PPGMAT - UFMA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Alberto Leandro Correia Costa

Sobre o atrator global para as equações de Navier-Stokes em duas dimensões

São Luís - MA

2015

Alberto Leandro Correia Costa

Sobre o atrator global para as equações de Navier-Stokes em duas dimensões

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Marcos Antônio Ferreira de Araujo**.

São Luís - MA

2015

Alberto Leandro Correia Costa

Sobre o atrator global para as equações de Navier-Stokes em duas dimensões

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Professor Doutor Marcos Antônio Ferreira de Araujo**.

Dissertação aprovada em 27 de março de 2015, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(ORIENTADOR) Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araujo (UFMA)

Prof$^{\text{a}}$. Dra. Renata Limeira Carvalho (UFMA)

Prof. Dr. Geraldo Mendes de araújo (UFPA)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais , aos meus irmãos, a familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Incialmente agradeço à minha mãe Nail Correia por todo apoio, compreensão e encorajamento.

À minha esposa Katiane Monteiro pelo companheirismo, apoio e encorajamento.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática-PPGMat Ivaldo Nunes, Adecarlos Carvalho e Renata Carvalho pelo incentivo, encorajamento e pela contribuição valiosa na minha formação.

Aos demais professores do Departamento de Matemática da UFMA pelo apoio, incentivo e pela contribuição na minha formação acadêmica de forma direta ou indireta.

Ao professor Marcos Antonio Ferreira de Araujo pela orientação e principalmente, por toda paciência e disposição que teve, a qual foi essencial para a realização deste trabalho.

Aos colegas de curso Geilson, Jadevilson, Leomar, Rondineli Luis, Diego, Jorge e demais pelo enconrajamento.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos resultados sobre existência e unicidade de soluções fracas e fortes para as equações de Navier-Stokes em domínios limitados de $\mathbb{R}^2$ e discutimos a existência de atrator global para os sistemas dinâmicos gerados por estas equações em espaços de fases adequados. Mostramos que em domínios limitados de $\mathbb{R}^2$, as equações de Navier-Stokes possuem um atrator global.

Palavras-chave: Equação de Navier-Stokes, Soluçõe fraca, Solução forte, Semigrupos não lineares, Atrator global.

ABSTRACT

In this work we present results on existence and uniqueness of weak and strong solutions for the Navier-Stokes equations in bounded domains of $\mathbb{R}^2$ and we discuss about the existence of global attractor for the dynamical systems generated by these equations in suitable fase spaces. We will show that for bounded domains in $\mathbb{R}^2$, the Navier-Stokes equations have a global atractor.

Keywords: Weak solution, Strong solution, Non linear semigroup, Global attractor, Navier-Stokes equations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Uma das mais importantes aplicações recentes da teoria moderna dos sistemas dinâmicos tem sido o desenvolvimento de teorias que auxiliam o estudo da evolução de soluções de equações diferenciais parciais não lineares. Nesta nova abordagem, o estudo do comportamento assintótico desses problemas de dimensão infinita começou a ser caracterizado por semi-fluxos (ou semigrupos de operadores). O resultado central que dá base a maior parte desta teoria é o fato de que as soluções destas equações podem ser representadas em termos de semi-fluxos em espaços de fases adequados, e que este eventualmente tem um atrator global neste espaço de fase. Enquanto a teoria de atratores globais para equações diferenciais parciais tem uma aplicabilidade generalizada, há um problema muito importante que permanece em aberto: As Equações de Navier-Stokes em três dimensões (3D). Apesar de já se saber há mais de 20 anos a existência de um atrator global para essas equações em duas dimensões (2D), veja Ladyzenskaya [3], o problema 3D ainda não foi resolvido. Neste trabalho, apresentaremos resultados sobre existência e unicidade de solução bem como a existência de uma trator global para o caso 2D seguindo a metodologia usada por Robinson [10].

As equações de Navier-Stokes em um domínio limitado e suficientemente regular $\Omega \in \mathbb{R}^2$ têm a forma

$$\begin{cases} u' - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \quad \text{em} \quad \Omega \times [0, +\infty) \\ \nabla \cdot u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times [0, +\infty) \\ u(0) = u_0 \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

onde u_0 é uma função de divergência nula. O par ordenado (u_0, f) é denominado *dados iniciais* do problema, f é chamada *função força externa* e $(u \cdot \nabla) = \sum_{i=1}^{n} u_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ é o operador advecção.

O objetivo deste trabalho é mostrar a existência de atrator global para o semigrupo definido por

$$S(t)u_0 = u(t, u_0) = u(t)$$

gerado pela solução fraca $u(t)$ das equações acima.

Esta dissertação está organizada de acordo com os seguintes capítulos:

- Capítulo 1:Conceitos e Resultados Preliminares
- Capítulo 2: Soluções para as Equações de Navier-Stokes
- Capítulo 3: Semigrupo de Operadores não Lineares
- Capítulo 4: Existência de Atrator Global para as Equações de Navier-Stokes

No Capítulo 1, apresentamos os espaços de funcionais utilizados no estudo das equações de Navier-stokes, alguns lemas preliminares, alguns conceitos gerais sobre distribuições e apresentamos o teorema de Lax-milgram.

No capítulo 2, apresentamos alguns resultados envolvendo existência e unicidade de soluções para as equações de Navier-Stokes.

No Capítulo 3, definiremos semigrupo de operadores lineares, discutiremos o conceito de atrator global para o sistema dinâmico relacionado ao semigrupo e, por fim, discutimos como estes conceitos podem auxiliar no estudo assintótico de EDP's.

No Capítulo 4, mostraremos a existência de atrator gobal para o semigrupo gerado pela solução fraca das equações de Navier-Stokes em duas dimensões e que o atrator consiste em soluções fortes.

Capítulo 1

CONCEITOS E RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo introduziremos algumas notações e resultados úteis no decorrer deste trabalho.

1.1 Espaços de Funcionais

Ao longo deste texto, Ω será sempre um subconjunto aberto, limitado e conexo de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ suficientemente regular. Fixemos também a notação por $Q = \Omega \times (0,T)$, com $T > 0$, cuja fronteira é Σ.

Denotemos por $\mathbb{L}^p(\Omega)$ o espaço de Banach das funções vetoriais $u : (\Omega) \to \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, ..., u_n)$ onde cada $u_i : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^p(\Omega)$, isto é $\mathbb{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^n$. Definimos uma norma em $\mathbb{L}^p(\Omega)$ de forma natural

$$\|u\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{i=1}^n \|u_i\|^p_{L^\infty(\Omega)}, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

No caso em que $p = 2$, temos que $\mathbb{L}^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert cuja norma e produto interno são dados por

$$|u| = \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \int |u_i(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \tag{1.1}$$

$$(u,v) = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_i(x) v_i(x) dx. \tag{1.2}$$

Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω, e por $H^m(\Omega)$ o espaço de Sobolev usual de ordem m. Denotemos por $H_0^m(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$. Como Ω é limitado, tem-se que $H_0^m(\Omega)$ é subespaço próprio de $H^m(\Omega)$.

De modo análogo, definimos os espaços de funções vetoriais

$$\mathbb{D}(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))^n, \quad \mathbb{H}^m(\Omega) = (H^m(\Omega))^n \quad \text{e} \quad \mathbb{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^n.$$

Observe que se $T=(T_1,...,T_n)\in \mathbb{D}'(\Omega)$ e $\varphi=(\varphi_1,...,\varphi_n)\in\mathbb{D}(\Omega)$ então

$$\langle T,\varphi\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)}=\sum_{i=1}^{n}\langle T_i,\varphi_i\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}$$

Definimos em $\mathbb{H}^m(\Omega)$ uma norma e um produto interno por

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_{H^m(\Omega)}\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j|\le m}\|D^ju_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j|\le m}\int_\Omega |D^ju_i(x)|^2dx\right)^{1/2}, \end{aligned}\tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}(u,v)_{\mathbb{H}^m(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{n}(u_i,v_i)_{H^m(\Omega)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{|j|\le m}(D^ju_i,D^jv_i)_{L^2(\Omega)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{|j|\le m}\int_\Omega D^ju_i(x)D^jv_i(x)dx \end{aligned}\tag{1.4}$$

onde $j=(j_1,...,j_n)$ é um multe-índice, $|j|=j_1+....+j_n$, $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$ para $i=1,...,n$ e D^j é o operador diferencial definido por

$$D^j=D_1^{j_1}...D_n^{j_n}=\frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}.$$

Como estamos supondo Ω limitado, relembremos que vale a desigualdade de Poincaré em $H_0^1(\Omega)$. Dessa forma, denotaremos a norma e o produto interno em $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, respectivamente por:

$$\begin{aligned}\|u\| &= \left(\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\\ &= \left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right|^2dx\right)^{1/2}, \end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}((u,v)) &= \sum_{i=1}^{n}((u_i,v_i))_{H_0^1(\Omega)}=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{L^2(\Omega)}\\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)dx. \end{aligned}\tag{1.6}$$

Começaremos agora a descrever os espaços de funcionais que são fundamentais no desenvolvimento do estudo da equações de Navier-Stokes. Denotaremos por $\mathcal{V}$ o subespaço vetorial de $\mathbb{D}(\Omega)$ dos campos de vetores com divergência nula, isto é,

$$\mathcal{V}=\{\varphi\in\mathbb{D}(\Omega)\ :\ \nabla\cdot\varphi=0\}$$

Denotaremos por H, V, $\widetilde{V}$ os espaços definidos por

$$H = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad V = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad \widetilde{V} = \overline{\mathcal{V}}^{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{L}^n(\Omega)}.$$

Espaços estes que desempenham um papel fundamental no estudos das equações de Navier-Stokes.

Relembremos da teoria do espaços de Sobolev que, se $n = 2$ tem-se $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [2, \infty)$. Assim, $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^n(\Omega) = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Em outras palavras tem-se $H_0^1(\Omega)$ continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para $n = 2$, para todo $1 \leq q < \infty$.

Introduzimos também o espaço $\mathbb{E}(\Omega)$ definido por

$$\mathbb{E}(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \ \nabla \cdot u \in L^2(\Omega)\},$$

A razão de introduzirmos este espaço é que ele oferece uma caracterização para os espaços H e V. De fato, $\mathbb{E}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno e norma dados por:

$$(u, v)_{\mathbb{E}(\Omega)} = (u, v) + (\nabla \cdot u, \nabla \cdot u)_{L^2(\Omega)},$$
$$\|u\|_{\mathbb{E}(\Omega)} = \left(\|u\|_2^2 + \|\nabla \cdot u\|_{L^2\Omega)}^2\right)^{1/2}.$$

Assim podemos definir o operador linear contínuo (operador do tipo traço) $\gamma_\eta \in \mathcal{L}(\mathbb{E}(\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))$ (onde $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ denota o dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$), tal que:

(i) $\gamma_\eta(u) = (u \cdot \eta)|_{\partial\Omega}$, $\forall u \in \mathbb{D}(\overline{\Omega})$, onde η é o vetor unitário normal à fronteira $\partial\Omega$.

(ii) $\langle \gamma_\eta(u), \gamma_0(w) \rangle_{H^{-1/2}(\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} = (u, \nabla w) + (\nabla \cdot u, w)_{L^2(\Omega)}$, $\forall u \in \mathbb{E}(\Omega)$ e $w \in H^1(\Omega)$, aqui $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Omega)$ é a aplicação traço de ordem zero usual.

Desse modo, é possível caracterizar (veja em Temam [11]) os espaços H e V:

$$H = \{u \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \ \nabla \cdot u = 0 \qquad \gamma_\eta(u) = 0\} \tag{1.7}$$

$$V = \{u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega); \ \ \nabla \cdot u = 0\} \tag{1.8}$$

1.2 Resultados preliminares

Lema 1.2.1. *Se $n = 2$ então*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.9}$$

Demonstração. veja [4]. □

A desigualdade acima é conhecida como desigualdade de Ladyzhenskaya.

Lema 1.2.2. *Suponha que* $u \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ *e* $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. *Então*

(i) u *é contínua de* $[0,T]$ *em* $L^2(\Omega)$, *com*

$$\sup_{t\in[0,T]} |u(t)| \leq C(\|u\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}),$$

e

(ii)

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u', u\rangle$$

para quase todo $t \in [0,T]$, *isto é,*

$$|u(t)|^2 = |u(0)|^2 + 2\int_0^t \langle u'(s), u(s)\rangle ds.$$

Demonstração. Consulte [10]. □

Corolário 1.2.3. *Para algum* $k \geq 0$, *suponha que*

$$u \in L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega)) \quad e \quad u' \in L^2(0,T;H^{k-1}(\Omega)).$$

Então u *é contínua de* $[0,T]$ *em* $H^k(\Omega)$.

Demonstração. Veja [10], p. 193. □

Lema 1.2.4. *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo e seja* x_n *uma sequência limitada em* X. *Então* x_n *tem uma subsequência que converge fracamente em* X.

Demonstração. Ver [10] p. 106 □

1.3 Teorema de Lax-Milgram

Sejam V um espaço de Hilbert com produto interno e norma dados, respectivamente, por $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ e $a : V \times V \to \mathbb{R}$ uma função real defnida em $V \times V$. Dizemos que $a(u,v)$ é uma forma bilinear em $V \times V$ quando $a : V \times V$ é linear em cada uma de suas coordenadas. Dizemos que uma forma bilinear $a(u,v)$ em $V \times V$ é contínua em $V \times V$ se existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

Dizemos que uma forma bilinear contínua $a(u,v)$ em $V \times V$ é coerciva quando existe $C > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq C\|u\|^2, \quad \forall u \in V.$$

Lema 1.3.1 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sejam V um espaço de Hilbert separável e $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva em $V \times V$, então para cada $\phi \in V'$ existe um único $u \in V$ tal que*

$$a(u,v) = \phi(v), \quad \forall v \in V.$$

Demonstração. Veja em Medeiros [8]. □

1.4 Distribuições Vetoriais

Seja X um espaço de Banach, denotaremos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço vetorial das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \to X$ indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em $(0,T)$. O suporte de φ é denotado por $supp(\varphi)$. Diremos que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para uma função $\varphi \in \mathcal{D}(0,T;X)$ em $\mathcal{D}(0,T;X)$ e escrevemos

$$\varphi_\nu \to \varphi \quad \text{em} \quad \mathcal{D}(0,T;X)$$

se:

(i) existe um compacto $K \subset (0,T)$ tal que $supp(\varphi_\nu)$ e $supp(\varphi)$ estão todos contidos em K,

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)} \to \varphi^{(k)}$ em $C([0,T];X)$. Todos os espaços vetoriais aqui considerados serão reais bem como os escalares. $\mathcal{D}(0,T)$ é o espaço das funções testes sobre o intervalo $(0,T)$. Dizemos que uma aplicação $T : \mathcal{D}(0,T) \to X$ é contínua quando para toda sequência $(\theta_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(0,T)$ tal que $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ tem-se $\langle T, \theta_\mu \rangle \to \langle T, \theta \rangle$ em X. Por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ representaremos o espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X, isto é:

$$\mathcal{D}'(0,T;X) = \{T : \mathcal{D}(0,T) \to X;\ T \text{ é linear e contínua}\}.$$

Diremos que uma sequência $(T_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{D}'(0,T;X)$ a uma elemento $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ e escrevemos:

$$T_\mu \to T \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T;X),$$

se

$$\langle T_\mu, \theta \rangle \to \langle T, \theta \rangle \quad \text{em} \quad X, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$$

com valores em X. O espaço $\mathcal{D}'(0,T;X)$ munido com esta noção de convergência é denominado espaço das distribuições vetoriais de $\mathcal{D}(0,T)$ com valores em X.

Para $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ definimos a sua derivada de ordem k, que denotamos por $T^{(k)}$, da seguinte forma:

$$\langle T^{(k)}, \theta \rangle = (-1)^k \langle T, \theta^{(k)} \rangle, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Com esta definição temos que $T^{(k)} \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e o operador derivação é contínuo em $\mathcal{D}'(0,T;X)$, isto é, se $T\mu \to T$ em $\mathcal{D}'(0,T;X)$ então $T_\mu^{(k)} \to T^{(k)}$ em $\mathcal{D}'(0,T;X)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Para uma abordagem completa sobre o espaço das distribuições vetoriais veja [6].

1.5 Resultados de Compacidade

Demonstraremos nesta seção, um teorema de compacidade usado na demonstração do teorema de existência de solução para as equações de Navier-Stokes. Este resultado pode ser encontrado em Aubin [1].

Considere $1 < p_i < +\infty$, $i = 1,2$ e $B_0 \subset B \subset B_1$ espaços de Banach reflexivos sendo as imersões contínuas e $B_0 \subset B$ compacta. Para $0 < T < \infty$, seja

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\}$$

munido da norma:

$$||v||_W = ||v||_{L^{p_0}} + \left|\left| \frac{dv}{dt} \right|\right|_{L^{p_1}} .$$

Temos que W é um espaço de Banach sendo W continuamente imerso em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Teorema 1.5.1. *Com as hipóteses acima sobre $B_0 \subset B \subset B_1$, $0 < p_1 < +\infty$, $i = 1,2$, resulta ser compacta a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$.*

Lema 1.5.2. *Sejam $B_0 \subset B \subset B_1$ nas condições anteriores, então para cada $\varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon)$ tal que*

$$||u||_B \leq \varepsilon ||u||_{B_0} + c(\varepsilon) ||u||_{B_1} \tag{1.10}$$

para todo $u \in B_0$.

Demonstração: Suponha que a tese do Lema 1.5.2 seja falsa. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe u_n em B_0 tal que

$$||u_n||_B > \varepsilon ||u_n||_{B_0} + n ||u_n||_{B_1} . \tag{1.11}$$

Sendo $u_n \neq 0$, faz sentido considerar

$$w_n = \frac{u_n}{||u_n||_{B_0}} \cdot \tag{1.12}$$

De (1.12) e (1.11) obtemos que w_n satisfaz

$$||w_n||_B = \frac{||u_n||_B}{||u_n||_{B_0}} > \varepsilon + n\,\frac{||u_n||_{B_1}}{||u_n||_{B_0}}$$

isto é,

$$||w_n||_B > \varepsilon + n||w_n||_{B_1} \,. \tag{1.13}$$

Como B_0 está continuamente imerso B, temos

$$||w_n||_B = \frac{||u_n||_B}{||u_n||_{B_0}} \leq C. \tag{1.14}$$

De (1.13) e (1.14) resulta

$$\frac{\varepsilon}{n} + ||w_n||_{B_1} < \frac{||w_n||_B}{n} < \frac{C}{n}\,,$$

o que implica que

$$\lim_{n\to\infty} ||w_n||_{B_1} = 0. \tag{1.15}$$

Sendo B_0 reflexivo e de (1.12) $||w_n||_{B_0} = 1$, concluimos que existe uma subsequência de (w_n) que converge fraco em B_0 e como $B_0 \subset\subset B$, existe uma subsequêcia (w_ν) que converge forte em B para um vetor w. Do fato de que $B \hookrightarrow B_1$, juntamente com (1.15) resulta que (w_ν) converge forte para zero em B. Logo $w = 0$, o que é contradição, poois $||w_\nu||_B > \varepsilon > 0$, e isto finaliza a demosntração do lema.

Demonstração do Teorema 1.5.1

Devemos mostrar que de toda sequência (v_n) limitada em W, possui uma subsequência, ainda representada por (v_n), que converge forte para um v em $L^{p_0}(0, T; B)$. A demonstração será feita no caso $v = 0$, sem perda de generalidade.

Do Lema 1.5.2, para cada $\varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$||v_n(t)||_B \leq \varepsilon||v_n(t)||_{B_0} + c(\varepsilon)||v_n(t)||_{B_1}$$

pois $v_n \in W$. Tomando a norma $L^{p_0}(0, T)$ de ambos os membros, obtemos que para cada $\eta > 0$ existe $d(\eta) > 0$ tal que

$$||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B)} \leq \eta||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + d(\eta)||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B_1)} \,. \tag{1.16}$$

Sendo (v_n) limitada em W, obtemos

$$||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \leq ||v_n||_W < C.$$

Logo, de (1.16), obtemos

$$||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B)} \leq c\eta + d(\eta)||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B_1)}\,. \tag{1.17}$$

Como W é reflexivo, pois os B_i o são, resulta que a sequência (v_n) possui uma sequência (v_n) tal que $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em W. De (1.17) e da arbitrariedade do $\eta > 0$, para mostarmos que (v_n) converge forte em $L^{p_0}(0,T;B)$, e isto implica que implica a imersão compacta de W neste espaço, é suficiente verificar que (v_n) converge para zero forte em $L^{p_0}(0,T;B_1)$.

De fato, temos que a imersão de W em $C^0([0,T];B_1)$ é contínua Lions-Magenes [7]. Logo,

$$||v_n(s)||_{B_1} \leq ||v_n||_{C^0([0,T];B_1)} \leq C_0||v_n||_W < K, \tag{1.18}$$

sendo K constante, pois (v_n) é limitada em W.

Se demonstrarmos que $||v_n(s)||_{B_1}$ converge para zero quase sempre em $(0,T)$, obtemos de (1.18) que $||v_n(s)||_{B_1}^{p_0}$ é limitada e $||v_n(s)||_{B_1}^{p_0}$ converge para zero em $(0,T)$. Logo o teorema da convergência dominada de Lebesgue, garante que $||v_n||_{B_1}^{p_0}$ converge para zero em $L(0,T)$, isto é (v_n) converge para zero em $L^{p_0}(0,T;B_1)$. Retornando a (1.17) conclui-se que (v_n) converge para zero em $L^{p_0}(0,T;B)$ provando a compacidade da imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Portanto, resta apenas demonstrar que $||v(s)||_{B_1}$ converge para zero em $(0,T)$. Limitaremos ao ponto $s = 0$. De fato, seja w_n definida por

$$w_n(t) = v_n(\lambda t), \quad \lambda > 0 \quad \text{a fixar.}$$

Obtemos

$$w_n(0) = v_n(0)$$

$$||w_n(t)||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \leq C_1\,\lambda^{-\frac{1}{p_0}}$$

$$||w_n'(t)||_{L^{p_0}(0,T;B_1)} \leq C_2\,\lambda^{1-\frac{1}{p_0}}.$$

Seja $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ sendo $\theta(0) = -1, \quad \theta(T) = 0$. Tem-se:

$$w_n(0) = \int_0^T (\theta w_n)'\,dt = \int_0^T \theta w_n'\,dt + \int_0^T \theta' w_n\,dt =_n + \gamma_n$$

isto é,

$$w_n(0) =_n + \gamma_n \,.$$

Resulta que

$$||w_n(0)||_{B_1} \leq ||_n||_{B_1} + ||\gamma_n||_{B_1} \leq C_3\, \lambda^{1-\frac{1}{p_0}} + ||\gamma_n||_{B_1} \,.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, considere $\lambda > 0$ tal que $C_3\, \lambda^{1-\frac{1}{p_0}} < \varepsilon/2$. Resulta que

$$v_n(0) = w_n(0) \to B_1$$

se demonstrarmos que

$$||\gamma_n||_{B_1} \to 0$$

isto é, se $\gamma_n \to 0$ em B_1 forte.

De fato, tem-se $v_n \rightharpoonup 0$ em W. Sendo $W \subset L^{p_0}(0,T;B_0)$ resulta que $v_n \rightharpoonup 0$ $L^{p_0}(0,T;B_0)$. Logo, para $\lambda > 0$ fixo, resulta que $w_n \rightharpoonup 0$ em $L^{p_0}(0,T;B_0)$. Seja

$$\gamma_n = \int_0^T \theta' w_n\, dt, \text{ integral em } B_0\,, \;\; \gamma_n \in B_0\,.$$

Para toda $\psi \in B_0'$, dual de B_0, tem-se

$$\psi(\gamma_n) = \int_0^T \theta'\, \gamma(w_n)\, dt,$$

que converge para zero. Logo $\gamma_n \rightharpoonup 0$ em B_0. Sendo $B_0 \subset B$ compacta, resulta que $\gamma_n \to 0$ em B forte, o que completa a demonstração. Note que resta apenas o cuidado de tomar subsequências.

Capítulo 2
SOLUÇÕES PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre existência, unicidade e regularidade de soluções para as equações de Navier-Stokes para $n = 2$. Antes, porém, será estudado um problema estacionário simples. Os resultados aqui reproduzidos bem como suas demonstrações podem ser encontrados em Medeiros [8].

2.1 O Problema de Stokes

Em lugar do $\mathbb{R}^2$, considere-se o $\mathbb{R}^n$ e Ω um aberto limitado conexo do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ bem regular.

Consideremos, inicialmente, o problema que consiste em determinar uma função $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um vetor do $\mathbb{R}^n$, definida em Ω, satisfazendo as condições:

$$-\nu \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.2}$$

$$u_i = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \tag{2.3}$$

sendo $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ conhecida.

Procurando uma formulação variacional para o sistema linearizado de Stokes, multipliquemos ambos os membros de (2.1) por um vetor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $(H_0^1(\Omega))^n$ e integremos sobre Ω. Procedendo formalmente, obtemos

$$-\int_\Omega \nu \Delta u_i v_i \, dx + \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \, dx = \int_\Omega f_i v_i \, dx$$

isto é,

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx - \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i} p \, dx = \int_\Omega f_i v_i \, dx.$$

Somando em i, obtemos

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx - \int_\Omega p \operatorname{div} v \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i v_i \, dx.$$

Restringindo os vetores v ao espaço de Hilbert V, resulta que $\operatorname{div} v = 0$, logo o problema reduz-se a encontrar u em V tal que

$$\nu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i v_i \, dx \tag{2.4}$$

para todo v em V.

Para demonstrar a existência e unicidade de u em V solução de (2.4), será aplicado o Lema de Lax-Milgram. Considere a forma bilinear

$$a(u,v) = \nu \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx$$

definida para u, v em V. Tem-se

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \nu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx \\ &\leq \nu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |\nabla u_i|_{\mathbb{R}^n} \, |\nabla v_i|_{\mathbb{R}^n} \, dx \\ &\leq \nu \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_i|^2_{\mathbb{R}^n} \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v_i|^2_{\mathbb{R}^n} \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \nu ||u|| \, ||v|| \end{aligned}$$

provando ser $a(u,v)$ contínua em V.

Sendo para todo v em V,

$$a(v,v) = \nu \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx = \nu \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |\nabla v_i|^2_{\mathbb{R}^n} \, dx = \nu ||v||^2$$

conclui-se que $a(u,v)$ é coerciva.

Para todo $f \in H$, a aplicação

$$f \to \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i v_i \, dx = (f,v), \quad v \in V, \tag{2.6}$$

é uma forma linear contínua em V, conseqüência simples da desigualdade de Schwarz.

Portanto, sendo $a(u,v)$ uma forma bilinear contínua, coerciva em V e $f \to (f,v)$ definida por (2.6) uma forma linear contínua em V para todo $f \in H$, conclui-se, do Lema de Lax-Milgram, que existe um único $u \in V$ tal que

$$a(u,v) = (f,v) \quad \text{para todo } v \text{ em } V. \tag{2.7}$$

Observação 2.1.1. Para cada u fixado a aplicação $v \in V \mapsto a(u,v)$ define um funcional linear contínuo em V. Assim podemos definir o operador $A : V \to V'$ definido por

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v)$$

e a equação 2.7 pode ser vista como

$$\nu A = f,$$

em V'. O operador A é um isomorfismo entre V e V' [**?**].

A etapa seguinte do presente argumento, seria relacionar a solução u de (2.7) como problema original formulado para o sistema (2.1), que é a parte mais delicada desta análise. Com o objetivo de tornar inteligível este ponto, será caracterizado, inicialmente, o dual de V.

Do estudo dos espaços de Sobolev sabe-se que o dual de $(H_0^1(\Omega))^n$ identifica-se ao espaço $(H^{-1}(\Omega))^n$, sendo $H^{-1}(\Omega)$ o dual de $H_0^1(\Omega)$. Será demonstrado que se L pertencente a $(H^{-1}(\Omega))^n$ for tal que $L(v) = 0$ para toda $v \in V$, então existe uma função $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que $L = \nabla p$, isto é,

$$L(v) = \int_\Omega p \operatorname{div} v \, dx \tag{2.8}$$

para todo $v \in V$. Assim, ficam caracterizadas por meio de (2.8) as formas lineares contínuas sobre $(H_0^1(\Omega))^n$ que se anulam em V.

Observação 2.1.2. A demonstração a ser reproduzida aqui supõe Ω com fronteira Γ regular. O caso geral de Ω com fronteiras gerais, encontra-se em Temam [12].

Denotemos por $d(x)$ a distância de um ponto x de Ω a fronteira Γ. Tem-se que $d(x)$ é uma função Lipschitziana em Ω. Resolve-se a equação

$$\operatorname{div}(d(x)\nabla\phi) = g \quad \text{em} \quad \Omega$$

usando resultados do estudo de equações elíticas degeneradas. Demonstra-se que existe $\phi \in H^2(\Omega)$ solução do problema e que a aplicação $g \to \phi$ é contínua de $L_0^2(\Omega)$ em $H^2(\Omega)$, sendo

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ g \in L^2(\Omega);\ \int_\Omega g(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Deduz-se que existe uma aplicação $p\colon L_0^2(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^n$ linear e contínua, definida por

$$pg = d(x)\nabla\phi.$$

De fato, $\phi \in H^2(\Omega)$ $\quad d(x)\,\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$, logo $pg \in (H_0^1(\Omega))^n$ e

$$\operatorname{div} pg = g. \tag{2.9}$$

Dado um $f \in V'$, o mesmo argumento usado em (2.7) garante a existência de um único u em V tal que

$$a(u,v) = (f,v)_{V'\times V} \quad \text{para todo} \quad v \in V. \tag{2.10}$$

A idéia é aproximar a solução u de (2.10) por soluções de um problema penalizado em $(H_0^1(\Omega))^n$. Do Lema de Lax-Milgram, conclui-se que para cada $\alpha > 0$, existe $u_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$ tal que

$$a(u_\alpha, v) + \frac{1}{\alpha}\,(\operatorname{div} u_\alpha, \operatorname{div} v) = (f,v)_{V'\times V} \tag{2.11}$$

para todo $v \in (H_0^1(\Omega))^n$.

Demonstremos a seguir, que u_α converge fraco em $(H_0^1(\Omega))^n$ para u, solução de (2.10). De fato, substituindo $v = u_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$ em (2.11), obtemos

$$||u_\alpha|| < C \quad \text{independente de} \quad \alpha > 0. \tag{2.12}$$

Fazendo-se

$$p_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\operatorname{div} u_\alpha\,,$$

obtém-se de (2.11):

$$a(u_\alpha, v) = (f,v)_{V'\times V} + (p_\alpha, \operatorname{div} v), \tag{2.13}$$

para todo $v \in (H_0^1(\Omega))^n$, sendo

$$\int_\Omega p_\alpha\, dx = -\frac{1}{\alpha}\int_\Omega \operatorname{div} u_\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_\Gamma u_\alpha\, \nu\, d\Gamma = 0, \tag{2.14}$$

porque $u_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$.

A seguir será demonstrado que p_α é limitado em $L^2(\Omega)$. De fato, $p_\alpha \in L_0^2(\Omega)$, como visto em (2.14). Logo, por (2.9) existe $v_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$ tal que

$$\operatorname{div} v_\alpha = p_\alpha \tag{2.15}$$

e

$$||v_\alpha|| \leq C|p_\alpha|, \tag{2.16}$$

porque $p_\alpha \colon L_0^2(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^n$ é contínua.

Tomando $v = v_\alpha \in (H_0^1(\Omega))^n$ em (2.13), observando a (2.15), obtemos

$$|p_\alpha|^2 = a(u_\alpha, v_\alpha) - (f, v_\alpha)_{V' \times V} \leq K||u_\alpha||\,||v_\alpha|| + |f|_{V'}\,||v_\alpha||.$$

De (2.12) e (2.16), concluímos que

$$|p_\alpha| < \text{ constante.}$$

Logo, existe uma subsequência ainda representada por p_α tal que

$$p_\alpha \rightharpoonup p \quad \text{fraco em} \quad L^2(\Omega).$$

De (2.12) existe uma subsequência u_α tal que

$$u_\alpha \rightharpoonup w \quad \text{fraco em} \quad (H_0^1(\Omega))^n.$$

Tomando o limite na equação penalizada (2.11), obtemos

$$a(w, v) = (f, v)_{V' \times V} + (p, \operatorname{div} v) \tag{2.17}$$

para todo $v \in (H_0^1(\Omega))^n$.

Em particular, para $v \in V \subset (H_0^1(\Omega))^n$, em (2.17), obtemos que w é solução de

$$a(w, v) = (f, v)_{V' \times V} \quad \text{para todo } v \text{ em } V.$$

Comparando com (2.10), resulta que $w = u$, pois a solução u de (2.10) é única.

Concluímos que a solução de (2.10) é obtida como limite fraco de soluções da equação penalizada (2.11) ou (2.13).

Seja $f \in (H^{-1}(\Omega))^n$ tal que $(f, v)_{V' \times V} = 0$ para todo $v \in V$. Então a solução u de (2.10) é a solução $u = 0$. Retornando à equação (2.17), onde já demonstrou-se que $w = u$, obtemos

$$(f, v)_{V' \times V} + (p, \operatorname{div} v) = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in (H_0^1(\Omega))^n \tag{2.18}$$

isto é,

$$(f, v)_{V' \times V} + (-\nabla p, v) = 0$$

para todo $v \in (H_0^1(\Omega))^n$, provando que

$$f = \nabla p.$$

Note que $p \in L^2_0(\Omega) = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ resolve o problema. Assim existe $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que $f = \nabla p$.

Concluímos de (2.18) que se L for uma forma linear contínua sobre $(H^1_0(\Omega))^n$ que se anula em V, então existe um único $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que

$$L(v) = \int_\Omega p \operatorname{div} v \, dx \tag{2.19}$$

para todo $v \in (H^1_0(\Omega))^n$.

É claro que para todo $p \in L^2(\Omega)$ a (2.19) define uma forma linear contínua em $(H^1_0(\Omega))^n$ nula em V.

A seguir, usando a caracterização (2.19), será feita a interpretação da solução u de (2.7).

De fato, seja $u \in V$ solução de (2.7). Considere a forma linear contínua $L(v)$ definida em $(H^1_0(\Omega))^n$ do modo seguinte:

$$L(v) = a(u,v) - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i v_i \, dx \tag{2.20}$$

sendo $f \in H$. Sendo u solução de (2.7), resulta que $L(v) = 0$ para todo v em V, sendo $L(v)$ definida por (2.20). De (2.19) concluímos que existe $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que

$$L(v) = \int_\Omega p \operatorname{div} v \, dx,$$

para todo $v \in (H^1_0(\Omega))^n$. Logo, o par u, p de $V \times H$ é solução de

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_\Omega p \operatorname{div} v \, dx, \tag{2.21}$$

para todo $v \in (H^1_0(\Omega))^n$. Sendo $(\mathcal{D}(\Omega))^n$ contido em $(H^1_0(\Omega))^n$, restringindo-se v a $(\mathcal{D}(\Omega))^n$ em (2.22), conclui-se que existe uma única $u \in V$ tal que

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u_i &= f_i - \tfrac{\partial p}{\partial x_i}\,, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ em } \Omega \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u_i &= 0 \quad \text{em} \quad \Gamma, \end{aligned}$$

isto é, solução do problema de Stokes.

2.2 *Sistema de Navier-Stokes no* $\mathbb{R}^2$

Embora nosso objetivo seja estudar o caso $n = 2$, os problemas serão formulados no caso geral para não gerar dúvidas desnecessárias. Iniciaremos com certas notações. Considera-se o cilindro $Q = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$ e o vetor velocidade $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Serão adotadas as seguintes notações:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial t}\right); \quad \Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \ldots, \Delta u_n).$$

As equações de Navier-Stokes tomam a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f - \nabla p, \quad \nu > 0 \tag{2.22}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{2.23}$$

com as condições de fronteira e iniciais seguintes:

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \quad \text{isto é} \quad u_i = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \tag{2.24}$$

sendo Σ a fronteira lateral de Q

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ em } \Omega, \text{ isto é, } u_i(x,0) = u_{0i}(x) \tag{2.25}$$

em Ω.

O problema a resolver consiste em determinar u e p satisfazendo às condições (2.22)...(2.25).

Antes da formulação correta, estabelecemos mais alguma notação.

Considera-se a forma trilinear $b(u, v, w)$ definida para u, v, w em V, do modo seguinte:

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, dx.$$

Uma primeira propriedade desta forma trilinear é a seguinte:

Lema 2.2.1. *$b(u, v, w) + b(u, w, v) = 0$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} b(u,v,w) + b(u,w,v) &= \sum_{ij} \left(\int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, dx + \int_\Omega u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i \, dx \right) \\ &= \sum_{ij} \int_\Omega u_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i \right) dx \\ &= \sum_{ij} \int_\Omega u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i w_i) \, dx \\ &= \sum_{ij} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \, dx, \end{aligned} \tag{2.26}$$

pois a contribuição na fronteira Γ é nula, de vez que $u, v, w \in V$. Esta última integral é nula porque $\operatorname{div} u = 0$.

Note que sendo $b(u,v,w) + b(u,w,v) = 0$, segue-se que $b(u,v,w) = 0$ toda vez que $v = w$.

Lema 2.2.2. $|b(u,v,w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|v\||w|^{1/2}\|w\|^{1/2}, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.

Para a demonstração deste lema, veja [13].

Problema 1. Dados

$$f \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^2), \quad u_0 \in H, \tag{2.27}$$

determinar u e p, sendo $p \in \mathcal{D}'(Q)$ tais que

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \tag{2.28}$$

$$u' - \nu\Delta u + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \nabla p \text{ em } \mathcal{D}'(Q) \tag{2.29}$$

$$u(0) = u_0\,. \tag{2.30}$$

A solução do Problema 1, satisfaz às condições (2.22)...(2.25).

Problema 2. Dados

$$f \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^2), \quad u_0 \in H$$

determinar u tal que

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \tag{2.31}$$

$$(u'(t), v) + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \text{ em } \mathcal{D}'(0,T) \tag{2.32}$$

para todo $v \in V$.

$$u(0) = u_0\,. \tag{2.33}$$

O plano que se tem em mente consiste em demonstrar a equivalência dos dois problemas e a seguir resolver o Problema 2.

- Se u for solução do Problema 1 então u é solução do Problema 2.

De fato, seja u solução do Problema 1 e $\varphi \in \mathcal{V} = \{\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega)^2); \operatorname{div} \varphi = 0\}$. Multiplicando ambos os membros de (37) por φ e integrando, obtemos

$$(u'(t), \varphi) + \nu a(u(t), \varphi) + b(u(t), u(t), \varphi) = (f(t), \varphi) - (\nabla p, \varphi).$$

Sendo $(\nabla p, \varphi) = 0$ para φ com $\operatorname{div} \varphi = 0$, obtemos

$$(u'(t), \varphi) + \nu a(u(t), \varphi) + b(u(t), u(t), \varphi) = (f(t), \varphi)$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$. Sendo $\mathcal{V}$ denso em $V = \{v \in (H_0^1(\Omega))^2; \operatorname{div} v = 0\}$ resulta que u é solução do Problema 2.

- Se u for solução do Problema 2 então u é solução do Problema 1.

  Veja demonstração em Temam [12]. A solução do Problema 2 denomina-se solução fraca.

Teorema 2.2.3. *Sejam $f \in L^2(0,T;V')$, $u_0 \in H$, então existe uma única ($n = 2$) u satisfazendo as condições*

$$u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \tag{2.34}$$

$$u' \in L^2(0,T;V') \tag{2.35}$$

$$(u'(t), v) + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \tag{2.36}$$

para todo v em V, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

$$u(0) = u_0 \,. \tag{2.37}$$

Observação 2.2.1. De $u \in L^2(0,T;V)$, $u' \in L^2(0,T;V')$, sendo $V \subset H = H' \subset V'$, imersões contínuas, resulta que u é contínua de $[0,T]$ com valores em V'; também de $[0,T]$ com valores em $[V,V']_{1/2} = H$ e fracamente contínua com valores em V. Consulte Lions-Magenes [7]. Resulta desta observação fazer sentido calcular-se $u(0)$.

A demonstração do Teorema 2.2.3, será feita usando o método de Galerkin, este consistindo em obter a solução do problema por meio de soluções aproximadas de problemas análogos em espaços de dimensão finita. Para isso é fundamental a obtenção de estimativas sobre as soluções aproximadas permitindo a obtenção de sequências convergentes. Antes disso apresentamos alguns lemas técnicos necessários na obtenção de tais estimativas.

Lema 2.2.4. *A forma trilinear $b(u,v,w)$ é contínua em $V \times V \times V$.*

Demonstração: Do teorema de imersão de Sobolev, temos que $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} > 0$. Quando $n = 2$, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} = 0$ e a imersão de $H_0^1(\Omega)$ faz-se continuamente em $L^q(\Omega)$, qualquer que seja o número real $q \in [2, +\infty)$. Portanto, para $n = 2$ pode-se tomar $q = 4$, isto é, $H_0^1(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^4(\Omega)$.

Temos

$$|b(u,v,w)| \leq \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \int_\Omega \left| u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \right| dx. \tag{2.38}$$

Note

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_j w_i| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx &\leq \left(\int_\Omega |u_j w_i|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\left(\int_\Omega |u_j|^4 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |w_i|^4 \, dx \right)^{1/2} \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \qquad (2.39) \\
&= \left(\int_\Omega |u_j|^4 \, dx \right)^{1/4} \left(\int_\Omega |w_i|^4 \, dx \right)^{1/4} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2}, \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Hölder generalizada com $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 1$,

$$\int_\Omega \left| u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \right| dx \leq |u_j|_{L^4(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} |w_i|_{L^4(\Omega)} . \tag{2.41}$$

Substituindo (2.41) em (2.38) e usando teorema de imersão, obtemos

$$|b(u,v,w)| \leq \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} ||u_j||_{H_0^1(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} ||w_i||_{H_0^1(\Omega)}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
|b(u,v,w)| &\leq C \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} ||u_j||^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} ||w_i||_{H_0^1(\Omega)} \\
&= C||u||_V \sum_{i=1}^{2} ||v_i||_{H_0^1(\Omega)} \, ||w_i||_{H_0^1(\Omega)} \leq C||u||_V \, ||v||_V \, ||w||_V \, ,
\end{aligned}$$

provando a continuidade de $b(u,v,w)$ em $V \times V \times V$.

Resulta do Lema 2.2.4 que fixados u e v, a aplicação $w \to b(u,v,w)$ é uma forma linear contínua em V. Definamos, por esta razão, uma aplicação $B(u,v)$ de $V \times V$ em V' do modo seguinte:

$$\langle B(u,v), w \rangle = b(u,v,w),$$

sendo $B(u,v)$ bilinear e contínua.

Lema 2.2.5. *Se $u, v \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ então $B(u,v) \in L^2(0,T;V')$.*

Demonstração: Sendo $B(u,v)$ bilinear contínua de $V\times V$ em V', obtemos

$$|B(u,v)|_{V'} \leq C||u||_V\,||v||_V \leq \frac{C}{2}\,(||u||_V^2 + ||v||_V^2),$$

provando que $B(u,v)\in L^1(0,T;V')$. Para provar que ela é $L^2(0,T;V')$, considere

$$\langle B(u,v,w)\rangle = b(u,v,w) = -b(u,w,v) = -\langle B(u,v),w\rangle.$$

Resulta que

$$|\langle B(u,v),w\rangle| = |b(u,w,v)| \leq C|u|^2_{(L^4(\Omega))^2}\,||w||_V\,|v|^2_{(L^4(\Omega))^2}\,,$$

por (2.41), usando um argumento análogo ao usado na demonstração do Lema 2.2.4. Daí obtemos

$$||B(u,v)||_{V'} \leq C|u|^2_{(L^4(\Omega))^2}\,|v|^2_{(L^4(\Omega))^2}\,, \tag{2.42}$$

sendo

$$|u|^4_{(L^4(\Omega))^2}\,|v|^4_{(L^4(\Omega))^2} \leq \left(\sum_{j=1}^{2}|u_j|^2_{L^4(\Omega)}\right)\left(\sum_{j=1}^{2}|v_j|^2_{L^4(\Omega)}\right),$$

que substituindo em (2.42) tomando o quadrado de ambos os membros e aplicando o Lema 1.2.1, obtemos

$$||B(u,v)||^2_{V'} \leq C\sum_{j=1}^{2}|u_j|_{L^2(\Omega)}\,||u_j||_{H_0^1(\Omega)}\sum_{j=1}^{2}|v_j|_{L^2(\Omega)}\,||v_j||_{H_0^1(\Omega)}$$

isto é,

$$||B(u,v)||^2_{V'} \leq$$
$$\leq C\left(\textstyle\sum_{j=1}^{2}|u_j|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{2}||u_j||^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{2}|v_j|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{2}||v_j||^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{1/2}$$

isto é,

$$||B(u,v)||^2_{V'} \leq C|u|_H\,||u||_V\,|v|_H\,||v||_V \leq K||u||_V\,||v||_V\,,$$

que demonstra ser $B(u,v)\in L^2(0,T;V')$ quando u e v estão nas condições do Lema 2.2.5.

Demonstração da Unicidade no Teorema 2.2.3

Note que a solução $u\in L^2(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;H)$, sendo $u'\in L^2(0,T;V')$. Logo, faz sentido calcular $\langle u',v\rangle$ para todo $v\in V$. Por esta razão é relativamente simples demonstrar a unicidade no caso $n=2$. Quando $n\geq 2$, $H_0^1(\Omega)\subset L^q(\Omega)$, mas $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}>0$, perdendo a arbitrariedade providencial do q, como no caso $n = 2$. Tal dificuldade irá se refletir nas estimativas das soluções aproximadas.

Sejam u e $\hat{u}$ duas soluções nas condições do Teorema 2.2.3, com $n = 2$. Fazendo $w = u - \hat{u}$, resulta que

$$(w'(t), v) + \nu a(w(t), v) + b(u(t), u(t), v) - b(\hat{u}(t), \hat{u}(t), v) = 0 \tag{2.43}$$

para todo $v \in V$, no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$.

$$w(0) = 0. \tag{2.44}$$

Observação 2.2.2. Note que

$$\begin{aligned} b(u, u, v) - b(\hat{u}, \hat{u}, v) &= b(u - \hat{u} + \hat{u}, u, v) - b(\hat{u} - u + u, \hat{u} - u + u, v) \\ &= b(w, u, v) + b(\hat{u}, u, v) - b(-w, -w, v) \\ &\quad -b(-w, u, v) - b(u, -w, v) - b(u, u, v) \\ &= b(w, u, v) - b(w, u, v) - b(w, w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) \\ &= b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v). \end{aligned}$$

Da Observação acima, a equação (2.43) se torna

$$(w', v) + \nu a(w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v) = 0 \tag{2.45}$$

para todo v em V, no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$,

$$w(0) = 0. \tag{2.46}$$

Tomando $v = w \in V$ em (2.45), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu a(w, w) + b(w, u, w) + b(u, w, w) - b(w, w, w) = 0$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu||w(t)||^2 &\leq -b(w, u, w) \\ &\leq C|w|_{(L^4(\Omega))^2}\,||u||_V\,|w|_{(L^4(\Omega))^2} \\ &\leq C|w|^2_{(L^4(\Omega))^2}\,||u||_V \\ &\leq C|w|\,||w||_V\,||u||_V\,, \end{aligned} \tag{2.47}$$

pelo Lema 1.2.1. Logo

$$\frac{d}{dt}\,|w(t)|^2 + \nu||w(t)||^2 \leq \nu||w||_V^2 + \frac{C^2}{\nu}\,|w|^2\,||u||_V^2\,,$$

de onde resulta que:

$$\frac{d}{dt}\,|w(t)|^2 \leq \frac{C^2}{\nu}\,||u||_V^2\,|w|^2. \tag{2.48}$$

Fazendo $\theta(t) = \dfrac{C^2}{\nu}\,||u(t)||_V^2\,, \quad \varphi(t) = ||w(t)||_V^2\,$, vem

$$\theta \in L^1(0,T) \quad \text{e} \quad \varphi \in C^1([0,T];\mathbb{R}),$$

satisfazem a desigualdade

$$\varphi'(t) \leq \theta(t)\varphi(t).$$

Daí resulta que $\varphi(t) = 0$ em $[0,T]$, provando que $w(t) = 0$ em $[0,T]$, isto é, $u(t) = \hat{u}(t)$ em $[0,T]$, concluindo-se a unicidade.

Observação 2.2.3. Note que, usando o lema de gronwall em 2.48 obtemos

$$|w|^2 \leq \;\exp\left(\int_0^t \frac{C^2}{\nu}\|u(s)\|ds\right)|w(0)|^2,$$

como $u \in L^2(0,T,V)$ a integral é finita, isto é, obtemos

$$|u(t) - v(t)| \leq L(T)|u_0 - v_0|, \qquad 0 \leq t \leq T$$

o que nos dá a continuidade em relação as condições iniciais.

Demonstração da Existência no Teorema 2.2.3

Usaremos o método de Galerkin e escolhemos uma base especial de funções próprias. Para isto, suponhamos que a imersão de V em H seja contínua, densa e compacta. Identificando-se $H = H' \subset V'$, continuamente. Assim, V e H são espaços de Hilbert tais que

$$V \subset H \subset V'.$$

Fazendo $a(u,v) = ((u,v))$ que é o produto escalar em V, o problema espectral

$$((u,v)) = \lambda(u,v),$$

sendo (u,v) o produto escalar em H, possui solução (w_i) correspondentes aos valores próprios (λ_i). Sabe-se que $\lambda_i > 0$ para todo i, a sequência dos λ_j é crescente e divergente para mais infinito. Obtemos

$$((w_i,v)) = \lambda_i(w_i,v), \qquad i = 1,2,\ldots,$$

para todo v em V.

Cálculo de Normas

i) Sendo (w_i) ortonormal completo em H, para v em H, obtemos

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} (v, w_i) w_i \, ,$$

sendo, pelo teorema de Parseval

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(v, w_i)|^2$$

que é a norma de v em H.

ii) Temos

$$((w_i, v)) = \lambda_i (w_i, v)$$

para todo v em V. Resulta que $(w_i/\sqrt{\lambda_i})$ é ortonormal e completa em V. Portanto, para todo v em V, obtemos

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(v, \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \right) \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}} \, .$$

Daí resulta:

$$\begin{aligned} ||v||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \left(\left(v, \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \right) \right|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \, |((v, w_i))|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \, |\lambda_i (v, w_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |(v, w_i)|^2, \end{aligned}$$

que é a norma de v em V.

iii) Seja A o operador definido pela forma bilinear $((\ ,\ ))$. Temos $A w_i = \lambda_i w_i$, sendo A linear e contínuo de V sobre V' aliás, A é um isomorfismo entre V e V'. Definimos

$$||v||_{V'} = ||A^{-1} \, v||_V \, .$$

Por (ii) obtemos

$$\begin{aligned} ||v||_{V'}^2 = ||A^{-1} v||_V^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |(A^{-1} v, w_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |(v, A^{-1} w_i)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |(v, w_i/\lambda_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} |(v, w_i)|^2. \end{aligned}$$

Concluímos que a norma de v em V' é

$$||v||_{V'}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} |(v, w_i)|^2.$$

Sistema Aproximado

Considere os vetores (w_i), solução de $((w_i, v)) = \lambda_i(w_i, v)$, obtido anteriormente. Representemos por V_m o subespaço de dimensão m de V gerado pelos m primeiros vetores $w_1, w_2, \ldots, w_m$. Para cada m, considere $u_m \in V_m$ definida por

$$(u'_m(t), v) + \nu a(u_m(t), v) + b(u_m(t), u_m(t), v) = (f(t), v), \tag{2.49}$$

para todo $v \in V_m$.

$$u_m(0) = u_m \quad \text{sendo} \quad \lim u_{0m} = u_0 \quad \text{forte em} \quad H. \tag{2.50}$$

Para escrever (2.49) explicitamente, substituímos

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j\,,$$

no sistema (2.49), tomando $v = w_i$, obtemos

$$g'_{im}(t) + \nu\lambda_i g_{im}(t) + F(g_{1m}(t), g_{2m}(t), \ldots, g_{mm}(t)) = f_i \tag{2.51}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$, porque

$$a(u_m, w_i) = ((u_m, w_i)) = \lambda_i(u_m, w_i) = \lambda_i g_{im}(t)$$

e

$$(u'_m, w_i) = g'_{im}(t).$$

Relativamente à condição inicial, obtemos

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} c_{jm}\, w_j\,, \quad g_{im}(0) = c_{im}\,. \tag{2.52}$$

Resulta que o sistema (2.51), (2.52) possui uma solução $(g_{im})_{1 \le i \le m}$ em um intervalo $[0, t_m)$. As estimativas a serem obtidas demonstram que u_m pode ser prolongada no intervalo $[0, T)$.

Estimativa I

Tomando $v = u_m(t)$ em (2.49), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu||u_m(t)||^2 \le ||f||_{V'}\,||u_m(t)||_V\,,$$

porque $b(u_m, u_m, u_m) = 0$. Sendo

$$||f||_{V'}\,||u_m(t)||_V \leq \frac{1}{\nu}\,||f||_{V'}^2 + \nu||u(t)||_{V'}^2\,,$$

segue que

$$\frac{d}{dt}\,||u_m(t)||^2 + \nu||u_m(t)||^2 \leq \frac{1}{\nu}\,||f||_{V'}^2\,. \tag{2.53}$$

Integrando (2.53) de 0 a $t < t_m$, obtemos

$$|u_m(t)|^2 + \nu \int_0^t ||u_m(s)||^2\,ds \leq ||u_m(0)||^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T ||f(s)||_{V'}^2\,ds. \tag{2.54}$$

De (2.54) encontramos uma estimativa para $|u_m(t)|$ na norma de H, independente de m e t em $[0, t_m)$. Resulta que o prolongamento ao intervalo $[0, T)$ é possível. Retornando à (2.54) obtemos

$$u_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; H) \tag{2.55}$$

$$u_m \quad \text{é limitada} \quad L^2(0, T; V) \tag{2.56}$$

Estimativa II

Seja $h_m = f - \nu\Delta u_m - B(u_m, u_m)$. Sabe-se que $B(u_m, u_m)$ pertence a $L^2(0, T; V')$, sendo

$$||B(u_m, u_m)||_{V'} \leq ||u_m||^2\,.$$

De u_m limitada em $L^2(0, T; V)$, concluímos que $B(u_m, u_m)$ é limitada em $L^2(0, T; V)$. Sendo $-\Delta$ pertencente a $\mathcal{L}(V, V')$ e $f \in L^2(0, T; V')$, resulta que h_m pertence a um limitado de $L^2(0, T; V')$.

Cálculo da norma de $\frac{du_m}{dt}$ em V'

$$\begin{aligned}\left\|\frac{du_m}{dt}\right\|_{V'}^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{-1}\left|\left(\frac{du_m}{dt}, w_i\right)\right|^2 \quad &= \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i^{-1}\,|(h_m, w_i)|^2 \\ &\leq \quad \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^{-1}\,|(h_m, w_i)|^2 = ||h_m(t)||_{V'}^2\end{aligned}$$

que é limitada em $L^1(0, T)$. Concluímos:

$$\frac{du_m}{dt} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0, T; V'). \tag{2.57}$$

Observação 2.2.4. Note que para a obtenção da estimativa (2.55), usamos uma base especial de vetores próprios do problema espectral $((w,v)) = \lambda(w,v)$.

De (2.55), (2.56), (2.57) deduzimos a existência de uma sequência de u_m , ainda representada por u_m , tal que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V) \tag{2.58}$$

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H) \tag{2.59}$$

$$\frac{du_m}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V') \tag{2.60}$$

Estas convergências não são suficientes para passarmos ao limite com sucesso na equação aproximada. Para obtermos convergências que permitam tomar o limite no termo não linear $b(u_m,u_m,v)$, lancemos mão do teorema de compacidade (Teorema1.5.1) apresentado na seção 1.5 do Capítulo 1.

Aplicando o teorema de compacidade, quando $B_0 = V$, $B = H$, $B_1 = V'$, $p_0 = p_1 = 2$, obtém-se

$$W = \left\{ v \in L^2(0,T;V);\ \frac{dv}{dt} \in L^2(0,T;V') \right\}.$$

Notando as estimativas (2.56) e (2.57), resulta que u_m é limitada em W. Sendo compacta a imersão de W em $L^2(0,T;H)$ conclui-se que existe uma subsequência, ainda representada por u_m , tal que

$$u_m \to u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H) \tag{2.61}$$

e quase sempre em Q.

Note que em (2.58), (2.59), (2.60), (2.61) tem-se a mesma subsequência u_m e o mesmo limite u.

Convergência do Termo não Linear

Demonstraremos que $b(u_m,u_m,v)$ converge para $b(u,u,v)$ para todo $v \in V$ no sentido de $L^p(0,T)$ para algum $p \geq 1$. Temos:

$$b(u_m,u_m,v) = -b(u_m,v,u_m) = -\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_{mj} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_{mi}\, dx.$$

Sendo $v \in V$ resulta que $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$. Encontramos u_m limitada em $L^2(0,T;V)$ sendo $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, quando $n = 2$, imersão contínua. Logo, u_m é limitada em

$L^2(0,T;(L^4(\Omega))^2)$. Daí resulta que

$$\int_\Omega |u_{mi}u_{mj}|^2\,dx \leq \left(\int_\Omega |u_{mi}|^4\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |u_{mj}|^2\,dx\right)^{1/2},$$

da qual obtemos $u_{mi}u_{mj}$ limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$. Resulta que existe uma subsequência, ainda represenada por $u_{mi}u_{mj}$, tal que

$$u_{mi}u_{mj} \rightharpoonup \chi_{ij} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H)$$

De (2.61) temos que u_m converge para u forte em $L^2(0,T;H)$ e quase sempre em Q. Logo u_{mi} converge para u_i quase sempre em Q, isto é,

$$u_{mi}u_{mj} \quad \text{converge para } u_iu_j \text{ quase sempre em } Q.$$

Em resumo, temos $g_m = u_{mi}u_{mj}$ limitada em $L^2(Q)$ e convergindo quase sempre para u_iu_j em Q. Do Lema 3.1 de Lions [5], resulta que $g_m = u_{mi}u_{mj}$ converge para u_iu_j fraco em $L^2(Q)$, concluímos então que $\chi_{ij} = u_iu_j$.

Resulta que para toda $\psi(x,t) \in L^2(0,T;H) = L^2(Q)$, obtemos:

$$\lim_{m\to\infty}\int_Q u_{mi}u_{mj}\,\psi(x,t)\,dxdt = \int_Q u_iu_j\,\psi(x,t)\,dxdt. \tag{2.62}$$

Para toda $v \in V$, temos $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$, logo tomando $\theta \in L^2(0,T)$ a função $\psi(x,t) = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\theta(t)$ pertence a $L^2(0,T;H)$ para $i,j = 1,2$. Substituindo esta $\psi(x,t)$ em (2.62), resulta:

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T\left(\int_\Omega u_{mi}u_{mj}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx\right)\theta(t)dt = \int_0^T\left(\int_\Omega u_i\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,u_j\,dx\right)\theta(t)dt,$$

provando que

$$\lim_{m\to\infty} b(u_m(t),u_m(t),v) = b(u(t),u(t),v) \quad \text{em } L^2(0,T) \text{ fraco}, \tag{2.63}$$

para todo v em V.

Passagem ao limite na derivada

De (2.60) obtemos

$$\int_0^T \langle u_m'(t),v\rangle\theta\,dt \to \int_0^T \langle u'(t),v\rangle\theta\,dt$$

para cada $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in V$. Note que $\langle\, ,\, \rangle$ é a dualidade $V \times V'$. Daí obtemos

$$\int_0^T (u'_m(t), v)\theta\, dt \to \int_0^T \langle u'(t), v\rangle \theta\, dt.$$

Temos

$$\int_0^T (u'_m(t), v)\theta\, dt = -\int_0^T (u_m(t), v)\theta'\, dt \to -\int_0^t -(u(t), v)\theta'\, dt$$

pois $u_m \rightharpoonup u$ fraco estrela $L^\infty(0,T;H)$. Logo

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\,(u(t), v)\theta\, dt = -\int_0^T (u(t), v)\theta'\, dt = \int_0^T \langle u'(t), v\rangle \theta\, dt.$$

Escrevemos que

$$\int_0^T (u'_m(t), v)\theta\, dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\,(u(t), v)\theta\, dt$$

para toda $v \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,t)$. Das convergências (2.58), (2.59), (2.60), (2.63) podemos tomar o limite em ambos os membros da equação aproximada (2.49), fixando $v = w_i$, $i < m$, de modo a obtermos

$$\frac{d}{dt}\,(u(t), v) + \nu a(u(t), w_i) + b(u(t), u(t), w_i) = (f(t), w_i)$$

para todo i, fraco em $\mathcal{D}(0,T)$. Sendo a sequência (w_ν) base Hilbertiana de V, resulta

$$\left(\frac{du}{dt}, v\right) + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \tag{2.64}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, para todo v em V, demonstrando que u é solução fraca da equações de Navier-Stokes no caso $n = 2$.

Para completar a demonstração do Teorema 2.2.3, resta constatar que u assume o valor inicial u_0 quando $t = 0$. De fato, sabemos que u é contínua em $[0,T]$ com valores em H. Sendo $\dfrac{du_m}{dt}$ convergente para $\dfrac{du}{dt}$ fracamente em $L^2(0,T;V')$, obtemos

$$\int_\Omega \left(\frac{du_m}{dt}, w_i\right)\theta(t)dt \quad \text{converge para} \quad \int_0^T \left(\frac{du}{dt}, w_i\right)\theta(t)dt \tag{2.65}$$

para todo $\theta \in L^2(0,T)$. Considere $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 1, \quad \theta(T) = 0$. De 2.65 obtemos

$$\int_\Omega \frac{d}{dt}\,(u_m(t), w_i)\theta(t)\, dt \quad \text{converge para} \quad \int_0^T \frac{d}{dt}\,(u(t), w_i)\theta(t)\, dt$$

para tais θ. Integrando por partes, o que é lícito pois $t \to (u(t), w_i)$ é contínua em $[0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \left[-(u_m(0), w_i) - \int_0^T (u_m(t), w_i)\theta'(t)dt \right] = \\ = -(u(0), w_i) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)\, dt. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Aplicando (2.59) em (2.66), concluímos que

$$\lim_{m\to\infty}(u_m(0), w_i) = (u(0), w_i). \tag{2.67}$$

Sendo $u_m(0) = u_{0m}$ convergente fortemente para u_0 em H, resulta que $(u_m(0), w_i)$ converge também para (u_0, w_i) para todo i. Comparando com (2.67) concluímos que $u(0) = u_0$, completando a demonstração do Teorema 2.2.3.

Capítulo 3

ATRATORES GLOBAIS PARA SEMIGRUPOS NÃO LINEARES

Apresentaremos neste capítulo alguns resultados da teoria de atratores globais para semigrupos não lineares em espaços métricos completos. Para uma abordagem mais completa recomendamos [2]. Em todo este capítulo (X, d) denota um espaço métrico completo e $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das aplicações contínuas de X nele mesmo.

3.1 Semigrupo de Operadores Não Lineares

Definição 3.1.1. Um semigrupo não linear em X é uma família de aplicações $\{S(t);\ t \geq 0\}$ em $\mathcal{C}(X)$ que verifica as propriedades:
(i) $S(0) = I$, onde I denota o operador identidade em X;
(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todos $t, s \geq 0$;
(iii) A aplicação $[0, +\infty) \times X \ni (t, x) \mapsto S(t)x \in X$ é contínua.

No caso em que X é um espaço de Banach e $S(t)$ é linear, diz-se que $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é um *semigrupo linear fortemente contínuo* em $\mathcal{L}(X)$. Aqui, $\mathcal{L}(X)$ denota o conjunto dos operadores lineares limitados de X em si próprio com a topologia uniforme dos operadores. Se este é o caso, temos uma vasta literatura, sugerimos Pazy [9].

Definição 3.1.2. Por um ponto x em X, define-se a *órbita positiva* $\gamma^+(x)$ por x como sendo $\gamma^+(x) := \{S(t)x;\ t \geq 0\}$. Além disso, para $s > 0$ denotaremos $\gamma_s^+(x) := \{S(t)x;\ t \geq s\}$ a órbita positiva por x no instante s.

Uma *solução para trás por* $x \in X$ é uma aplicação contínua $\phi : (-\infty, 0] \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e, para cada $t \leq 0$ vale $S(s)\phi(t) = \phi(s+t)$ para todo $0 \leq s \leq -t$. Uma *solução global por* $x \in X$ é uma aplicação contínua $\phi : \mathbb{R} \to X$ tal que $\phi(0) = x$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, $S(s)\phi(t) = \phi(s+t)$ para todo $s \geq 0$.

Caso X seja um espaço de Banach de dimensão infinita, *soluções para trás* ou *globais*, em geral, não existem e sua existência está condicionada à escolha de x. Além disso, quando uma *solução para trás* existe, ela pode não ser única, isto ocorre, pois $S(t)$ não é necessariamente injetivo para todo $t > 0$.

Definição 3.1.3. Se existir uma solução para trás por $x \in X$, então definimos a *órbita negativa* por x como sendo

$$\gamma^-(x) := \bigcup_{t \geq 0} H(t,x),$$

onde

$H(t,x) = \{y \in X;$ existe uma solução para trás por x, definida por $\phi : (-\infty, 0] \to X$ com $\phi(0) = x$ e $\phi(-t) = y\}$.

Além disso, para $s > 0$ denotaremos $\gamma_s^-(x) := \bigcup_{t \geq s} H(t,x)$ a órbita negativa por x no instante s.

Definição 3.1.4. A *órbita completa* por x (se existir órbita negativa por x) é definida por $\gamma(x) := \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$.

Para um subconjunto B de X, definamos as órbitas positiva, negativa e completa por B (se existir a órbita negativa para cada $x \in B$), respectivamente, como sendo

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma^+(x), \quad \gamma^-(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma^-(x) \quad \text{e} \quad \gamma(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma(x).$$

Fixado $s > 0$, também usaremos as notações

$$\gamma_s^+(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma_s^+(x) \quad \text{e} \quad \gamma_s^-(B) := \bigcup_{x \in B} \gamma_s^-(x).$$

Definição 3.1.5. Um semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é dito limitado, se $\gamma^+(B)$ for limitada sempre que B for um subconjunto limitado de X.

Definição 3.1.6. Seja B um subconjunto de X. Definimos os conjuntos $\omega-$*limite* e $\alpha-$*limite* de B, respectivamente, como sendo

$$\omega(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^+(B)}^{1} \quad \text{e} \quad \alpha(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^-(B)}.$$

Em particular, os conjuntos $\omega-$*limite* e $\alpha-$*limite* de um ponto $x \in X$, respectivamente, são dados por

$$\omega(x) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^+(x)} \quad \text{e} \quad \alpha(x) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\gamma_s^-(x)}.$$

[1]Se Ω é um subconjunto de X, então $\overline{\Omega}$ denota o seu fecho em X.

Vale notar a seguinte caracterização do conjunto $\omega-$limite de um subconjunto B de X, $\omega(B) = \{y \in X;$ existem seqüências $\{t_n\}$ em $[0, +\infty)$, $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ e $\{x_n\}$ em B, com $y = \lim\limits_{n\to\infty} S(t_n)x_n\}$.

Agora, definamos as noções de atração, absorção e invariância sob a ação de um semigrupo. Para isto, recordemos a definição da *semidistância de Hausdorff*, $\text{dist}(A, B)$, entre dois subconjuntos limitados A e B de X. A saber

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x, y).$$

Lema 3.1.7. *Sejam A e B subconjuntos de X. Então*

$$dist(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que

$$dist(A, B) = 0,$$

isto é,

$$\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b) = 0$$

logo

$$\inf_{b\in B} d(a, b) = 0, \forall \ a \in A$$

Então existe (b_n) em B tal que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} d(a, b_n) &= \inf_{b\in B} d(a, b) \\ &= 0 \ \forall \ a \in A \end{aligned}$$

e portanto a sequência converge para a, isto é, $a \in \overline{B}$, para todo $a \in A$. Em outras palavras $A \subset \overline{B}$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $A \subset \overline{B}$, vamos calcular $dist(A, B)$.

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b).$$

Mas, $A \subset \overline{B}$, e assim

$$\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b) \leq \sup_{a\in \overline{B}} \inf_{b\in B} d(a, b),$$

onde

$$\inf_{b\in B} d(a, b) = 0, \ \ \forall \ a \in \overline{B},$$

pois para cada $a \in \overline{B}$ existe (b_n) em B que converge prara a e

$$\begin{aligned}\inf_{b \in B} d(a,b) &= \inf_{b \in B} \lim_{n \to +\infty} d(b_n, b) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \inf_{b \in B} d(b_n, b) \\ &= \lim_{n \to +\infty} 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$0 \le \operatorname{dist}(A,B) \le \operatorname{dist}(\overline{B}, B) = 0$$

então $\operatorname{dist}(A,B) = 0$. Como queríamos demonstrar.

□

Observação 3.1.1. A função $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ não é simétrica e a igualdade $\operatorname{dist}(A,B) = 0$ não implica que $A = B$. A *distância simétrica de Hausdorff* , $\operatorname{dist}_H(A,B)$, entre dois subconjuntos limitados A e B de X é definida por

$$\operatorname{dist}_H(A,B) := \operatorname{dist}(A,B) + \operatorname{dist}(B,A).$$

Definição 3.1.8. Sejam A e B subconjuntos de X. Diremos que A atrai B sob o semigrupo $\{S(t);\ t \ge 0\}$ quando

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(S(t)B, A) = 0.$$

Ou equivalentemente, para cada $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon, B) > 0$ tal que $S(t)B$ está contido em $\mathcal{O}_\epsilon(A) := \bigcup_{x \in A}\{z \in X;\ d(z,x) < \epsilon\}$ para todo $t \ge T$.

Se existir um $t_0 \ge 0$ tal que $S(t)B \subset A$ para todo $t \ge t_0$, então diremos que A absorve B sob o semigrupo. Em particular, se A absorve B, então A atrai B.

Definição 3.1.9. Diremos que um subconjunto A de X é invariante (*ou positivamente invariante ou negativamente invariante*) com relação ao semigrupo $\{S(t);\ t \ge 0\}$ quando para qualquer $x \in A$, existir uma órbita completa $\gamma(x)$ por x tal que $\gamma(x) \subset A$ (ou tal que $\gamma^+(x) \subset A$ ou tal que $\gamma^-(x) \subset A$).

Observação 3.1.2. Um subconjunto A de X é *invariante* sob o semigrupo $\{S(t);\ t \ge 0\}$ se, e somente se, $S(t)A = A$ para todo $t \ge 0$.

Observação 3.1.3. Os conjuntos ω e $\alpha-$limites de um subconjunto de X são invariantes.

Definição 3.1.10. Um equilíbrio (ponto de equilíbrio) para o semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é um ponto $x^* \in X$ tal que $S(t)x^* = x^*$ para todo $t \geq 0$. A aplicação $t \in \mathbb{R} \mapsto x^* \in X$ é dita uma solução estacionária ou solução de equilíbrio para o semigrupo.

Lema 3.1.11. *Sejam K um subconjunto compacto de X e $\{x_n\}$ uma seqüência em X com $\lim_{n\to\infty} d(x_n, K) = 0$. Então, $\{x_n\}$ possui uma subseqüência convergente para algum ponto de K. Se um conjunto compacto K atrai um conjunto compacto K_1 sob o semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$, então $\overline{\gamma^+(K_1)}$ é compacto e $\emptyset \neq \omega(K_1) \subset K$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, vale $d(x_n, K) = d(x_n, c_n)$ para algum $c_n \in K$. Existe uma subseqüência $\{c_{n_j}\} \subset \{c_n\}$ com $c_0 = \lim_{j\to\infty} c_{n_j}$, para algum $c_0 \in K$. Além disso, $\lim_{j\to\infty} d(x_{n_j}, K) = 0$, onde

$$d(x_{n_j}, K) = d(x_{n_j}, c_{n_j}) \ \text{ para todo } \ j \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = c_0$, pois para todo $j \in \mathbb{N}$, vale

$$d(x_{n_j}, c_0) \leq d(x_{n_j}, c_{n_j}) + d(c_{n_j}, c_0) = d(x_{n_j}, K) + d(c_{n_j}, c_0).$$

Quanto a segunda afirmação, tome $\{y_n\} \subset \gamma^+(K_1)$, onde $y_n = S(t_n)x_n$, $x_n \in K_1$. Pela compacidade de K_1, existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$, com $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x$, $x \in K_1$. Se existir $\{t_{n_j}\} \subset \{t_n\}$, com $\lim_{j\to\infty} t_{n_j} = t$, então $\lim_{j\to\infty} S(t_{n_j})y = S(t)x$ para todo $y \in X$, o que implica, que $y_{n_j} = S(t_{n_j})x_{n_j}$ converge para $S(t)x$ quando j tende ao infinito. Por outro lado, se $t_n \to \infty$, então usamos a primeira afirmação e concluímos que toda seqüência em $\gamma^+(K_1)$ possui uma subseqüência convergente.

A compacidade de $\overline{\gamma^+(K_1)}$ implica que $\omega(K_1)$ é não vazio. Além disso, seja $x \in \omega(K_1)$, então existem $\{t_n\}$, com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $\{x_n\}$ em K_1 tal que $x = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n$. Como K_1 é atraído por K e

$$d(x, K) \leq d(x, S(t_n)x_n) + d(S(t_n)x_n, K) \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N},$$

concluímos que $x \in K$. $\square$

Lema 3.1.12. *Seja B um subconjunto de X tal que $\omega(B)$ seja compacto e $\omega(B)$ atrai B, então $\omega(B)$ é invariante. Além disso, se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo.*

Demonstração. Caso $\omega(B) \neq \emptyset$, da continuidade de $S(t)$ e a da caracterização apresentada ao conjunto $\omega-$limite, temos $S(t)\omega(B) \subset \omega(B)$. Resta-nos observar que $\omega(B) \subset S(t)\omega(B)$. Seja $x \in \omega(B)$, então existem seqüências $\{t_n\}$ em $[0, +\infty)$ e $\{x_n\}$ em B tal que $x = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n$. Ora, como $t_n \to \infty$, para cada $t > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geq t$ para todo $n > n_0$. Com isso, para $n > n_0$ $x = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n = \lim_{n\to\infty} S(t)S(t_n - t)x_n$ e pela atração de B pelo compacto $\omega(B)$, o Lema 3.1.11 assegura que $S(t_n - t)x_n$ admite uma subseqüência convergente (ainda denotada por $S(t_n - t)x_n$), isto é, existe $y \in \omega(B)$ tal que $y = \lim_{n\to\infty} S(t_n - t)x_n$, o que implica, $x = S(t)y$, isto é, $x \in S(t)\omega(B)$.

Agora, suponhamos que B seja conexo. Se $\omega(B)$ fosse desconexo, então poderíamos escrever $\omega(B)$ como a união de dois compactos disjuntos. Sejam K_1 e K_2 compactos, não vazios e disjuntos tais que $\omega(B) = K_1 \cup K_2$. Como $\omega(B)$ atrai B, para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $M > 0$ tal que

$$S(t)B \subset \mathcal{O}_\epsilon(\omega(B)) \text{ para todo } t \geq M.$$

Uma vez que, $\mathcal{O}_\epsilon(\omega(B)) = \mathcal{O}_\epsilon(K_1) \cup \mathcal{O}_\epsilon(K_2)$ com $\mathcal{O}_\epsilon(K_1) \cap \mathcal{O}_\epsilon(K_2) = \emptyset$, temos $S(t)B \subset \mathcal{O}_\epsilon(K_i)$ para algum $i \in \{1, 2\}$ para todo $t \geq M$. Ora, como $\omega(B) = \cap_{s\geq 0}\overline{\gamma_s^+(B)} \subset \overline{\gamma_M^+(B)}$, concluímos que $\omega(B) \subset \mathcal{O}_\epsilon(K_i)$. Logo, $\omega(B) \subset K_i$, ou seja, K_j ($j \neq i$ em $\{1, 2\}$) é vazio. □

Lema 3.1.13. *Se B é um subconjunto não vazio de X tal que $\overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ é compacto para algum $s_0 \geq 0$, então $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B.*

Demonstração. A família $\{\overline{\gamma_s^+(B)};\ s \geq s_0\}$ é formada por conjuntos compactos, não vazios e verifica a propriedade da interseção finita, então $\omega(B)$ é não vazio e compacto. Suponha que $\omega(B)$ não atraia B, então existem $\epsilon > 0$ e seqüências $\{x_n\}$ em B e $t_n \to \infty$ tais que

$$d(S(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ é compacto e $\{S(t_n)x_n;\ n \geq n_1\} \subset \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subseqüências $\{t_{n_j}\} \subset \{t_n\}$ e $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ tais que $S(t_{n_j})x_{n_j}$ converge para algum $y \in \overline{\gamma_{s_0}^+(B)}$. Veja que $y \in \omega(B)$. Logo, existe $j_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(S(t_{n_j})x_{n_j}, \omega(B)) < \epsilon \text{ para todo } j \geq j_\epsilon,$$

o que é absurdo. □

Definição 3.1.14. Um semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é dito assintoticamente compacto, se para cada fechado, limitado e não vazio $B \subset X$ com $S(t)B \subset B$, existe um conjunto compacto $K = K(B) \subset B$ que atrai B.

Lema 3.1.15. *Sejam $\{S(t);\ t \geq 0\}$ assintoticamente compacto e B um subconjunto de X não vazio tal que $\gamma^+_{s_0}(B)$ é limitada para algum $s_0 > 0$. Então, $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B.*

Demonstração. Como $S(t)\gamma^+_{s_0}(B) \subset \gamma^+_{s_0}(B)$ para todo $t \geq 0$, da continuidade de $S(t) : X \to X$, temos $\omega(B) \subset \overline{S(t)\gamma^+_{s_0}(B)} \subset \overline{\gamma^+_{s_0}(B)}$. Como $S(t)$ é assintoticamente compacto, existe um compacto $K \subset \overline{\gamma^+_{s_0}(B)}$ que atrai $\overline{\gamma^+_{s_0}(B)}$, *a fortiori*, atrai $\gamma^+_{s_0}(B)$. Portanto, existem seqüências $\epsilon_n \to 0$ e $t_n \to \infty$ tais que $\overline{S(t)\gamma^+_{s_0}(B)} \subset \mathcal{O}_{\epsilon_n}(K)$ para todo $t \geq t_n$. Assim, $\omega(B) \subset K$. Como $\omega(B)$ é fechado e K é compacto, temos a compacidade de $\omega(B)$.

Suponha que $\omega(B)$ não atraia B, então existem $\epsilon > 0$ e seqüências $\{x_n\}$ em B e $t_n \to \infty$ tais que $\text{dist}(S(t_n), \omega(B)) > \epsilon$. Segue da compacidade de K e do Lema 3.1.11 que existem subseqüências $\{x_{n_j}\}$ e $t_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$ tais que $S(t_{n_j})x_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} z \in \omega(B)$, o que é uma contradição. Por conseguinte, $\omega(B)$ é não vazio, compacto e atrai B, e usando o Lema 3.1.12 concluímos a invariância. $\square$

Definição 3.1.16. Um semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é dito condicionalmente eventualmente compacto, se para qualquer conjunto limitado B em X tal que $S(t)B$ é limitado para algum $t \geq 0$, temos $\overline{S(t)B}$ compacto. Um semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é dito eventualmente compacto se ele é condicionalmente eventualmente compacto e para cada conjunto limitado B em X, existe $t \geq 0$ tal que $S(t)B$ é um conjunto limitado.

Teorema 3.1.17. *Todo semigrupo condicionalmente eventualmente compacto é assintoticamente compacto.*

Demonstração. Seja $B \subset X$ um subconjunto não vazio, fechado e limitado tal que $S(t)B \subset B$. Como $\{S(t);\ t \geq 0\}$ condicionalmente eventualmente compacto, temos $\overline{\gamma^+_s(B)}$ compacto para todo $s \geq 0$. Assim, segue do Lema 3.1.13 que $\omega(B) \subset B$ é não vazio, compacto e atrai B. $\square$

Definição 3.1.18. Um semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é dito ponto dissipativo (*limitado dissipativo, compacto dissipativo, localmente compacto dissipativo*) se existe um subconjunto limitado B em X que atrai pontos (*subconjuntos limitados, conjuntos compactos, vizinhanças de conjuntos compactos*) de X.

Definição 3.1.19. Seja $\{S(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo. Um subconjunto $\mathcal{B}$ de X é dito um atraente para o semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$, se ele atrai subconjuntos limitados de X.

Definição 3.1.20. Seja $\{S(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo. Um subconjunto $\mathcal{B}$ de X é dito um absorvente para o semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$, se ele absorve subconjuntos limitados de X.

Note que todo conjunto absorvente é um conjunto atraente, mas a reciproca é falsa.

3.2 Atrator Global

Definição 3.2.1. Seja $\{S(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo. Um subconjunto $\mathcal{A}$ de X é dito um atrator global para o semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$, se ele é compacto, invariante, e atrai subconjuntos limitados de X.

Um atrator global se encontra dentro de um conjunto atraente B, e em geral, é muito menor que B e descreve o comportamento assintótico das soluções de uma maneira mais precisa. Um atrator $\mathcal{A}$ para $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é o *conjunto maximal limitado invariante* para $\{S(t);\ t \geq 0\}$, isto significa que, se C é limitado e $S(t)C = C$ para todo $t \geq 0$ então $C \subset \mathcal{A}$, isto implica em particular que o atrator global para $\{S(t);\ t \geq 0\}$ se existir é único.

A compacidade implica que o atrator é um subconjunto topologicamente pequeno de X. A propriedade de atrair subconjuntos limitados significa que todo o comportamento assintótico do sistema acontece perto de $\mathcal{A}$ e não só dentro de B como na propriedade de atração. Finalmente a invariância é determinante, já que diz que toda a dinâmica sobre o atrator $\mathcal{A}$ é invariante, isto é, $\mathcal{A}$ trabalha como um objeto dinâmico independente.

Observação 3.2.1. Seja $\{S(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo. Suponha que $\{S(t);\ t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$. Segue da definição de atrator que através de cada ponto $x \in \mathcal{A}$ existe uma solução global limitada $\phi_x : \mathbb{R} \to X$. Reciprocamente, toda solução global limitada para o semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ possui seu traço contido no atrator global $\mathcal{A}$ para o semigrupo. Tendo dito isto, concluímos que

$$\mathcal{A} = \{x \in X;\ \text{existe uma solução global limitada por } x\},$$

por exemplo, os pontos de equílibrios para um semigrupo sempre pertencem ao atrator global se este existe.

Lema 3.2.2. *Seja $\{S(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Suponha que para cada subconjunto compacto B de X existe um $s_B \geq 0$ tal que $\gamma^+_{s_B}(B)$ é limitado. Então, o semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é compacto dissipativo.*

Demonstração. Como $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto B não vazio, fechado e limitado que absorve pontos de X. Seja $U = \{x \in B;\ \gamma^+(x) \subset B\}$. Como U absorve pontos, temos U não vazio. Claramente, $\gamma^+(U) \subset U$, e portanto, é limitado e absorve pontos.

Também, sabemos que $S(t)\overline{\gamma^+(U)} \subset \overline{\gamma^+(U)}$ e que $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto. Portanto, existe um conjunto compacto K, com $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$, tal que K atrai U, e portanto, K atrai pontos de X. O conjunto K atrai a si próprio (pois ele atrai $\overline{U}$ e $K \subset U$), e portanto, segue do Lema 3.1.11 que $\overline{\gamma^+(K)}$ é compacto e $\emptyset \neq \omega(K) \subset K$. O Lema 3.1.13 implica que $\omega(K)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai K. Portanto, $\omega(K)$ atrai K que atrai pontos de X, e por conseguinte, $\omega(K)$ atrai pontos de X.

No que segue, mostraremos que existe uma vizinhança V de $\omega(K)$ tal que $\gamma^+_s(V)$ é limitado para algum $s \geq 0$. Se este não é o caso, existem seqüências $\{x_n\} \subset X$, com $x_n \to y$, onde $y \in \omega(K)$ e $t_n \to \infty$ tais que $\{S(t_n)x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ é não limitado. Considere $A = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, portanto $\overline{A}$ é compacto e $\gamma^+_s(A)$ é não limitado para cada $s \geq 0$. Isto contradiz a hipótese de que existe um t_A tal que $\gamma_{t_A}(A)$ é limitado.

Sejam V uma vizinhança de $\omega(K)$ e $t_V \in \mathbb{R}$ tais que $\gamma^+_{t_V}(V)$ é limitado. Como $\omega(K)$ atrai pontos de X e $S(t)$ é contínua, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $s_x > 0$ tais que $S(t)\mathcal{O}_x \subset \gamma^+_{t_V}(V)$ para $s > s_x$, isto é, $\gamma^+_{t_V}(V)$ absorve uma vizinhança de x para todo $x \in X$. Com isso, segue que $\gamma^+_{t_V}(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e que $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é dissipativo compacto. $\square$

Lema 3.2.3. *Sejam $\{S(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo em X e K subconjunto compacto de X. Se K atrai a si próprio sob o semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$, então $\omega(K) = \cap_{t\geq 0} S(t)K$.*

Demonstração. Seja $y \in \cap_{t\geq 0} S(t)K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $t_n > n$ tal que $y \in S(t_n)K$. Logo, existe $x_n \in K$ tal que $y = S(t_n)x_n$. Com esta escolha, temos $t_n \to \infty$ e $\{x_n\}$ em K tal que $y = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n$, ou seja, $y \in \omega(K)$. Por outro lado, sejam $y \in \omega(K)$ e $t \geq 0$, então existem seqüências $\{x_n\}$ em B e $t_n \to \infty$ tais que $y = \lim_{n\to\infty} S(t_n)x_n$. Pela compacidade de K, existe $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$, com $x_{n_j} \to x$, $x \in K$. Com isso, temos

$S(t_{n_j})x \to S(t)x$, e usando o fato de que

$$d(y, S(t)x) \leq d(y, S(t_{n_j})x_{n_j}) + d(S(t_{n_j})x_{n_j}, K) + d(S(t_{n_j})x, K) + d(S(t_{n_j})x, S(t)x).$$

Podemos concluir que $y = S(t)x$, de onde concluímos que $y \in S(t)K$. □

Definição 3.2.4. Um semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é dito eventualmente limitado, se para cada subconjunto limitado B de X existe $s_B \geq 0$ tal que $\gamma^+_{s_B}(B)$ um subconjunto limitado de X.

O próximo teorema caracteriza os semigrupos que possuem atrator global.

Teorema 3.2.5. *Um semigrupo $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, $\{S(t);\ t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Segue do fato de que $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo, assintoticamente compacto e do Lema 3.2.2 que o semigrupo é compacto dissipativo. Seja C um conjunto limitado que absorve subconjuntos compactos de X. Considere $B = \{x \in C;\ \gamma^+(x) \subset C\}$. Então, $S(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ e, como $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto, então existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B e conseqüentemente K atrai subconjuntos compactos de X. O conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai subconjuntos compactos de X.

Seja B um subconjunto limitado de X, como $\{S(t);\ t \geq 0\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 3.1.15 que $\omega(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B. Como $\omega(B)$ é compacto e invariante, temos $\omega(B) \subset \mathcal{A}$, por conseguinte, $\mathcal{A}$ atrai B.

Não é difícil ver que, se $\{S(t);\ t \geq 0\}$ possui um atrator global, então o semigrupo é limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto. □

Teorema 3.2.6. *Seja $\{S(t);\ t \geq 0\}$ um semigrupo ponto dissipativo e eventualmente compacto para $t \geq t_0$. Então, o semigrupo possui um atrator global $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Pelos Teorema 3.1.17 e Teorema 3.2.5 é suficiente mostrarmos que órbitas positivas de conjuntos limitados são eventualmente limitadas. Dado um conjunto limitado B, segue do fato de $\{S(t);\ t \geq 0\}$ ser eventualmente compacto que existe $t_B \geq 0$, com

$t_0 \leq t_B$ tal que $S(t_B)B$ é relativamente compacto. Portanto, necessitamos mostrar apenas que órbitas positivas de subconjuntos compactos de X são limitadas. Sejam K um subconjunto compacto de X e B_0 um subconjunto aberto e limitado de X que absorve pontos. Pela continuidade de $S(t)$, existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x tal que $S(t_x)\mathcal{O}_x \subset S(t_{B_0})B_0$. Existe $\{\mathcal{O}_{x_1}, \ldots, \mathcal{O}_{x_\mathfrak{p}}\}$ que cobre K. Seja $t = t(K) = \max\{t_{x_i};\ 1 \leq i \leq \mathfrak{p}\}$, $K_0 = \overline{S(t_{B_0})B_0}$ e $\widetilde{K}_0 = \cup_{t=0}^{t(K_0)} S(t)K_0$. Claramente K_0 e $\widetilde{K}_0$ são subconjuntos compactos de X. Com isso, segue que $S(t)B_0 \subset K_0$ para todo $t \geq t_{B_0}$ e para cada subconjunto compacto K de X, temos $S(t)K \subset K_0$ para $t \geq t(K)$. □

3.3 Como o Atrator Global Determina o Comportamento de Soluções

Comecemos discutindo como as soluções geram sistemas dinâmicos em espaços de fase adequados.

Assumindo que existe algum espaço de fase X com norma $|\cdot|$ tal que para $u_0 \in X$ as equações em questão têm uma única solução $u(t, u_0)$ para todo $t > 0$, podemos definir um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores $S(t) : X \to X$ definido por

$$S(t)u_0 = u(t, u_0)$$

E assim podemos considerar o sistema dinâmico $(X, \{S(t)\}_{t\geq 0})$.

A continuidade da aplicação S em u_0 e em t significa que as soluções variam continuamente de forma uniforme com respeito às condições iniciais em um conjunto compacto, isto é

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0| \leq \delta_k(T, |u_0 - v_0|) \quad \text{para todo} \quad u_0 \in K, \tag{3.1}$$

onde $\delta_k(t, d)$ satisfaz $\delta_k(t, 0) = 0$, $\delta_k(0, d) = d$, e δ_k é não decrescente tanto em t como em d.

Agora discutiremos como a dinâmica no atrator auxilia no estudo de todas os possíveis comportamentos assintóticos e trajetória individuais. A seguinte proposição nos diz que para tempos τ sufientemente grande qualquer órbita $u(t)$ da equações em questão se parecerão muito com alguma órbita no atrator. Mais precisamente, temos

Proposição 3.3.1. *Dados uma órbita $u(t) = S(t)u_0$, $\varepsilon > 0$ e $T > 0$, existe um tempo $\tau(\varepsilon, T) > 0$ e um ponto $v_0 \in \mathcal{A}$ tal que*

$$|u(\tau + t) - S(t)v_0| \leq \varepsilon \quad \textit{para todo} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Demonstração. Como as órbitas dependem continuamente da condição inicial como em 3.1, dados $\varepsilon, T > 0$ existe $\delta(\varepsilon, T)$ tal que

$$u_0 \in \mathcal{A} \ \text{ e } \quad |u_0 - v_0| \leq \delta(\varepsilon, T) \quad \text{implica que}$$

$$|u(t) - v(t)| \leq \varepsilon, \qquad t \in [0, T]. \tag{3.2}$$

Agora, como $\mathcal{A}$ é o atrator global, a trajetória $u(t)$ tende para $\mathcal{A}$; assim existe um tempo τ e um ponto $v_0 \in \mathcal{A}$ tal que

$$\operatorname{dist}(u(\tau), \mathcal{A}) = |u(\tau) - v_0| \leq \delta$$

Consideremos a órbita $v(t)$ em $\mathcal{A}$ com $v(0) = v_0$. Então por 3.2 as duas órbitas $u(t)$(vendo como a órbita começando no ponto $u(\tau)$) e $v(t) = S(t)v_0$ satisfazem

$$|u(\tau + t) - S(t)v_0| \leq \varepsilon$$

□

Capítulo 4

ATRATOR GLOBAL PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER -STOKES

Neste capítulo investigaremos a existência e um atrator global para as equações de Navier-Stokes para $n = 2$ para as quais obtemos estimativas usando o método de Galerkin e tomando o limite com o objetivo de mostrar a existência de um conjunto absorvente em em $\mathbb{L}^2(\Omega)$, $\mathbb{H}^1(\Omega)$ e $\mathbb{H}^2(\Omega)$. Aqui levaremos em consideração as equações de Navier-Stokes em um caso mais simples em que $\Omega = [0, L]^2$ com condições de franteira periódicas. Escolheremos também as condições iniciais e a função força de modo que possamos tarbalhar no espaço das funções periódicas. Todos os resultados obtidos no Capítulo 2 são válidos para o caso de fronteira periódicas de acordo com a metodologia usada por Temam [11].

4.1 O Operador de Stokes

Voltemos ao problema de estacionário linear, agora com condições de fronteira periódicas.

$$-\nu\Delta u + \nabla p = f, \qquad \nabla \cdot u = 0. \tag{4.1}$$

Como estamos considerando caso de condições de fronteira periódicas, podemos usar Série de Fourier, para desenvolvermos a solução deste problema.

De modo análogo aos capítulos anteriores definimos o conjunto das funções indefinidamente diferenciáveis periódicas com divergência nula

$$\mathbb{V} = \{u \in [\dot{C}_p^\infty(\Omega)]^2 : \nabla \cdot u = 0\};$$

usaremos também a notação

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^2 \quad e \quad \mathbb{H}_p^k(\Omega) = [H_p^k(\Omega)]^2,$$

cujas normas são tomadas essencialmente como indicado no capítulo 1.

Aqui os espaços H e V são

$$H = \{u \in \dot{\mathbb{L}}_p^2(\Omega) : \nabla \cdot u = 0\}$$

e

$$V = \{u \in \dot{\mathbb{H}}_p^1(\Omega) : \nabla \cdot u = 0\}$$

Relembrando que as normas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ denotam as normas em H e V respectivamente.

Seguindo os passos feitos no segundo capítulo, tomamos o produto interno da primeira equação acima com $v \in \mathcal{V}$, obtemos

$$\nu a(u,v) + \int_\Omega \nabla P \cdot v dx = (f,v),$$

onde $a(u,v)$ é a forma bilinear

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Agora, como

$$\int_\Omega \nabla P \cdot v dx = \int_\Omega P(\nabla \cdot v) dx = 0,$$

pois $v \in \mathcal{V}$. A equação se reduz a

$$\nu a(u,v) = (f,v)$$

para toda $v \in \mathcal{V}$.

Como $\mathcal{V}$ é denso em V, para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$, faz sentido falar na equação

$$\nu a(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in V. \tag{4.2}$$

Definindo o "operador de Stokes" $A : V \to V'$ por

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v) \quad \forall\ v \in V,$$

obtemos

$$\nu A u = f.$$

Sabemos que para cada $f \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ a equação 4.2 possui uma única solução $u \in V$.

Investigando a regularidade dessa solução do problema de Stokes quando $f \in \dot{\mathbb{L}}^2(\Omega)$ e usaremos expansões de Fourier. Tomando $\nu = 1$ obtemos

$$Au = f,$$

expandindo f como

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i k \cdot x/L} f_k,$$

onde cada $f^k \in \mathbb{R}^2$, e $f_0 = 0$ e $\sum_k |f_k|^2 < \infty$ (já que $f \in \dot{\mathbb{L}}^2(\Omega)$). De modo análogo, expandindo u como

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} e^{2\pi ik\cdot x/L} u_k,$$

onde $u_k \in \mathbb{R}^2$ e p como

$$p = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} e^{2\pi ik\cdot x/L} p_k,$$

com $p_k \in \mathbb{R}$, temos que

$$-\Delta u = \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} e^{2\pi ik\cdot x/L} u_k,$$

e

$$\nabla p = \frac{2\pi}{L} \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} ike^{2\pi ik\cdot x/L} p_k.$$

Igualando os coeficientes temos

$$\frac{4\pi^2|k|^2}{L^2} u_k - \frac{2\pi ik}{L} p_k = f_k, \tag{4.3}$$

e a condição de divergência nula se torna

$$k \cdot u_k = 0. \tag{4.4}$$

Tomando o produto de 4.3 com k obtemos a expressão para p_k quando $k \neq 0$:

$$p_k = \frac{L}{2\pi i} \frac{(f_k \cdot k)}{|k|^2}, \tag{4.5}$$

e então obtemos a expressão para u_k quando $k \neq 0$:

$$u_k = \frac{L^2}{4\pi^2|k|^2} \left(f_k - \frac{k(k \cdot f_k)}{|k|^2} \right).$$

Para fixar u e p pomos $u_0 = 0$ e $p_0 = 0$, o que é permitido pois requeremos $f = 0$ em primeiro momento.

Segue do resultado de regularização elitica que

$$\|u\|^2_{\dot{\mathbb{H}}^{s+2}_p(\Omega)} \leq C\|f\|^2_{\dot{\mathbb{H}}^{s}_p(\Omega)}, \tag{4.6}$$

em particular, se $f \in \dot{\mathbb{L}}^2(\Omega)$ então $u \in \dot{\mathbb{H}}^2_p(\Omega)$. Assim o domínio de A é dado por

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in \dot{\mathbb{H}}^2_p(\Omega) : \nabla \cdot u = 0\}.$$

Aproveitamos para enunciar uma propriedade envolvendo forma trilinear b e o operador A quando estamos trabalhando com espaços de funções periódicas.

Proposição 4.1.1. *Se* $n = 2$ *então* $b(u, u, Au) = 0 \quad$ *para toda* $\ u \in \mathcal{D}(A)$.

Demonstração. Observe que se $u \in \mathcal{D}(A)$ então $Au = -\Delta u$, e então

$$\begin{aligned} b(u, u, Au) &= -\sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega u_i (D_i u_j) \Delta u_j dx \\ &= -\sum_{i,j,k=1}^{2} \int_\Omega u_i (D_i u_j) D_k^2 u_j dx. \end{aligned}$$

integrando por partes, temos

$$b(u, u, Au) = -\sum_{i,j,k=1}^{2} \int_\Omega u_i (D_k D_i u_j) D_k u_j dx + \sum_{i,j,k=1}^{2} \int_\Omega D_k u_i D_i u_j D_k u_j dx.$$

Afirmamos que os dois termos acima são nulos. De fato, o primeiro porque

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i (D_k D_i u_j) u_j dx &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega u_i D_i (D_k u_j)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla \cdot u)(D_k u_j)^2 dx, \end{aligned}$$

e o segundo porque, escrevendo $u_{i,j} = D_j u_i$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k} D_k u_i D_i u_j D_k u_j &= u_{1,1}^3 + u_{1,1} u_{1,2}^2 + u_{1,1} u_{2,1}^2 + u_{1,2} u_{2,1} u_{2,2} \\ &\quad + u_{2,1} u_{1,2} u_{1,1} + u_{2,2} u_{1,2}^2 + u_{2,1}^2 u_{2,2} + u_{2,2}^3 \\ &= u_{1,1}^3 + u_{2,2}^3 = (u_{1,1} + u_{2,2}) \left(u_{1,1}^2 - u_{1,1} u_{2,2} + u_{2,2}^2 \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

usando o fato $\nabla \cdot u = u_{1,1} + u_{2,2} = 0$ repetidamente. □

4.2 Soluções fortes

Podemos obter soluções mais regulares se exigirmos mais regularidade sobre f e se exigirmos que $u_0 \in V$ em vez de H. Estas soluções são chamadas de soluções fortes.

Teorema 4.2.1 (solução forte)**.** *Se* $n = 2$, $u_0 \in V$ *e* $f \in L^2(0, T; H)$, *então existe uma única solução de*

$$u' + \nu A u + B(u, u) = f \tag{4.7}$$

que satisfaz

$$u \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; \mathcal{D}(A)) \tag{4.8}$$

e ainda $u \in C^0([0, T]; V)$. *Além disso, a solução depende continuamente da condição inicial* u_0.

Demonstração. Tomando o produto interno da equação aproximada com Au_m, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \nu\|Au_m\|_2^2 + (B(u_m, u_m), Au_m) = (f, Au_m).$$

Como $(B(u_m, u_m), Au_m) = b(u_m, u_m, Au_m) = 0$ pela proposição 4.1.1, assim temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu\|Au\|_2^2 \leq \|f\|_2\|Au_m\|_2.$$

Aplicando a desigualdade de Young obtemos

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \nu\|Au_m\|_2^2 \leq \frac{\|f\|_2}{\nu}.$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$\|u_m\|^2 + \nu\int_0^t \|Au_m(s)\|_2 ds \leq \|u(0)\|^2 + \frac{\|f\|^2_{L^2(0,t;H)}}{\nu},$$

e como, $\|u_m(0)\| \leq \|u_0\|$, temos que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_m(t)\|^2 \leq C = \|u_0\|^2 + \frac{\|f\|^2_{L^2(0,T;H)}}{\nu},$$

e

$$\int_0^T \|Au_m(s)\|^2 ds \leq \frac{C}{\nu}.$$

Assim u_m é limitada em $L^\infty(0, T; V)$ e $L^2(0, T; \mathcal{D}(A))$. Pelo lema 1.2.4, podemos tomar uma subsequência tal que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; V)$$

e

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^2(0, T; \mathcal{D}(A)),$$

para alguma $u \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; \mathcal{D}(A))$. Argumentos similares aos usados no teorema 2.2.3 mostram que u_m' é limitada em $L^2(0, T; H)$, e assim, extraindo mais uma subsequência, de modo que

$$u_m' \rightharpoonup u' \quad \text{em} \quad L^2(0, T; H).$$

o corolário 1.2.3 mostra que $u \in C^0([0, T]; V)$.

Os termos u_m', Au_m convergem fraco em $L^2(0, T; H)$. Pra mostrar que o termo não linear converge da mesma forma, apelamos mais uma vez para o teorema de compacidade da seção 1.5, que desta vez mostra que $u_m \to u$ fortemente em $L^2(0, T; V)$. Isto é suficiente para mostar que o termo não linear converge, e assim deduzir que a igualdade 4.7 vale em $L^2(0,T;H)$. Quando à continuidade em relação às condições iniciais. Novamente, definimos $w = u - v$ e consideramos

$$w' - \nu Aw + B(u,u) - B(v,v) = f$$

Tomando o produto interno com Aw, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + \nu\|Aw\|_2^2 &= b(u,u,Aw) - b(v,v,Aw) \\
&\leq k[\|w\|_2^{1/2}\|w\|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|Au\|_2^{1/2}\|Aw\|_2 + \|v\|_2^{1/2}\|v\|^{1/2}\|w\|^{1/2}\|Aw\|_2^{3/2}] \\
&\leq C[\|w\|^2\|u\|\|Au\|_2 + \|v\|^4\|w\|^2] + \frac{\nu}{2}\|Aw\|_2^2,
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Young na última linha. Desprezando o termo contendo $\|Aw\|^2$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 \leq C[\|u\|\|Au\|_2 + \|v\|^4]\|w\|^2.$$

usando o lema de Gronwall, temos

$$\|w(t)\|^2 \leq \exp\left(C\int_0^t \|u(s)\|\|Au(s)\|_2 + \|v(s)\|^4 ds\right)\|w(0)\|^2.$$

Como u e v são supostas duas soluções fortes, são limitadas em $L^\infty(0,T;V)$ e $L^2(0,T,\mathcal{D}(A))$. Logo a exponencial acima é limitada e segue o resultado. □

4.3 Atrator para o caso 2D

Mostraremos a existência de um conjunto absorvente em espaços cada vez mais regulares.

4.3.1 Conjunto absorvente em $\mathbb{L}^2(\Omega)$

Consideraremos neste tópico, o sistema dinâmico em H definido em virtude do teorema 2.2.3(veja o Capítulo 2 e o final do capítulo 3). Veremos que se $u_0 \in H$, eventualmente $u(t)$ é mais regular (mostraremos que $u(t) \in V$ para $t \geq t_0$ e $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para $t \geq t_1$).

Proposição 4.3.1. *Se $f \in V'$ então existe um conjunto absorvente em H, isto é, existe um tempo $t_0(\|u_0\|_2)$, um ρ_H, e um I_V tais que*

$$\|u(t)\|_2 \leq \rho_H \quad e \quad \int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds \leq I_V \tag{4.9}$$

para todo $t \leq t_0(\|u_0\|_2)$.

A limitação da integral em $\|u(t)\|^2$ será útil na obtenção de uma limitação assintótica de $\|u(t)\|$ na próxima seção.

Demonstração. De modo análogo como foi feito no capítulo 2, tomando o produto interno da equação de Navier-Stokes com u, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 + b(u,u,u) = \langle f, u\rangle.$$

Como $b(u,u,u) = 0$ temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 \leq \|f\|_{V'}\|u\|.$$

Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 \leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} \tag{4.10}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, temos que $\|u\|^2 \geq \lambda_1\|u\|_2^2$, e então

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\lambda_1|u(t)|^2 \leq \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu}$$

Pelo lema de Gronwall, obtemos

$$|u(t)|^2 \leq |u(0)|_2^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu^2\lambda_1}(1 - e^{-\nu\lambda_1 t})$$

assim existe um tempo $t_0(\|u_0\|_2)$, o qual podemos tomar

$$t_0(|u_0|) = \max\left\{-\frac{1}{\nu\lambda_1}\ln\left(\frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu^2|u_0|}\right), 0\right\}$$

tal que, para todo $t \geq t_0$ temos

$$|u(t)| \leq 2\frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu^2\lambda_1} \equiv \rho_H^2 \tag{4.11}$$

Integrando 4.10 de t a $t+1$ obtemos a limitação da integral de $\|u(t)\|^2$.

$$\begin{aligned}\int_t^{t+1} \frac{d}{dt}|u(s)|ds \quad + \quad \nu\int_t^{t+1} \|u(s)\|ds &\leq \int_t^{t+1} \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} \\ \Rightarrow \qquad \nu\int_t^{t+1} \|u(s)\|ds &\leq \int_t^{t+1} \frac{\|f\|_{V'}^2}{\nu} + \|u(t)\|_2\end{aligned}$$

e basta usar 4.11.

4.3.2 Conjunto absorvente em $\mathbb{H}^1(\Omega)$

Agora melhoraremos a proposição 4.3.1, usando a limitação da integral em $\|u(s)\|^2$ para obter um conjunto absorvente em V. Para isso, imporemos mais regularidade da função força f, mas não exigiremos mais regularidade de u_0.

Proposição 4.3.2. *Se $f \in H$ então existe uma conjunto absorvente em V, isto é, existe um tempo $t_1(\|u_0\|_2)$, um ρ_V e um I_A tais que*

$$\|u(t)\| \leq \rho_V \quad e \quad \int_t^{t+1} |Au(s)|ds \leq I_A \tag{4.12}$$

para todo $t \geq t_1(|u_0|)$.

A limitação da integral em $|Au(s)|$ irá ajudar na obtenção de um conjunto absorvente em $\mathcal{D}(A)$ na próxima seção.

Demonstração. Tomando o produto interno da equação aproximada com Au, obtemos

$$(u'(t), Au) + \nu(Au, Au) + (B(u, u), Au) \leq (f, Au).$$

Como $b(u_n, u_n, Au_n) = 0$, usando a desilgualdade de Young no segundo membro, temos

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu|Au| \leq \frac{|f|^2}{\nu} \tag{4.13}$$

Desprezando o segundo termo, temos

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 \leq \frac{|f|^2}{\nu}.$$

Integrando ambos os membros de s a t, com $t-1 \leq s < t$, obtemos

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(s)\|^2 + \frac{|f|^2}{\nu}.$$

Integrando agora, de $s = t-1$ a $s = t$, temos

$$\|u(t)\|^2 \leq \int_{t-1}^{t} \|u(s)\|^2 ds + \frac{|f|^2}{\nu}.$$

Se $t \geq t_1(|u_0|) = t(|u_0|)+1$, podemos usar a limitação da integral em 4.9 para obtermos

$$\|u(t)\|^2 \leq \rho \equiv I_v + \frac{|f|^2}{\nu}$$

um conjunto absorvente em V.

Agora, integrando 4.13 de t até $t+1$ obtemos

$$\nu \int_t^{t+1} \|Au(s)\|^2 \leq \frac{|f|^2}{\nu} + \|u(t)\|^2$$

que nos dá 4.12 com $\nu I_A = \dfrac{|f|^2}{\nu} + \rho_V^2$. $\square$

Observação 4.3.1. Estas últimas bem como as próximas estimativas são apenas formais e precisam ser rigorosamente obtidas via método de Galerkin.

Resumidamente, mostramos que, se $f \in H$ então existe um atrator para o sistema dinâmico em H. Também mostramos que qualquer solução no atrator pertence a $L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;\mathcal{D}A)$ e assim tem que ser uma solução forte.

Podemos então enunciar o seguinte teorema

Teorema 4.3.3. *Se $f \in H$ então o sistema dinâmico gerado pelas equações de Navier-Stokes 2D tem um atrator global $\mathcal{A}_H$, e as soluções em $\mathcal{A}_H$ são soluções fortes para a equação original.*

De acordo como foi exposto no capítulo 2, as equações 2D geram um semigrupo não só em H mas também em V. A questão se existe um atrator global em V surge naturalmente. Temos apenas que mostrar que existe um conjunto absorvente limitado em V, e então podemos definir um conjunto por

$$\mathcal{A}_w = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq T} S(t)B}, \tag{4.14}$$

onde B é o conjunto absorvente em V da proprosição 4.3.2, mas o fecho é tomado em H. Isto gera um conjunto $\mathcal{A}_w$ que é limitado (mas não compacto) em V e atrai todas as órbitas na norma de H. No entanto, um atrator global em V tem atrair orbitas na norma de V. Para obter um atrator global para o semigrupo em V, temos que encontrar um conjunto absorvente compacto em V. Faremos isto mostrando que existe um conjunto absorvente em $\mathbb{H}^2(\Omega)$.

4.3.3 Conjunto Absorvente em $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Com um pouco mais de trabalho, podemos mostrar também que existe um conjunto absorvente em $\mathcal{D}(A)$ encontrando limitações assintóticas para $|Au|$ e portanto, usando o resultado 4.6 de regularidade do operador de Stokes, encontramos uma limitação assintótica para $\|u\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}$. Para o sistema dinâmico em H isto equivale ao resultado de regularidade do atrator. Para o sistema dinâmico em V isto mostra a existência de um conjunto absorvente compacto, e portanto, um atrator global em V.

Proposição 4.3.4. *Se $f \in H$ não depende t então existe um conjunto absorvente em*

$\mathcal{D}(A)$, isto é, existe um tempo $t_2(|u_0|)$ e um ρ_A tais que

$$|Au(t)| \leq \rho_A, \quad \textit{para todo} \quad t \geq t_2(|u_0|). \tag{4.15}$$

em particular, $\mathcal{A}_H$ é limitado em $\mathbb{H}^2(\Omega)$.

Observe que se f não depende do tempo (para o qual precisamos mostrar a existência de um atrator global) então $f \in H$ é suficiente para obtermos um conjunto absorvente em $\mathbb{H}^2(\Omega)$ como nesta proposição. Se f depende do tempo, temos que exigir mais regularidade sobre f para obtermos limitação assintótica para $|Au(t)|$ e não trataremos este caso aqui.

Demonstração. A idéia é usar estimativas para a derivada u' que auxiliarão em estimativas para as outras derivadas. De fato, o primeiro passo da demonstração é mostrar que a norma de u_t está relacionada com a norma de Au.

Observe primeiramente que a limitação do lema 2.2.2 implica que se $u \in \mathcal{D}(A)$ então $B(u,u) \in H$, com

$$|B(u,u)| \leq k|u|^{1/2}\|u\||Au|^{1/2}. \tag{4.16}$$

segue então da equação

$$u' + \nu Au + B(u,u) = f$$

que

$$|u'| \leq |Au| + k\|u\|^{1/2}\|u\||Au|^{1/2} + |f|$$

aplicando a desigualdade de Young, temos

$$|u'| \leq \frac{3}{2}|Au| + \frac{1}{2}k^2|u|\|u\|\|Au\|^{1/2},$$

e então, usando 4.9 e 4.12, obtemos

$$|u'| \leq c|Au| + c\rho_H\rho_V^2 + |f|$$

uma vez tomado t suficientemente grande. Segue então que, para t grande, podemos expressar a limitação para

$$\int_t^{t+1} \|Au(s)\|^2 ds$$

dada na proposição 4.3.2 como uma limitação em

$$\int_t^{t+1} |u'| ds \leq C_t \equiv C[I_A + \rho_H^2\rho_V^4 + |f|]. \tag{4.17}$$

Agora, derivando a equação com respeito a t e tomando o produto interno com u' para obter

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'| + \nu\|u'\|^2 &\leq |b(u', u, u')| \\ &\leq k\|u\||u'|\|u'\| \\ &\leq \frac{\nu}{2}\|u'\|^2 + \frac{k^2}{2\nu}\|u\|^2|u'|.\end{aligned}$$

Segue então que para t suficientemente grande

$$\frac{d}{dt}|u'|_{\leq}\frac{k^2\rho_V^2}{\nu}|u'|.$$

Integrando a equação de s a $t+1$ onde $t < s < t+1$ de modo a obtermos

$$|u'(t+1)|^2 \leq |u'(s)|^2 + \frac{k^2\rho_V^2}{\nu}\int_s^{t+1}|u(s)|^2 ds,$$

e integrando de novo de t a $t+1$ de modo que

$$|u'(t+1)|^2 \leq \left(1 + \frac{k^2\rho_V^2}{\nu}\right)\int |u'(s)|^2 ds \leq C_t, (1 + k^2\rho_V^2/\nu) \tag{4.18}$$

usando a limitação 4.17. Segue então que

$$|Au| \leq |u'| + |B(u,u)| + |f|,$$

o que pode ser reajanjado usando 4.16 de modo a obtermos

$$|Au| \leq 2\|u'\| + k^2\rho_H\rho_V + 2|f|,$$

e então temos que $|Au(t+1)|$ é limitada, usando 4.18. □

Como $|u_0| \leq \lambda_1^{-1/2}\|u_0\|$, segue que se $u_0 \in V$ então existe um tempo $t_0(\|u_0\|) = t_1(\lambda_1^{-1/2}\|u_0\|)$ tal que

$$\|u(t)\| \leq \rho_V \quad \text{e} \quad \|Au(t)\| \leq \rho_A \quad \text{para todo} \quad t \geq \widetilde{t}_0(\|u_0\|),$$

e assim existe um conjunto absorvente compacto em V. E portanto o sistema dinâmico em V tem um atrator global, e então podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 4.3.5. *Se $f \in H$ então o sistema dinâmico em V gerado pela equação 2D de Navier-Stokes têm um atrator global $\mathcal{A}_V$.*

REFERÊNCIAS

[1] AUBIN, J.P. *Un théorème de compacité*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Juin1963 (5042-5044).

[2] BEZERRA, D. F. M. *Taxa de convergência de atratores de algumas equações de reação-difusão pertubadas*. PhD thesis, ICMC-USP, 2010.

[3] LADYZENSKAYA, O. A. *On the dynamical system generated by the Navier-Stokes equations*. English translation, J. Soviet Math., 3, pp. 458-479.

[4] LADYZENSKAYA, O. A. *Global solvability of a boundary value problem for the Navier-Stokes equations in the case of two spatial variables*. Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR 123 (3): 427429.

[5] LIONS, J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, Paris, 1959.

[6] LIONS, J. L.; MAGENES, e. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1972 Vol. 1.

[7] LIONS, J.L.; MAGENES, E. *Probl'emes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1*, Dunod, Paris, 1969.

[8] MEDEIROS, L. A. J. *Tópicos em equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2006. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/medeiros/LinkedDocuments/topicosemedp.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2014.

[9] PAZY, A. *semigroups of linear operators and aplication to partial differenthial equations*. Sringer-Velang, New York, 1983.

[10] ROBSON, J. C. *Infinite Dimensional Dynamical Systems:* An Interoductions to Dissipative Parabolic PDEs and theory o Global Atractors. Cambridge: Cambridge University Press. 2001. 461 p.

[11] TEMAM, R. *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd ed. 1995.

[12] TEMAM, R. *Navier-Stokes equations - theory and numerical analysis*, North Holland, New York, 1979.

[13] SOUZA, Fernando Pereira de. *Problema Misto para as equações de Navier-Stokes de Fluidos homogêneos e incompressíveis*. 2007. 99 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2007. Disponível em:

<http://www.pma.uem.br/arquivos/dissertacoes/fernando_souza.pdf>. Acesso em: 25 set. 2014.