja $f : M^n \longrightarrow \widetilde{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Denotaremos por v_0 o índice de nulidade relativa mínima de f, definido como

$$v_0 = \min_{x \in M} v(x). \tag{3.6}$$

onde $v(x)$ é o índice de nulidade relativa de f no ponto $x \in M$.

Na proposicão seguinte, apresentamos propriedades satisfeitas pelo índice de nulidade relativa.

Proposição 3.3.3. *Para uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow \widetilde{M}^{n+k}$ temos*

(i) A distribuição nulidade relativa $x \mapsto \Delta_x$ é diferenciável em qualquer subconjunto aberto de M onde v é constante;

(ii) O conjunto onde v atinge seu valor mínimo é aberto em M.

Lema 3.3.4. *Seja $f : M^n \longrightarrow \widetilde{M}^{n+k}(c)$ uma imersão isométrica. Para cada $W \in \Delta^{\perp}(\gamma(0))$, existe um único campo vetorial Y sobre $\gamma|_{[0,b)}$ tal que:*

(a) $Y(0) = W$;

(b) $\frac{D}{dt}Y + C_{\gamma'}Y = 0,\ 0 \leq t < b$ e Y se estende diferenciavelmente a $t = b$.

Demonstração. Segue do Teorema de Existência e Unicidade da Teoria das Equacões Diferenciais Ordinárias que os itens (1) e (2) são válidos. Desta forma, nos resta mostrar que Y se estende diferenciavelmete a $t = b$. Calculando a segunda derivada temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D^2}{dt^2}Y + \frac{D}{dt}C_{\gamma'}Y \\ &= \frac{D^2}{dt^2}Y + (\frac{D}{dt}C_{\gamma'})Y + C_{\gamma'}\frac{D}{dt}Y \\ &= \frac{D^2}{dt^2}Y + (\frac{D}{dt}C_{\gamma'})Y - C_{\gamma'}^2Y \\ &= \frac{D^2}{dt^2}Y + P(R(Y,\gamma')\gamma') \\ &= \frac{D^2}{dt^2}Y + cY. \end{aligned}$$

onde a penúltima equação segue da Proposição 3.3.1. Isto nos diz que Y é solução de uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes em $[0, b)$ e assim estende-se para $t = b$. $\square$

Finalmente, enunciamos e demonstramos o

Teorema 3.3.5 (Teorema de Ferus). *Sejam $f : M^n \longrightarrow \widetilde{M}^{n+k}(c)$ uma imersão isométrica e $U \subset M$ um conjunto aberto com índice nulidade relativa constante igual a m. Então, em U, temos:*

(i) A distribuição de nulidade relativa Δ é diferenciável e integrável e suas folhas são totalmente geodésicas em M^n e $\widetilde{M}^{n+k}$;

(ii) Se $\gamma[0,b] \longrightarrow M$ é uma geodésica tal que $\gamma([0,b])$ está contida em uma folha de Δ, então $v(\gamma(b)) = m$;

(iii) Se M é completa, então as folhas da distribuição com nulidade relativa mínima são completas.

Demonstração. Dados $X, Y \in \Delta$ e $Z \in TM$ temos

$$(\nabla_Z A)(X,Y) = \nabla_Z A(X,Y) - A(\nabla_Z X, Y) - A(X, \nabla_Z Y) = 0. \tag{3.7}$$

Assim, da equação de Codazzi segue que

$$0 = (\nabla_X A)(Z,Y) = -A(Z, \nabla_X Y). \tag{3.8}$$

Portanto, $\nabla_X Y \in \Delta$. Analogamente, $\nabla_Y X \in \Delta$, o que mostra que $[X,Y] \in \Delta$, logo Δ é involutiva. Pelo Teorema de Frobenius 3.1.5 segue que Δ é completamente integrável. Além disso,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) = \nabla_X Y \in \Delta,$$

o que mostra de as folhas são totalmente geodésicas em M^n e $\widetilde{M}^{n+k}$. Portanto, está demonstrado o item (i). Seja L uma folha de Δ contendo $\gamma([0,b])$ e Z um campo de vetores paralelo ao longo de γ, tal que $Z(\gamma(b)) \in \Delta_{\gamma(b)}$. É suficiente mostrar que $Z(\gamma(0)) \in \Delta_{\gamma(0)}$. Daí teremos que $v(\gamma(0)) \geq v(\gamma(b))$ e assim $v(\gamma(0)) = v(\gamma(b))$. Sejam X uma extensão de γ' em Δ e Y como no Lema 3.3.4. Temos

$$\begin{aligned}
\nabla^{\perp}_{\gamma'} \alpha(Y,Z) &= (\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) + \alpha(\frac{D}{dt}Y, Z) \\
&= (\nabla^{\perp}_Y \alpha)(X,Z) + \alpha(\frac{D}{dt}Y, Z) \\
&= -\alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha(\frac{D}{dt}Y, Z) \\
&= \alpha(C_{\gamma'} Y + \frac{D}{dt}Y, Z) = 0.
\end{aligned}$$

Em particular $\|\alpha(Y,Z)\|$ é constante ao longo de γ e se anula em $\gamma(b)$. De fato, com $Z(\gamma(b)) \in \Delta$ temos $A(Y(\gamma(0)), Z(\gamma(0))) = 0$ e, portanto $Z(\gamma(0)) \in \Delta_{\gamma(0)}$. Isto prova o item (ii). O item (iii) segue diretamente do item (ii). $\square$

Capítulo 4
VARIEDADES DE KÄHLER

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão real $2m$. Dizemos que um atlas diferenciável $\mathcal{A}$ de M é *holomorfo* se para quaisquer duas cartas coordenadas $z : U \longrightarrow U' \subset \mathbb{C}^m$ e $w : V \longrightarrow V' \subset \mathbb{C}^m$ em $\mathcal{A}$, a aplicação mudança de coordenadas $z \circ w^{-1}$ é holomorfa no seu domínio de definição. Qualquer *atlas holomorfo* determina um único *atlas maximal holomorfo*. Um atlas maximal holomorfo é chamado *estrutura holomorfa*.

Definição 4.0.6. Uma variedade complexa M de dimensão complexa n é uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$ equipada com uma estrutura holomorfa.

Uma variedade complexa de dimensão complexa 1 é chamada *superfície de Riemann* ou *curva complexa*.

Dizemos que a aplicação $f : M \longrightarrow N$ entre variedades complexas é holomorfa se, para quaisquer cartas coordenadas holomorfas $z : U \longrightarrow U' \subset \mathbb{C}^m$ de M e $w : V \longrightarrow V' \subset \mathbb{C}^m$ de N, a aplicação $w \circ f \circ z^{-1}$ é holomorfa no seu domínio de definição. Dizemos que f é biholomorfa se é bijetiva e f, f^{-1} são holomorfas.

As cartas coordenadas da estrutura holomorfa são chamadas *cartas coordenadas holomorfas de M*. As aplicações mudança de coordenadas $z \circ w^{-1}$ de cartas holomorfas são biholomorfas. Portanto, elas são difeomorfismos e os determinantes de suas derivadas, vistas como aplicações $\mathbb{R}$-lineares, são positivos. Disto segue que uma estrutura holomorfa determina uma orientação de M.

Por definição, uma variedade complexa M de dimensão complexa n é naturalmente uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$. Portanto, como uma variedade diferenciável, para todo $x \in M$ consideramos o espaço tangente T_xM de M no ponto x chamado *espaço tangente real de M*. Equivalentemente, definimos fibrado vetorial real, campo vetorial real etc.

Há um conceito muito importante, o de *estrutura quase complexa*, que daremos agora e após alguns resultados chegaremos a uma definição equivalente de variedade complexa.

Definição 4.0.7. Seja M uma variedade diferenciável. Uma estrutura quase complexa em M é um campo tensor J do tipo $(1,1)$ que é, em todo ponto x de M, um endomorfismo do espaço tangente T_xM tal que $J^2 = -I$, onde I é a transformação identidade de T_xM. Uma variedade M com uma estrutura quase complexa J é chamada variedade quase complexa.

Proposição 4.0.8. *Toda variedade complexa M admite uma estrutura quase complexa canônica J.*

Demonstração. Seja M uma variedade complexa de dimensão complexa m vamos definir em M uma estrutura quase complexa J da seguinte forma: para $X \in T_xM$ e (U, ϕ) uma carta holomorfa de M com U contendo x, façamos

$$J_U(X) = (\phi)_*^{-1} \circ J_m \circ \phi_*(X) \qquad J_m(z) = iz.$$

Se tomarmos (V, ψ) outra carta holomorfa com V contendo x, então $\psi \circ \phi^{-1}$ é holomorfa e $\psi = (\psi \circ \phi^{-1}) \circ \phi$, assim

$$\begin{aligned}
J_V(X) &= \psi_*^{-1} \circ J_m \circ \psi_*(X) \\
&= \psi_*^{-1} \circ J_m \circ ((\psi \circ \phi^{-1}) \circ \phi)_*(X) \\
&= \psi_*^{-1} \circ J_m \circ \psi_* \circ \phi_*^{-1} \circ \phi_*(X) \\
&= \psi_*^{-1} \circ \psi_* \circ \phi_*^{-1} \circ J_m \circ \phi_*(X) \\
&= \psi_*^{-1} \circ \psi_* \circ \phi_*^{-1} \circ J_m \circ \phi_*(X) \\
&= J_U(X).
\end{aligned}$$

Dessa forma, J_U não depende de U, está bem definido o tensor J. Claramente $J^2 = -I$ e portanto J é uma estrutura quase complexa em M. □

Uma variedade complexa é assim, uma variedade quase complexa. A estrutura quase complexa definida na proposição acima é chamada *estrutura quase complexa canônica*.

Agora, seja (M, J) uma variedade complexa, vamos diagonalizar o endomorfismo J. Para isto, temos que complexificar o espaço tangente T_xM em cada ponto $x \in M$. Vamos definir o fibrado complexificado por

$$TM^{\mathbb{C}} = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Vamos estender também todos os endomorfismos reais e operações diferenciais de TM para $TM^{\mathbb{C}}$ por $\mathbb{C}$-linearidade. Sejam $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$ os autofibrados de $TM^{\mathbb{C}}$ correspondendo aos autovalores i e $-i$ de J, respectivamente. Com estas considerações temos o seguinte Lema.

Lema 4.0.9. *Para uma variedade quase complexa (M, J) temos*

$$T^{1,0}M = \{X - iJX | X \in TM\}, \qquad T^{0,1}M = \{X + iJX | X \in TM\}$$

e $TM^{\mathbb{C}} = [T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$

$T^{1,0}M$ é chamado *fibrado tangente holomorfo de M* e $T^{0,1}M$ é chamado *fibrado tangente anti-holomorfo de M*.

O famoso *Teorema de Newlander-Nirenberg* que é uma espécie de recíproca da proposição acima, pode ser declarado como segue:

Teorema 4.0.10. *Seja (M, J) uma variedade quase complexa. A estrutura quase complexa J vem de uma estrutura complexa holomorfa se, e somente se, a distribuição $T^{0,1}M$ é integrável.*

Uma estrutura quase complexa resultante de uma estrutura holomorfa é chamada *estrutura complexa*.

Seja M uma variedade quase complexa com estrutura quase complexa J. A torsão de J é o campo tensor N do tipo $(1, 2)$, chamado *tensor de Nijenhuis* dado por

$$N(X, Y) = 2([JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]).$$

Definição 4.0.11. Seja (M, J) uma variedade quase complexa. Dizemos que J é uma estrutura integrável se $N \equiv 0$.

Proposição 4.0.12. *Seja J uma estrutura quase complexa em M^{2n}. As seguintes afirmações são equivalentes*

(a) J é uma estrutura complexa;

(b) $T^{0,1}M$ é integrável;

(c) $N = 0$.

Demonstração. a $\Leftrightarrow$ b segue diretamente do teorema de Newlander-Nirenberg.
b $\Leftrightarrow$ c Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $Z = [X + iJX, Y + iJY]$. Um cálculo simples nos dá $Z - iJZ = N(X,Y) - iJN(X,Y)$. Assim $Z \in T^{0,1}M \Leftrightarrow N(X,Y) = 0$, o que prova que $T^{0,1}M$ é integrável $\Leftrightarrow N = 0$. □

Pela Proposição anterior e pelo Tereoma de Newlander-Nirenberg (4.0.10) chegamos a seguinte definição equivalente de variedade complexa:

Definição 4.0.13. Uma variedade quase complexa com estrutura quase complexa integrável é uma variedade complexa.

Seja M uma variedade quase complexa com estrutura quase complexa J. Dizemos que uma métrica Riemanniana g é *compatível* com J se

$$g(JX, JY) = g(X,Y) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{4.1}$$

A métrica Riemanniana g compatível com uma estrutura complexa J é chamada *métrica Hermitiana* e M é chamada variedade *Hermitiana*. Toda variedade quase complexa M com uma métrica Riemanniana g admite uma métrica Hermitiana. Basta fazer

$$h(X,Y) = g(X,Y) + g(JX,JY) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

.

Proposição 4.0.14. *Seja M uma variedade quase complexa com estrutura quase complexa J. A métrica Riemanniana g de M é Hermitiana se, e somente se,* $g(X, JX) = 0$ *para todo X em TM.*

Demonstração. Suponha que g é Hermitiana, então

$$g(X, JX) = g(JX, J^2X) = -g(JX, X) = -g(X, JX)$$

disto segue que $g(X, JX) = 0$. Reciprocamente, suponha $g(X, JX) = 0 \ \forall \ X \in TM$, então

$$\begin{aligned} 0 = g(X+Y, J(X+Y)) &= g(X,JX) + g(X,JY) + g(Y,JX) + \\ &+ g(Y,JY) = g(X,JY) + g(Y,JX) \Rightarrow g(X,JY) = -g(Y,JX) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$g(JX, JY) = -g(Y, J^2X) = g(Y,X) = g(X,Y) \qquad \forall \ X, Y \in TM$$

logo g é Hermitiana. □

Lema 4.0.15. *Seja (M, g, J) uma variedade Hermitiana e ∇ a conexão de Levi-Civita, então*

(i) $(\nabla_Y J)JX = -J(\nabla_Y J)X \qquad \forall\ X, Y \in TM;$

(ii) $g((\nabla_Y)X, Z) = -g(X, (\nabla_Y J)Z) \qquad \forall\ X, Y, Z \in TM$

Demonstração. Derivando covariantemente $-X = J(JX)$ com respeito a Y temos

$$\begin{aligned} -\nabla_Y X &= \nabla_Y(J(JX)) \\ &= (\nabla_Y J)(JX) + J\nabla_Y JX \\ &= (\nabla_Y J)(JX) + J[(\nabla_Y J)X + J\nabla_Y X] \\ &= (\nabla_Y J)(JX) + J(\nabla_Y J)X - \nabla_Y X \end{aligned}$$

e daí $(\nabla_Y J)(JX) = -J(\nabla_Y J)X \qquad X, Y \in TM$. Está provado o item (i).

Para demonstrar o item (ii), vamos usar o fato de que $g(X, JX) = 0\ \forall\ X \in TM$. Deste modo,

$$\begin{aligned} Y(g(X, JX)) = 0 \Rightarrow g(\nabla_Y X, JX) + g(X, \nabla_Y JX) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow g(\nabla_Y X, JX) + g(X, (\nabla_Y J)X) + g(X, J\nabla_Y X) = 0. \end{aligned}$$

Como $g(X, J\nabla_Y X) = -g(JX, \nabla_Y X) = -g(\nabla_Y X, JX)$, segue que $g(X, (\nabla_Y J)X) = 0$. Em particular,

$$\begin{aligned} 0 &= g(X + Z, (\nabla_Y J)(X + Z)) \\ &= g(X, (\nabla_Y J)X) + g(X, (\nabla_Y J)Z) + g(Z, (\nabla_Y J)X) + g(Z, (\nabla_Y J)Z) \\ &= g(X, (\nabla_Y J)Z) + g(Z, (\nabla_Y J)X). \end{aligned}$$

Logo $g(X, (\nabla_Y J)Z) = -g(Z, (\nabla_Y J)X)$. Isto conclui o item (ii). □

Seja M uma variedade quase Hermitiana com métrica hermitiana g e estrutura quase complexa J. A 2-forma fundamental ω da variedade quase Hermitiana M é definida por

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y).$$

Definição 4.0.16. Uma métrica Hermitiana g em uma variedade quase complexa (M, J) é chamada métrica de Kähler se J é uma estrutura complexa e a 2-forma fundamental ω é fechada, isto é, $d\omega = 0$.

Definição 4.0.17. Uma variedade complexa com uma métrica de Käler é chamada variedade de Kähler.

Lema 4.0.18. *Seja g uma métrica Hermitiana em uma variedade quase complexa (M, J) com conexão de Levi-Civita ∇. Então J é integrável se, e somente se*

$$(\nabla_{JX}J)Y = J(\nabla_X J)Y \qquad \forall X, Y \in TM \tag{4.2}$$

Demonstração. Vamos fixar $x \in M$ e estender X e Y a campos vetoriais X e Y em M paralelos a conexão de Levi-Civita em x. Então podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}N(X,Y) &= [JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y] \\
&= \nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX - \nabla_X Y + \nabla_Y X - J\nabla_X JY + J\nabla_{JY}X \\
&\quad -J\nabla_{JX}Y + J\nabla_Y JX \\
&= (\nabla_{JX}JY - J\nabla_{JX}Y) - (\nabla_{JY}JX - J\nabla_{JY}X) \\
&\quad +(\nabla_Y X + J\nabla_Y JX) - (\nabla_X Y + J\nabla_X JY) \\
&= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J(\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)Y \\
&= ((\nabla_{JX}J)Y - J(\nabla_X J)Y) - ((\nabla_{JY}J)X - J(\nabla_Y J)X)
\end{aligned}$$

Provando assim que a equação acima implica que $N = 0$. Inversamente, suponha que $N = 0$ e denote $A(X, Y, Z) = g((\nabla_{JX}J)Y - J(\nabla_X J)Y, Z)$ então $A(X, Y, Z) = A(Y, X, Z)$. Além disso, A é anti-simétrica nas duas últimas variáveis, uma vez que pelo Lema (4.0.15) J e $\nabla_X J$ são anti-comutativos e o operador $\nabla_X J$ é anti-adjunto. A permutação circular nos dá

$$A(X, Y, Z) = -A(Y, Z, X) = A(Z, X, Y) = -A(X, Y, Z),$$

o que implica a equação acima. □

Lema 4.0.19. *Seja M uma variedade quase complexa com métrica hermitiana g e conexão de Levi-Civita ∇ então*

$$d\omega(X, Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z) + g((\nabla_Y J)Z, X) + g((\nabla_Z J)X, Y),$$
$$2g((\nabla_X J)Y, Z) = d\omega(X, Y, Z) - d\omega(X, JY, JZ) - \frac{1}{2}g(JN(Y, Z), X).$$

Demonstração. Para a 2-forma ω, a derivada exterior $d\omega$ é dada por

$$d\omega(X, Y, Z) = X\omega(Y, Z) - Y\omega(X, Z) + Z\omega(X, Y) - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X),$$

usando a definição de ω e a propriedades de ∇ temos

$$\begin{aligned}
d\omega(X,Y,Z) &= Xg(JY,Z) - Yg(JX,Z) + Zg(JX,Y) - \\
&\quad g(J[X,Y],Z) + g(J[X,Z],Y) - g(J[Y,Z],X) \\
&= g(\nabla_X JY,Z) + g(\nabla_X Z,JY) - g(\nabla_Y JX,Z) \\
&\quad -g(\nabla_Y Z,JX) + g(\nabla_Z JX,Y) + g(\nabla_Z Y,JX) \\
&\quad -g(J(\nabla_X Y - \nabla_Y X),Z) + g(J(\nabla_X Z - \nabla_Z X),Y) - g(J(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y),X) \\
&= [g(\nabla_X JY,Z) - g(J\nabla_X Y,Z)] + [-g(J\nabla_X Z,Y) + g(J\nabla_X Z,Y)] \\
&\quad +[-g(\nabla_Y JX,Z) + g(J\nabla_Y X,Z)] + [g(J\nabla_Y Z,X) - g(J\nabla_Y Z,X)] \\
&\quad +[g(\nabla_Z JX,Y) - g(J\nabla_Z X,Y)] + [-g(J\nabla_Z Y,X) + g(J\nabla_Z Y,X)] \\
&= g((\nabla_X J)Y,Z) - g((\nabla_Y J)X,Z) + g((\nabla_Z J)X,Y) \\
&= g((\nabla_X J)Y,Z) + g((\nabla_Y J)Z,X) + g((\nabla_Z J)X,Y).
\end{aligned}$$

Usando o lema acima, o caráter Hermitiano da métrica juntamente com a igualdade $\frac{1}{2}N(Y,Z) = (\nabla_{JY}J)Z - (\nabla_{JZ}J)Y + J(\nabla_Z J)Y - J(\nabla_Y J)Z$, obtemos

$$\begin{aligned}
d\omega(X,Y,Z) - d\omega(X,JY,JZ) &= g((\nabla_X J)Y,Z) + g((\nabla_Y J)Z,X) + g((\nabla_Z J)X,Y) \\
&\quad -g((\nabla_X J)JY,JZ) + g((\nabla_{JY} J)JZ,X) + g((\nabla_{JZ} J)X,JY) \\
&= g((\nabla_X J)Y,Z) - g((\nabla_X J)JY,JZ) - g((\nabla_{JY} J)JZ,X) \\
&\quad -g((\nabla_{JZ} J)X,JY) + g((\nabla_Z J)X,Y) + g((\nabla_Y J)Z,X) \\
&= g((\nabla_X J)Y,Z) + g(J(\nabla_X J)Y,JZ) + g(J(\nabla_{JY} J)Z,X) \\
&\quad +g((\nabla_{JZ} J)JY,X) - g((\nabla_Z J)Y,X) + g((\nabla_Y J)Z,X) \\
&= g((\nabla_X J)Y,Z) + g((\nabla_X J)Y,Z) - g((\nabla_{JY} J)Z,JX) \\
&\quad -g(J(\nabla_{JZ} J)Y,X) - g(J(\nabla_Z J)Y,JX) + g(J(\nabla_Y J)Z,JX) \\
&= 2g((\nabla_X J)Y,Z) + g(-(\nabla_{JY} J)Z + (\nabla_{JZ} J)Y \\
&\quad -J(\nabla_Z J)Y + J(\nabla_Y J)Z,JX) \\
&= 2g((\nabla_X J)Y,Z) + g(-\frac{1}{2}N(Y,Z),JX) \\
&= 2g((\nabla_X J)Y,Z) + \frac{1}{2}g(J^2N(Y,Z),JX) \\
&= 2g((\nabla_X J)Y,Z) + \frac{1}{2}g(JN(Y,Z),X)
\end{aligned}$$

Disto segue que $2g((\nabla_X J)Y,Z) = d\omega(X,Y,Z) - d\omega(X,JY,JZ) - \frac{1}{2}g(JN(Y,Z),X)$ $\square$

Teorema 4.0.20. *Uma métrica Hermitiana g em uma variedade quase complexa M é Kähler se, e somente se, J é paralelo com respeito a conexão de Levi-Civita de M.*

Demonstração. Primeiro vamos supor que J é paralelo, claramente N desaparece identicamente e pelo Lema acima $d\omega = 0$ e portanto g é uma métrica de Kähler. Reciprocamente, se g é uma métrica de Kähler temos por definição que $N = 0$ e $d\omega = 0$ e como pelo Lema acima

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) = d\omega(X, Y, Z) - d\omega(X, JY, JZ) - \frac{1}{2}g(JN(Y, Z), X)$$

Segue que $2g((\nabla_X J)Y, Z) = 0 \ \forall \ Z \in TM$ e portanto $\nabla J = 0$. □

Portanto uma variedade Hermitiana M é uma variedade de Kähler se, e somente se, a estrutura quase complexa J de M é paralela.

Para o espaço real tangente $T_x M$ de uma variedade de Kähler M (de dimensão complexa n) no ponto x a conexão de Levi-Civita e o tensor curvatura em $\mathfrak{X}(M)$ são definidos, considerando M como uma variedade Riemanniana. Como J é paralelo, o tensor curvatura R de M satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 4.0.21. *O tensor curvatura R de uma variedade de Kähler tem as seguintes propriedades*

(1) $R(X, Y)J = JR(X, Y)$;

(2) $R(JX, JY) = R(X, Y)$.

para campos vetoriais X e Y em M.

Demonstração. Pela definição de R, pela definição de derivada covariante do tensor J e pelo fato de que J é paralelo temos

$$\begin{aligned}
R(X,Y)JZ &= \nabla_X \nabla_Y JZ - \nabla_Y \nabla_X JZ - \nabla_{[X,Y]} JZ \\
&= \nabla_X[(\nabla_Y J)Z + J\nabla_Y Z] - \nabla_Y[(\nabla_X J)Z + J\nabla_X Z] - (\nabla_{[X,Y]} J)Z - J\nabla_{[X,Y]} Z \\
&= \nabla_X(J\nabla_Y Z) - \nabla_Y(J\nabla_X Z) - J\nabla_{[X,Y]} Z \\
&= (\nabla_X J)(\nabla_Y Z) + J\nabla_X \nabla_Y Z - (\nabla_Y J)\nabla_X Z - J\nabla_Y \nabla_X Z - J\nabla_{[X,Y]} Z \\
&= J\nabla_X \nabla_Y Z - J\nabla_Y \nabla_X Z - J\nabla_{[X,Y]} Z \\
&= J(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z) \\
&= JR(X,Y)Z
\end{aligned}$$

Portanto $R(X,Y)J = JR(X,Y)\ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Dados $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, provar que $R(X,Y) = R(JX,JY)$ é a mesma coisa de provar que $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(JX,JY)Z,W)$ para todo $Z,W \in \mathfrak{X}(M)$. Pelo caráter hermitiano da métrica g, pela propriedade (1) acima $R(X,Y)J = JR(X,Y)$ e pela propriedade (4) da Proposição (1.9.5)

$$\begin{aligned} g(R(JX,JY)Z,W) &= g(R(W,Z)JY,JX) = g(JR(W,Z)Y,JX) = \\ &= g(R(W,Z)Y,X) = g(R(X,Y)Z,W). \end{aligned}$$

□

Seja $K(\pi) = R(X,Y,X,Y)$ a curvatura seccional de uma variedade Kähleriana M para um plano $\pi \in T_xM$ gerado por vetores ortonormais X e Y . Se π é invariante pela estrutura quase complexa J, então $K(\pi)$ é chamada *curvatura seccional holomorfa por* π. Se π é invariante por J e X é qualquer vetor unitário em π, então X, JX formam uma base ortonormal para π e, portanto, $K(\pi) = R(X,JX,X,JX)$. Se $K(\pi)$ é uma constante para todo plano π em T_xM invariante por J e para todo $x \in M$, então M é chamada *espaço de curvatura seccional holomorfa constante*.

Teorema 4.0.22. *Seja M uma variedade de Kähler conexa de dimensão complexa $n \geq 2$. Se a curvatura seccional holomorfa $K(\pi)$ depende somente de $x \in M$, então M é um espaço de curvatura seccional holomorfa constante.*

Uma variedade de Kähler de curvatura seccional holomorfa constante é chamada *forma espacial complexa*.

Capítulo 5

HIPERSUPERFÍCIES KÄHLERIANAS REAIS SÃO CILINDROS

Variedades Kählerianas que são imersas isometricamente no espaço Euclidiano como hipersuperfícies são chamadas hipersuperfícies Kählerianas reais. Uma ampla classe de superfícies de Riemann pode ser imersa isometricamente no espaço Euclidiano como uma hipersuperfície real. Sabemos também que o espaço Euclidiano complexo de dimensão n é isomorfo ao espaço euclidiano real de dimensão $2n$. Portanto, quaisquer variedades Kählerianas que são o produto de tais superfícies de Riemann com o espaço euclidiano complexo podem ser imersas isometricamente no espaço Euclidiano como hipersuperfícies reais. Neste capítulo será apresentada a demonstração do teorema do cilindro para hipersuperfícies Kählerianas reais, que é uma espécie de recíproca ao exposto acima. Em [8] Hartman e Nirenberg provaram o seguinte resultado:

Teorema 5.0.23 ([8]). *Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e com curvaturas secccionais identicamente nulas. Então M é isométrica ao $\mathbb{R}^n$ e f é $(n-1)$-cilíndrica.*

Uma imersão $f : M^n \longrightarrow R^{n+p}$ é considerada m-cilíndrica se M^n, f e $\mathbb{R}^{n+p}$ podem ser expressas como produtos: $M^n = M^{n-m} \times \mathbb{R}^m$, $f = f_1 \times \iota$ e $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^{n-m+p} \times \mathbb{R}^m$, onde M^{n-m} é uma variedade Riemanniana completa, $f_1 : M^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m+p}$ é uma imersão isométrica e ι é a identidade de $\mathbb{R}^m$.

5.1 Hipersuperfícies Kahlerianas reais

Seja M^{2n} uma variedade Kähleriana completa e conexa que é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Denote por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M^{2n} e $\mathbb{R}^{2n+1}$, respectivamente. Então a segunda forma fundamental α de M^{2n} é dada por $\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ para todo $X, Y \in TM$. Uma vez que M^{2n} é orientável, podemos tomar um campo diferenciável de vetores normais unitários ξ definido em todo M^{2n}. Com este campo vetorial, temos o tensor segunda forma fundamental A de M dado por

$\alpha(X,Y) = g(AX,Y)\xi$ onde g é a métrica Riemanniana induzida de M. As equações de Gauss e Codazzi são dadas, respectivamente, por:

$$R(X,Y)Z = A_\xi X \wedge A_\xi Y; \tag{5.1}$$

$$(\nabla_Y A_\xi)X = (\nabla_X A_\xi)Y. \tag{5.2}$$

Se denotarmos as curvaturas principais de M (ou os autovalores de A) por $\{\lambda_i\}_{i=1,\ldots,2n}$ e a base ortonormal de direções principais (ou autovetores de A) por $\{e_i\}_{i=1,\ldots,2n}$, temos o seguinte lema.

Lema 5.1.1 ([15])**.**

$$\lambda_i\lambda_j = (g(e_j, Je_i)e_i + Je_j) = 0 \qquad (i \neq j), \tag{5.3}$$

onde J é a estrutura complexa de M^{2n}.

Demonstração. Pela equação de Gauss

$$\begin{aligned} R(e_i,e_j)Je_i &= (Ae_i \wedge Ae_j)Je_i \\ &= g(Ae_j, Je_i)Ae_i - g(Ae_i, Je_i)Ae_j = \lambda_i\lambda_j g(e_j, Je_i)e_i \end{aligned}$$

e

$$JR(e_i,e_j)e_i = \lambda_i\lambda_j J(e_i \wedge e_j)e_i = -\lambda_i\lambda_j Je_j.$$

Como M^{2n} é Kähler, temos $R(X,Y) \circ J = J \circ R(X,Y)$. Assim, igualando as duas identidades acima, temos o resultado desejado. □

Vamos denotar por $\Delta(x)$ a nulidade relativa de f no ponto $x \in M^{2n}$, ou seja, o núcleo da segunda forma fundamental em x e por $v(x)$ o índice nulidade relativa $(\dim \Delta(x))$. Pelo Teorema de Ferus, ao longo de qualquer subconjunto aberto onde v é constante a distribuição Δ é diferenciável com folhas totalmente geodésicas em ambos M^{2n} e $\mathbb{R}^{2n+1}$. Além disso, no subconjunto aberto onde v atinge seu valor mínimo as folhas são completas se M^{2n} é completa.

Lema 5.1.2 ([15])**.** *Para qualquer hipersuperfície Kähleriana real $f : M^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, o índice nulidade relativa v satisfaz que $v \geq 2n-2$, e no conjunto aberto de pontos não planos*

$$U = \{x \in M^{2n} : v(x) = 2n-2\}, \tag{5.4}$$

Δ é uma distribuição complexa, ou seja, $J\Delta = \Delta$.

Demonstração. Observe que $v \geq 2n - 2$ é equivalente a posto de $A \leq 2$. Portanto, vamos provar que o tensor segunda forma fundamental A tem no máximo duas curvaturas principais não nulas em todo ponto $x \in M^{2n}$. Seja λ_1 uma curvatura principal não nula. Então pelo lema acima, temos ou $\lambda_1\lambda_j = 0$, ou $g(e_j, Je_1)e_1 + Je_j = 0$. Mas $g(e_j, Je_1)e_1 + Je_j = 0$ para no máximo um j. De fato, se supormos que esta igualdade seja válida para dois j diferentes, digamos $j = 2$ e $j = 3$, teríamos $Je_2 \parallel e_1$ e $Je_3 \parallel e_1$ o que implica que $Je_2 \parallel Je_3$, o que é um absurdo pois $Je_2 \perp Je_3$, disto segue que esta igualdade vale para no máximo um j, digamos $j = 2$. Então, $\lambda_1\lambda_j = 0$ para os demais $j's$. Assim, $\lambda_j = 0$ para $j \geq 3$. Portanto, o posto de $A \leq 2$, ou seja, $v \geq 2n - 2$ para todo $x \in M^{2n}$.

Para provar a segunda parte, note que U é um conjunto de pontos não planos pelo Lema 2.6.2 e U é aberto em M pela Proposição 3.3.3.

Resta agora mostrar que Δ é J-invariante, ou seja, temos que mostrar que se $X \in \Delta$ então $JX \in \Delta$. Como posto de A é igual a 2, o espaço nulidade relativa coincide com o espaço nulidade pelo Lema 2.5.1 , portanto se $X \in \Delta$ temos

$$R(JX, Y) = R(J^2X, JY) = R(-X, JY) = -R(X, JY) = 0 \qquad \forall\, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

M^{2n} é uma variedade de Kähler, portanto vale $R(X, Y) = R(JX, JY)\ \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Desta forma, $JX \in \Delta$, $\forall\, X \in \Delta$. $\square$

Pelo lema acima e pelo teorema de Ferus, cada folha da distribuição Δ em U é uma subvariedade complexa completa, totalmente geodésica de M^{2n} que deve ser $\mathbb{C}^{n-1}$, uma vez que cada folha de Δ é aplicada por f isometricamente sobre um $(2n-2)$-subespaço afim de $\mathbb{R}^{2n+1}$ (este resultado segue diretamente do Corolário 2.3.4).

Para qualquer $x \in U$, seja $\Delta_x^{\perp}$ o complemento ortogonal de Δ_x em T_xM. Então, atribuindo para $x \in U$ um subespaço $\Delta_x^{\perp}$ temos uma nova distribuição em U. Agora, sejam $X \in \Delta$ e $Y \in \Delta^{\perp}$ e $C(X, Y) = C_XY = -P(\nabla_Y X)$ (ver Seção 3.3). Defina o operador linear $C(x, X) : \Delta_x^{\perp} \longrightarrow \Delta_x^{\perp}$ por $C(x, X)Y = -P(\nabla_Y X)_x$, onde o subescrito significa a restrição ao ponto $x \in M$. O operador $C(x, X)$ é chamado *operador conulidade em x na direção de X*. Vamos denotar $C(x, X, Y)$ no lugar de $C(x, X)Y$. Como mostrado na Seção 3.3, $C(X, Y)$ é $\mathfrak{F}(M)$-bilinear, portanto $C(x, X, Y)$ depende somente dos valores de X e Y em x.

Seja X_x um vetor unitário em Δ_x e $\gamma(t)$ uma geodésica com condição inicial (x, X_x), isto é, $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = X_x$. Uma vez que cada folha contendo x é totalmente geodésica e completa, $\gamma(t)$ pertence inteiramente a folha. Assim, $\gamma'(t)$ são elementos de $\Delta_{\gamma(t)}$, $\forall\, t$. Pela equação 3.4, temos

$$\frac{D}{dt}(C_{\gamma'(t)}Y)_{\gamma(t)} = (C^2_{\gamma'(t)}Y)_{\gamma(t)} \tag{5.5}$$

Denotemos por $C(t)$ o operador correspondente a $C(\gamma(t), \gamma'(t))$. Se donotarmos por $e_1(t)$ e $e_2(t)$ os campos ortonormais e paralelos de $\Delta^{\perp}_{\lambda(t)}$, $C(t)$ pode ser expresso como matrizes relativas a esses campos. Para simplificar, denotamos tais matrizes por

$$\mathbf{C(t)} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

Nosso objetivo será escrever a Equação 5.5 na forma de matrizes. Para isto, incialmente, vamos calcular a matriz de $\frac{D}{dt}(C_{\gamma'(t)}Y)_{\gamma(t)}$ em relação a base $\{e_1(t), e_2(t)\}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}(C_{\gamma'(t)}e_1(t))_{\gamma(t)} &= \frac{D}{dt}(a_{11}(t)e_1 + a_{21}(t)e_2) \\ &= (\frac{D}{dt}a_{11}(t))e_1 + a_{11}(t)\frac{D}{dt}e_1 + (\frac{D}{dt}a_{21}(t))e_2 + a_{21}(t)\frac{D}{dt}e_2) \\ &= a'_{11}(t)e_1 + a'_{21}(t)e_2 \end{aligned}$$

Uma vez que os vetores $e_1(t)$ e $e_2(t)$ são paralelos ao longo de γ. Similarmente, obtemos

$$\frac{D}{dt}(C_{\gamma'(t)}e_2(t))_{\gamma(t)} = a'_{12}(t)e_1 + a'_{22}(t)e_2.$$

o que nos dá a matriz desejada, dada por

$$\begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Resta-nos agora encontrar a matriz relativa ao segundo membro da Equação.

$$\begin{aligned} (C^2_{\gamma'(t)}e_1)_{\gamma(t)} &= (C(C_{\gamma'(t)}e_1)_{\gamma(t)}))_{\gamma(t)} \\ &= (C_{\gamma'(t)}(a_{11}(t)e_1 + a_{21}(t)e_2))_{\gamma(t)} \\ &= a_{11}(t)(C_{\gamma'(t)}e_1)_{\gamma(t)} + a_{21}(t)(C_{\gamma'(t)}e_2)_{\gamma(t)} \\ &= a_{11}(t)(a_{11}(t)e_1 + a_{21}(t)e_2) + a_{21}(t)(a_{12}(t)e_1 + a_{22}(t)e_2) \\ &= (a^2_{11}(t) + a_{12}(t)a_{21}(t))e_1 + (a_{11}(t)a_{21}(t) + a_{21}(t))a_{22}(t))e_2 \end{aligned}$$

Similarmente, obtemos

$$(C^2_{\gamma'(t)}e_2)_{\gamma(t)} = (a_{12}(t)a_{11}(t) + a_{22}(t)a_{12}(t))e_1 + (a_{12}(t)a_{21}(t) + a^2_{22}(t))e_2$$

o que nos dá a matriz

$$\begin{pmatrix} a^2_{11}(t) + a_{12}(t)a_{21}(t) & a_{12}(t)a_{11}(t) + a_{22}(t)a_{12}(t) \\ a_{11}(t)a_{21}(t) + a_{21}(t))a_{22}(t) & a_{12}(t)a_{21}(t) + a^2_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Então a matriz **C(t)** satisfaz a seguinte equação diferencial de Ricatti

$$\frac{\mathbf{dC}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{C^2(t)} \tag{5.7}$$

onde $\frac{\mathbf{dC}}{\mathbf{dt}}$ representa a matriz 5.6 e $\mathbf{C^2(t)}$ representa o produto usal de matrizes.

Lema 5.1.3 ([1])**.** *A distribuição Δ é paralela, ou seja, para qualquer $X \in \Delta$ e $Y \in TM$, $\nabla_Y X \in \Delta$. Portanto $\Delta^\perp$ é também paralela.*

Demonstração. Uma vez que as folhas de Δ são totalmente geodésicas, é suficiente mostrar que $(\nabla_Y X)_x \in \Delta_x\ \forall\ x \in U$ e $\forall\ Y \in \Delta^\perp_x$, isto é, a componente normal de $(\nabla_Y X)_x = 0$. Isto equivale a mostrar que $C(x, X, Y) = 0\ \forall\ Y \in \Delta^\perp_x$. Primeiro vamos mostrar que se $C(0)$ tem autovalor λ real, então $\lambda = 0$. Sem perda de gereralidade, podemos assumir que $e_1(0)$ definido acima é um autovetor de λ. Por complexificação da condição inicial, se necessário, podemos assumir que $C(0)$ tem a seguinte forma triangular superior

$$\mathbf{C}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Pela unicidade da solução das equações diferenciais ordinárias, vemos que a solução da equação de Ricatti acima com condição inicial $C(0)$ tem a forma

$$\mathbf{C}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{1-t\lambda} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Por definição $C(t)$ é C^∞ para todo t. Por outro lado, a fim de que $C(t)$ dada pela matriz acima seja C^∞ em todo ponto, é necessário que $\lambda/(1 - t\lambda)$ seja C^∞ em todo ponto. Portanto, $\lambda = 0$, pois caso contrário $\lambda/(1 - t\lambda)$ tem saltos em $t = 1/\lambda$. Como Δ é J-invariante, $\Delta^\perp$ também é J-invariante. De fato, dados quaisquer $X \in \Delta$ e $Y \in \Delta^\perp$, temos $g(X, JY) = g(JX, J^2Y) = -g(JX, Y) = 0$. Portanto, e, Je formam uma base ortonormal de Δ, se e é um vetor unitário em $\Delta^\perp$. Para qualquer $X \in \Delta_x$ temos $C(x, X, e) = ae + bJe$ e $C(x, JX, e) = -be + aJe$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Esta última segue de $\nabla_e JX = J\nabla_e X$. Assim, se $X_0 = aX - bJX$ temos $C(x, X_0, e) = (a^2 + b^2)e$. Aplicando o argumento anterior para velocidade geodésica unitária na direção de X_0 temos $a^2 + b^2 = 0$, ou seja, $a = b = 0$ e dessa forma $C(x, X, e) = 0$. Similarmente mostramos $C(x, X, Je) = 0$. Portanto, $C(x, X) = 0$, ou seja, Δ é paralela.

Resta agora mostrar a segunda parte do Lema. Se Δ é paralela, $\Delta^\perp$ também é paralela, pois dados $X \in \Delta$, $Z \in \Delta^\perp$ e $W \in TM$, temos

$$0 = Wg(X, Z) = g(\nabla_W X, Z) + g(X, \nabla_W Z) = g(X, \nabla_W Z)$$

e assim, $\nabla_W Z \in \Delta^\perp$. □

Lema 5.1.4 ([1]). *Seja V qualquer componente conexa do subconjunto $U \subset M$. Então Δ está definida em todo ponto de V e as f-imagens das folhas da distribuição Δ em V são $2(n-1)$-subespaços afins de $\mathbb{R}^{2n+1}$ paralelos uns com os outros.*

Demonstração. Como as folhas de Δ são completas, V é a união de todas as folhas de Δ contendo pontos de V. Pelo lema acima e pela decomposição de De Rham temos uma estrutura produto local em V. Como as folhas são totalmente geodésicas, pelo Corolário 2.3.4, cada folha é aplicada isometricamente sobre um $2(n-1)$-subespaço afim de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Seja $x_0 \in V$ e $\omega(t)$ uma curva em V tal que $\omega(0) = x_0$ e seja $\bar{\omega}(t) = f \circ \omega(t)$ a curva imagem de $\omega(t)$ em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Se $X(0)$ é um vetor em $\Delta_{\omega(0)}$, denote por $X(t)$ o deslocamento paralelo de $X(0)$ ao longo da curva $\omega(t)$. Pelo lema acima, $X(t) \in \Delta_{\omega(t)}$. Seja $\bar{X}(t) = f_*(X(t))$. Então $\bar{\nabla}_{\bar{\omega}'(t)}(\bar{X}(t)) = f_*(\nabla_{\omega'(t)}X(t) + \alpha(X(t), \omega'(t))) = 0$ pois $X(t) \in \Delta$ e $X(t)$ é paralelo ao longo de $\omega(t)$. Portanto, $\bar{X}(t)$ é paralelo ao longo de $\bar{\omega}(t)$ em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Se observarmos que o grupo de holonomia de $\mathbb{R}^{2n+1}$ é trivial, isto implica que $\bar{X}(t)$ é paralelo em $\mathbb{R}^{2n+1}$ no sentido usual. Uma vez que as f-imagens das folhas são geradas por tais $\bar{X}(t)$, como acima, temos o resultado desejado. □

Lema 5.1.5 ([1]). *Qualquer hipersuperfície Kähleriana completa e conexa M^{2n} em $\mathbb{R}^{2n+1}$ sem pontos planos é um cilindro $V^2 \times \mathbb{R}^{2n-2}$.*

Demonstração. Pelo lema 5.1.2 sabemos que o posto da segunda forma fundamental é igual a 2 em todo ponto. Assim, a distribuição nulidade relativa está definida em todo M. Seja $(\widetilde{M}, P)$ o recobrimento Riemanniano universal de M^{2n}, onde P é a aplicação recobrimento. Pela Proposição 2.7.4, podemos definir a distribuição $\widetilde{\Delta}$ em todo $\widetilde{M}$ como sendo a distribuição nulidade relativa de $f \circ P$. Com efeito, para cada $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ temos, pela Proposição 2.7.4, $\widetilde{A}_{\tilde{x}} = \pm P_*^{-1}(A_{P(\tilde{x})}P_*)$. Se $\widetilde{X} \in \widetilde{\Delta}_{\tilde{x}}$, então $\widetilde{A}_{\tilde{x}}\widetilde{X} = 0$, o que implica que $\pm P_*^{-1}(A_{P(\tilde{x})}P_*\widetilde{X}) = 0$ e, como P_*^{-1} é injetiva, $A_{P(\tilde{x})}P_*\widetilde{X} = 0$ e portanto, $P_*\widetilde{X} \in \Delta_{P(\tilde{x})}$, ou seja, a cada $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ está associado o subespaço nulidade relativa $\widetilde{\Delta}_{\tilde{x}}$ tal que $P_* : \widetilde{\Delta}_{\tilde{x}} \longrightarrow \Delta_{P(\tilde{x})}$ é uma isometria linear. Disto segue que as folhas de $\widetilde{\Delta}$ são aplicadas isometricamente sobre as folhas de Δ via P. Assim, as $f \circ P$-imagens das folhas de $\widetilde{\Delta}$ são também $(2n-2)$-subespaços afins de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Vamos considerar agora, para cada $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ o complemento ortogonal de $\widetilde{\Delta}_{\tilde{x}}$ em $T_{\tilde{x}}\widetilde{M}$ e denotá-lo por $\widetilde{\Delta}_{\tilde{x}}^{\perp}$. Dados $\widetilde{X} \in \widetilde{\Delta}_{\tilde{x}}$, fixe $\widetilde{Z} \in \widetilde{\Delta}_{\tilde{x}}^{\perp}$, uma vez que P é uma imersão isométrica, temos $0 = \tilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Z}) = g(P_*\widetilde{X}, P_*\widetilde{Z})$ e, portanto, $P_*\widetilde{Z} \in \Delta_{P(\tilde{x})}^{\perp}$, ou seja, $P_*(\widetilde{\Delta}_{\tilde{x}}^{\perp}) = \Delta_{P(\tilde{x})}^{\perp}$, isto define em todo $\widetilde{M}$ a distribuição ortogonal $\widetilde{\Delta}^{\perp}$. Vamos mostrar que $\widetilde{\Delta}$ e $\widetilde{\Delta}^{\perp}$ são paralelas. Dados $\widetilde{X} \in \widetilde{\Delta}$ e $Y \in T\widetilde{M}$ temos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} &= (f \circ P)_*\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} \text{ e} \\ \overline{\nabla}_{P_*(\widetilde{Y})}P_*(\widetilde{X}) &= f_*\nabla_{P_*(\widetilde{Y})}P_*(\widetilde{X}) \end{aligned}$$

Como P é uma isometria local, podemos identificar localmente $\widetilde{X}$ com $P_*(\widetilde{X})$ e escrever $(\overline{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})_{\tilde{x}} = (\overline{\nabla}_{P_*(\widetilde{Y})}P_*(\widetilde{X}))_{P(\tilde{x})}$, assim, $(f \circ P)_*(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})_{\tilde{x}} = f_*(\nabla_{P_*(\widetilde{Y})}P_*(\widetilde{X}))_{P(\tilde{x})}$ o que implica que $P_*(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})_{\tilde{x}} = (\nabla_{P_*(\widetilde{Y})}P_*(\widetilde{X}))_{P(\tilde{x})}$. Como $\widetilde{X} \in \widetilde{\Delta}$, temos $P_*(\widetilde{X}) \in \Delta$, assim $(\nabla_{P_*(\widetilde{Y})}P_*(\widetilde{X}))_{P(\tilde{x})} \in \Delta_{P(\tilde{x})}$, $\forall\ P_*(\widetilde{Y}) \in TM$ e, portanto, $(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})_{\tilde{x}} \in \widetilde{\Delta}_{\tilde{x}}$. Uma vez que $\tilde{x}$ é arbitrário, temos $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} \in \widetilde{\Delta}$. $\widetilde{\Delta}$ é paralela e, portanto, $\widetilde{\Delta}^{\perp}$ também é paralela, pelo mesmo argumento usado na prova do Lema 5.1.3.

Como $\widetilde{M}$ é simplesmente conexa e $T_{\tilde{x}}\widetilde{M} = \widetilde{\Delta}_{\tilde{x}} \oplus \widetilde{\Delta}_{\tilde{x}}^{\perp}$, onde $\widetilde{\Delta}$ e $\widetilde{\Delta}^{\perp}$ são paralelas, podemos aplicar o teorema da decomposição de De Rham a $\widetilde{M}$ para obter uma estrutura produto global para $\widetilde{M}$. Vamos denotar a estrutura pruduto de $\widetilde{M}$ por $Q : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n-2} \times \widetilde{N}$ onde Q é uma isometria definida por $Q(\tilde{x}) = (q_1(\tilde{x}), q_2(\tilde{x}))$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{M}$.

Vamos mostrar que $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{2n-2} \times \widetilde{N}$ tem a divisão em $\mathbb{R}^{2n+1}$ como descrita no teorema. Sem perda de generalidade, vamos assumir que existe um ponto $(0, b) \in \mathbb{R}^{2n-2} \times \widetilde{N}$ que é aplicado por $\tilde{f} = f \circ P$ sobre a origem de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Primeiro, afirmamos que $\tilde{f}|_{(0,\widetilde{N})}$ aplica $(0, \widetilde{N})$ sobre um subespaço tridimensional de $\mathbb{R}^{2n+1}$ que é ortogonal a $\tilde{f}((\mathbb{R}^{2n-2}, b))$ em 0. Seja $w(t)$ uma curva diferenciável em $(0, \widetilde{N})$, começando em $(0, b)$. Então $\tilde{w}(t) = \tilde{f} \circ w(t)$ é uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^{2n+1}$, começando em $\tilde{f}(0, b)$. Seja X qualquer vetor em $\tilde{f}((\mathbb{R}^{2n-2}, b))$. Então $\widetilde{\nabla}_{\tilde{w}'(t)}\tilde{g}(X, \tilde{w}(t)) = \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_{w'(t)}X, \tilde{w}(t)) +$

$\tilde{g}(X, \tilde{w}'(t)) = \tilde{g}(X, \tilde{w}'(t))$, onde $\tilde{w}'(t)$ é o vetor velocidade de $\tilde{w}(t)$. Pelo Lema 5.1.4, X pode ser identificado com um vetor no espaço nulidade relativa em cada t. Como $w'(t)$ é ortogonal ao espaço nulidade relativa para cada t, temos $\tilde{g}(X, \tilde{w}'(t)) = g(X, w'(t)) = 0\ \forall t$. Assim, $\tilde{g}(X, \tilde{w}(t))$ é constante, mas $\tilde{g}(X, \tilde{w}(0)) = \tilde{g}(X, 0) = 0$, logo $\tilde{g}(X, \tilde{w}(t)) = 0$ para todo t, ou seja, $\tilde{f} \circ w(t)$ pertence ao subespaço ortogonal a $\tilde{f}(\mathbb{R}_0^{2n-2}, 0)$. $(b, \widetilde{N})$ é conexa, isto implica que $\tilde{f}(b, \widetilde{N})$ está contido no espaço tridimensional acima. Uma vez que $\tilde{f}$ aplica todas as folhas da distribuição nulidade relativa que são da forma $(\mathbb{R}^{2n-2}, y),\ y \in \widetilde{N}$, sobre $(2n-2)$-subespaços afins que são paralelos a $\tilde{f}(\mathbb{R}^{2n-2}, b)$, todas as $\tilde{f}$-imagens de $(\mathbb{R}^{2n-2}, y)$ são ortogonais ao espaço tridimensional que contem $\tilde{f}((0, \widetilde{N}))$. Então, o splitting é dado por $f(X, y) = (X, \tilde{f}_0(y))$, onde $\tilde{f}_0 = \tilde{f}((0, \widetilde{N}))$, X é um campo vetorial em $\mathbb{R}^{2n-2}$ e y é um ponto em $(0, \widetilde{N}) = \widetilde{N}$ dado pelo isomorfismo $(0, y) = y$. Para achar a decomposição produto de M em relação a Δ, vamos mostrar o seguinte lema.

Lema 5.1.6 ([1]). *Seja M uma variedade Riemanniana conexa com uma distribuição totalmente geodésica paralela sobre M, em que cada folha seja isométrica a $\mathbb{R}^k$. Suponha ainda, que M possa ser imersa isometricamente por f sobre $\mathbb{R}^n$, $(n > k)$ de tal maneira que as f-imagens das folhas sejam k-subespaços afins paralelos em $\mathbb{R}^n$. Então cada folha da distribuição ortogonal encontra qualquer folha da distribuição totalmente geodésica no máximo uma vez. Em particular, a distribuição ortogonal é regular.*

Demonstração. Sejam L uma folha da distribuição totalmente geodésica e N uma folha da distribuição ortogonal. Vamos supor que N encontra L em dois pontos diferentes x_0 e x_1. Escolhamos uma geodésica em N entre x_0 e x_1 e denotemos por $\gamma(t)$, $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Denotemos também $f \circ \gamma(t)$ por $\bar{\gamma}(t)$. Se $\mathbb{R}^n = f(L)^\perp \oplus f(L)$, tal que $f(x_0) = \bar{\gamma}(0) = 0$. Então $\bar{\gamma}_1(t) \oplus \bar{\gamma}_2(t)$, onde $\bar{\gamma}_1(t) \in f(L)^\perp$ e $\bar{\gamma}_2(t) \in f(L)$. Como $\bar{\gamma}(0) \neq \bar{\gamma}(1)$, $\bar{\gamma}_2(t)$ não pode ser identicamente zero. Assim, $\bar{\gamma}_2'(t)$ não pode ser identicamente zero. De fato, se tivéssemos $\bar{\gamma}_2'(t) = 0\ \forall\ t$, então $\bar{\gamma}_2(t)$ seria constante, mas $\bar{\gamma}(0) = 0$, o que implica que $\bar{\gamma}_2(0) = 0$, logo $\bar{\gamma}_2(t) = 0,\ \forall\ t$, o que é um absurdo, pois $\bar{\gamma}_2(t)$ não pode ser identicamente zero. Digamos que $\bar{\gamma}_2'(t_0) \neq 0, 0 < t_0 \leq 1$, então $\bar{\gamma}'(t_0) = \bar{\gamma}_1'(t_0) + \bar{\gamma}_2'(t_0) \neq 0$. Uma vez que $\gamma(t) \in N$ para $0 \leq t \leq 1$, $\gamma'(t_0)$ deve ser tangente a N, ou seja, $\bar{\gamma}'(t_0)$ não pode ter qualquer componente não nula da distribuição totalmente geodésica original, ou seja, $\bar{\gamma}'(t_0)$ não pode ter $f(L)$ componente. Isto contradiz $\bar{\gamma}_2'(t_0) \neq 0, 0 < t_0 \leq 1$. Assim, N não pode encontrar L em dois pontos diferentes. $\square$

Voltando à demonstração do teorema, note que, pelo lema acima, cada folha de $\Delta^{\perp}$ é coberto precisamente por uma folha de $\widetilde{\Delta}^{\perp}$ que é uma $\widetilde{N}$ componente de $\mathbb{R}^{2n-2} \times \widetilde{N}$. Pelo Lema acima e pelo Teorema 4[3], as folhas da distribuição ortogonal são isométricas umas com as outras. Seja N uma folha de $\Delta^{\perp}$. Definimos a estrutura produto $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n-2} \times N$ por $F(x) = (f_1 \circ Q \circ P^{-1}(x), f_2 \circ Q \circ P^{-1}(x))$, onde P e Q são definidas como acima, f_1 é a restrição de P a $\mathbb{R}^{2n-2}$ componente, isto é, $f_1 = P|_{\mathbb{R}^{2n-2}} : \mathbb{R}^{2n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n-2}$ e $f_2 = P|_{\widetilde{N}} : \widetilde{N} \longrightarrow N$. É fácil mostrar que F está bem definida e é bijetiva. Além disso, podemos mostrar facilmente que F é uma isometria local, portanto, uma isometria global. Pelo splitting de $(\widetilde{M}, \tilde{f})$ e pela definição de estrutura produto F de M, é fácil obter o splitting de (M, f) como descrito no Teorema. Isto completa a prova.

$\square$

5.2 O teorema do Cilindro para hipersuperfícies Kählerianas reais

Teorema Principal 1. Seja $f : M^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade de Kähler completa. Então $M^{2n} = \Sigma^2 \times \mathbb{C}^{n-1}$ e $f = f_1 \times \iota$, onde $f_1 : \Sigma^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão isométrica e ι é a aplicação identidade de $\mathbb{C}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{2n-2}$.

Demonstração. Vamos supor que M^{2n} seja plana, ou seja, o tensor curvatura Riemanniana $R \equiv 0$. Então, pelo teorema do cilindro de Hartaman-Nirenberg [8], f é um $(2n-1)$-cilindro sobre a curva plana $f_1 : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Seja T um vetor unitário tangente a Γ, vamos mostrar que JT é constante em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Se ∇ e $\overline{\nabla}$ são as conexões de Levi-Civita de M^{2n} e $\mathbb{R}^{2n+1}$, respectivamente, então

$$\overline{\nabla}_T JT = \nabla_T JT + \alpha(T, JT) = J\nabla_T T + \alpha(T, JT)$$

como Γ é uma geodésica de M temos $\nabla_T T = 0$, portanto, $J\nabla_T T = 0$. Afirmamos que $\alpha(T, JT) = 0$. Se $v(x) = n$ a afirmação segue trivialmente. Vamos supor $v(x) = 2n - 1$. Se $T \in \Delta_x$ ou $JT \in \Delta_x$ é óbvio que $\alpha(T, JT) = 0$. Se $T \notin \Delta_x$, pela linearidade de α, qualquer $X \neq 0$ tangente a curva em x não pertence a Δ_x, logo $T_x\Gamma \subseteq \Delta_x^{\perp}$, como ambos têm a mesma dimensão, temos a igualdade $T_x\Gamma = \Delta_x^{\perp}$. Como $JT \perp T_x\Gamma$, temos

$JT \in \Delta_x$ e, assim $\alpha(T, JT) = 0$. Similarmente, se $JT \notin \Delta_x$, temos que $T \in \Delta_x$ e, assim $\alpha(T, JT) = 0$. Então, JT é constante no espaço euclidiano, uma vez que $\bar{\nabla}_T JT = \nabla_T JT + \alpha(T, JT) = J\nabla_T T = 0$. Portanto, JT define uma linha $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$. Se fizermos $\Sigma = \Gamma \times \mathbb{R}$ como o produto de Γ com esta linha, então, nós temos a decomposição de Kähler $M^{2n} = \Sigma \times \mathbb{C}^{n-1}$ e o teorema segue neste caso.

Em seguida, vamos supor que M^{2n} não seja plana em todos os pontos, pelos Lemas 2.6.2 e 5.1.2 podemos assumir que U é não vazio. O teorema 5.1.5 afirma que cada componente conexa de U é um cilindro sobre uma superfície de $\mathbb{R}^3$. O nosso objetivo será estender a folheação em U para todo o M^{2n}. Primeiro fixemos as notações. Denotemos por

$$U' = \{x \in M^{2n}; v(x) \leq 2n - 1\}, \; U_1 = U' \backslash U. \tag{5.9}$$

Então U' é aberto, com $M^{2n} \backslash U'$ sendo o conjunto de pontos totalmente geodésicos da imersão. U_1 é o conjunto de pontos onde f tem posto constante igual a 1. Vamos denotar V o conjunto de pontos interiores de U_1 e escrever $F = U_1 \backslash V$. Assim, $U' = U \cup V \cup F$, com $F = U_1 \cap \overline{U}$.

Agora vamos construir uma distribuição L no conjunto aberto U'. Para $x \in U$ definimos $L_x = \Delta_x$. Para $x \in V$ definimos

$$L_x = \Delta_x \cap J\Delta_x$$

onde $\Delta_x \equiv \mathbb{R}^{2n-1}$ é o núcleo da segunda forma fundamental α e J é a estrutura complexa de M^{2n}. L_x assim definido em V é um subespaço J-invariante de codimensão 2, pois $\dim(\Delta_x \cap J\Delta_x) = -\dim T_x M + (\dim \Delta_x + \dim J\Delta_x) = -2n + (4n - 2) = 2n - 2$. Como V é aberto e L_x é J-invariante, L é uma folheação totalmente geodésica em V e suas folhas são subvariedades complexas de M^{2n} cujas f-imagens são $(2n-2)$-subespaços afins de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Vamos denotar por $L(y)$ uma folha de L em $U \cup V$ passando por y.

Para $x \in F$, uma vez que $F \subseteq \overline{U}$ existe uma sequência de pontos $\{x_k\}$ em U se aproximando de x. Então, passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que L_{x_k} converge, assim, $\lim L(x_k)$ será um plano $\mathbb{C}^{n-1}$ totalmente geodésico passando por x que é aplicado por f em uma subvariedade linear de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Chamaremos $\lim L(x_k)$ de *posição limite em* x.

Afirmamos que cada $x \in F$ possui uma única posição limite. De fato, se tivermos duas sequências $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ em U, ambas se aproximando de x, tais que $P = \lim L(x_k)$

e $Q = \lim L(y_k)$ são diferentes, uma vez que P e Q são hipersuperfícies complexas fechadas de M^{2n}, ambas se intersetam em x transversalmente. Assim, folhas próximas também se intersetam, ou seja, para k suficientemente grande, $L(x_k)$ e $L(y_k)$ irão se intersetar, o que só é possível quando elas coincidem. Isto contradiz $P \neq Q$.

Vamos denotar por $F(x)$ a posição limite em $x \in F$ e por L_x o espaço tangente de $F(x)$ em x. Como para cada k, L_{x_k} é um subespaço J-invariante onde α é identicamente nulo, L_x é um subespaço J-invariante de Δ_x. Assim, pelo fato de que $v(x) = 2n-1$ temos $L_x = \Delta_x \cap J\Delta_x$, consistente com nossa definição de L em V. Em adição, uma vez que cada componente conexa de U é um cilindro sobre uma superfície em $\mathbb{R}^3$, para qualquer $y \in F(x)$ temos que $v(y) = v(x) = 2n-1$. Portanto, $F(x)$ deve estar contido em F e então F é a união disjunta dessas posições limite.

Agora vamos provar que as folhas de L em V são completas. Fixemos $x \in V$ e consideremos a folha $L(x)$ de L em V. Seja $\gamma : [0,\infty] \longrightarrow M$ uma geodésica tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma([0,a]) \subseteq L(x)$, onde $a > 0$. Pelo item (ii) do Teorema de Ferus v não aumenta ao longo de tal geodésica. Assim $\gamma(a) \in U_1$. Se $y = \gamma(a) \in F$, então, uma vez que

$$\gamma'(t) \in L_{\gamma(t)} = \Delta_{\gamma(t)} \cap J\Delta_{\gamma(t)}$$

para qualquer $t < a$, teríamos $\gamma'(a) \in L_y$. Mas a posição limite $F(y)$ através de y é totalmente geodésica, assim γ está contida em $F(y) \subset F$, contradizendo a afirmativa de que $x \in V$. Assim, provamos que $\gamma(a) \in V$. Isto prova que $L(x)$ é completa em V.

Em resumo, mostramos que o conjunto aberto U' é folheado por L, cujas folhas são planos $\mathbb{C}^{n-1}$ totalmente geodésicos que são aplicadas por f em subespaços afins de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Além disso, tendo em vista a planicidade da métrica em V, Lema 5.1.4 e a continuidade de L em cada componente conexa de U' esses subespaços afins são paralelos uns com os outros.

Nosso objetivo agora é estender a folheação L através do conjunto $W = M\backslash U'$ de pontos totalmente geodésicos. Primeiro, para qualquer $x \in \overline{U'}\backslash U'$, as folhas de L dão posições limites em x, que são subvariedades complexas totalmente geodésicas de dimensão complexa 1, passando através de x. Tais posições limites em x devem ser únicas pela mesma razão de antes (quando estendemos L de U para F). Assim, $\overline{U'}$ é agora folheado por planos, localmente paralelos, $\mathbb{C}^{n-1}$.

Denotemos por W^0 o conjunto de pontos interiores de W. Suponhamos que W^0

seja não vazio e seja Ω uma componente conexa de W^0. Fixemos qualquer $x \in \Omega$ e consideremos $H = T_{f(x)}M \cong \mathbb{C}^n$ como uma subespaço afim de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Por conveniência, vamos identificar o conjunto $P \subseteq M$ com sua imagem $f(P)$ se $f|_P$ é um mergulho. Uma vez que f é totalmente geodésica em W, sabemos que a restrição de f em $\bar{\Omega}$ é um mergulho, e $\bar{\Omega} \subset H$. Note que, $\partial\Omega \neq \emptyset$ uma vez que $W \neq M^{2n}$.

Para qualquer $y \in \partial\Omega$, y é um ponto de fronteira de U'. Portanto existe um plano totalmente geodésico $L(y) \cong \mathbb{C}^{n-1}$ passando através de y e f é um mergulho de $L(y)$ sobre um subespaço afim de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Como $T_{f(y)}M = H$, temos que $L(y) \subset H$ é um hiperplano afim complexo. Assim, se z é outro ponto em $\partial\Omega$, a menos que $L(y)$ seja paralelo a $L(z)$, eles se intersetam. Suponha $w \in L(y) \cap L(z)$. Uma vez que $L(y)$ e $L(z)$ estão ambos contidos em $\overline{U'}$, $w \in \overline{U'}$ e então temos $L(w)$ que deve coincidir com $L(y)$ e $L(z)$, pela unicidade das folhas de L em $\overline{U'}$. Isto nos dá $L(y) = L(z)$. Ou seja, para quaisquer dois pontos y e z em $\partial\Omega$ os subespaços afins complexos $L(y)$ e $L(z)$ em H são paralelos uns com os outros.

Concluímos que existe um único subespaço afim complexo de codimensão complexa 1 em H passando através de x, que é paralelo a $L(y)$ para todo $y \in \partial\Omega$, denotaremos por $L(x)$. $L(x)$ não pode tocar a parte fronteira de Ω, pois $L(y) \subset \overline{U'}$ para todo $y \in \partial\Omega$, portanto $L(x) \subset \Omega$.

Agora, M^{2n} está totalmente folheada por planos $\mathbb{C}^{n-1}$ totalmente geodésicos, com cada folha sendo aplicada por f sobre subespaços afins e folhas próximas sáo paralelas umas com as outras. O resto da prova segue do mesmo argumento usado na prova do Teorema 5.1.5. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] ABE, KINETSU. *On a class of hypersurfaces of* $\mathbb{R}^{2n+1}$. Duke Math. J. 41 (1974), 865–874.

[2] ABE, KINETSU. *A complex analogue of Hartman-Nirenberg cylinder theorem*. J. Diferential Geom. 7 (1972), 453–460.

[3] ABE, KINETSU. *Applications of a Riccati type differential equation to Riemannian manifolds with totally geodesic distributions*. Tôhoku Math Journ. 25 (1973), 425–444.

[4] BALLMANN, WERNER. *Lectures on Kähler manifolds*. ESI Lectures on Mathematics and Physics, European Mathematical Society, Zurich, 2006.

[5] CAMACHO, CÉSAR E NETO, ALCIDES LINS. *Introdução ä teoria das folheações*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.

[6] CARMO, MANFREDO PERDIGÃO DO. *Geometria riemanniana*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[7] FLORIT , LUIS A. E ZHENG, FANGYANG. *Complete real Kähler Euclidean hypersurfarces are cylinders*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 57 (2007), 155–161.

[8] HARTMAN, P. E NIRENBERG, L.. *On spherical image maps whose Jacobians do not change sign*. Amer. J. Math 81 (1959), 901–920.

[9] HUYBRECHTS, DANIEL. *Complex Geometry: an introduction*. Universitext. Springer, Paris, 2004.

[10] LEE , JOHN M.. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, Verlag, 2002.

[11] MOROIANU, ANDREI. *Lectures on Kähler geometry*. Cambridge University Press, École Polytechnique, Paris, 2004.

[12] O'NEILL, BARRETT. *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*. Academic Press, New York, 1983.

[13] RODRIGUEZ, LUCIO. *Geometria das subvariedades*. Monografias de Matemťica, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1976.

[14] RYAN, P.. *Kähler manifolds as real hypersurfaces* . Duke Math. J. 40 (1973), 207–213.

[15] TAKAHASHI, T.. *A note on Kählerian hypersurfaces of spaces of constant curvature* . Kumamoto J. Sci. (Math.) 9 (1972), 21–24.

[16] TU , LORING W.. *An introduction to manifolds*. Universitext. Springer, New York, 2008.