Universidade Federal da Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT
Dissertação de Mestrado

Sombreamento por Pontos Periódicos Não-uniformemente Hiperbólicos e Hiperbolicidade Uniforme

Rondinelle Luís Silva de Sousa

São Luís - MA
Setembro de 2015

Sombreamento por Pontos Periódicos Não-uniformemente Hiperbólicos e Hiperbolicidade Uniforme

Rondinelle Luís Silva de Sousa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profª Drª Vanessa Ribeiro Ramos.

São Luís-MA

Setembro de 2015

Souza, Rondinelle Luís Silva.

/ Sombreamento por Pontos Periódicos Não-uniformemente Hiperbólicos e Hiperbolicidade Uniforme / Rondinelle Luís Silva de Sousa. – São Luís - MA, 2015.

60 f. : il.

Orientador: Profª. Drª. Vanessa Ribeiro Ramos.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.

Referências bibliográficas.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Teoria Ergódica. I. Ramos, Vanessa Ribeiro. II. Universidade Federal do Maranhão, Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU : 517.938

Sombreamento por Pontos Periódicos Não-uniformemente Hiperbólicos e Hiperbolicidade Uniforme

Rondinelle Luís Silva de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 25 de setembro de 2015.

Banca examinadora:

Profª. Drª. Vanessa Ribeiro Ramos (Orientador)
UFMA

Prof. Dr. Nivaldo Costa Muniz
UFMA

Prof. Dr. Lucas Henrique Backes
UERJ

A minha família e namorada
pela paciência e incentivo.

"Àquele que é poderoso para fazer infinitamente mais além daquilo que pedimos ou pensamos"

(Paulo, O apóstolo - Bíblia Sagrada)

Agradecimentos

Ao Senhor Deus, criador dos céus e da terra. A toda a minha família, em especial minha mãe, mulher guerreira, pelo carinho e apoio incondicional. A minha namorada pelas palavras de força e encorajamneto nos momentos difíceis. Aos colegas e amigos do mestrado Jadevilson Cruz, Leandro, Jorge Augusto, Felipe, Leomar, Ten. Diego, meu conterrâneo Geilson, Ronaldo e Marlon pelos debates, discursões e esclarecimentos sobre matemática, a nossas conversas sobre questões polémicas envolvendo nosso país e, é claro, pelos momentos de descontração e estímulo. Aos professores do PPGMAT, em ressalva ao Prof. Nivaldo Muniz, Prof. Maxwell, do professor do departamento de matemática da UFMA Prof. Hilkias, pelo incentivo, ao Programa de Mestrado, ao Prof. Marcos Araujo pela compreensão. Em especial, a professora Vanessa Ramos, pela atenção, confiança que me fora dado e principalmente por sua paciência, o meu muito obrigado.

E não menos importante, à CAPES pelo fomento da bolsa de mestrado proporcionando meu desenvolvimento profissional e formação acadêmica.

Resumo

Neste trabalho, dissertamos sobre o artigo “Sombreamento por Pontos Periódicos Não-uniformemente Hiperbólicos e Hiperbolicidade Uniforme” devido a Armando Castro, Krerley Oliveira e Vilton Pinheiro. Neste artigo, provou-se que, sob uma condição leve na hiperbolicidade dos pontos periódicos, uma aplicação g que é topologicamente conjugada a uma aplicação hiperbólica (respectivamente, uma aplicação expansora) é também uma aplicação hiperbólica (respectivamente, uma aplicação expansora). Em particular, esse resultado dá um resposta parcial positiva para uma pergunta feita por A Katok, em um contexto relacionado.

Palavras-chave: Sombreamento, Pontos Periódicos, Hiperbolicidade Não-uniforme.

Abstract

In this work, we commented about the result "Shadowing by non-uniformly hyperbolic periodic points and uniform hyperbolicity" due to Armando Castro, Krerley Oliveira and Vilton Pinheiro. In this article, it was proved that under a mild condition in hyperbolicity of periodic points, a map g which is topologically conjugated to a hyperbolic map (respectively, an expanding map) is also a hyperbolic map (respectively, an expanding map). In particular, this result gives a partial positive answer for a question asked by A Katok, in a related context.

Keywords: Shadowing, Periodic Points, Non-uniform Hyperbolicity.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **4**

1.1 Aplicação Expansora 5

1.2 Conjuntos Hiperbólicos 6

1.3 Recorrência 11

2 Expoentes de Lyapunov e Hiperbolicidade (Não)Uniforme **13**

2.1 Expoentes de Lyapunov 13

2.2 Conjunto Não-Uniformemente Hiperbólico 15

2.3 Prova dos Teoremas 2.1.3 e 2.1.4 18

2.3.1 Prova do Teorema 2.1.3. 18

2.3.2 Prova do Teorema 2.1.4 19

3 Sombreamento por Pontos Periódicos Não-uniformemente Hiperbólicos e Hiperbolicidade Uniforme. **20**

3.1 O caso endomorfismo: conjunto periódico NUE 20

3.2 O caso difeomorfismo: conjunto periódico NUH 22

3.3 Uma questão de A. Katok 28

Anexo **30**

Referências **37**

Introdução

A noção de sistema dinâmico uniformemente hiperbólico, proposta por Stephen Smale na década de 60, deu fundamento matemático ao fato que certos sistemas determinísticos apresentam comportamento caótico de uma forma robusta. Mais precisamente, neste contexto, cada sistema é caótico mas é estável por pequenas perturbações (propriedade demonstrada a partir do Lema de Sombreamento). Atualmente, esta teoria encontra-se relativamente bem entendida do ponto de vista topológico e ergódico.

Existem várias maneiras de se estender o conceito de hiperbolicidade uniforme. Uma delas é observar que sob o ponto de vista de uma medida invariante μ por um difeomorfismo f quase todo ponto x e para qualquer vetor v a norma dos iterados $Df^n(x)v$ possui taxa de crescimento e decaimento exponencial bem definida quando $n \to \pm\infty$. Esta taxa é chamada de *Expoente de Lyapunov* de f em x na direção do vetor v. Quando estes expoentes são diferentes de zero dizemos que o sistema (f, μ) é não-uniformemente hiperbólico. Neste caso, a dinâmica tem um comportamento muito semelhnte à dinâmica hiperbólica.

A teoria de hiperbolicidade não-uniforme tem suas origens nos trabalhos de Lyapunov e Perron, sobre estabilidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. No entanto, essa teoria tornou-se uma disciplina independente com os trabalhos de Oseledets e Pesin, tornando-se uma importante linha de pesquisa em Sistemas Dinâmicos.

O objetivo deste trabalho é dissertar sobre a dinâmica não-uniformemente hiperbólica. Estudaremos os resultados do artigo "Shadowing by non-uniformly hyperbolic periodic points and uniform hyperbolicity".

Neste artigo, os autores mostram que, sob uma condição leve de hiperbolicidade dos pontos periódicos, uma aplicação g que é topologicamente conjugada a uma aplicação hiperbólica (respectivamente, uma aplicação expansora) é também uma aplicação hiperbólica (respec., uma aplicação expansora). Em particular, os autores obtêm uma resposta positiva a uma questão proposta por A. Katok, em um contexto relacionado.

O Capítulo 1 é composto por resultados preliminares para o entendimento dos enunciados e demonstrações do trabalho. Iniciamos este capítulo definindo conjugação, aplicações expansoras e hiperbólica. Em seguida, caracterizamos hiperbolicidade através de cones invariantes, demonstramos o Lema de Sombreamento e o Teorema de Recorrência de Poincaré.

Como o tema da dissertação é a dinâmica não-uniformemente hiperbólica, dedicamos o Capítulo 2 aos Expoentes de Lyapunov e às noções de conjunto não-uniformemnte hiperbólico e conjunto não-uniformemente expansor. Além de definirmos tais conceito, apresentamos alguns exemplos, enunciamos o Teorema de Oseledets e por fim comentamos o resultado "Non-zero Lyapunov exponents and uniform hyperbolicity" devido a Y. Cao [10], onde ele mostra que um difeomorfismo com splitting contínuo e expoentes de Lyapunov não-nulos é de fato um difeomorfismo hiperbólico. Este resultado desempenha papel fundamental nas demonstrações dos teoremas do nosso trabalho.

No capítulo 3, enunciamos e provamos os resultados do artigo "Shadowing by non-uniformly hyperbolic periodic points and uniform hyperbolicity", objetivo da dissertação. Primeiro tratamos o caso endomorfismo não-uniformemente expansor (NUE):

Teorema A. *: Seja $g : M \to M$ um difeomorfismo local de classe C^2 em uma variedade compacta M. Suponha que g é topologicamente conjugado a uma aplicação f expansora C^1. Se g é NUE no conjunto $Per(g)$ de pontos periódicos, então g é uma aplicação expansora.*

Para demonstrar este teorema utilizamos o conceito de tempos hiperbólicos e concluímos que se o conjunto dos pontos periódicos de g é NUE então todos os seus pontos regulares têm expoentes de Lyapunov positivos. Daí, a partir do resultado do Y. Cao [10], finalizamos a demonstração do Teorema A.

Considerando um difeomorfismo não-uniformemente hiperbólico (NUH) apresentamos os

Teorema B. *: Sejam $g : M \to M$ um difeomorfismo C^2 definido em uma variedade compacta M e $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto invariante. Suponha que $g|_\Lambda$ é topologicamente conjugado a um C^1 difeomorfismo $f : M \to M$ restrito a um conjunto $\hat{\Lambda}$, hiperbólico para f. Se o conjunto $Per(g)$ dos pontos periódicos de g é NUH e $T_{Per(g)}M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ é uma decomposição dominada, então Λ é conjunto hiperbólico para g.*

O Teorema C enfraquece a condição de decomposição dominada.

Teorema C. *: Sejam $g : M \to M$ um difeomorfismo C^2 definido em uma variedade compacta M e $\Lambda \subset M$ um compacto invariante. Suponha que $g|_\Lambda$ é topologicamnete conjugado a um C^1 difeomorfismo f restrito a um conjunto $\hat{\Lambda}$, hiperbólico para f. Se o conjunto $Per(g)$ dos pontos periódicos de g é NUH e $T_{Per(g)}M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ tem uma* *extensão contínua para uma decomposição em* $T_{\overline{Per(g)}}M$*, então* Λ *é um conjunto hiperbólico para* g*.*

Nestes casos, a estratégia foi utilizar a teoria dos tempos hiperbólicos juntamente com os campos de cones para mostrar que todos os pontos recorrentes e regulares de g tem expoentes de Lyapunov não-nulos. Daí, novamente pelo resultado do Y. Cao [10], concluimos as demonstrações destes teoremas.

Por fim, ainda no Capítulo 3, comentamos a conjectura de A. Katok: "Um sistema $C^{1+\alpha}$ que é Hölder conjugado a uma aplicação expansora (resp. difeomorfismo de Anosov) é também expansora (resp. difeomorfismo de Anosov)". Explicamos como os Teoremas A, B e C fornecem uma resposta parcial positiva à esta conjectura.

O Anexo é um breve resumo sobre a Transformação Shift e o exemplo da ferradura de Smale.

Capítulo 1

Preliminares

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos básicos que serão utilizados ao longo do trabalho.

Sejam M um espaço topológico e $f : M \to M$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é *transitiva* se dados $U,\ V$ abertos de M, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq 0$. f é chamado *topologicamente mixing*, se $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq 0$, $\forall n \geq n_0$.

Dados dois sistemas dinâmicos $f : M \to M$ e $g : N \to N$ definidos em espaços topológicos M e N dizemos que f e g são *topologicamente conjugados* se existe um homeomorfismo $h : M \to N$ tal que

$$h \circ f(x) = g \circ h(x).$$

Isto é, a aplicação h faz o diagrama da figura abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "g"] & N. \end{tikzcd}$$

Figura 1.1: Sistemas dinâmicos topologicamente conjugados.

Chamamos h de *conjugação topológica*. Se h for contínua, mas apenas sobrejetiva, dizemos que h é uma *semiconjungação*.

Note que se p é periódico para f então $h(p)$ é periódico para g. Se f é transitiva então g também o é. Se f é topologicamente mixing também é g.

1.1 Aplicação Expansora

Definição 1.1.1. *Seja $f : M \to M$ uma aplicação diferenciável definida em uma variedade M. Dizemos que f é uma aplicação expansora se existe $\lambda > 1$ e alguma métrica em M tal que*

$$\|Df(x)v\| \geq \lambda\|v\|, \qquad \forall x \in M,\ v \in T_xM.$$

Observe que uma aplicação expansora é um difeomorfismo local.

Exemplo 1.1.2. *Seja $\mathsf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear invertível com coeficientes inteiros. Se todos os autovalores de A tem módulo maior que 1 então A induz uma transformação expansora $f_{\mathsf{A}} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ no toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$. Por exemplo, considere a matriz $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ com autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$. Portanto, A induz uma transformação expansora $f_{\mathsf{A}} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ no toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$.*

Abaixo, vamos estender o conceito de transformação expansora para um espaço métrico compacto. Em seguida, vamos mostrar a propriedade de sombreamento.

Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto M. Dizemos que f é *expansora* se existem constantes $\sigma > 1$ e $\rho > 0$ tais que para todo $p \in M$, a imagem da bola $B(p, \rho)$ contém uma vizinhança do fecho de $B(f(p), \rho)$ e para todo $x, y \in B(p, \rho)$ vale:

$$d(f(x), f(y)) \geq \sigma d(x, y)$$

Observe que a definição de transformação expansora dada na Definição 1.1.1, também é expansora neste sentido.

Observe também que se $f : M \to M$ é uma aplicação expansora então existe $\delta > 0$ tal que f é injetiva em cada bola $B(z, \delta)$ centrada em z e raio δ. Deste modo, para todo $z \in M$ está bem definido o *ramo inverso* $h_z : \overline{B(f(z), \delta)} \to B(z, \delta)$ de f em z. A condição de expansão implica

$$d(h_p(y), h_p(w)) \leq \sigma^{-1} d(y, w)$$

para todo $y, w \in B(f(z), \rho)$.

Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \to X$ uma aplicação invertível. Fixado $\delta > 0$, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é chamada uma *δ-órbita* ou *δ-pseudo órbita* para f se $d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Dado $\varepsilon > 0$, dizemos que um ponto $x \in M$ ϵ-sombreia a δ-pseudo órbita $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, se $d(f^n(x), x_n) < \epsilon,\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Em particular, uma sequência de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_0$ é uma $\delta-$*pseudo órbita periódica*, se $d(f(x_k), x_{k+1}) < \delta$ para $k = 0, \ldots, n-1$.

Quando a transformação f é não-invertível as definições acima são dadas substituindo $n \in \mathbb{Z}$ por $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.1.3 (Lema de Sombreamento)**.** *Seja $f : M \to M$ é uma transformação expansora. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda δ-pseudo-órbita $(x_n)_n$ existe $x \in M$ tal que $d(f^n(x), x_n) < \epsilon$ para todo $n \geq 0$.*

Se ϵ é suficientemente pequeno para que 2ϵ seja uma constante de expansividade de f então o ponto x é único. Se, além disso, a pseudo-órbita é periódica então x é ponto periódico.

Demonstração: Vamos considerar $\epsilon < \rho$ o que não caracteriza uma restrição. Fixe $\delta > 0$ de modo que tenhamos $\sigma^{-1}\epsilon + \delta < \epsilon$. Considere o ramo contrativo de f^{-1} em x_n, $h_n : \bar{B}(f(x_n), \rho) \to B(x_n, \rho)$ para cada $n \geq 0$. A propriedade de contração garante que

$$h_n(\bar{B}(f(x_n), \epsilon)) \subset B(x_n, \delta^{-1}\epsilon)$$

para todo $n \geq 1$. Como $d(x_n, f(x_{n-1})) < \delta$, segue que $h_n(\bar{B}(f(x_n), \epsilon)) \subset B(f(x_{n-1}), \epsilon)$ para todo $n \geq 1$. Deste modo, podemos considerar a composição $h^n = h \circ \cdots \circ h_{n-1}$.

Por outro lado, como a sequência de compactos $K_n = h^n(\bar{B}(f(x_n), \epsilon))$ é excaixada, podemos considerar x na interseção, isto é, $x \in K_{n+1}$, $\forall\, n \geq 0$. Daí, $f^n(x)$ pertence a

$$f^n \circ h^{n+1}(\bar{B}(f(x_n), \epsilon)) = h_n(\bar{B}(f(x_n), \epsilon)).$$

Pe portanto $d(f^n(x), x_n) < \epsilon$ para todo $n \geq 0$.

Suponha agora que x' é outro ponto satisfazendo a proposição então:

$$d(f^n(x), f^n(x')) \leq d(f^n, x_n) + d(f^n(x'), x_n) < 2\epsilon \qquad \forall n \geq 0.$$

Por expansividade, segue que $x = x'$.

Finalmente, se a pseudo-órbita é periódica, com período $\kappa \geq 1$, temos que

$$d(f^n(f^\kappa(x)), x_n) = d(f^{n+\kappa}(x), x_{n+\kappa}) < \epsilon, \qquad \forall n \geq 0.$$

Por unicidade, obtemos que $f^\kappa(x) = x$. $\square$

1.2 Conjuntos Hiperbólicos

Definição 1.2.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo definido em uma variedade diferenciável M. Um conjunto compacto f-invariante $\Lambda \subset M$ é chamado conjunto hiperbólico* *se existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ e uma decomposição Df-invariante do fibrado tangente $TM = E^s \oplus E^u$ em subfibrados E^s e E^u tais que $\forall x \in M$:*

1. $T_xM = E_x^s \oplus E_x^u$
2. $\|Df_x^n(v^s)\| \leq C\lambda^n \|v^s\|, \forall v^s \in E^s,\ n \in \mathbb{N}$
3. $\|Df_x^{-n}(v^u)\| \leq C\lambda^n \|v^u\|, \forall v^u \in E^u,\ n \in \mathbb{N}$
4. $Df_x E^s(x) = E^s(f(x))$ *e* $Df_x E^u(x) = E^u(f(x))$.

Exemplo 1.2.2. ***Ponto fixo hiperbólico***

Seja o difeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \left(2x, \frac{1}{3}y\right).$$

A origem $(0,0)$, é um ponto fixo hiperbólico tipo sela. De fato, $(0,0) = f(0,0)$ e para $(u, v) \neq (0,0)$

$$Df_{(0,0)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}v \end{pmatrix}.$$

Na direção do eixo $e_1 = (1,0)$, temos

$$Df_{(0,0)} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é, as entradas u são expandidas. Na direção do eixo $e_2 = (0, v)$ temos

$$Df_{(0,0)} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}v \end{pmatrix}$$

ou seja, as entradas v são contraídas. Assim, pontos próximos ao ponto $(0,0)$, existem pontos que expandem e pontos que contraem.

Quando f é dada por

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{3}y\right)$$

a origem $(0,0)$ é um ponto fixo hiperbólico atrator. De fato, para vetores $(u, v) \neq (0,0)$, as entradas u, contraem 1/2 do seu comprimento, e, as entradas v, contraem para 1/3 do seu comprimento.

Agora, se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z) = (2x, 3y, 2z)$$

temos que a origem $(0,0,0)$ é um ponto fixo hiperbólico repulsor. De fato, qualquer vetor $(u, v, w) \neq (0,0,0)$ é expandido.

Exemplo 1.2.3. ***Difeomorfismos de Anosov***

Um difeomorfismo $f : M \to M$ de uma variedade compacta M é dito ser um difeomorfismo de Anosov se M é um conjunto hiperbólico para f.

Um exemplo simples de difeomorfismo de Anosov é um automorfismo hiperbólico do toro bidimensional $\mathbb{T}^2$. Considere uma aplicação linear $\mathsf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ induzida pela matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, isto é, aplicação definida por,

$$\mathsf{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{A}(u, v) = (2u + v, u + v).$$

Essa aplicação tem as seguintes propriedades;

1. $\mathsf{A}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$

2. $\det \mathsf{A} = 1$

3. os autovalores de A são diferentes de um,

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1 \qquad e \qquad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1.$$

Então, A induz uma aplicação no toro bidimensional, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$, $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dada por:

$$\mathsf{T}(x, y) = (2x + y, x + y)\ (mod\ 1)$$

Uma vez que, $\det \mathsf{A} = 1$, *T é inversível e, assim, A^{-1} também é uma matriz inteira. Além disso, T é um automorfismo do grupo comutativo $\mathbb{T}^2$.*

Desde que A é simétrica, os autovetores são ortogonais. Os autovetores correspondentes ao primeiro autovalor pertence a reta $y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}x$. Retas paralelas a essa reta são invariantes sobre A. Além do mais, A expande uniformemente distâncias sobre essas retas por um fator de λ_1. Do mesmo modo, existem retas $y = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}x +$ const que contraem e são invariantes.

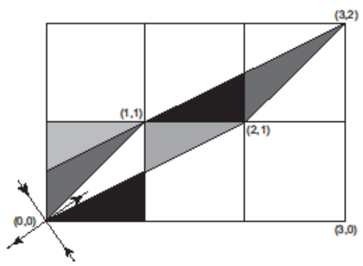

Figura 1.2: Imagem do toro sobre A

Os dois exemplos anteriores, são exemplos triviais de conjuntos hiperbólicos; no primeiro, o conjunto hiperbólico é apenas um ponto enquanto que o segundo é o espaço todo. No Anexo, apresentamos um exemplo devido a Stephen Smale de um conjunto hiperbólico não-trivial definido no toro bidimensional, este exemplo é conhecido como a Ferradura de Smale.

A seguir, algumas propriedades dos conjuntos hiperbólicos.

Proposição 1.2.4. *Seja Λ um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo f. Então os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ dependem continuamente de $x \in \Lambda$.*

Demonstração. Seja x_n uma sequência em Λ que converge para $x \in \Lambda$. Queremos provar que $E^s(x_n) \to E^s(x)$. Passando a uma subsequência x_{n_k} tal que $\dim E^s(x_{n_k}) = j$ para algum j. Seja $\{v_k^1, \ldots, v_k^j\}$ uma base ortonormal de $E^s(x_{n_k})$ e $\{v_k^{j+1}, \ldots, v_k^n\}$ uma base ortonormal de $E^u(x_{n_k})$. Tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que $v_k^i \to_k v^i$ e portanto, $\{v^1, \ldots, v^j\}$ e $\{v^{j+1}, \ldots, v^n\}$ são conjuntos ortonormais de T_xM. Seja $E = \langle v^1, \ldots, v^j \rangle$ e $F = \langle v^{j+1}, \ldots, v^n \rangle$. Agora, se $v \in E$, $||v|| = 1$ então $||Df_x^m v|| \leq c\lambda^m$ para $m \geq 0$. De fato, podemos escolher $v_k \in E^s(x_{n_k})$, $||v_k|| = 1$ tal que $v_k \to v$. Logo, fixado $m \geq 0$ se tem que

$$||Df_x^m v|| = \lim_k ||Df_{x_{n_k}}^m v_k|| \leq \lambda^m.$$

Isto mostra que $E \subset E^s(x)$.

Analogamente, se $w \in F$, $\|w\| = 1$, então $\|Df_x^{-m} w\| \leq \mu^m$ para $m \geq 0$. De fato, podemos escolher $w_k \in E^u(x_{n_k})$, $\|w_k\| = 1$ tal que $w_k \to w$. Então, fixado $m \geq 0$ tem-se que

$$\|Df_x^{-m} w\| = \lim_k \|Df_{x_{n_k}}^{-m} w_k\| \leq \mu^m$$

Isto significa que $F \subset E^u(x)$. Em particular, $E \cap F = \{0\}$ e portanto, $E = E^s(x), F = E^u(x)$. Assim provamos que, qualquer subespaço limite de $E^s(x_n)$ e de $E^u(x_n)$ necessariamente são $E^s(x)$ e $E^u(x)$. $\square$

Apesar de conjuntos hiperbólicos serem definidos em termos de famílias invariantes de espaços lineares, muitas vezes é conveniente, e em contextos mais gerais até mesmo necessário, trabalhar com famílias invariantes de cones lineares em vez de subespaços. A seguir iremos caracterizar hiperbolicidade em termos de famílias de cones invariantes.

Seja Λ um conjunto hiperbólico de $f : M \to M$. Uma vez que as distribuições E^s e E^u são contínuas, estendemo-as para distribuições contínuas $\hat{E}^s$ e $\hat{E}^u$ definidas em uma vizinhança $U(\Lambda) \supset \Lambda$. Se $x \in U(\Lambda)$ e $v \in T_xM$, seja $v = v_s + v_u$ com $v_s \in \hat{E}^s(x)$ e

$v_u \in \hat{E}^u(x)$. Suponha que a métrica é adaptada com $\lambda > 0$ constante. Para $0 < a < 1$, definimos o *cone estável e instável de tamanho* a por

$$C_a^s(x) := \{v_s \in T_xM; \|v_u\| \leq a\|v_s\|\},$$

$$C_a^u(x) := \{v_u \in T_xM; \|v_s\| \leq a\|v_u\|\}.$$

Para um cone C_a^s, seja $\tilde{C}_a^s = \mathrm{int}(C_a^s) \cup \{0\}$. Da mesma forma para um cone C_a^u, $\tilde{C}_a^u = \mathrm{int}(C_a^u) \cup \{0\}$. Seja $\Lambda_\epsilon = \{x \in U : \mathrm{dist}(x, \Lambda) < \epsilon\}$.

Proposição 1.2.5. *Para cada $a > 0$ existe $\epsilon = \epsilon(a) > 0$ tal que $f^i(\Lambda_\epsilon) \subset U(\Lambda)$, $i = -1, 0, 1$, e para cada $x \in \Lambda_\epsilon$*

$$Df_x^{-1}C_a^s(x) \subset \tilde{C}_a^s(x) \quad e \quad Df_xC_a^u(x) \subset \tilde{C}_a^u(f(x)).$$

Demonstração. Ver referência [12].

O próximo resultado é a recíproca da proposição anterior.

Proposição 1.2.6. *Seja Λ um conjunto invariante compacto de $f : U \to M$. Suponha que existe um $a > 0$ e para cada $x \in \Lambda$ existem subespaços contínuos $\tilde{E}^s(x)$ e $\tilde{E}^u(x)$ tal que $T_xM = \tilde{E}^s \oplus \tilde{E}^u$, e os cones C_a^s e C_a^u determinados pelos subespaços satisfazendo*

1. $Df_x^{-1}C_a^s(f(x)) \subset C_a^s(x)$ *e* $Df_xC_a^u \subset C_a^u(f(x))$,

2. $\|Df_xv\| < \|v\|$ *para* $v \neq 0$, $v \in C_a^s(x)$, *e* $\|Df_x^{-1}v\| < \|v\|$ *para* $v \neq 0$, $v \in C_a^u(x)$.

Então Λ é um conjunto hiperbólico para f.

Demonstração. Ver referência [12].

Os conjuntos hiperbólicos também possuem a propriedade de sombreamento.

Teorema 1.2.7 (Lema do Sombreamento)**.** *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo definido em uma variedade M e Λ um conjunto hiperbólico compacto para f. Então existe uma vizinhança U de Λ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ de modo que cada δ-órbita em U é ϵ-sombreada por uma órbita de f.*

Demonstração. Ver referência [7].

A propriedade de sombreamento nos permite mostrar que os sistemas hipérbólicos são estáveis por pequenas perturbações. Mais precisamente, *estruturalmente estáveis.*

Definição 1.2.8. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^1 definido em uma variedade M. Dizemos que f é estruturalmente estável se existe uma vizinhança V_f de f na topologia C^1 tal que para cada $g \in V_f$ existe um homeomorfismo $h_g : M \to M$ que conjuga f e g.*

Teorema 1.2.9 (Estabilidade Estrutural de Conjuntos Hiperbólicos)**.** *Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo e Λ_f é um conjunto hiperbólico para f então existem vizinhanças U de Λ e V_f de f na topologia C^1 tais que para cada $g \in V_f$ o conjunto $\Lambda_g := \cap_{n\in\mathbb{Z}} g^n(\bar{U})$ é hiperbólico para g com $f|_{\Lambda f}$ e $g|_{\Lambda_g}$ topologicamente conjugadas.*

Demonstração: Considere Λ_f um espaço topológico e $h = f|_{\Lambda_f}$ um homeomorfismo. Seja $\phi : \Lambda_f \to M$ a inclusão. Sabemos que existe uma aplicação contínua $\psi : \Lambda_f \to M$ tal que $\psi \circ f|_{\Lambda_f} = g \circ \psi$ (Ver o Teorema 5.3.1 em [12]). Faça $\Lambda_g = \psi(\Lambda_f)$. Pelo mesmo Teorema 5.3.1, para Λ_g espaço topológico e $h = g|_{\Lambda_g}$ homeomorfismo, e a inclusão $\phi : \Lambda_g \to M$, nos dá $\psi' : \Lambda_g \to M$ com $\psi' \circ g|_{\Lambda_g} = f|_{\Lambda_f} \circ \psi$. Por unicidade, segue-se que $\psi^{-1} = \psi'$. Para $\delta > 0$, $\mathrm{dist}_0(\psi', \mathrm{Id}) < \delta$ e pela Proposição 5.5.1 em [12], Λ_g é hiperbólico. $\square$

Corolário 1.2.10. *Difeomorfismos de Anosov são estruturalmente estável.*

1.3 Recorrência

Para finalizar, iremos enunciar o Teorema de Recorrência de Poincaré. Antes, vamos introduzir alguma definição.

Sejam $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ um espaço mensurável e $f : X \to X$ uma transformação mensurável. Dizemos que f preserva medida ou μ é $f-$invariante se $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathfrak{A}$.

Sejam X um espaço topológico, $f : X \to X$ uma aplicação contínua e $x \in X$. Um ponto $y \in X$ é um *ponto ω-limite* de x se existe uma sequência de números naturais $n_k \to \infty$, quando $k \to \infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to y$. O *conjunto ω-limite* de x é o conjunto $\omega(x) = \omega_f(x)$ de todos os pontos ω-limite de x, o que equivale a

$$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(x)}.$$

Se f é invertível, o *conjunto α-limite* de x é $\alpha(x) = \alpha_f(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^{-i}(x)}$. Um ponto em $\alpha(x)$ é um *ponto α-limite* de x.

Dizemos que um ponto x é *recorrente* se $x \in \omega(x)$.

Agora, vamos ao enuciado de um resultado famoso devido a Poincaré.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Recorrência de Poincaré)**.** *Sejam $f : X \to X$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita f-invariante. Se $A \subset X$ é um conjunto mensurável com $\mu(A) > 0$ então, para μ-quase todo ponto $x \in A$ existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x)$ também está A. Em outras palavras, sob o ponto de vista de uma medida invariante, quase todo ponto é recorrente.*

Demonstração. Vamos representar por A_0 o conjunto dos pontos $x \in A$ que nunca voltam a A. Primeiramente, provaremos que A_0 tem medida nula. Começamos por observar que as suas pré-imagens $f^{-n}(A_0)$ são disjuntas duas-a-duas. De fato, suponhamos que existem $m > n \geq 1$ tais que $f^{-m}(A_0)$ intersecta $f^{-n}(A_0)$. Seja x um ponto na intersecção e seja $y = f^n(x)$. Então $y \in A_0$ e $f^{m-n}(y) = f^m(x) \in A_0$, que está contido em A. Isto quer dizer que y retorna pelo menos uma vez a A, o que contradiz a definição de A_0. Esta contradição, prova que as pré-imagens são disjuntas duas-a-duas, como afirmamos.

Observando que $\mu(f^{-n}(A_0)) = \mu(A_0)$ para todo $n \geq 1$, porque μ é invariante, concluímos que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(A_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-n}(A_0)) = \sum \mu(A_0).$$

Como μ é uma medida finita, a expressão à esquerda é finita. Por outro lado, à direita temos uma soma de infinitos termos, todos iguais. Para que essa soma seja finita as parcelas têem que serem nulas. Portanto, devemos ter $\mu(A_0) = 0$, como afirmado.

Agora, denotemos por B o conjunto dos pontos $x \in A$ que voltam para A uma quantidade finita de vezes. Como consequência da definição, temos que todo ponto $x \in B$ tem algum iterado $f^k(x)$ em A_0. Ou seja,

$$B \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(A_0)$$

Como $\mu(A_0) = 0$ e μ é invariante, temos:

$$\mu(B) \leq \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(A_0)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(f^{-k}(A_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_0) = 0$$

Portanto, $\mu(B) = 0$ como queriamos provar. $\square$

Capítulo 2

Expoentes de Lyapunov e Hiperbolicidade (Não)Uniforme

Uma vez que há um completo entendimento dos conceitos e propriedades de Sistema Uniformemente Hiperbólico torna-se natural investigar sob quais condições é possível obter um comportamento uniformemente hiperbólico a partir de um Sistema Não-uniformemente hiperbólico. Nesta direção, os Expoentes de Lyapunov desempenham um papel fundamental.

2.1 Expoentes de Lyapunov

Sejam M uma variedade compacta e $f : M \to M$ um difeomorfismo. Dizemos que $x \in M$ é um ponto regular de f se existem números

$$\lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \cdots > \lambda_m(x)$$

e uma decomposição Df-invariante do espaço tangente $T_xM = E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus \cdots \oplus E_m(x)$ tais que $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v\| = \lambda_j(x)$ para todo $0 \neq v \in E_j(x)$ e todo $1 \leq j \leq m$.

Os números $\lambda_j(x)$ são chamados *expoentes de Lyapunov de f em x* e os espaços $E_j(x)$ são os *espaços próprios de f no ponto regular x*.

Como exemplo destes conceitos vamos calcular os expoentes de Lyapunov de um automorfismo linear $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ do toro n-dimensional.

Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o levantamento linear de f. Se $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_m$ são os módulos dos autovalores de A e E_i a soma direta dos subespaços associados aos autovalores com módulo λ_i então pelo teorema de Jordan temos que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \|A^n v\| = \lambda_j$$

para todo $0 \neq v \in E_j$, $1 \leq j \leq m$.

Como f é linear, segue que $Df = A$, e portanto, todo ponto $x \in \mathbb{T}^n$ é regular para f e os expoentes de Lyapunov são $\lambda_1 > \cdots > \lambda_m$ com decomposição $T_x\mathbb{T}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_m$ constante em todo ponto $x \in \mathbb{T}^n$.

Neste exemplo, os expoentes de Lyapunov são constantes em $\mathbb{T}^n$. O exemplo a seguir, ou melhor dizendo, o método a seguir, descreve como construir exemplos mais interessantes no qual os expoentes de Lyapunov descreve o comportamento assintótico em quase todo ponto.

Exemplo 2.1.1. *Partindo de um difeomorfismo uniformemente hiperbólico e fixado um ponto, a idéia é fazer com que a hiperbolicidade nesse ponto se degenere. Uma maneira de fazer isso, é considerar a ferradura de Smale. Basta tomar um dos dois pontos fixos e fazer variar os coeficientes de contração e expansão de maneira que eles se aproximem da unidade nesse ponto fixo. Ou seja, o comprimento dos vetores pela derivada não diminuem nem aumentam. No entanto, expoentes de Lyapunov ao longo de uma trajetória típica são diferentes de zero.*

O teorema que garante a boa definição dos expoentes de Lyapunov é o famoso Teorema de Oseledects. (Para uma prova do teorema ver [15])

Teorema 2.1.2. *(Oseledects) Se M é compacta o conjunto dos pontos regulares de um difeomorfismo é um boreleano com probabilidade total.*

No teorema, um conjunto de probabilidade total é aquele que tem madida 1 com relação a qualquer probabilidade invariante pela dinâmica. Neste caso, o conjunto dos pontos regulares tem probabilidade total.

Quando a dinâmica f é não-invertível, ao invés de uma decomposição em soma direta do espaço tangente existe uma filtração em subespaços vetoriais tais que

$$T_xM = E_1(x) > E_2(x) > \cdots > E_m(x) > E_{m+1}(x) = \{0\}$$

com

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)v\| = \lambda_j(x)$$

para todo $0 \neq v \in E_i(x) \setminus E_{i+1}(x)$, $1 \leq i \leq m$.

Também no caso não-invertível, o Teorema de Oseledects garante que o conjunto dos pontos regulares tem probabilidade total.

Note que, o expoente de Lyapunov é taxa exponencial do crescimento ou decaimento da derivada da dinâmica no espaço próprio. Deste modo, se o expoente de

Lyapunov é diferente de zero a nossa intuição nos conduz a pensar que a dinâmica é essencialmente hiperbólica.

O teorema do Y. Cao [10] confirma a nossa intuição. Quando f é um difeomorfismo local, ele prova

Teorema 2.1.3. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^1, definido em uma variedade compacta M. Se todos os expoentes de Lyapunov de f são positivos então f é uniformemente expansora.*

Y. Cao também prova uma versão deste resultado para difeomorfismo C^1, $f : M \to M$ que possui um conjunto invariante com estrutura não-uniformemente hiperbólica.

Teorema 2.1.4. *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^1 e $\Lambda \subset M$ um conjunto invariante por f com decomposição contínua $T_\Lambda M = E^{cs} \oplus E^{cu}$. Se todos os expoentes de Lyapunov de f na direção E^{cu} são positivos e todos os expoentes de Lyapunov de f na direção E^{cs} são negativas então Λ é um conjunto hiperbólico.*

No final do capítulo daremos uma prova breve destes dois teoremas.

Observamos que a palavra "todos"nos teoremas acima significa probabilidade total. Estes teoremas são fundamentais nas demonstrações dos resultados da dissertação.

2.2 Conjunto Não-Uniformemente Hiperbólico

Nesta seção, vamos definir conjunto não-uniformemente hiperbólico e tempos hiperbólicos. A partir destes conceitos vamos mostrar que a dinâmica do nosso problema possui todos os expoentes de Lyapunov não-nulos.

Definição 2.2.1. *Seja $g : M \to M$ um difeomorfismo local. Dizemos que um g é não-uniformemente expansora (NUE) em um conjunto $X \subset M$, se existe $\eta < 0$ tal que*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log ||[Dg(g^j(x))]^{-1}|| \leq \eta < 0 \qquad \textit{para todo } x \in X.$$

Note que em dimensão 1 a condição NUE em X é equivalente a todos os expoentes de Lyapunov positivos em X pois

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|Dg^n(x)\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log \|Dg(g^j(x))\|$$

Em dimensão maior que 1, a condição NUE pede que em média haja expansão em todas as direções.

As figura 2.1 é um exemplo de aplicação NUE em seus pontos periódicos. Esta aplicação é topologicamente conjugada a $z \to z^2$.

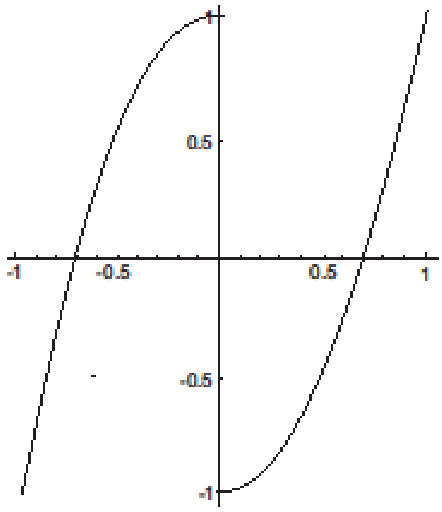

Figura 2.1: Aplicação NUE.

Observação 2.2.2. *Dado um ponto $p \in Per(g)$, seja $t = t(p) :=$ período(p). Neste caso, a condição NUE no conjunto $S := Per(p)$ significa que existe $\varsigma < 1$ tal que para cada ponto periódico p*

$$\prod_{j=0}^{t(p)-1} ||[Dg(g^j(p))]^{-1}|| < \varsigma^{t(p)}.$$

Em nosso trabalho vamos utilizar uma definição simplificada da noção introduzida por ABV em [3].

Definição 2.2.3. *(Tempo Hiperbólico para difeomorfismo local) Seja $z \in M$ um ponto regular. Dizemos que $k \in \mathbb{N}$ é um tempo $\varsigma-$hiperbólico para z se, para $i = 1, \ldots, k$ vale*

$$\prod_{j=1}^{i} ||[Dg(g^{k-j}(z))]^{-1}|| \leq \varsigma^i.$$

A existência de tempos hiperbólicos é assegurada pelo seguinte lema, devido a Pliss, que garante que tempos hiperbólicos são bastantes comuns.

Lema 2.2.4. *Dados $A \geq c_2 > c_1 > 0$, seja $\theta_0 = (c_2 - c_1)/(A - c_1)$. Então, dada qualquer sequência finita $a_1, \ldots, a_N$ em $\mathbb{R}$, satisfazendo*

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \geq c_2 N, \quad e \quad a_j \leq A, \ \forall\, j = 1, \ldots, N,$$

existem $l > \theta_0 N$ e $1 < n_1 < \cdots < n_l \leq N$ tal que

$$\sum_{j=n+1}^{n_i} a_j \geq c_1(n_i - n) \quad \text{para cada} \quad 0 \leq n < n_i \quad e \quad i = 1, \ldots, l.$$

Demonstração: Ponha $S(0) = 0$, e para cada $1 \leq n \leq N$ defina $S(n) = \sum_{j=1}^{n}(a_j - c_1)$. Então defina $1 < n_1 < \cdots < n_l \leq N$ tal que $S(n_i) \geq S(n)$ para cada $0 \leq n < n_i$ e $i = 1, \ldots, l$. Observe que $l \neq 0$. Assim, temos

$$\sum_{j=n+1}^{n_i} a_j \geq c_1(n_i - n) \quad \text{para} \quad 0 \leq n < n_i \quad \text{e} \quad i = 1, \ldots, l.$$

Falta provar que $l > \theta_0 N$. Note que, por definição,

$$S(n_i - 1) < S(n_{i-1}) \quad \text{e assim} \quad S(n_i) < S(n_{i-1}) + (A - c_1)$$

para cada $1 < i \leq l$. Além disso, $S(n_1) \leq (A - c_1)$ e $S(n_l) \geq S(N) \geq N(c_2 - c_1)$. Segue-se que

$$N(c_2 - c_1) \leq S(n_l) = \sum_{i=2}^{l}(S(n_i) - S(n_{i-1})) + S(n_1) < l(A - c_1),$$

que completa a prova. $\square$

O corolário abaixo garante que, para pontos satisfazendo uma certa condição de expansão assintótica, existem infinitos tempos hiperbólicos.

Corolário 2.2.5. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo local C^1 de uma variedade compacta M. Se $z \in M$ satisfaz*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \log \|Df(f^j(z))^{-1}\| \leq \log \sigma < 0.$$

Então, existe $\theta > 0$, dependendo apenas de f e σ e uma sequência de tempos hiperbólicos $1 \leq n_1(z) < n_2(z) < \cdots < n_l(z) \leq n$ para z, com $l \geq \theta n$.

Agora vamos tratar do caso em que g é um difeomorfismo.

Definição 2.2.6. *Seja M uma variedade compacta e $g : M \to M$ um difeomorfismo. Dizemos que um conjunto invariante $S \subset M$ é não-uniformemente hiperbólico (NUH) se:*

1) Existe uma decomposição Dg-invariante $T_S M = E^{cs} \oplus E^{cu}$,

2) Existe $\eta < 0$ e uma métrica riemanniana adaptada tal que para todo $p \in S$ vale

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log ||Dg(g^j(p))|_{E^{cs}(g^j(p))}|| \leq \eta$$

e

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log ||[Dg(g^j(p))|_{E^{cu}(g^j(p))}]^{-1}|| \leq \eta.$$

Neste caso, também há a noção de tempo hiperbólico.

Observação 2.2.7. *O conjunto dos pontos periódicos* $Per(g)$ *é NUH se, e somente se, existe* $\varsigma < 1$ *tal que para cada ponto periódico* p *com período* $t(p)$, $\prod_{j=0}^{t(p)-1} ||[Dg|_{E^u}(g^j(p))]^{-1}|| < \varsigma^{t(p)}$ *e* $\prod_{j=0}^{t(p)-1} ||[Dg|_{E^s}(g^j(p))]|| < \varsigma^{t(p)}$.

Definição 2.2.8. *(Tempo Hiperbólico para direções estáveis) Sejam* $0 < \lambda < 1$ *e* $z \in M$ *um ponto regular. Suponha que* E *é um subfibrado invariante de* $T_{\mathbb{S}(z)}M$*, onde* $\mathbb{S}(z)$ *é algum segmento de órbita de* z*. Dizemos que* $k \in \mathbb{N}$ *é um tempo* λ*-hiperbólico para* z *se para* $g^{-k}(z) = y$ *e* $i = 1 \dots k$ *tivermos*

$$\prod_{j=0}^{i-1} ||Dg|_E(g^j(y))|| \leq \lambda^i$$

Uma definição análoga pode ser dada para direções instáveis por apenas trocar g por g^{-1} na definição acima.

2.3 Prova dos Teoremas 2.1.3 e 2.1.4

Não apresentaremos todos os passos das provas dos teoremas 2.1.3 e 2.1.4. O faremos por uma questão da importação para provar os resultados deste trabalho e completude do texto.

A proposição abaixo é necessária para a prova dos teoremas 2.1.3 e 2.1.4. e sua prova está contida em [10]

Proposição 2.3.1. *Seja* $f : M \to M$ *um difeomorfismo local* C^1 *definido em uma variedade Rimanianna compacta e se*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|[Df^n(x)]^{-1}\| < 0$$

em um conjunto de probabilidade total, então f *é uniformemente expansora.*

2.3.1 Prova do Teorema 2.1.3.

Pelo teorema de Oseledets, existe um conjunto $X \subset M$ com probabilidade total para qualquer medida invariante tal que, para todo $x \in X$ existe $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \log \|Df^n(x)v\| = \lambda_j(x),\ \forall v \in E_j(x) \setminus E_{j-1}(x),\ 1 \leq j \leq m(x)$.

Por hipótese, se $x \in X$, então $\lambda_j > 0$. Portanto, $\forall x \in X$, $\exists N(x)$ tal que $\|Df^n(x)v\| \geq e^{n\lambda_1(x)/2}|v|$ para $n \geq N(x)$ e $v \in T_xM$. Assim, $\|[Df^n(x)]^{-1}\| < e^{-n\lambda_1(x)/2}$ para $n \geq N(x)$ e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|[Df^n(x)]^{-1}\| \leq -\frac{\lambda_1(x)}{2} < 0.$$

Portanto, pela proposição, f é uniformemente expansora.

2.3.2 Prova do Teorema 2.1.4

Basta considerar $\log \|Df^{-n}(x)|_{E_x^{cu}}\|$ ou $\log \|Df^n(x)|_{E_x^{cs}}\|$ e seguir da mesma forma como no teorema 2.1.3.

Capítulo 3

Sombreamento por Pontos Periódicos Não-uniformemente Hiperbólicos e Hiperbolicidade Uniforme.

Neste capítulo vamos enunciar e provar os teoremas principais deste trabalho. Começaremos com o caso onde o conjunto dos pontos periódicos é não-uniformente expansor.

3.1 O caso endomorfismo: conjunto periódico NUE

Nessa seção, $g : M \to M$ sempre vai ser um difeomorfismo local C^2 que é topologicamente conjugado a um difeomorfismo local $f : M \to M$ expansor C^1.

Provaremos nesta seção o

Teorema A. *Seja $g : M \to M$ um difeomorfismo local de classe C^2 em uma variedade compacta M. Suponha que g é topologicamente conjugado a uma aplicação f expansora de classe C^1. Se g é NUE no conjunto $Per(g)$ de pontos periódicos, então g é uma aplicação expansora.*

Observa-se que a condição NUE sobre os pontos periódicos não é suficiente para assegurar que a aplicação g seja expansora, mesmo se assumirmos que g é topologicamente conjugada com uma aplicação expansora. É uma questão normal que a aplicação $z \to z^2$, definido no círculo, é topologicamente conjugado com uma aplicação com pontos críticos que satisfaz a condição NUE sobre os pontos críticos. A Figura 2.1 é um exemplo dessa situação.

No teorem A, devido ao fato de que estamos lidando com aplicações que são difeomorifsmos locais, evitamos exemplos como o da Figura 2.1.

Lema 3.1.1. *Suponha que g é topologicamente conjugada a uma aplicação expansora f. Seja x um ponto regular e recorrente de g. Se $Per(g)$ é NUE, então todos os expoentes de Lyapunov de x são positivos.*

Demonstração: Seja $\delta > 0$ tal que, dado qualquer bola aberta $B(z, \delta)$, os correspondentes ramos inversos de g são difeomorfismos bem definidos. Seja $\varsigma = \exp(\eta)$, $\eta < 0$ como na definição de NUE, $\varsigma < \varsigma' < 1$ fixo, e seja $\epsilon > 0$ tal que $(\sqrt{\varsigma'})^{-1} - \epsilon > 1$. Uma vez que, x é um ponto regular, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\varsigma_j - \epsilon)^n \cdot ||v_j|| < ||Dg^n(x) \cdot v_j|| < (\varsigma_j + \epsilon)^n \cdot ||v_j|| \qquad \forall v_j \in E_j, \quad \forall n \geq n_0.$$

onde E_j são os autoespaços de Lyapunov e $\log(\varsigma_j)$ são seus respectivos expoentes de Lyapunov.

Agora pelo lema de Pliss [9], existe $n_1 > n_0$ tal que para qualquer ponto y e $n > n_1$ para que $\prod_{j=0}^{n} ||[Dg(g^j(y))]^{-1}||^{-1} \geq \varsigma^{-n}$ se verifique, então y tem pelo memos n_0 tempos hiperbólicos menores do que n.

Fixemos $0 < \delta' \leq \delta$ tal que

$$||Dg^{-1}(y)|| \leq \frac{1}{\sqrt{\varsigma'}} ||Dg^{-1}(z)||, \qquad \forall z, y;\ d(z, y) < \delta',$$

onde g^{-1} é um ramo inverso para g.

Consideremos $0 < \delta'' < \delta'$ tal que se g^{-n} é uma composição arbitrária de n ramos inversos para g, então $\mathrm{diam}(g^{-n}(B(z, \delta''))) < \delta', \forall z \in M, \forall n \in \mathbb{N}$. Isso ocorre por que é válido para o sistema hiperbólico f para o qual g é conjugado.

Como x é um ponto recorrente, existe $n_2 \geq n_1$ um tempo retorno tal que uma vizinhança $V_x \subset B(x, \delta'')$ de x é levada por g^{n_2} sobre $B(x, \delta'')$.

Portanto, escrevendo $G := (g^{n_2}|_{V_x})^{-1}$, $G : B(x, \delta'') \to V_x \subset B(x, \delta'')$ tem um ponto fixo $p \in V_x$, que é um ponto periódico de período n_2 para g. Por hipótese, p é um ponto periódico hiperbólico para o qual temos

$$\prod_{j=0}^{n_2-1} ||[Dg(g^j(p))]^{-1}||^{-1} \geq ||\varsigma^{-n_2}|| \Rightarrow ||DG(p)|| \leq ||\varsigma^{n_2}||.$$

Pela nossa escolha de n_1 e a equação acima, existe um tempo $\varsigma'-$hiperbólico $n_0 < n' < n_2$ para p.

Na verdade pelo lema 2.7 em [3](ver também a proposição 2.23 em [5]), n' é também um tempo $\sqrt{\varsigma'}^{-n'}-$hiperbólico para x. Em particular, isso implica que

$$||Dg^{n'}(x)\cdot v|| \geq \sqrt{\varsigma'}^{-n'}||v||, \qquad \forall v \in T_pM.$$

Portanto, $\varsigma_j \geq \sqrt{\varsigma'}^{-n'} - \epsilon > 1,\ \forall j$. Isso significa que todos os expoentes de Lyapunov de x são maiores que 1. ■

Demonstração do Teorema A. Sejam Per(g) o conjunto dos pontos periódicos de g e X o conjunto dos pontos regulares e recorrente. Se g é topologicamente conjugada a uma aplicação expansora e o conjunto Per(g) é NUE então, pelo lema 3.1.1, os expoentes de Lyapunov de g em X são positivos para qualquer medida g-invariante.

Por outro lado, pelo Teorema de Recorrência de Poincaré e o Teorema de Oseledets, o conjunto X tem probabilidade total. Logo, pelo Teorema 2.1.3 g é expansora. ■

3.2 O caso difeomorfismo: conjunto periódico NUH

Agora investigaremos o caso em que g é um difeomorfismo com conjunto dos pontos periódicos Per(g) NUH.

Vamos ao enuciado do teorema.

Teorema C. *Seja $g: M \to M$ um difeomorfismo C^2 em uma variedade compacta M, e seja $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto invariante. Suponha que $g|_\Lambda$ é topologicamente conjungado a um difeomorfismo f de classe C^1, restrito a um conjunto $\hat{\Lambda}$, hiperbólico para f. Se o conjunto Per(g) dos pontos periódicos de g é NUH, e $T_{Per(g)}M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ tem uma extensão contínua para uma decomposição em $T_{\overline{Per(g)}}M$, então Λ é um conjunto hiperbólico para g.*

Para provar o teorema, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.2.1. *Seja $g: M \to M$ difeomorfismo C^2 e $\Lambda \subset M$ algum compacto g-invariante. Suponha que $g|_\Lambda$ é topologicamente conjugada a $f|_{\hat{\Lambda}}$, onde $\hat{\Lambda}$ é um conjunto hiperbólico para f. Seja x um ponto regular e recorrente de g. Suponha que $Per(g)$ é NUH e que a decomposição $T_{Per(p)}M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ tem uma extensão contínua $T_{\overline{Per(g)}}M = E^1 \oplus E^2$. Então todos os expoentes de Lyapunov de x são diferente de zero.*

Demonstração. Seja $\varsigma = e^\eta,\ \eta < 0,\ \varsigma < \varsigma' < 1$ fixo, e seja $\epsilon > 0$ tal que $(\sqrt{\varsigma'})^{-1} - \epsilon > 1$. Uma vez que x é um ponto regular, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\varsigma_j - \epsilon)^n \cdot ||v_j|| < ||Dg^n(x) \cdot v_j|| < (\varsigma_j + \epsilon)^n \cdot ||v_j||, \quad \forall v_j \in E_j, \quad \forall n \geq n_0$$

e

$$(\varsigma_j - \epsilon)^{-n} \cdot ||v_j|| > ||Dg^{-n}(x) \cdot v_j|| > (\varsigma_j + \epsilon)^{-n} \cdot ||v_j||, \quad \forall v_j \in E_j, \quad \forall n \geq n_0,$$

onde E_j são os autoespaços de Lyapunov e $\log(\varsigma_j)$ são os seus respectivos expoentes de Lyapunov. Denotamos por $E^{cs}(x)$, (respectivamente, $E^{cu}(x)$) o espaço gerado pelos autoespaços de Lyapunov com expoentes de Lyapunov negativos (respectivamente, positivos). E^0 vai denotar o autoespaço de Lyapunov correspondente a um eventual expoente de Lyapunov zero.

Vamos provar que a dimensão do espaço $E^{cs}(x)$, correspondente aos expoentes de Lyapunov negativos de x, é igual ou maior do que a dimensão do espaço estável de qualquer ponto periódico. Um resultado análogo vai obviamente se verificar para $E^{cu}(x)$. Portanto, concluimos que $T_xM = E^{cs}(x) \oplus E^{cu}(x)$ e que todos os expoentes de Lyapunov de x são não-nulos.

Por meio de cartas, devido a continuidade uniforme de Dg, podemos fixar $0 < a < 1$ e $0 < \delta'$ tal que se z é periódico,

$$||Dg(y) \cdot v|| \leq \frac{1}{\sqrt{\varsigma'}} ||Dg|_{E^{cs}(z)}(z)|| \cdot ||v||, \qquad \forall y \in B(z, \delta'), \quad \forall v \in C_a^s(z),$$

onde $C_a^s(z)$ é o cone sobre $E^s(z)$ de comprimento $0 < a < 1$. Devido a continuidade de E^1, podemos assumir a pequeno o suficiente de modo que, cada cone $C_a^s(z)$ contém $E^1(y)$ ou todos os pontos $y \in B(z, \delta') \cap \overline{Per(g)}$.

Agora pelo lema de Pliss [8], existe $n_1 > n_0$ tal que qualquer ponto $z \in Per(g)$ para o qual temos $\prod_{j=0}^{n-1} ||Dg|_{E^1}(g^{-n+j}(z))|| \leq \varsigma^n$ para algum $n \geq n_1$, então z tem, pelo menos, n_0 tempos ς'-hiperbólico menor que n.

Como x é um ponto recorrente (também para g^{-1}), podemos tomar $n_2 \geq n_1$ um tempo retorno para g^{-1} tal que, existe um ponto periódico p com período n_2 que $\delta'/3$-sombreia o segmento de órbita $\{x, g^{-1}(x), \ldots, g^{-n_2}(x)\}$. Tal ponto periódico existe, porque $g|_\Lambda$ é conjugado a um difeomorfismo $f|_{\hat{\Lambda}}$ que é sombreado por pontos periódicos.

Por hipótese, p é um ponto periódico hiperbólico para o qual temos

$$\prod_{j=0}^{n_2-1} ||Dg|_{E^{cs}}(g^j(p))|| \leq ||\varsigma^{n_2}||.$$

Pela nossa escolha de n_1 e a equação acima, existe um tempo ς'-hiperbólico $n_0 < n' < n_2$ para p.

Devido a proposição 2.23 em [5], n' é também um tempo $\sqrt{\varsigma'}$-hiperbólico para x. Mais precisamente, isso significa que

$$\prod_{j=0}^{n'-1} ||Dg|_{E^1(g^{-n'+j}(x))}(g^j(g^{-n'}(x)))|| \leq \sqrt{\varsigma'}^j,$$

desde de que o espaço $E^1(g^{-n'+j}(x)) \subset C_a^s(g^{-n'+j}(p))$.

Em particular, isto implica que

$$||Dg^{-n'}(x) \cdot v|| \geq \sqrt{\varsigma'}^{-n'}, \qquad \forall v \in E^1(x).$$

Isso implica que, a dimensão do espaço $E^{cs}(x)$, dos expoentes de Lyapunov negativos, é pelo menos a dimensão de $E^1(x)$ que é igual a dimensão de $E^{cs}(p)$.

Aplicando o mesmo argumento acima para $E^{cu}(x)$ x, concluimos que a dimensão do espaço $E^{cu}(x)$ dos expoentes de Lyapunov positivos é pelo menos a dimensão de $E^2(x)$ que é igual a dimensão de $E^{cu}(p)$ e isso conclui o lema. ■

Prova do Teorema C: Sejam $\mathrm{Per}(g)$ o conjunto dos pontos periódicos de g, Λ um conjunto compacto invariante e X o conjunto dos pontos regulares e recorrentes. Suponha que $g|_\Lambda$ é topologicamente conjugado a um difeomorfismo $f|_{\hat{\Lambda}}$ onde Λ é hiperbólico para f. Se $\mathrm{Per}(g)$ é NUH e $T_{Per(g)}M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ possui uma extensão contínua para $T_{\overline{Per(g)}}M = E^1 \oplus E^2$ então, pelo Lema 3.2.1, os expoentes de Lyapunov de g em X são não-nulos para qualquer medida g-invariante.

Por Poincaré e Oseledets, X tem probabilidade total. Portanto, pelo Teorema 2.1.4, Λ é hiperbólico. ■

O próximo teorema é uma consequência do teorema anterior. Primeiro vamos mostrar dois lemas. O lema seguinte, supoe uma decomposição dominada no espaço tangente sobre um conjunto invariante.

Definição 3.2.2. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo em uma variedade compacta M e seja $X \subset M$ um subconjunto invariante. Dizemos que uma decomposição $T_X M = E \oplus \hat{E}$ é uma decomposição dominada se satisfazer as seguintes condições*

(1) a decomposição é invariante por Df que significa que $Df(E(x)) = E(f(x))$ e $Df(\hat{E}(x)) = \hat{E}(f(x))$,

(2) existem $0 < \lambda < 1$ e algum $l \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$

$$\sup_{v \in E,\ \|v\|=1} \{\|Df^l(x)v\|\} \cdot \left(\inf_{v \in \hat{E},\ \|v\|=1} \{\|Df^l(x)v\|\} \right)^{-1} \leq \lambda.$$

Lema 3.2.3. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo em uma variedade compacta M. Seja $X \subset M$ algum conjunto f-invariante. Suponha que existe alguma decomposição dominada invariante $T_X M = E \oplus \hat{E}$. Então, tal decomposição é contínua em $T_X M$ e única, uma vez que fixamos as dimensões de E, $\hat{E}$. Além disso, estende-se unicamente e continuamente para uma decomposição de $T_{\bar{X}} M$.*

Demonstração: Substituindo f por uma iterada, não há perda de generalidade em supor que $l \in \mathbb{N}$ na definição 3.2.2 igual a 1. Começamos por construir uma decomposição dominada invariante em $T_{\bar{X}} M$ estendendo o que temos em $T_X M$. Seja $\mathbb{O}(x)$ uma órbita contida em $\bar{X}$. Nossa construção vai depender de algumas escolhas. Escolhemos um representante de $\mathbb{O}(x)$, por exemplo x. Vamos também escolher alguma (x_n), $x_n \in X$, $x_n \to x \in M$ com $n \to \infty$. Sejam $v_n^1, \ldots, v_n^s \in E(x_n)$, $\hat{v}_n^{s+1}, \ldots, \hat{v}_n^m \in \hat{E}(x_n)$ bases ortonormais de $E(x_n)$ e $\hat{E}(x_n)$, respectivamente. A propriedade de dominação é equivalente a

$$\left\| Df(x_n) \sum_{j=1}^{s} \alpha_j v_n^j \right\| \cdot \left\| Df(x_n) \sum_{i=s+1}^{m} \beta_i \hat{v}_n^i \right\|^{-1} \leq \lambda < 1,$$

para quaisquer combinações convexas $\sum_{j=1}^{s} \alpha_j v_n^j$, $\sum_{i=s+1}^{m} \beta_i \hat{v}_n^i$. Substituindo por alguma subsequência convergente, se necessário, não há perda de generalidade em supor que $(v^1, \ldots, v^s)$, $v^1, \ldots, v^s \in T_x M$ (respectivamente, $(\hat{v}^{s+1}, \ldots, \hat{v}^m)$) é o limite da sequência $(v_n^1, \ldots, v_n^s)$ (respectivamente da sequência $(\hat{v}_n^{s+1}, \ldots, \hat{v}_n^m)$). Como a propriedade de dominação é uma condição fechada, temos que

$$\left\| Df(\lim x_n) \lim \sum_{j=1}^{s} \alpha_j v_n^j \right\| \cdot \left\| Df(\lim x_n) \lim \sum_{i=s+1}^{m} \beta_i \hat{v}_n^i \right\|^{-1} \leq \lambda < 1$$

e consequentemente

$$\left\| Df(x) \sum_{j=1}^{s} \alpha_j v^j \right\| \cdot \left\| Df(x) \sum_{i=s+1}^{m} \beta_i \hat{v}^i \right\|^{-1} \leq \lambda < 1.$$

Agora, escrevemos G para o operador Gram-Schmidt (que torna um conjunto linearmente independente de vetores em um conjunto ortonormal de vetores que geram o mesmo espaço vetorial). Dado qualquer iterado $y = f^k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, então $f^k(x_n) \to y$ e

$$G \circ (Df^k(x_n) v_n^1, \ldots, Df^k(x_n) v_n^s) \longrightarrow G \circ (Df^k(x) v^1, \ldots, Df^k(x) v^s),$$

assim como

$$G \circ (Df^k(x_n) \hat{v}_n^{s+1}, \ldots, Df^k(x_n) \hat{v}_n^m) \longrightarrow G \circ (Df^k(x) \hat{v}^{s+1}, \ldots, Df^k(x) \hat{v}^m)$$

com $n \to \infty$. Escrevendo $(w_k^1, \dots, w_k^s) := G \circ (Df^k(x)v^1, \dots, Df^k(x)v^s)$ e $(\hat{w}_k^{s+1}, \dots, \hat{w}_k^m)$ $:= G \circ (Df^k(x)\hat{v}^{s+1}, \dots, Df^k(x)\hat{v}^m),\ k \in \mathbb{Z}$, o mesmo cálculo acima mostra que

$$T_yM = \operatorname{span}\{w_k^1, \dots, w_k^s\} \oplus \operatorname{span}\{\hat{w}_k^{s+1}, \dots, \hat{w}_k^m\} =: E(y) \oplus \hat{E}(y)$$

é uma decomposição dominada.

Além disso, é claro que

$$Df(f^k(x))(\operatorname{span}\{w^1, \dots, w_k^s\}) = \operatorname{span}\{w_{k+1}^1, \dots, w_{k+1}^s\}$$

e

$$Df(f^k(x))(\operatorname{span}\{\hat{w}_k^{s+1}, \dots, \hat{w}_k^m\}) = \operatorname{span}\{\hat{w}_{k+1}^{s+1}, \dots, \hat{w}_{k+1}^m\},$$

que implica que é uma decomposição invariante.

Note que, uma vez que a condição de decomposição dominada é uma condição fechada, se provarmos que existe uma única decomposição dominada com a mesma dimensão da decomposição que construimos, ela será automaticamente contínua. Isto ocorre porque, dado $x_n \to x \in X$, quaisquer sequências convergentes de bases ortonormais de $E(x_n)$, $\hat{E}(x_n)$ vão convergir para bases ortonormais de espaços dominados em T_xM que, devido a unicidade, vai ser necessariamente $E(x)$, $\hat{E}(x)$.

O argumento para provar unicidade é o seguinte. Suponha que temos duas decomposições dominadas invariantes $T_{\bar{X}}M = E \oplus \hat{E}$, $T_{\bar{X}}M = E' \oplus \hat{E}'$. Fixe um $x \in \bar{X}$ arbitrário. Substituindo f por algum iterado positiva f^l, não há perda de generalidade em supor que a condição de dominação é válida para $l = 1$ em ambas as decomposições. A condição de dominação nos dá

$$\|Df|_{E(x)}\| \left(\inf_{v \in \hat{E},\ \|v\|=1} \{\|Df(x)v\|\} \right)^{-1} \leq \lambda$$

e

$$\|Df|_{E'(x)}\| \left(\inf_{v \in \hat{E}',\ \|v\|=1} \{\|Df(x)v\|\} \right)^{-1} \leq \lambda.$$

Vamos mostrar que $E(x) = E'(x)$. Note que se $E(x) \subset E'$ (ou vice-versa), como os espaços tem a mesma dimensão, eles devem ser os mesmos. Assim, vamos supor por contradição que existem $v \in E(x) \setminus E'(x)$ e $v' \in E'(x) \setminus E(x)$. Então escrevemos $v = v_{E'} + v_{\hat{E}'}$, com $v_{E'} \in E'$, $v_{\hat{E}'} \in \hat{E}'$ e $v_{\hat{E}'} \neq 0$. Esta última desigualdade, junto com a invariância da decomposição, implica que

$$Df^n(x) \cdot v = \alpha_n v_{E'}^n + \beta_n v_{\hat{E}'}^n,$$

onde $v_{E'}^n$ e $v_{\hat{E}'}^n$ são vetores unitários, respectivamente, em $E'(f^n(x))$ e $\hat{E}'(f^n(x))$ e $\alpha_n/\beta_n \lessapprox \lambda^n \to 0$. Em particular, $Df^n(x)v \in E(f^n(x))$ pertence a um cone de comprimento arbitrariamente pequeno sobre $\hat{E}'(f^n(x))$ (que domina $E'(f^n(x))$),quando tomamos n suficientemente grande. Isso implica que, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe $v_n = Df^n(x) \cdot v / \|Df^n(x) \cdot v\| \in E(f^n(x))$ tal que

$$\|Df|_{E'}(y_n)\| \cdot \|Df(y_n)v_n\|^{-1} < \lambda < 1,$$

onde $y_n = f^n(x)$. Agora repetiremos o mesmo argumento para $v' \in E'(x) \setminus E(x)$, e novamente para todo n suficientemente grande, obtemos vetores unitários $v'_n \in E'(y_n)$ tal que

$$\|Df|_{E(y_n)}\| \cdot \|Df(y_n)v'_n\|^{-1} < \lambda < 1.$$

Portanto temos

$$\|Df^n|_{E'(y_n)}\| \leq \lambda \cdot \|Df(y_n)v_n\| \leq \lambda \cdot \|df|_{E(y_n)}\|$$

e

$$\|Df|_E(y_n)\| \leq \lambda \cdot \|Df(y_n)v'_n\| \leq \lambda \cdot \|Df|_{E(y_n)}\|$$

que é uma contradição. ■

Lema 3.2.4. *Suponha que g é topologicamente conjugado a uma aplicação hiperbólica f. Seja x um ponto regular e recorrente de g. Suponha que $Per(g)$ é NUH e que a decomposição $T_{Per(g)}M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ é uma decomposição dominada. Então todos os expoentes de Lyapunov de x são diferentes de zero.*

Demonstração: Pelo Lema 3.2.3, a decomposição dominada invariante sobre $T_{Per(g)}M$ estende-se para uma única decomposição (dominada) invariante contínua sobre $T_{\overline{Per(g)}}M$. Assim, estamos sobre as hipóteses do Lema 3.2.1, que nos permite concluir que todos expoentes de Lyapunov de qualquer ponto recorrente e regular $x \in M$ são diferentes de zero. ■

Teorema B. *Seja $g : M \to M$ um difeomorfismo C^2 em uma variedade compacta M, e seja $\Lambda \subset M$ um conjunto compacto invariante. Suponha que $g|_\Lambda$ é topologicamente conjungado a um difeomorfismo f de classe C^1 restrito a um conjunto $\hat{\Lambda}$, hiperbólico para f. Se o conjunto $Per(g)$ dos pontos periódicos de g é NUH, e $T_{Per(g)}M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ é uma decomposição dominada, então Λ é um conjunto hiperbólico para g.*

Demonstração: Sejam Per(g) o conjunto dos pontos periódicos de g e Λ um compacto invariante. Suponha que $g|_\Lambda$ é topologicamente conjugada a um difeomorfismo $f|_{\hat{\Lambda}}$ com $\hat{\Lambda}$ hiperbólico para f.

Se Per(g) é NUH e $T_{Per(g)}M = E^{cs} \oplus E^{cu}$ é uma decomposição dominada, então, pelo Lema 3.2.3, existe decomposição contínua a decomposição $T_{\overline{Per(g)}}M$. Aplicando o Lema 3.2.4 e o Teorema C temos que Λ é hiperbólico para g. ■

3.3 Uma questão de A. Katok

A. Katok conjecturou que um sistema $C^{1+\alpha}$ que é Hölder conjugado a uma aplicação expansora (respectivamente, um difeomorfismo Anosov) é também expansora (respectivamente, é também um difeomorfismo Anosov).

Note que, sob hipótese de tal conjectura, os pontos periódicos de $g : M \to M$ são hiperbólicos, com limitação uniforme para os autovalores das iteradas de Dg no período de tais pontos. Isto é provado abaixo.

Observemos primeiramente, a definição de sistema Hölder.

Definição 3.3.1. *Dado $1 > \alpha > 0$ dizemos que $f : M \to M$ é $C^{1+\alpha}$, se f é C^1 e além disso, a derivada $x \mapsto D_x f$ é α-Hölder contínua; isto é, $\exists\ K > 0$, tal que $\|D_x f - D_y f\| \leq K[d(x,y)]^\alpha$ para todo $x, y \in M$ com $d(x,y) \leq 1$.*

Primeiro, consideramos o caso expansora. Seja p um ponto periódico de período t de g. Então, $h(p)$ é um ponto periódico de período t de f. Vamos chamar f^{-1} o ramo inverso de f, definido em uma vizinhança da órbita de $h(p)$, para o qual $h(p) = \hat{p}$ é um ponto periódico de período t. Analogamente, vamos chamar g^{-1} o ramo inverso de g para o qual p é um ponto periódico de período t. Uma vez que f é uma aplicação expansora, existem $0 < \hat{\lambda} < 1$ e $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$d(f^{-j}(\hat{x}), f^{-j}(\hat{y})) \leq \hat{\lambda}^j d(\hat{x}, \hat{y}), \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall \hat{x}, \hat{y} \in B(\hat{p}, \hat{\delta}).$$

Como uma consequência da C^α conjugação h, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(g^{-j}(x), g^{-j}(y)) \leq (\hat{\lambda}^\alpha)^j K^{1+\alpha} d(x,y)^{(\alpha^2)}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in B(p, \delta)$$

e

$$d(g^{-j}(x), g^{-j}(y)) \leq (\hat{\lambda}^\alpha)^j K^{1+\alpha} \delta^{\alpha^2}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in B(p, \delta).$$

Proposição 3.3.2. *Sejam $B(x_0, r) \subset M$ e $G : \overline{B(x_0, r)} \to B(x_0, r)$ um difeomorfismo local de classe C^1 tal que $G(x_0) = x_0$ e para algum $0 < \lambda < 1$ e $0 < \beta < 1$*

$$d(G^n(x), G^n(y)) \leq \lambda^n d(x,y)^\beta, \qquad \forall x, y \in B(x_0, r).$$

Então todos os autovalores de $DG(x_0)$ são iguais ou menores do que λ.

Demonstração: Usando cartas, não há perda de generalidade em supor que M é um espaço euclidiano e $x_0 = 0$. Por contradição, suponha que existem uma decomposição invariante $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^c$, uma norma adaptada $||x|| = ||(x_s, x_c)|| = \max\{\|x_s\|, \|x_c\|\}$ e $\delta > \lambda$ tal que

$$\|DG(0) \cdot x_s\| \leq \lambda \cdot \|x_s\|, \qquad \forall x_s \in E^s,$$

$$\|DG(0) \cdot x_c\| \geq \delta \cdot \|x_c\|, \qquad \forall x_c \in E^c.$$

Seja $\epsilon > 0$ tal que $\lambda + \epsilon < \delta - \epsilon$ e tome $\theta = (\lambda + \epsilon)/(\delta - \epsilon)$.

Portanto, existe $r' \leq r$ tal que se escrevermos

$$G(x) = DG(0) \cdot x + \rho(x),$$

então $\|\rho(x)\| < \epsilon\|x\|, \forall x, \|x\| < r'$.

Definimos um cone central

$$V_c := \{(x_s, x_c); \|x_s\| \leq \theta\|x_c\|\}.$$

Por hipótese, existe $r' \leq r'$ tal que $G^n(B(0, r')) \subset B(0, r'), \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, vamos iterar $x \in B(0, r') \cap V_c$ (escrevemos $x^n = G^n(x)$). Obtemos

$$\|x_c^1\| \geq \delta\|x_c^0\| - \epsilon\|x^0\| \geq (\delta - \epsilon)\|x_c^0\|$$

e

$$\|x_s^1\| \leq \lambda\|x_s^0\| + \epsilon\|x^0\| \leq (\lambda + \epsilon)\|x_c^0\|.$$

Isso implica que

$$\|x_s^1\| \leq \frac{\lambda + \epsilon}{\delta - \epsilon}\|x_c^1\|.$$

Em particular, se $x \in B(0, r') \cap V_c$ então $G(x) \in V_c$.

Portanto procedemos indutivamente, obtemos

$$\|x^n\| = \|x_c^n\| \geq (\delta - \epsilon)^n\|x_c^0\| = (\delta - \epsilon)^n\|x^0\|.$$

Isso contradiz a hipótese, o que implica que

$$\|x^n\| \leq \text{const} \cdot \lambda^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluimos que qualquer autovalor de $DG(0)$ é menor do que λ. ∎

A proposição acima implica que se uma aplicação g é Hölder conjugada a uma aplicação expansora (respectivamente, Anosov) então todos pontos periódicos tem expoentes de Lyapunov diferentes de zero, e tais expoentes são uniformemente limitados a partir de zero. No entanto, não sabemos se, por exemplo, o bom comportamento da dinâmica dada por uma conjugação Hölder, além da própria conjugação, implique que Per (g) é NUE.

Entretanto, como uma consequência direta da última seção, obtemos que tal conjectura é válida no caso que Per (g) é NUE (respectivamente, para Anosov, se Per (g) é NUH com decomposição dominada).

Anexo

Deixamos para o anexo, descrever brevemente sobre a transformação Shift e a ferradura de Smale, com o propósito maior, de mostrar que, por meio de um estudo de uma dinâmica simples, podemos obter informações de sistemas com uma dinâmica bastante complicada. Vamos mostrar, em particular, que a ferradura de Smale é conjugada a um shift de dois símbolos.

Transformação Shift

Seja $\mathcal{A}$ um conjunto. Definimos o *espaço de sequências* o conjunto de todas as sequências bilaterais $x = (..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...)$, onde $x_i \in \mathcal{A}$ e $i \in \mathbb{Z}$. Denotamos esse espaço por $\Sigma = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Referimos por $\mathcal{A}$ como um *alfabeto* e seus elementos por *símbolos*.

Nosso interesse maior será quando $\mathcal{A}$ for finito, ou seja, quando $\mathcal{A}_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ e denotamos nosso espaço por $\Sigma_m = \mathcal{A}_m^{\mathbb{Z}} = \{1, 2, \ldots, m\}^{\mathbb{Z}}$.

Há situações em que vamos considerar os eventos apenas no futuro. Nesses casos, nosso espaço será de *sequências unilaterais* $(x_1, x_2, \ldots)$, e teremos sequências indexadas pelos naturais. Denotaremos o conjunto das sequências por $\Sigma^+ = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Se $\mathcal{A}$ for finito teremos o espaço $\Sigma_m^+ = \mathcal{A}_m^{\mathbb{N}} = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Vamos nos restrigir ao espaço de sequências unilaterais, onde os resultados se estendem para o espaço de sequências bilaterais, com adaptações óbvias. Agora, para continuar nosso estudo, devemos definir uma métrica em Σ_m^+.

Primeiro, fixe um número real em $(0, 1)$, digamos $\frac{1}{2}$, por exemplo.

Dados duas sequências $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ definimos o número $k(x, y)$ como sendo,

$$k(x, y) = \min_{k \geq 1}\{x_k \neq y_k\}$$

e $k(x, y) = +\infty$ se $x = y$. Assim definimos a distância entre x e y por

$$d_{\frac{1}{2}}(x,y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k(x,y)}.$$

Observe que esta função distância é uma métrica. De fato, pois

$$d_{\frac{1}{2}}(x,y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k(x,y)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k(x,y)} = d_{\frac{1}{2}}(x,y).$$

Também, temos que

$$d_{\frac{1}{2}}(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow \ k(x,y) = +\infty \ \Leftrightarrow \ x = y.$$

Falta verificar a desigualdade triangular $d_{\frac{1}{2}}(x,z) \leq d_{\frac{1}{2}}(x,y)+d_{\frac{1}{2}}(y,z)$. Se $d_{\frac{1}{2}}(x,z) \leq d_{\frac{1}{2}}(x,y)$ não temos nada a provar. Consideremos que $d_{\frac{1}{2}}(x,z) > d_{\frac{1}{2}}(x,y)$. Isso nos diz que as sequências x e y coincidem por mais índices do que x e z. Note que, para os primeiros índices, as sequências x, y e z são iguais. Porém, num certo z_k temos $z_k \leq x_k$. Como x e y coincidem para mais índices do que x e z, então $z_k \neq x_k = y_k$. Portanto, k é o primeiro índice no qual y e z ficam diferentes, assim, podemos concluir que $d(y,z) = d(x,z)$. E, uma vez que, $d(x,y) \geq 0$ segue-se que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Agora iremos descrever bolas para essa métrica.

Consideremos uma sequência qualquer $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ e um número $r \in \mathbb{R}$ tal que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq r < \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$. A bola $B(x,r) = \{y \in \Sigma_m^+;\ d_{\frac{1}{2}}(x,y) < r\}$ é escrito como

$$B(x,r) = \{y = (y_1, y_2, \ldots) \in \Sigma_m^+;\ y_i = x_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Chamaremos esse conjuntos de *cilindro* e denotaremos por $[1, n; x_1, x_2, \ldots, x_n]$. De modo geral, definiremos o cilindro de comprimento $l - k + 1$, começando em k, por

$$[k, l; x_k, x_2, \ldots, x_l] = \{y = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in \Sigma_\infty^+; y_k = x_k, \ldots, y_l = x_l\}.$$

Como vimos acima, da definição de distância, se $a, b \in [l, n; x_1, \ldots, x_n]$, então $d_{\frac{1}{2}}(a,b) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, pois a e b possuem os n primeiros símbolos iguais. Desta maneira, caracterizamos o cilindro como sendo uma bola fechada

$$[k, l; x_k, x_2, \ldots, x_l] := \{y \in \Sigma_m^+;\ d_{\frac{1}{2}}(x,y) \leq (1/2)^n\}$$

e também como a bola aberta

$$[k, l; x_k, x_2, \ldots, x_l] := \{y \in \Sigma_m^+;\ d_{\frac{1}{2}}(x,y) < (1/2)^n + \epsilon\}.$$

O espaço Σ_m^+ é compacto, totalmente desconexo e perfeito, portanto homeomórfico a um conjunto de Cantor.

Agora podemos definir a transformação shift. Definimos a função $\sigma : \Sigma_m^+ \to \Sigma_m^+$ por

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

ou seja, descartamos o primeiro símbolo e deslocamos os demais símbolos uma posição para a esquerda.

Abaixo algumas propriedades desta trasformação.

Proposição 3.3.3. *Para a transformação shift σ valem:*
1. *σ é contínua.*
2. *σ possui m^n pontos periódicos de período n*
3. *$Per(\sigma)$ é um conjunto denso*
4. *σ é topologicamente mixing.*

Demonstração. 1. Devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $d_{\frac{1}{2}}(x, y) \leq \delta$ então $d_{\frac{1}{2}}(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \epsilon$. Sejam $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ e $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$. Considere $\epsilon = (1/2)^n$ e tome $\delta = (1/2)^{n+1} = (1/2)\epsilon$. Observe que, se $d_{\frac{1}{2}}(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \epsilon$, ou seja,

$$d_{\frac{1}{2}}((x_1, x_2, x_3, \ldots), (y_1, y_2, y_3, \ldots)) \leq (1/2)^n$$

significa dizer que $x_i = y_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Agora, se $d_{\frac{1}{2}}(x, y) \leq \delta = (1/2)^{n+1}$, temos que $x_i = y_i$ $\forall 0 \leq i \leq n$. Então, pela desigualdade acima, segue-se que

$$d_{\frac{1}{2}}(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \delta/(1/2) \leq \epsilon.$$

No caso quando $\epsilon > 0$ for qualquer, basta tomar N suficientemente grande tal que $(1/2)^N \leq \epsilon$, e então proceder como antes.

2. Para construir um ponto periódico de período n para σ, basta tomar um bloco de n símbolos e repetí-lo. De fato, um ponto periódico de período 1 é uma sequência onde todos os termos são iguais. Isto é,

$$(x_1, x_1, x_1, \ldots).$$

Os pontos periódicos de período 2 são as sequências tendo dois símbolos que se repetem,

$$(x_1, x_2, x_1, x_2, \ldots).$$

De modo geral, cada sequência x de período n é unicamente determinada por seus termos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. E existem m^n pontos periódicos de período n.

3. Fixe um $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \Sigma_m^+$ e $\epsilon > 0$. Devemos mostrar que existe um ponto periódico $p \in \Sigma_m^+$ tal que $d_{\frac{1}{2}}(p, y) < \epsilon$. Tome k suficientemente grande de modo que

$(1/2)^k < \epsilon$ e considere $p = (y_1, y_2, \ldots, y_k, y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$, isto é, p é periódico para σ. Como p coincide com y nos primeiros k símbolos, temos que $d_{\frac{1}{2}}(p, y) < (1/2)^k < \epsilon$, como queriamos demonstrar.

4. Considere os cilindros $U = [1, n_0; x_1, \ldots, x_{n_0}]$ e $V = [1, k; y_1, \ldots, y_k]$ de comprimentos, respectivamente, n_0 e k. Como as sequências em U são da forma $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, \ldots)$, depois do símbolo x_{n_0} as sequências teêm qualquer continuação possivel. Em particular, U contém sequências como

$$(x_1, \ldots, x_{n_0}, y_1, \ldots, y_k, \ldots)$$

$$(x_1, \ldots, x_{n_0}, b_1, y_1, \ldots, y_k, \ldots)$$
$$(x_1, \ldots, x_{n_0}, b_1, b_2, y_1, \ldots, y_k, \ldots)$$
$$\vdots$$
$$(x_1, \ldots, x_{n_0}, b_1, \ldots, b_n, y_1, \ldots, y_k, \ldots)$$
$$\vdots$$

onde (b_1) é um bloco de comprimento 1, (b_1, b_2) um bloco de comprimento 2, e assim por diante, e $(y_1, \ldots, y_k)$ o bloco que define o cilindro V. Portanto, a primeira sequência é levada em V após n_0 iterados, a segunda é levada em V após $n_0 + 1$ iterados e assim por diante. Isto mostra que $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset \; \forall n \geq n_0$.

Ferradura de Smale

Seja $S = [-1, 1] \times [-1, 1]$ o quadrado unitário. Considere duas faixas horizontais

$$H_1 = [-1, 1] \times \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right] \quad \text{e} \quad H_2 = [-1, 1] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

e duas faixas verticais

$$V_1 = \left[\frac{-3}{4}, \frac{-1}{4}\right] \times [-1, 1] \quad \text{e} \quad V_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \times [-1, 1]$$

Seja $f : S \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua injetiva, satisfazendo

1. $f(H_1) = V_1$ e $f(H_2) = V_2$;
2. $f \mid H_i$ é linear para $i = 1, 2$;
3. $f(S)$ é um conjunto tipo ferradura, com $S \cap f(S) = V_1 \cup V_2$.

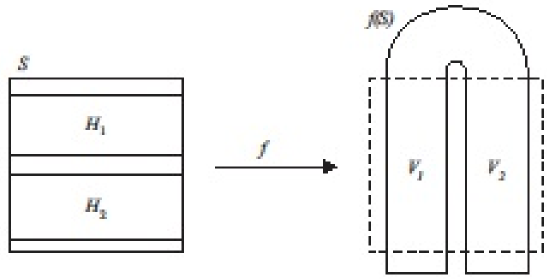

Figura 3.1: Construção da Ferradura de Smale

Pela propriedade 2 temos

$$D(f \mid H_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad e \qquad D(f \mid H_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Para cada $n \geq 0$, o conjunto $S \cap f^n(S)$ consiste de 2^n retângulos verticais de comprimentos $1/4^n$, que vão da base ao topo do quadrado S. De maneira similar, para cada $n \leq 0$, o conjunto $S \cap f^n(S)$ consiste de 2^n retângulos horizontais de comprimentos $1/4^n$, que vão do lado esquerdo para o lado direito de S.

Definimos o conjunto f-invariante

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(S)$$

composto dos pontos cuja órbitas no futuro e passado estão em S. Observe que Λ é um conjunto hiperbólico para f. Os subespaços estável $E^s(x)$ e instável $E^u(x)$ em um ponto $x \in \Lambda$ são as retas horizontal e vertical passando por x. Por (3.1), a decomposição $T_x\Lambda = E^s(x) \oplus E^u(x)$ é Df-invariante e

$$\|Dfv\| = \frac{1}{4}\|v\| \text{ para } v \in E^s(x) \qquad \text{e} \qquad \|Dfv\| = 4\|v\| \text{ para } v \in E^u(x).$$

O conjunto Λ é chamado *ferradura de Smale* ou *ferradura linear*. Note que Λ é um produto de conjuntos de Cantor, e portanto, também é um conjunto de Cantor.

Teorema 3.3.4. *A ferradura de Smale é topologicamente conjugada a um shift de dois símbolos.*

Demonstração. Primeiro vamos fazer uma associação entre pontos em Λ e sequências em Σ_2 da seguinte maneira:

$$a_n(x) = \begin{cases} 1 & se \quad f^n(x) \in V_1 \\ 2 & se \quad f^n(x) \in V_2 \end{cases}$$

Assim definimos a aplicação

$$\phi : \Lambda \to \Sigma_2$$

que associa cada $x \in \Lambda$ uma sequência $a = \phi(x) \in \Sigma_2$. Para provar o teorema, basta mostrar que ϕ é uma bijeção contínua.

ϕ *é bijetiva:* Para ver a injetividade, seja $x = (x^1, x^2)$ e $y = (y^1, y^2) \in \Lambda$ tal que $\phi(x) = \phi(y)$. Primeiro, vamos mostrar o seguinte: se as sequências $\phi(x)$ e $\phi(y)$ possuem órbitas no futuro iguais $\forall n \geq 0$, então as ordenadas de x e y são iguais. De fato, uma vez que, $f^{i+1}(x) = (x^1_{i+1}, x^2_{i+1})$ e $f^{i+1}(y) = (y^1_{i+1}, y^2_{i+1})$ pertencem ao mesmo retângulo vertical, $f^i(x) = (x^1_i, x^2_i)$ e $f^i(y) = (y^1_i, y^2_i)$ pertencem ao mesmo retângulo vertical de $S \cap f(S)$ e ao mesmo retângulo horizontal de $S \cap f^{-1}(S)$. Como $f^i(x)$ e $f^i(y)$ pertencem ao mesmo retângulo horizontal de $S \cap f^{-1}(S)$, temos que

$$|x^2_{i+1} - y^2_{i+1}| = 4|x^2_i - y^2_i|,$$

segue-se que, para todo n

$$|x^2_n - y^2_n| = 4^n|x^2 - y^2|$$

e como $f^n(x)$ e $f^n(y)$ estão no mesmo retângulo vertical, isto é impossível, ao menos que $x^2 = y^2$.

Analizando da mesma maneira a órbita no passado das sequências $\phi(x)$ e $\phi(y)$ são iguais, então os dois pontos tem a mesma abscissa.

Para a sobrejitividade, note que, a imagem de V_1 e $V_2 \in S \cap f(S)$ são duas ferraduras estreitas e contidas na ferradura da Figura 3.1. Dessa maneira, obtemos os seguintes retângulos verticais

$$(1,1) = V_1 \cap f(V_1), \quad (1,2) = V_1 \cap f(V_2), \quad (2,1) = V_2 \cap f(V_1) \quad \text{e} \quad (2,2) = V_2 \cap f(V_2).$$

Seja $a = (a_0, a_1, \ldots, a_N)$ uma sequência finita e assumimos que $V_a = V_{a_0} \cap f(V_{a_1}) \cap \cdots \cap f^N(a_N)$ um retângulo vertical não-vazio contido ou em V_1 ou V_2. Vamos mostrar que

$$V_1 \cap f(V_a) = V_1 \cap f(V_{a_1}) \cap \cdots \cap f^{N+1}(V_{a_N})$$

e

$$V_2 \cap f(V_a) = V_2 \cap f(V_{a_1}) \cap \cdots \cap f^{N+1}(V_{a_N})$$

são dois retângulos verticais não-vazios contidos em S.

Por indução, para cada sequência finita $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ existe um correspondente retângulo vertical

$$V_{a_0} \cap f(V_{a_1}) \cap \cdots \cap f^n(V_{a_N}) \neq \emptyset.$$

Agora, consideremos uma sequência infinita $a = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$. Queremos mostrar que $V_a = \cap_{i=-\infty}^{\infty} f^i(V_{a_i}) \neq \emptyset$.

Se $x \in V_a$, $f^i(x) \in V_{a_i}$, $\forall i$ e $\phi(x) = a$. Então, basta mostrar que toda interseção correspondente de sequências finitas são não-vazias. Ora, vimos acima que, qualquer sequência finita é um retângulo vertical não-vazio. Logo, dado uma sequência finita $(a_{-N}, \ldots, a_0, \ldots, a_N)$ então $V_{a_{-N}} \cap f(V_{a_{1-N}}) \cap \cdots \cap f^N(V_{a_0}) \cap \cdots \cap f^{2N}(V_{a_N}) \neq \emptyset$. Portanto, a imagem dessa interseção sobre f^{-N} é

$$f^{-N}(V_{a_{-N}}) \cap \cdots \cap V_{a_0} \cap \cdots \cap f^N(V_{a_N})$$

também é não-vazia.

ϕ é contínua: Sejam $x \in \Lambda$ um ponto, U uma vizinhança de $\phi(x)$ e $[1, N; a_1, \ldots, a_N] = \{a \in \Sigma_2; a_i = \phi(x)_i, |i| \leq N\} \subset U$. Para cada i com $|i| \leq U$, seja $B(f^i(x), |i|)$ a bola de raio $|i|$ centrada em $f^i(x)$ tal que $V_1, V_2 \subset B(f^i(x), |i|)$, $f^i(x) \notin V_1$ e $f^i(x) \notin V_2$.

Para todo $-N \leq i \leq N$, $\Lambda \cap f^{-1}\ (B(f)^i(x), |i|))$ é uma vizinhança de X em Λ. Segue-se que

$$B(x, N) = \bigcap_{|i| \leq N} (\Lambda \cap f^{-i}(B(f^i(x), |i|)))$$

também é uma vizinhança de x em Λ. Portanto, $\phi(B(x, N))$ está contido no cilindro $[1, N; a_1, \ldots, a_N]$, portanto, ϕ é contínua. $\square$

Observe que, se trocarmos f nos Teoremas A, B e C por um shift σ continuaremos com as mesmas hipóteses e teremos os mesmos resultados.

Referências

[1] CASTRO, Armando; OLIVEIRA, Kreley; PINHEIRO, Vilton. 2006, *Shadowing by non-uniformly hyperbolic periodic points and uniform hyperbolicity.* Nonlinearity **20** 75-85

[2] ALVES, José F.; ARAÚJO, Vítor; SAUSSOL, Benoît. 2003, *On the uniform hyperbolicity of some nonuniformly hyperbolic maps.* Proc. Am. Math. Soc. **131** 1303-9

[3] ALVES, José F.; BONATTI, Christian; VIANA, Marcelo. 2000, *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding.* Invent. Math **140** 351-98

[4] CASTRO, Augusto A. 2002, *Backward inducing and exponential decay of correlations for partially hyperbolic attractors.* Israel J. Math **130** 29-75

[5] CASTRO, Augusto A. 2004, *Fast mixing for attractors with mostly contracting central direction* Ergod. Theory Dyn. Syst. **24** 17-44

[6] MAÑÉ, Ricardo. 1985, *Hyperbolicity, sinks and measure in one-dimensional dynamics* Commun. Math. Phys. **100** 495-524

[7] SHUB, Michael. 1987. *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer, Berlin

[8] OSELEDETS, V I. 1968, *A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems* Trans. Moscow Math. Soc. **19** 197-231

[9] POTRIE, Rafael. 2007, *Lema de Pliss*

[10] CAO, Yongluo. 2003, *Non-zero Lyapunov exponents and uniform hyperbolicity* Nonlinearity **16** 1473-9

[11] CAO, Yongluo; LUZZATTO, Stefano; RIOS, Isabel. 2006, *Some non-hyperbolic systems with strictly non-zero Lyapunov exponents for all invariant measures: horseshoes with internal tangencies* Discrete Contin. Dyn. Syst. **15** 61-71

[12] BRIN, Michael; STUCK, Garrett. 2002, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge

[13] BARREIRA, Luis; PESIN, Yakov. 2000, *Lectures on Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory*, Amer. Math. Soc.

[14] BARREIRA, Luis; PESIN, Yakov. *Nonuniform hyperbolicity: dynamics of systems with nonzero Lyapunov exponents.* Cambridge: Cambridge University Press, 2007. (Encyclopedia of mathematics and its applications; 115)

[15] VIANA, Marcelo. *A proof of Oseledets' Theorem*, www.impa.br/ viana/out/oseledets.pdf

[16] POLLICOTT, Mark. 1993, *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds*, Cambridge University Press

[17] KATOK, Anatole; HASSELBLATT, Boris. *Introduction to the modern theory of dynamical systems.* Cambridge: Cambridge University Press, c1995. (Encyclopedia of mathematics and its applications)

[18] OLIVEIRA, Krerley. *Shifts e Medidas Invariantes.* São José do Rio Preto, 2006. (II Encontro Regional de Sistemas Dinâmicos)

[19] DÍAZ, Lorenzo J. *Ferraduras parcialmentes hiperbólicas.* Rio de Janeiro, 2000. (Matemática Universitária; 28, pp33-65)

[20] BARAVIERA, A. T.; BRANCO, Flávia M. *Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão.* Instituto de Matemática UFRGS, 2012.