Universidade Federal da Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

PPGMAT - UFMA

Dissertação de Mestrado

Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações

Felipe Rodrigues Vaz

São Luís - MA

Novembro de 2015

Felipe Rodrigues Vaz

Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo**.

São Luís - MA

2015

Vaz, Felipe Rodrigues

.

Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações/ Felipe Rodrigues Vaz. – São Luís - MA, 2015.

76 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.

Referências bibliográficas.

1. Análise. 2. Topologia. 3. Teoremas de ponto fixo I. Araújo, Marcos Antonio Ferreira. II. Universidade Federal do Maranhão, Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU : 515.1

Felipe Rodrigues Vaz

Teoremas de ponto fixo e algumas aplicações

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática** sob a orientação do **Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo**.

Dissertação aprovada em 23 de novembro de 2015, pela **BANCA EXAMINADORA**:

(Orientador) Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo (UFMA)

Prof^a. Dr^a. Renata de Farias Limeira Carvalho (UFMA)

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra (UFPB)

DEDICATÓRIA

Aos meus filhos: Tamires, Thomas e Lucas, pela paciência e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Deus, criador dos céus e da terra. A toda a minha família e a todos os colegas de curso e aos professores do PPGMAT: Prof. Marcos Araujo, Prof. Nivaldo Muniz, Prof. José Marão; pelo encorajamento e apoio.

“ ... Àquele que é poderoso para fazer infinitamente mais além daquilo que pedimos ou pensamos ... ”. Paulo, O apóstolo [Bíblia Sagrada]

“ ... Um matemático é uma pessoa que pode encontrar analogias entre teoremas, um matemático bom é aquele que consegue ver analogias entre provas e o melhor matemático pode perceber analogias entre teorias; e pode-se imaginar que o matemático ultimate é aquele que pode ver analogias entre analogias ... ” [Stefan Banach]

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar os teoremas do ponto fixo de Banach e de Brouwer, e algumas aplicações destes teoremas e fazer uma análise comparativa sobre eles.

Palavras-chave: Análise, Topologia, , Teoremas de pontos fixos.

ABSTRACT

The objective of this paper is to present the theorems of Banach fixed-point and Brouwer, and some applications of these theorems and to make a comparative analysis of them.

Keywords: Analysis, Topology, Fixed-points theorems.

SUMÁRIO

Pág.

Introdução 11

Capítulo 1: Noções preliminares 13

Capítulo 2: Teoremas de ponto fixo 22
- 2.1 **O princípio da contração de Banach** 23
- 2.2 Sequências de aplicações e pontos fixos 31
- 2.3 Pontos fixos de aplicações não-expansivas 34
- 2.4 O teorema da média ergódica de Riesz 36
- 2.5 **O teorema do ponto fixo de Brouwer** 40
- 2.6 O teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff 51
- 2.7 O teorema de Markov-Kakutani 54

Capítulo 3: Análise comparativa 56

Capítulo 4: Aplicações de teoremas do ponto fixo 60
- 4.1 O teorema da função ímplícita 60
- 4.2 Equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach 66
- 4.3 O teorema fundamental da Álgebra 73
- 4.4 Teoria dos jogos 74

Referências 76

INTRODUÇÃO

Um ponto fixo é um idéia bastante simples, é um ponto que é levado em si mesmo por uma aplicação em um mesmo conjunto, e podemos inicialmente formalizar asssim: Um ponto fixo de uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$, e sua importância reside no fato de ser muito útil na solução de equações. Os teoremas de ponto fixo são afirmações que garantem existência de pontos fixos em determinados conjuntos e por vezes garantem também, unicidade.

A teoria dos pontos fixos envolve um grande número de teoremas do ponto fixo e é um assunto fascinante, com um enorme número de aplicações em vários campos da matemática e em outras áreas afins, e em função disso, apresentamos neste trabalho uma panorâmica de alguns resultados e aplicações da teoria, com enfâse no teorema do ponto fixo de Banach e no teorema do ponto fixo de Brouwer. Há mais de um século que o teorema do ponto fixo de Brouwer foi provado, precisamente em 1910, e em certo sentido este resultado é um dos primeiros na teoria e dele surgiram alguns outros teoremas, e o teorema de Banach é de 1922. Nosso intuito, é fazer uma abordagem comparativa destes dois teoremas no sentido de investigar se existe alguma relação de implicação entre eles. Uma abordagem preliminar na literatura matemática encaixa o teorema de Brouwer como um resultado da teoria topológica dos pontos fixos, e o teorema de Banach na teoria métrica dos pontos fixos. Além dessas teorias, existem outras que não serão abordadas aqui, como por exemplo: a teoria combinatória dos pontos fixos, e etc. Na teoria topológica dos pontos fixos se destacam inicialmente, três grandes matemáticos: Bernard Bolzano, Luitzen Brouwer e Karol Borsuk; e que são coincidentemente referenciados como os três B's da teoria. O teorema do ponto fixo de Brouwer foi considerado um dos resultados matemáticos mais relevantes e de maior impacto em outras áreas da ciência no século XX, por John L. Casti em seu livro popular *Five Golden Rules*, e pode-se verificar estas implicações em: biologia matemática, geometria de corpos convexos, equações diferenciais, teoria dos jogos, economia, programação não-linear e etc. O teorema do ponto fixo de Banach é considerado um dos pilares da análise matemática, principalmente na análise numérica, e a partir dele foram provados outros teoremas de igual importância como: o teorema da função implícita, o teorema da função inversa, e o teorema de existência e unicidade de solução de equações diferenciais ordinárias e etc . De maneira geral, a importância dos teoremas do ponto fixo de Banach e de Brouwer dificilmente seria exagerada.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no primeiro capítulo são apresentadas definições e conceitos que envolvem a teoria dos pontos fixos, no capítulo seguinte faz-se uma abordagem sobre vários teoremas de ponto fixo, com ênfase sobre o teorema de Banach e Brouwer. No terceiro, faremos uma análise comparativa entre os teoremas de Brouwer e de Banach. Finalmente, no quarto capítulo, apresentaremos algumas aplicações desses teoremas.

Capítulo 1

NOÇÕES PRELIMINARES

A teoria dos pontos fixos foi desenvolvida em conjuntos ou espaços que possuem uma estrutura que permite falar de *proximidade* entre pontos, esta noção é caracterizada como *continuidade*. Tais conjuntos são chamados espaços topológicos, onde são definidas *funções contínuas*. Chama-se Topologia à área da matemática que se ocupa do estudo das funções contínuas de um espaço topológico em outro. A maneira mais natural de verificar qual de dois pontos x e y, pertencentes a um conjunto X, está mais próximo de um ponto a pertencente a X, é medir as distâncias de x e y ao ponto a. Isto só é possível quando existe a noção de distância já previamente definida no conjunto X. Os conjuntos onde tem sentido falar de distância entre dois pontos se apresentam como espaços topológicos, e são denominados espaços métricos. Entretanto, nem todos os espaços topológicos são métricos. Apresentaremos algumas definições destes espaços e seus desdobramentos:

Definição 1.0.1 (Métrica e Distância). Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:
(i) $d(x, x) = 0$, e se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um *espaço métrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M. Todo subconjunto X de um espaço métrico M possui uma estrutura natural de espaço métrico.

Exemplos :

A reta real, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$.
O **espaço euclidiano** $\mathbb{R}^n$ também é um espaço métrico e generaliza o exemplo anterior.

Há três maneiras naturais de definir a distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$, escreve-se

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2)} = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

$$d'(x,y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\,,\ e$$

$$d''(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|\,, ..., |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|\,.$$

As funções $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são métricas. A métrica d é chamada **euclidiana**. Considerando que os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária, tais como: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos e etc, apresentamos um espaço de funções, no qual define-se uma métrica: Seja X um conjunto arbitrário. Uma função real $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se limitada quando existe uma constante $k = k_f > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Indicaremos com $B(X;\mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, então para $f, g \in B(X;\mathbb{R})$ arbitrárias,

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|\,.$$

Definição 1.0.2 (**Funções contínuas em espaços métricos**). Sejam M e N espaços métricos. Diz-se que uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$, quando para todo $\epsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta$ implicar $d(f(x), f(a)) < \epsilon$. Diz-se que $f : M \longrightarrow N$ é contínua, quando ela é contínua em todos os pontos $a \in M$.

Definição 1.0.3. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço métrico (M, d).
(i) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para $x \in M$ se

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

Neste caso, escreve-se $x = \lim_n x_n = \lim_{n \to \infty} x_n$ ou $x_n \longrightarrow x$.
(ii) A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita convergente se existe $x \in M$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Caso contrário, é dita divergente.

Definição 1.0.4 (**Sequências de Cauchy**). Diz-se que uma sequência (x_n), num espaço métrico M, é uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, é possível obter $n_0 \in N$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

W

Sejam M e N espaços métricos e E um conjunto de aplicações $f : M \longrightarrow N$. O conjunto E diz-se eqüicontínuo no ponto $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em M implique $d(f(x), f(a)) < \epsilon$, seja qual for $f \in E$.

Uma sequência de aplicações $f_n : M \longrightarrow N$ diz-se eqüicontínua no ponto $a \in M$ quando o conjunto $\{f_1, f_2, ..., f_n, ...\}$ o for.

Definição 1.0.5 (Espaço Métrico Completo). Diz-se que um espaço métrico M é *completo* quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Definição 1.0.6 (Espaços Vetoriais Normados). Seja E um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *ou* $\mathbb{C}$. Uma norma em E é uma função $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{K}$, que associa a cada vetor $x \in E$ o escalar $\|x\|$, chamado a *norma de* x, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $x, y \in E$ e λ escalar:

(N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \, \|x\|$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Todo espaço vetorial normado E possui uma métrica natural, definida a partir da norma $d(x, y) = \|x - y\|$

Um operador linear contínuo do espaço normado E no espaço normado F, ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$, é uma função $T : E \longrightarrow F$, que é linear, isto é

(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$,

(ii) $T(ax) = aT(x)$ para todo $a \in \mathbb{K}$, e qualquer x em E;

e contínuo, isto é, para todo $x_0 \in E$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$, sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$.

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F será denotado por $L(E, F)$, que é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de funções. Quando F é o corpo dos escalares, escrevemos E' no lugar de $L(E, \mathbb{K})$, chamamos esse espaço de *dual topológico* de E, ou simplesmente *dual* de E, e dizemos que seus elementos são funcionais lineares contínuos.

Definição 1.0.7. Seja X um espaço vetorial normado. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se semicontínua inferiormente no ponto $a \in X$, quando para cada $\epsilon > 0$ dado, pode-se obter $\delta > 0$, tal que $x \in X$, $\|x - a\| < \delta \Longrightarrow f(x) < f(a) + \epsilon$.

Um espaço vetorial normado completo chama-se de espaço de *Banach*
Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H, munido de um produto interno, e completo em relação a norma definida por esse produto interno.

Definição 1.0.8 (**Seminorma**). Uma seminorma no espaço vetorial E é uma função $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:
(i) $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$.
(ii) $p(ax) = |a|\, p(x)$ para todo $a \in \mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$, e $x \in E$.
(iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, para qualquer $x, y \in E$.
Das condições (ii) e (iii) conclui-se que $p(0) = 0$ e que

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x-y) \;\; para \;\; todo \;\; x, y \in E$$

Toda norma é uma seminorma.

Definição 1.0.9. Dado um espaço normado X, e x um elemento pertencente a X e um número real $r > 0$, e sendo $\|x\|_X$ a norma relativa ao espaço normado X, definimos:
(i) A bola aberta em X com centro em x_0 e raio r ao conjunto denotado por

$$B_X(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

(ii) A bola fechada em X com centro em x_0 e raio r ao conjunto

$$B_X[x_0, r] = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

(iii) A fronteira da bola fechada, ou ainda a esfera de centro x_0 e raior r ao conjunto

$$\partial B_X = S = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}.$$

(iv) Para um subconjunto $Y \subset X$, $\overline{Y}$ é o fecho de Y
(v) Y^c é o complementar de Y em X, desde que, $Y \subset X$
(vi) $span(Y)$ é o espaço linear gerado por Y
(vii) Noção de espaços de Banach uniformemente convexos: Um espaço de Banach X é uniformemente convexo se dadas duas sequências $x_n, y_n \in X$ com

$$\|x_n\| \leq 1, \quad \|y_n\| \leq 1, \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2,$$

e segue que, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.
Em particular, uma propriedade que deriva diretamente da definição de convexidade uni-

forme é que, sequências minimizantes em subconjuntos fechados e convexos são convergentes. Isto é, se $C \subset X$ é não-vazio, fechado e convexo, e $x_n \in C$ é tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \inf_{y\in C} \|y_n\| .$$

Então, existe um único $x \in C$ tal que $\|x_n\| = \inf_{y\in C} \|y_n\|$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Uma noção fraca de convexidade é a convexidade estrita: Um espaço de Banach X é estritamente convexo se, para todo $x, y \in X$ com $x \neq y$ a relação

$$\|x\| = \|y\| \leq 1$$

implicando que

$$\|x + y\| < 2$$

Definição 1.0.10 (Gráfico). Sejam E e F espaços normados e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. O gráfico de T é o conjunto

$$G(T) = \{(x, y); x \in E, y \in T(x)\} = \{(x, T(x)); x \in E\} \subseteq E \times F.$$

$G(T)$ é subespaço vetorial de $E \times F$. O gráfico $G(T)$ pode ser um subconjunto fechado de $E \times F$ ou não. O Teorema do Gráfico Fechado [4], afirma que em operadores lineares entre espaços de Banach, a continuidade de T é equivalente ao fato de $G(T)$ ser fechado em $E \times F$.

Exemplo:(Espaços normados)

(i) Denotamos por c_0 o conjunto de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja, fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$,

$$c_0 = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{K}\, para\ todo\ k \in \mathbb{N}\ e\ a_k \longrightarrow 0\} .$$

c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.

A expressão

$$\|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

torna c_0 um espaço normado. Além disso, também é um espaço de Banach.

(ii) Denotamos por c_{00} o subespaço de c_0 formado por sequências eventualmente nulas, isto é,

$$c_{00} = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0 :\ existe\ k_0 \in \mathbb{N}\ tal\ que\ a_k = 0\ para\ todo\ k \geq k_0\} .$$

Definição 1.0.11 (**Espaços topológicos**). Uma topologia num conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de partes de X, chamados os abertos da topologia, com as seguintes propriedades:
(i) $\emptyset$ e X pertencem a $\mathcal{T}$;
(ii) Se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{T}$ então $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{T}$
(iii) Dada uma família arbitrária $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ com $A_\lambda \in \mathcal{T}$ para cada $\lambda \in L$, tem-se $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{T}$.
Um espaço topológico é um par $(X, \mathcal{T})$ onde X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia em X.

Definição 1.0.12 (**Funções contínuas em espaços topológicos**). Entre espaços topológicos, uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ se diz contínua quando para cada $A' \subset Y$ aberto, sua imagem inversa $f^{-1}(A')$ é um aberto em X. Um homeomorfismo é uma bijeção contínua $h : X \longrightarrow Y$ cuja inversa também é contínua.

Uma propriedade de um espaço X diz-se propriedade topológica, se em qualquer outro espaço homeomorfo a X se verifica esta mesma propriedade, como exemplo temos: a propriedade de um conjunto ter um ponto fixo. Assim, esta é uma propriedade topológica.

Definição 1.0.13. Dois espaços topológicos X e Y são ditos homeomórficos se existe uma função bijetiva $f : X \longrightarrow Y$, tal que f e f^{-1} são contínuas. A aplicação f e chamada um homeomorfismo.

Definição 1.0.14. Um espaço topológico X tem a propriedade do ponto fixo se toda função contínua $f : X \longrightarrow X$, tem um ponto fixo.

Teorema 1.0.15. *Se um espaço topológico X tem a propriedade do ponto fixo, e X é homeomórfico a Y, então Y tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração: Seja $h : X \longrightarrow Y$ um homeomorfismo, e supondo que $g : Y \longrightarrow Y$ seja contínua. Precisamos mostrar que g tem um ponto fixo em Y. Observe que $h^{-1} \circ g \circ h : X \longrightarrow X$ é contínua. Desde que X tem a propriedade do ponto fixo, existe $x_0 \in X$ com: $h^{-1} \circ g \circ h(x_0) = x_0$. Daí, $g(y_0) = y_0$, onde $y_0 = h(x_0)$. ■

Definição 1.0.16. Um subconjunto A de um espaço topológico X é um retrato de X, se existe uma aplicação contínua $r : X \longrightarrow A$, com $r(a) = a$ para todo $a \in A$. A aplicação r é chamada uma *retração*.

Teorema 1.0.17. *Se X tem a propriedade do ponto fixo e A é um retrato de X, então A tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração: Seja $f : A \longrightarrow A$ uma função contínua, e $r : X \longrightarrow A$ uma retração. Precisamos mostrar que f tem um ponto fixo em A.

Observe que:

$$f \circ r : X \longrightarrow A \subseteq X.$$

Desde que, X tem a propriedade do ponto fixo, então existe $x_0 \in X$ tal que

$$f \circ r(x_0) = x_0.$$

Contudo, $f(r(x_0)) \in A$ e portanto $x_0 \in A$. Mas, desde que $x_0 \in A$ e $r : X \longrightarrow A$ é uma retração, temos que $r(x_0) = x_0$. E consequentemente, $f(x_0) = x_0$ para todo $x_0 \in A$. $\blacksquare$.

Teorema 1.0.18. *Se T é aplicação de M em M, então qualquer ponto fixo $z \in T$, está na interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n M$. Reciprocamente, se $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n M = \{y\}$ é um conjunto de um único ponto, então y é um ponto fixo para T.*

Demonstração: Desde que, $T(y)$ precisa estar na interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n M$, logo $T(y) = y$. $\blacksquare$

Definição 1.0.19. (i) Um espaço topológico X chama-se compacto, quando toda cobertura aberta de X possui subcobertura finita.
(ii) Seja M um espaço métrico. Se M é compacto, então M é completo.
(iii) Todo subconjunto fechado F de um espaço compacto X é compacto.
(iv) A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.
(v) Um espaço topológico X diz-se localmente compacto quando todo ponto $x \in X$, possui uma vizinhança compacta.

Definição 1.0.20. Um espaço topológico M é um *espaço de Hausdorff* se para todos $x, y \in M, x \neq y$, existem vizinhanças U de x e V de y tais que $U \cap V = \emptyset$.

Teorema 1.0.21. *Se T é contínua em um espaço topológico Hausdorff M para M, e se o $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = y$, então $T(y) = y$ e $T^n(y) = y$.*

Demonstração: Desde que, $T(y) = T(\lim_{n\to\infty} T^n(x)) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = y$. $\blacksquare$.

Teorema 1.0.22 (**Ascoli**). *(ver prova em [4]). Sejam K um espaço métrico compacto e A um subconjunto de $C(K)$, onde $C(K)$ é o conjunto das funções contínuas $f : K \longrightarrow \mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$), e a métrica de K é dada por $d(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in K\}$. Então $\overline{A}$ é compacto em $C(K)$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*
(i) A é equicontínuo, isto é, para todo $t_0 \in K$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t) - f(t_0)| < \epsilon, \textit{ para todo } t \in K, \textit{ com } d(t,t_0) < \delta \textit{ e } f \in A.$$

(ii) O conjunto $\{f(t) : f \in A\}$ é limitado em $\mathbb{K}$ para todo $t \in K$

Teorema 1.0.23 (**Desigualdade de Ky Fan**). *[ver prova em Proc. Nat. Acad. Sci. USA 88, 121126 (1952)]. Seja $K \subset X$ não-vazio, compacto e convexo. Seja $\Phi : K \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação tal que*
(i) $\Phi(\cdot, y)$ é semicontínua inferiormente para todo $y \in K$;
(ii) $\Phi(x, \cdot)$ é côncava para todo $x \in K$.
Então existe $x_0 \in K$ tal que

$$\sup_{y \in K} \Phi(x_0, y) \leq \sup_{y \in K} \Phi(y, y).$$

Teorema 1.0.24 (**Teorema de Hahn-Banach para espaços localmente convexos**). *(ver prova em [4]). Sejam E um espaço localmente convexo, e M um subespaço vetorial de E. Então todo funcional linear e contínuo $\varphi_0 \in M'$, onde M' é o espaço dual de M, pode ser estendido a E' preservando linearidade e continuidade, isto é, existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ para todo $x \in M$.*

Definição 1.0.25. Sejam E e F espaços de Banach e U um aberto em E. Dizemos que uma função $f : U \longrightarrow F$ é Fréchet-diferenciável no ponto $x_0 \in U$ se existe um operador linear contínuo $A : E \longrightarrow F$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + R(x_0, h),$$

para todo h tal que $x_0 + h$ pertence a uma bola aberta centrada em x_0 e contida em U, onde $R(x_0, h) = o(\|h\|)$, isto é:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Neste caso A é chamada de *derivada de Fréchet de f em x_0*, e denotada por $A = Df(x_0)$.

Teorema 1.0.26 (Desigualdade do Valor Médio para funções entre espaços de Banach). *(ver prova em [4]). Sejam E e F espaços de Banach, $U \subseteq E$ aberto, e $f : U \longrightarrow F$ uma aplicação Fréchet-diferenciável. Sejam $x_1, x_2 \in U$ tal que o segmento $\ell := \{tx_1 + (1-t)x_2 : 0 \leq t \leq 1\}$ está contido em U. Então*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \sup_{x \in \ell} \|Df(x)\| \, . \, \|x_1 - x_2\| \, .$$

Capítulo 2

TEOREMAS DE PONTO FIXO

Introdução

Um teorema de ponto fixo é um resultado que estabelece sob certas condições, a existência de um elemento x pertencente a um domínio X e uma aplicação $f : X \longrightarrow X$, tal que $f(x) = x$. Neste caso, x é chamado ponto fixo de f.

De maneira geral, o conjunto X será admitido ser um espaço topológico de modo a se poder trabalhar os conceitos de continuidade e compacidade. Ao longo deste capítulo iremos tratar de vários teoremas do ponto fixo, da seção 2.1 á seção 2.4 trataremos sobre o teorema de Banach, iniciando na seção 2.1 com o princípio da aplicação contração, na seção 2.2 trataremos da convergência de uma família de aplicações, na seção 2.3 e 2.4 trataremos de aplicações não-expansivas, na seção 2.5 iremos tratar o teorema do ponto fixo de Brouwer e seu caráter topológico restrito ao espaço euclideano $\mathbb{R}^n$, e as seções 2.6 e 2.7 consiste na extensão do teorema do ponto fixo de Brouwer em espaços de dimensão infinita.

Os teoremas de pontos fixos encontram-se em muitos ramos da Matemática, tais como: álgebra, análise, geometria, topologia, dinâmica, etc. Segue um exemplo simples que caracteriza esta noção inicial.

Exemplo 1: Supondo que sejam dados um sistema de n equações em n incógnitas da forma:

$$g_j(x_1, ..., x_n) = 0, \quad j = 1, ..., n$$

onde, g_j são funções contínuas de valores reais, de variáveis reais x_j. Seja $h_j(x_1, ..., x_n) = g_j(x_1, ..., x_n) + x_j$, e para qualquer ponto $x = (x_1, ..., x_n)$, defina $h(x) = (h_1(x), ..., h_n(x))$. Assumindo agora que $h(x)$ tem um ponto fixo $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, então, verifica-se que $\overline{x}$ é uma solução do sistema de equações.

2.1 O princípio da contração de Banach

O teorema do ponto fixo de Banach é conhecido como - teorema da aplicação contração - ou - princípio da aplicação contração - E é uma importante ferramenta na teoria de espaços métricos, pois garante a existência e unicidade de pontos fixos para certas aplicações nestes espaços.

Definição 2.1.1. Seja X um espaço métrico munido com a distância d. Uma aplicação $f : X \longrightarrow X$, é dita ser - Lipschitz contínua - se existe $\lambda \geq 0$ tal que

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2),$$

para todo $x_1, x_2 \in X$. O menor λ para o qual a desigualdade acima se mantém é a - constante de Lipschitz de f. Se $\lambda \geq 1, f$ é dita ser não-expansiva, e se $\lambda < 1, f$ é dita ser uma contração

Teorema 2.1.2 (Banach). *Se X é um espaço métrico completo, então toda contração $f : X \longrightarrow X$ possui um único ponto fixo em X. Mas precisamente, se escolhermos um ponto qualquer $x_0 \in X$ e pusermos $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n), ...$ a sequência (x_n) converge em X e $\overline{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ é o único ponto fixo de f.*

Demonstração: Primeiramente, se $x_1, x_2 \in X$ são pontos fixos de f, então

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2),$$

Desde que, um número não pode ser menor do que si mesmo, e isto implica que $x_1 = x_2$. Escolhendo agora, qualquer $x_0 \in X$ e definindo uma sequência por:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Por indução em n,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n d(f(x_0), x_0).$$

Se $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\lambda^{n+m} + ... + \lambda^n) d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x_0), x_0) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Potanto, x_n é uma sequência de Cauchy e admite um limite $\overline{x} \in X$, logo X é completo. Desde que, f é contínua, têm-se $f(\overline{x}) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = \overline{x}$ ■

Observação: Fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.1) encontra-se a relação

$$d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x_0), x_0)$$

a qual fornece um controle na taxa de convergência de (x_n) para o ponto fixo $\overline{x}$.

A completitude de X desempenha aqui um papel crucial. De fato, contrações em espaços métricos incompletos podem deixar de ter pontos fixos.

Exemplo 2.1.3. Seja $X = (0, 1]$ com a distância usual. Defina $f : X \longrightarrow X, f(x) = \dfrac{x}{2}$.

Corolário 2.1.4. *Seja X um espaço métrico completo e Y um espaço topológico. Seja $f : X \times Y \longrightarrow X$ uma função contínua. Assumindo que f é uma contração em X, e uniformemente em Y, isto é,*

$$d(f(x_1, y), f(x_2, y)) \leq \lambda d(x_1, x_2),$$

e para todo $x_1, x_2 \in X$, para todo $y \in Y$, e para algum $\lambda < 1$. Então, para todo $y \in Y$ fixado, a aplicação $x \longmapsto f(x, y)$ tem um único ponto fixo $\varphi(y)$. Além disso, a função $y \longmapsto \varphi(y)$ é contínua de Y para X. Observando que se $f : X \times Y \longrightarrow X$ é contínua em Y e é uma contração em X, uniformemente em Y, então, f é de fato, contínua em $X \times Y$.

Demonstração: Em função do Teorema 2.1.2, resta somente provar a continuidade de φ.

Para $y, y_0 \in Y$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
d(\varphi(y), \varphi(y_0)) &= d(f(\varphi(y), y), f(\varphi(y_0), y_0)) \\
&\leq d(f(\varphi(y), y), f(\varphi(y_0), y)) + d(f(\varphi(y_0), y), f(\varphi(y_0), y_0)) \\
&\leq \lambda d(\varphi(y), \varphi(y_0)) + d(f(\varphi(y_0), y), f(\varphi(y_0, y_0))
\end{aligned}$$

o que implica:

$$d(\varphi(y), \varphi(y_0)) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(f(\varphi(y_0), y), f(\varphi(y_0), y_0)).$$

Desde que o lado direito acima vai a zero quando $y \longrightarrow y_0$, obtém-se a continuidade desejada. ■

Observação: Se em adição, Y é um espaço métrico e f é Lipschitz contínua em Y, uniformemente com respeito a X, com constante de Lipschitz $L \geq 0$, então a função $y \longmapsto \varphi(y)$ é Lipschitz contínua com constante de Lipschitz menor que ou igual a $L/(1-\lambda)$.

O Teorema 2.1.2 dá uma condição suficiente para f ter um único ponto fixo.

Exemplo 2.1.5. Um contra-exemplo: Considere a aplicação

$$g(x) = \begin{cases} 1/2 + 2x, & x \in [0, 1/4], \\ 1/2, & x \in (1/4, 1] \end{cases}$$

aplicando $[0,1]$ sobre si mesmo, neste caso, muito embora g não seja contínua, tem um único ponto fixo ($x = 1/2$).

O próximo corolário leva em consideração a situação acima e fornece existência e unicidade em condições mais gerais.

Definição 2.1.6. Para $f : X \longrightarrow X$ e $n \in \mathbb{N}$ denota-se por f^n a n-ésima iterada de f, a saber $f \circ ... \circ f$ n-vezes (f^0 é a aplicação identidade). Considerando um ponto arbitrário $x_0 \in X$, e a fórmula de recorrencia dada por $x_{n+1} = f(x_n)$, obtem-se:

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$$

$$x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0)$$

$$...$$

$$x_n = f^n(x_0)$$

Corolário 2.1.7. *Seja X um espaço métrico completo e seja $f : X \longrightarrow X$ contínua. Se f^n é uma contração para algum $n \geq 1$, então f tem um único ponto fixo $\overline{x} \in X$.*

Demonstração: Seja $\overline{x}$ o único ponto fixo de f^n, dado pelo Teorema 2.1.2 . Então $f^n(f(\overline{x})) = f(f^n(\overline{x})) = f(\overline{x})$ implicando $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Desde que, um ponto fixo de f é claramente um ponto fixo de f^n. obtém-se a unicidade. ■

Observando que no Exemplo 2.1.5, $g \circ g = g^2(x) \equiv 1/2$.

Algumas extensões do princípio da contração - Existe na literatura um grande número de generalizações do Teorema 2.1.2 . Aqui, apresentaremos alguns resultados.

Teorema 2.1.8 (Boyd-Wong). *Seja X um espaço métrico completo e seja $f : X \longrightarrow X$. Assumindo que exista uma função contínua à direita $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, tal que $\varphi(r) < r$, se $r > 0$, e*

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \varphi d(x_1, x_2),$$

para todo $x_1, x_2 \in X$. Então, f tem um único ponto fixo $\overline{x} \in X$. Além disso, para qualquer $x_0 \in X$ a sequência $f^n(x_0)$ converge para $\overline{x}$.

O Teorema 2.1.2, é um caso particular deste resultado para $\varphi(r) = \lambda r$.

Demonstração: Se x_1, x_2 são pontos fixos de f, então

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda(d(x_1, x_2))$$

logo $x_1 = x_2$. Para provar a existência, fixando qualquer $x_0 \in X$ e definindo a sequência $x_{n+1} = f(x_n)$. Mostra-se que x_n é um sequência de Cauchy, e a conclusão desejada segue do argumento utilizado na prova do Teorema 2.1.2 . Para $n \geq 1$, define-se uma sequência positiva

$$a_n = d(x_n, x_{n-1}).$$

está claro que $a_{n+1} \leq \varphi(a_n) \leq a_n$; e portanto, (a_n) converge monotonicamente para algum $a \geq 0$. Da continuidade à direita de φ, obtém-se $a \leq \varphi(a)$ o que implica $a = 0$. Se (x_n) não é uma sequência de Cauchy, existe $\epsilon > 0$ e inteiros $m_k > n_k \geq k$ para todo $k \geq 1$ tal que

$$d_k := d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \epsilon,$$

para todo $k \geq 1$. Em adição, sobre a escolha do menor possível m_k, pode-se assumir que

$$d(x_{m_{k-1}}, x_{n_k}) < \epsilon$$

para k suficientemente grande (aqui se usa o fato de que $(a_n) \to 0$). Portanto para k suficientemente grande

$$\epsilon \leq d_k \leq d(x_{m_k}, x_{m_{k-1}}) + d(x_{m_{k-1}}, x_{n_k}) < a_{m_k} + \epsilon$$

implicando que $d_k \to \epsilon$, quando acima $k \to \infty$. Além disso,

$$d_k \leq d_{k+1} + a_{m_{k+1}} + a_{n_{k+1}} \leq \varphi(d_k) + a_{m_{k+1}} + a_{n_{k+1}}$$

e passando ao limite quando $k \to \infty$, obtêm-se a relação $\epsilon \leq \varphi(\epsilon)$, a qual é falsa desde que $\epsilon > 0$. ■

Teorema 2.1.9 (Caristi). *Seja X um espaço métrico completo, e seja $f : X \longrightarrow X$. Assumindo que exista uma função semicontínua inferiormente $\psi : X \longrightarrow [0, \infty)$; tal que*

$$d(x, f(x)) \leq \psi(x) - \psi(f(x)),$$

para todo $x \in X$. Então, f tem (ao menos) um ponto fixo em X.

Novamente, o Teorema 2.1.2 é um caso particular, obtido por

$$\psi(x) = d(x, f(x))/(1 - \lambda),$$

observando que f não precisa ser contínua.

Demonstração: Introduzindo aqui a ordenação parcial em X, conforme [4], definindo $x \preceq y$ se e somente se $d(x, y) \leq \psi(x) - \psi(y)$. Seja $\emptyset \neq X_0 \subset X$ totalmente ordenado, e considere uma sequência $x_n \in X_0$ tal que $\psi(x_n)$ é decrescente para $\alpha := \inf \{\psi(x) : x \in X_0\}$. Se $n \in \mathbb{N}$ e $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq \sum_{i=0}^{m-1} d(x_{n+i+1}, x_{n+i}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \psi(x_{n+i}) - \psi(x_{n+i+1}) \\ &= \psi(x_n) - \psi(x_{n+m}) \end{aligned}$$

Daí, x_n é uma sequência de Cauchy, e admite limite $x_* \in X$, pois X é completo. Desde que, ψ pode únicamente saltar para baixo (sendo semicontínua inferiormente), tem-se $\psi(x_*) = \alpha$. Se $x \in X_0$ e $d(x, x_*) > 0$, então é preciso ter $x \preceq x_n$ para n grande. De fato, $\lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = \psi(x_*) \leq \psi(x)$. Conclui-se que x_* é cota superior de X_0, e pelo Lema de Zorn [4] existe um elemento maximal $\overline{x}$. Por outro lado, $\overline{x} \preceq f(\overline{x})$. Assim, a maximilidade de $\overline{x}$ implica a igualdade $\overline{x} = f(\overline{x})$. ■

Teorema 2.1.10. *Seja X um espaço métrico completo, seja $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua. Assumindo que exista uma função $\psi : X \longrightarrow [0, \infty)$; tal que*

$$d(x, f(x)) \leq \psi(x) - \psi(f(x)),$$

para todo $x \in X$. Então, f tem um ponto fixo em X. Além disso, para qualquer $x_0 \in X$ a sequência $f^n(x_0)$ converge para um ponto fixo de f

Demonstração: Escolhendo $x_0 \in X$. Devido a condição acima, a sequência $\psi(f^n(x_0))$ é decrescente e limitada, e assim convergente. Raciocinando como na prova do teorema de Caristi, obtém-se que $f^n(x_0)$ admite um limite $\overline{x} \in X$, logo X é completo. A continuidade de f acarreta que $f(\overline{x}) = \lim_n f(f^n(x_0)) = \overline{x}$. ■

Conclui-se aqui com a seguinte extensão do Teorema 2.1.2 , e que desenvolve o conceito de **Quase-contração** mas que afirmamos sem prova. [Este resultado é devido a Lj. B. Ciric e pode ser visto em Proc. Amer. Math. Soc. 45, 267 273 (1974)].

Teorema 2.1.11 (Ciric). *Seja X um espaço métrico completo, e seja $f : X \longrightarrow X$ tal que,*

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda \max \{d(x_1, x_2), d(x_1, f(x_1)), d(x_2, f(x_2)), d(x_1, f(x_2)), d(x_2, f(x_1))\},$$

para algum $\lambda < 1$ e $x_1, x_2 \in X$. Então, f tem um único ponto fixo $\overline{x} \in X$. Além disso, $d(f^n(x_0), \overline{x}) = O(\lambda^n)$, para qualquer $x_0 \in X$.

Observação: Também, neste caso, f não precisa ser contínua. Contudo, é fácil checar que ela é contínua no ponto fixo.

Contrações fracas: agora veremos o caso de aplicações em espaços métricos que são fracamente contractivas .

Definição 2.1.12. Seja X um espaço métrico com a distancia d. Uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ é uma contração fraca se,

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(x_1, x_2),$$

para todo $x_1 \neq x_2 \in X$.

De maneira geral, uma contração fraca não é condição suficiente para se ter um ponto fixo, como é mostrado no seguinte exemplo.

Exemplo 2.1.13. Considere o espaço métrico completo $X = [1, \infty)$ e seja $f : X \longrightarrow X$ definida como $f(x) = x + 1/x$. É fácil ver que f é uma contração fraca sem ponto fixos.

No entanto, a condição se torna suficiente quando X é compacto.

Teorema 2.1.14. *Seja f uma contração fraca em um espaço métrico compacto X. Então f tem um único ponto fixo $\overline{x} \in X$. Além disso, para qualquer $x_0 \in X$ a sequência $f^n(x_0)$ converge para $\overline{x} \in X$.*

Demonstração: O argumento da unicidade segue exatamente como na prova do Teorema 2.1.2 . Devido a compacidade de X, a função contínua $x \longmapsto d(x, f(x))$ atinge seu mínimo, em algum $\overline{x} \in X$. Se $\overline{x} \neq f(\overline{x})$, obtém-se

$$d(\overline{x}, f(\overline{x})) = min_{x \in X} d(x, f(x)) \leq d(f(\overline{x}), f(f(\overline{x}))) < d(\overline{x}, f(\overline{x}))$$

o que é impossível, assim $\overline{x}$ é o único ponto fixo de f (e também de f^n para todo $n \geq 2$). Seja agora, $x_0 \neq \overline{x}$ dado, e defina $d_n = d(f^n(x_0), \overline{x})$. Observe que

$$d_{n+1} = d(f^n(x_0), f(\overline{x})) < d(f^n(x_0), \overline{x}) = d_n.$$

Daí, d_n é estritamente decrescente, e admite um limite $r \geq 0$. Seja agora $f^{n_k}(x_0)$ uma subsequência de $f^n(x_0)$ convergindo para algum $z \in X$. Então,

$$r = d(z, \overline{x}) = \lim_{k \to \infty} d_{n_k} = lim_{k \to \infty} d_{n_{k+1}} = \lim_{k \to \infty} d(f(f^{n_k}(x_0)), \overline{x}) = d(f(z), \overline{x}).$$

Mas, se $z \neq \overline{x}$, então

$$d(f(z), \overline{x}) = d(f(z), f(\overline{x})) < d(z, \overline{x}).$$

Por conseguinte, qualquer subsequência convergente de $f^n(x_0)$ tem limite $\overline{x}$, que juntamente com a compacidade de X, implica que $f^n(x_0)$ converge para $\overline{x}$. ■

Obviamente, pode-se relaxar a compacidade de X, exigindo que $\overline{f(X)}$ seja compacto (somente aplicando o teorema na restrição de f em $\overline{f(X)}$). Argumentando como no Corolário 2.1.7 , também é imediato a prova do corolário seguinte.

Corolário 2.1.15. *Seja X um espaço métrico completo, e seja $f : X \longrightarrow X$. Se f^n é uma contração fraca, para algum $n \geq 1$, então f tem um único ponto fixo $\overline{x} \in X$.*

A recíproca do Teorema de Banach: Assumindo que sejam dados um conjunto X e uma aplicação $f : X \longrightarrow X$. Estamos interessados em encontrar uma métrica d em X tal que (X, d) seja um espaço métrico completo e f uma contração em X. Claramente, em função do Teorema 2.1.2 , uma condição necessária é que cada iterada f^n tenha um único ponto fixo. E, surpreendentemente, a condição se torna suficiente, também.

Teorema 2.1.16 (Bessaga). *Seja X um conjunto arbitrário, e seja $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação tal que f^n tenha um único ponto fixo $\overline{x} \in X$ para todo $n \geq 1$. Então, para todo $\epsilon \in (0, 1)$, existe uma métrica $d = d_\epsilon$ em X que faz X ser um espaço métrico completo, e f uma contração em X com constante de Lipschitz igual a ϵ*

Demonstração: Escolhendo $\epsilon \in (0,1)$. Seja Z um subconjunto de X, consistindo de todos os elementos z tal que $f^n(z) = \overline{x}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Define-se, a seguinte relação de equivalência em $X \setminus Z$: dizemos que $x \approx y$ se, e somente se, $f^n(x) = f^m(y)$ para algum $n, m \in \mathbb{N}$. Obsevando que se $f^n(x) = f^m(y)$ e $f^{n'}(x) = f^{m'}(y)$, então utilizando a propriedade simétrica e reflexiva obtém-se $f^{n+m'}(x) = f^{m+n'}(x)$. Mas, desde que $x \notin Z$, esta soma $n + m' = m + n'$ que é $n - m = n' - m'$. Neste ponto, por meio do axioma da escolha, seleciona-se um elemento de cada classe de equivalencia. Agora procedendo, definindo a distância de $\overline{x}$ a um $x \in X$ genérico, por $d(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, $d(x, \overline{x}) = \epsilon^{-n}$ se $x \in Z$ com $x \neq \overline{x}$, onde $n = min\,\{m \in \mathbb{N} : f^m(x) = \overline{x}\}$ e $d(x, \overline{x}) = \epsilon^{n-m}$ se $x \notin Z$, onde $n, m \in \mathbb{N}$ são tais que $f^n(\hat{x}) = f^m(x)$, sendo $\hat{x}$ o representante selecionado da classe de equivalência de $[x]$. A definição não é ambígua, devido a discussão acima. Finalmente, para qualquer $x, y \in X$, define-se

$$d(x,y) = \begin{cases} d(x,\overline{x}) + d(y,\overline{x}), & se\ x \neq y \\ 0, & se\ x = y \end{cases}$$

É fácil verificar que d é uma métrica, para ver que d é completa, basta observar que as únicas sequências de Cauchy que não convergem para X, são em ultima análise, as constantes. Mostra-se que f é uma contração com constante de Lipschitz igual a ϵ. Seja $x \in X, x \neq \overline{x}$.Se $x \in Z$ tem-se

$$d(f(x), f(\overline{x})) = d(f(x), \overline{x}) \leq \epsilon^{-n} = \epsilon\epsilon^{-(n+1)} = \epsilon d(x, \overline{x})$$

Se $x \notin Z$, tem-se

$$d(f(x), f(\overline{x})) = d(f(x), \overline{x}) = \epsilon^{n-m} = \epsilon\epsilon^{n-(m+1)} = \epsilon d(x, \overline{x})$$

desde que x é equivalente a $f(x)$. A tese segue diretamente da definição de distância. ■

2.2 Sequências de aplicações e pontos fixos

Iremos considerar nesta seção dois tipos de convergência de sequências de aplicações em espaços métricos completos: a convergência uniforme e a convergência pontual. Considerando agora (X, d) um espaço métrico completo e uma sequência de aplicações $f_n : X \longrightarrow X$ e verifica-se a convergência desta sequência para pontos fixos. O Corolário 2.1.7 será usado implicitamente na afirmação dos próximos dois teoremas.

Teorema 2.2.1. *Assumindo que cada f_n tem ao menos um ponto fixo $x_n = f_n(x_n)$. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação uniformemente contínua, tal que f^m é uma contração para algum $m \geq 1$. Se f_n converge uniformemente para f, então x_n converge para algum $\overline{x} = f(\overline{x})$.*

Demonstração: Primeiramente, assumindo que f é uma contração (isto é, $m = 1$). Seja $\lambda < 1$ a constante de Lipschitz de f. Dado $\epsilon > 0$, escolhendo $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon(1 - \lambda),$$

para todo $n \geq n_0$, e para todo $x \in X$. Então, para $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} d(x_n, \overline{x}) &= d(f_n(x_n), f(\overline{x})) \\ &\leq d(f_n(x_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(\overline{x})) \\ &\leq \epsilon(1 - \lambda) + \lambda d(x_n, \overline{x}). \end{aligned}$$

Portanto $d(x_n, \overline{x}) < \epsilon$, o que prova a convergência. ■

Para provar o caso geral, é suficiente observar que se,

$$d(f^m(x), f^m(y)) \leq \lambda^m d(x, y)$$

para algum $\lambda < 1$, pode-se definir uma nova métrica d_0 em X equivalente a d, assim

$$d_0(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda^k} d(f^k(x), f^k(y)).$$

Além disso, desde que f uniformemente contínua, f_n converge uniformemente para f

também com respeito a d_0. Finalmente, f é uma contração com respeito a d_0. De fato,

$$\begin{aligned}
d_0(f(x), f(y)) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda^k} d(f^{k+1}(x), f^{k+1}(y)) \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda^k} d(f^k(x), f^k(y)) + \frac{1}{\lambda^{m+1}} d(f^m(x), f^m(y)) \\
&\leq \lambda \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda^k} d(f^k(x), f^k(y)) = \lambda d_0(x, y)
\end{aligned}$$

Logo, o problema é reduzido ao caso prévio $m = 1$. ■

O próximo resultado se refere a uma classe especial de espaços métricos completos.

Teorema 2.2.2. *Seja X localmente compacto. Assumindo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \geq 1$ tal que $f_n^{m_n}$ é uma contração. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação tal que f^m é uma contração para algum $m \geq 1$. Se f_n converge ponto a ponto para f e f_n é uma família equicontínua, então $x_n = f_n(x_n)$ converge para $\overline{x} = f(\overline{x})$.*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que

$$K(\overline{x}, \epsilon) := \{x \in X : d(x, \overline{x}) \leq \epsilon\} \subset X.$$

é compacto. Como subproduto do Teorema de Ascoli, f_n converge uniformemente para f em $K(\overline{x}, \epsilon)$ desde que, é equicontínua e converge pontualmente. Escolhendo $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$d(f_n^m(x), f^m(x)) \leq \epsilon(1 - \lambda), \quad \textit{para todo } n \geq n_0, \ \textit{para todo } x \in K(\overline{x}, \epsilon).$$

onde $\lambda < 1$ é a constante de Lipschitz de f^m. Então, para $n \geq n_0$ e $x \in K(\overline{x}, \epsilon)$, tem-se

$$\begin{aligned} d(f_n^m(x), \overline{x}) &= d(f_n^m(x), f^m(\overline{x})) \\ &\leq d(f_n^m(x), f^m(x)) + d(f^m(x), f^m(\overline{x})) \\ &\leq \epsilon(1 - \lambda) + \lambda d(x, \overline{x}) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Daí, $f_n^m(K(\overline{x}, \epsilon)) \subset K(\overline{x}, \epsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Desde que, as aplicações $f_n^{m_n}$ são contrações, segue que, para $n \geq n_0$, os pontos fixos x_n de f_n pertencem a $K(\overline{x}, \epsilon)$, que é $d(x_n, \overline{x}) \leq \epsilon$.
■

2.3 Pontos fixos de aplicações não-expansivas

Seja X um espaço de Banach, $C \subset X$ não vazio, fechado, limitado e convexo, e seja $f : C \longrightarrow C$. A aplicação f é dita ser *não-expansiva* se:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|, \quad para \;\; todo \;\; x, y \in C.$$

O problema é saber se f admite ou não um ponto fixo em C. A resposta, em geral, é falsa.

Exemplo 2.3.1. Seja $X = c_0$ com a norma do supremo. Deixando, $\overline{B}_X(0,1)$, a aplicação $f : C \longrightarrow C$, definida por

$$f(x) = (1, x_o, x_1, ...), \quad para \quad x = (x_0, x_1, ...) \in C$$

é não-expansiva, mas claramente, não admite ponto fixo em C.

As coisas são muito diferentes em espaços de Banach uniformemente convexos.

Teorema 2.3.2 (Browder-Kirk). *Seja X um epaço de Banach, uniformemente convexo e $C \subset X$ não-vazio, fechado, limitado e convexo. Se $f : C \longrightarrow C$ é uma aplicação não-expansiva, então f tem um ponto fixo em C.*

A prova deste teorema pode ser vista em [15]. Aqui forneceremos uma prova para um caso particular quando X é um espaço de Hilbert.

Demonstração: Seja $x_* \in C$ fixado, e considere uma sequência $r_n \in (0,1)$ convergindo para 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina uma aplicação $f_n : C \longrightarrow C$, quando

$$f_n(x) = r_n f(x) + (1 - r_n)x_*$$

Observando que f_n é uma contração em C, daí, existe um único $x_n \in C$ tal que $f_n(x_n) = x_n$. Desde que, C é fracamente compacto, x_n tem uma subsequência (ainda denotada por x_n) fracamente convergente para algum $\overline{x} \in C$. Nós provaremos que $\overline{x}$ é um ponto fixo de f. Observe primeiro que,

$$\lim_{n \to \infty} (\|f(\overline{x}) - x_n\|^2 - \|x - x_n\|^2) = \|f(\overline{x}) - \overline{x}\|^2.$$

Desde que f é não-expansiva, nós temos

$$\begin{aligned} \|f(\overline{x}) - x_n\| &\leq \|f(\overline{x}) - f(x_n)\| + \|f(x_n) - x_n\| \\ &\leq \|\overline{x} - x_n\| + \|f(x_n) - x_*\| \\ &= \|\overline{x} - x_n\| + (1 - r_n)\|f(x_n) - x_*\|. \end{aligned}$$

Mas $r_n \to 1$ quando $n \to \infty$ e C é limitado, logo, conclui-se que

$$\limsup_{n\to\infty}(\|f(\overline{x}) - x_n\|^2 - \|x - x_n\|^2) \leq 0$$

que produz a igualdade $f(\overline{x}) = \overline{x}$. $\blacksquare$

Proposição 2.3.3. *Na hipótese do Teorema 2.3.2, o conjunto F dos pontos fixos de f é fechado e convexo.*

Demonstração: A primeira afirmação é trivial. Assumindo então, que $x_0, x_1 \in F$, com $x_0 \neq x_1$, e denotamos $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$, com $t \in (0,1)$. Tem-se

$$\|f(x_t) - x_0\| = \|f(x_t) - f(x_0)\| \leq \|x_t - x_0\| = t\,\|x_1 - x_0\|$$

$$\|f(x_t) - x_1\| = \|f(x_t) - f(x_1)\| \leq \|x_t - x_1\| = (1-t)\,\|x_1 - x_0\|$$

que implica na igualdade

$$\|f(x_t) - f(x_0)\| = t\,\|x_1 - x_0\|$$

$$\|f(x_t) - f(x_1)\| = (1-t)\,\|x_1 - x_0\|. \qquad \blacksquare$$

A prova estará completa se mostrarmos que $f(x_t) = (1-t)x_0 + tx_1$. Isto segue de um fato geral acerca da convexidade uniforme, o qual será recordado no próximo lema.

Lema 2.3.4. *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo e seja $\alpha, x, y \in X$ tal que $\|\alpha - x\| = t\,\|x - y\|$, $\|\alpha - y\| = (1-t)\,\|x - y\|$, para algum $t \in [0,1]$. Então, $\alpha = (1-t)x + ty$*

Demonstração: Sem perda de generalidade, pode-se assumir que $t \geq 1/2$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|(1-t)(\alpha - x) - t(\alpha - y)\| &= \|(1-2t)(\alpha - x) - t(x-y)\| \\
&\geq t\,\|(x-y)\| - (1-2t)\,\|(\alpha - x)\| \\
&= 2t(1-t)\,\|(x-y)\|.
\end{aligned}$$

desde que, a desigualdade reversa afirma que

$$(1-t)\,\|\alpha - x\| = t\,\|\alpha - y\| = t(1-t)\,\|x - y\|$$

da convexidade uniforme de X (mas, convexidade estrita seria suficiente), obtem-se

$$\|(\alpha - (1-t)x - ty\| = \|(1-t)(\alpha - x) + t(\alpha - y)\| = 0$$

como foi afirmado. $\blacksquare$

2.4 O teorema da média ergódica de Riesz

Se T é uma aplicação linear não-expansiva em um espaço de Banach uniformemente convexo. Então, todos os pontos fixos de T são encontrados por meio de um processo de limite.

Projeções: Seja X um espaço linear. Um operador linear $P : X \longrightarrow X$ é chamado uma projeção em X se, $P \circ P = P^2x = PPx = Px$, para todo $x \in X$. É facil verificar que P é o operador identidade em $Im(P)$ e a relação $Ker(P) = Im(\mathbb{I} - P), Im(P) = Ker(\mathbb{I} - P),\ e\ Ker(P) \cap Im(P) = \{0\}$. Além disso, todo elemento $x \in X$ admite uma única decomposição $x = y + z$ com $y \in Ker(P)$ e $z \in Im(P)$. Onde $Ker(P)$ denota o núcleo de P, e $Im(P)$ a imagem de P.

Proposição 2.4.1. *Se X é um espaço de Banach, então a projeção P é contínua se, e somente se, $X = Ker(P) \oplus Im(P)$ A notação $X = A \oplus B$ é usada para indicar que A e B são subespaços fechados de X tal que $A \cap B = \{0\}$ e $A + B = X$.*

Demonstração: Se P é contínua então $\mathbb{I} - P$ é contínua. Daí, $Ker(P), e\ Im(P) = Ker(\mathbb{I} - P)$ são fechados. Reciprocamente, seja $x_n \to x$ e $Px_n \to y$. Desde que, $Im(p)$ é fechado, $y \in Im(P)$, portanto $Py = y$, mas $Px_n - x_n \in Ker(P)$ e $Ker(P)$ é fechado. Logo, tem-se $x - y \in Ker(P)$, implicando $Py = Px$. Do teorema do gráfico fechado, P é contínua.

Teorema 2.4.2 (F. Riesz). *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador linear tal que*

$$\|Tx\| \leq \|x\|,$$

para todo $x \in X$. Então, para todo $x \in X$, o limite

$$p_x = \lim_{n\to\infty} \frac{x + Tx + ... + T^n x}{n+1}$$

existe. Além disso, o operador $P : X \longrightarrow X$, definido por $Px = p_x$ é uma projeção contínua sobre o espaço linear $M = \{y \in X : Ty = y\}$.

Demonstração: Fixando $x \in X$, o conjunto

$$C = \overline{co(\{x, Tx, T^2x, T^3x, ...\})}.$$

C é um conjunto, não-vazio, convexo e fechado, e da convexidade uniforme de X existe um único $p_x \in C$ tal que

$$\mu = \|p_x\| = \inf\{\|z\| : z \in C\}.$$

Selecione $\epsilon > 0$. Então para $p_x \in C$, existe $m \in \mathbb{N}$ e constantes não negativas $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m$ com

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_j = 1;$$

tal que, definindo $z = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j T^j x$.

Não satisfaz

$$\|p_x - z\| < \epsilon$$

Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{z + Tz + ... + T^n z}{n+1} \right\| \leq \|z\| \leq \mu + \epsilon$$

observe que

$$z + Tz + ... + T^n z = (\alpha_0 x + ... + \alpha_m T^m x) + (\alpha_0 Tx + ... + \alpha_m T^{m+1} x)$$

$$+ ... + (\alpha_0 T^n x + ... + \alpha_m T^{m+N} x)$$

Assim assumindo $n > m$ obtem-se

$$z + Tz + ... + T^n z = x + Tx + ... + T^n x + r$$

onde

$$r = (\alpha_0 - 1)x + ... + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_{m-1} T^{m-1})x$$

$$+ (1 - \alpha_0) T^{1+n} x + ... + (1 - \alpha_0 - \alpha_1 - ... - \alpha_{m-1}) T^{m+n} x.$$

Portanto,

$$\frac{x + Tx + ... + T^n x}{n+1} = \frac{z + Tz + ... + T^n z}{n+1} - \frac{r}{n+1}.$$

Desde que,

$$\left\| \frac{r}{n+1} \right\| \leq \frac{2m\|x\|}{n+1}$$

ao escolher n suficientemente grande tal que, $2m\|x\| < \epsilon(n+1)$ tem-se

$$\left\| \frac{x + Tx + ... + T^n x}{n+1} \right\| \leq \left\| \frac{z + Tz + ... + T^n z}{n+1} \right\| + \left\| \frac{r}{n+1} \right\| \leq \mu + 2\epsilon.$$

Por outro lado, é preciso ter

$$\left\| \frac{x + Tx + ... + T^n x}{n+1} \right\| \geq \mu.$$

Então, conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x + Tx + ... + T^n x}{n+1} \right\| = \mu$$

Isto diz, que o que precede é uma sequência de minimização em C e devido a convexidade uniforme de X, ganha-se a convergência

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + Tx + ... + T^n x}{n+1} = p_x.$$

Estamos prontos para mostrar que o operador $Px = p_x$ é uma projeção contínua sobre M. Com efeito, é evidente que se $x \in M$, então $p_x = x$. Em geral,

$$Tp_x = \lim_{n\to\infty} \frac{Tx + T^2x + ... + T^{n+1}x}{n+1} = p_x + \lim_{n\to\infty} \frac{T^{n+1}x - x}{n+1} = p_x.$$

Finalmente, $P^2x = PPx = Pp_x = p_x = Px$. A continuidade é assegurada pela relação $\|p_x\| \leq \|x\|$. ■

Quando X é um espaço de Hilbert, P é na verdade, uma projeção ortogonal. Isto segue da próxima proposição.

Projeção ortogonal: Se E é um espaço com produto interno e M um subconjunto de E. Denominamos o subconjunto

$$M^{\perp} = \{y \in E : \langle x, y\rangle = 0 \; para \; todo \; x \in M\}$$

de complemento ortogonal de M. Se H é um espaço de Hilbert e M é um subespaço fechado de H, então $H = M \oplus M^{\perp}$, isto é, cada $x \in H$ admite uma única representção na forma

$$x = p + q, \; com \; p \in M \; e \; q \in M^{\perp}.$$

. Além disso,

$$\|x - p\| = dist(x, M).$$

O vetor p é chamado de *projeção ortogonal* de x sobre M.

Proposição 2.4.3. *Seja H um espaço de Hilbert, e $P = P^2 : H \longrightarrow H$ um operador linear limitado com $\|P\| \leq 1$. Então, P é uma projeção ortogonal.*

Demonstração: Desde que, P é contínua, $Im(P)$ é fechado, seja E uma projeção ortogonal tendo alcance $Im(P)$. Então,

$$P = E + P(\mathbb{I} - E).$$

Seja agora, $x \in Im(P)^{\perp}$. Para qualquer $\epsilon > 0$ tem-se

$$\|P(Px + \epsilon x)\| \leq \|Px + \epsilon x\|$$

o qual implica em

$$\|Px\|^2 \leq \frac{\epsilon}{2+\epsilon} \|x\|^2 .$$

Daí, $Px = 0$ e a igualdade $P = E$ é assegurada. ■

O papel desempenhado pela convexidade uniforme é essencial, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.4.4. Seja $X = \ell^{\infty}$, e seja $T \in L(X)$ definido por

$$Tx = (0, x_0, x_1, ...),$$

para $x = (x_0, x_1, x_2, ...) \in X$. Então T tem um único ponto fixo, chamado, o elemento zero de X. Não obstante, se $y = (1, 1, 1, ...)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtem-se

$$\left\| \frac{y + Ty + ... + T^n y}{n+1} \right\| = \frac{\|(1, 2, ..., n+1, n, n+1, ...)\|}{n+1} = 1.$$

2.5 O teorema do ponto fixo de Brouwer

Introdução O teorema do ponto fixo de Brouwer é um dos primeiros que surgiram, ele afirma que: Toda aplicação contínua em uma bola fechada e unitária $B^n \subset \mathbb{R}^n$, em si mesma, possui um ponto fixo. Este resultado se deve ao holândês Luitzen Brouwer, as figuras abaixo ilustram duas maneiras pelas quais o próprio Brouwer utilizou para explicar suas idéias sobre o teorema, a saber: em uma xícara de café, um torrão de açucar é acrescentado, e ao se misturar o açucar com o café de maneira contínua, existe algum ponto após a mistura na superfície do café, que permanece na posição original; ou, ao se utilizar duas folhas de papéis idênticas, e colocá-las uma sobre a outra horizontalmente, e ao amassar a folha de cima sem rásgá-la, existe algum ponto da folha amassada que permanece na mesma posição da outra folha.

a xícara de café

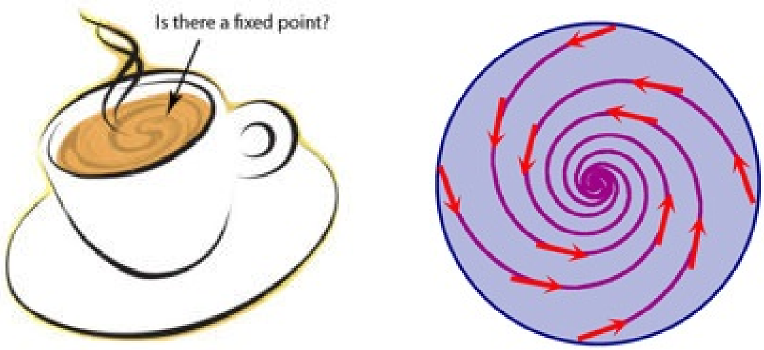


figura a

as folhas de papéis

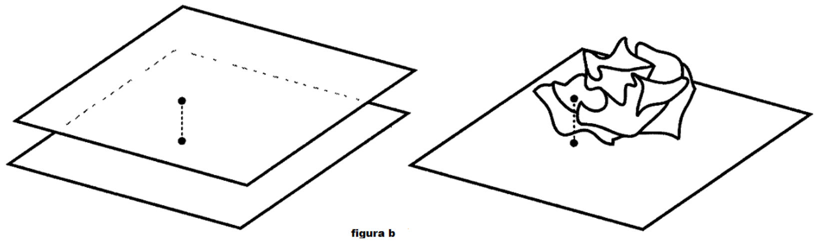


figura b

Iniciamos com os resultados clássicos sobre o teorema do ponto fixo de Brouwer, com as provas em dimensão 1, 2 e n, e comentamos brevemente os resultados que utilizam conceitos de homologia e também uma prova que utiliza o teorema de Stokes enfatizando o uso de formas diferenciais. Entretanto, a idéia chave na demonstração em todo estes casos está intimamente relacionada à noção de *retração*, que é um conceito topológico. Mais especificamente, Karol Borsuk provou em 1931 que o teorema do ponto fixo de Brouwer é equivalente ao teorema da não-retração, sendo este um ponto importante em nossa abordagem, pois queremos enfatizar que o teorema do ponto fixo de Brouwer não tem uma prova direta. Finalizamos com a demonstração de que qualquer subconjunto, não-vazio, compacto e convexo do $\mathbb{R}^n$ é homeomorfo a uma bola fechada em $\mathbb{R}^n$. Portanto, estes subconjuntos tem a propriedade do ponto fixo. De maneira geral, o teorema do ponto fixo de Brouwer afirma que toda aplicação contínua de um subconjunto compacto convexo do $\mathbb{R}^n$ em si mesmo tem um ponto fixo.

Definição 2.5.1. Um espaço topológico X é dito possuir a propriedade do ponto fixo, se toda aplicação contínua de X em X tem um ponto fixo.

Nos exemplos dados abaixo verifica-se que a reta real e o círculo unitário não tem a propriedade do ponto fixo. De maneira geral, é sempre possível saber se um conjunto não tem a propriedade do ponto fixo, basta exibir uma aplicação contínua sem pontos fixos.

Exemplo 2.5.2. A reta real $\mathbb{R}$ não tem a propriedade do ponto fixo, desde que existe uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que não fixa em nenhum ponto. Ex. a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; dada por $f(x) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.5.3. O círculo S^1 não tem a propriedade do ponto fixo desde que a função contínua $f : S^1 \longrightarrow S^1$, dada pela rotação de cada ponto no círculo através de um ângulo π, não tem pontos fixos.

A prova em uma dimensão do teorema do ponto fixo de Brouwer, mostra que todo intervalo fechado da reta, isto é, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tem a propriedade do ponto fixo.

Unidimensional: Apresenta-se o teorema do valor intermediário (TVI), o qual também é do tipo que é chamado de *teorema de existência* e sua prova é devido a Bernard Bolzano (1817) e a Cauchy, o qual é um resultado topológico sobre a retal real, e que tem como consequência a versão unidimensional do teorema do ponto fixo de Brouwer.

Teorema 2.5.4 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $f(a) < f(b)$. Se um número c satisfaz a condição $f(a) < c < f(b)$, então existe um ponto x_0 no intervalo fehado $[a, b]$ para o qual $f(x_0) = c$.*

Demonstração : Inicialmente, se considera o caso para $c = 0$, isto implica que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, onde $I = [a, b]$. Define-se uma função contínua $\varphi(x) = \lambda f(x) + x$, tal que $x \in I$, onde o parâmetro $\lambda \neq 0$, foi ecolhido afim de que a função $\varphi(x)$ transforme o intervalo $[a, b]$ nele próprio. Esta escolha garante pelo Teorema do ponto fixo de Brouwer que $\varphi(x)$ tem pelo menos um ponto fixo x_0 no intervalo $[a, b]$. Têm-se então:

$$\varphi(x_0) = x_0 \Leftrightarrow \lambda f(x_0) + x_0 = x_0 \Leftrightarrow \lambda f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0.$$

Definindo λ: pelo teorema de Weierstrass, a função f é limitada e tem um mínimo e um máximo, tais que: $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$. Em particular, tem-se $m < 0$, e $M > 0$. Logo, pela continuidade de f, e $f(a) < 0 < f(b)$, pode-se escolher um x_1 tal que $f(x) < 0$ para qualquer $x \in [a, x_1]$, e da mesma forma, escolhe-se x_2, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [x_2, b]$. Seja

$$\lambda = \max\left\{\frac{a - x_1}{M}, \frac{b - x_2}{m}\right\}.$$

Assim, λ será igual a um dos dois valores negativos: $\dfrac{a - x_1}{M}$ ou $\dfrac{b - x_2}{m}$.
Escolhendo λ, têm-se $\varphi(x) \geq a$ para todo $x \in [a, b]$.
De fato, considerando $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$, e como $\lambda \geq \dfrac{a - x_1}{M}$, e multiplicando esta expressão por $f(x)$, obtem-se $\lambda f(x) \geq \dfrac{a - x_1}{M} f(x)$, e utilizando o fato que $-f(x) \geq -M$, resulta que

$$\varphi(x) = \lambda f(x) + x \geq \frac{a - x_1}{M} f(x) + x = \frac{a - x_1}{-M}(-f(x)) + x \geq \frac{a - x_1}{-M}(-M) + x = a - x_1 + x.$$

implicando que $\varphi(x) \geq a - x_1 + x \geq a$ ou seja, $\varphi(x) \geq$ a para todo $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$.
Para x tal que $f(x) < 0$, tem-se que $\lambda f(x) > 0$ e $\varphi(x) = \lambda f(x) + x \geq x \geq a$, ou seja

$$\varphi(x) \geq a, \qquad \textit{para todo } x \in [a, b].$$

De maneira análoga, tem-se que $\varphi(x) \leq b$ para todo $x \in [a, b]$. De fato, seja $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$. Então

$$\lambda f(x) \leq 0 \Rightarrow \varphi(x) = \lambda f(x) + x \leq x \Leftrightarrow \varphi(x) \leq b.$$

Seja agora, $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq 0$. E como, $\lambda \geq \frac{b - x_2}{m}$, e multiplicando ambos os membros da desigualdade por $f(x)$, obtem-se $\lambda f(x) \leq \frac{b - x_2}{m} f(x)$ e utilizando o artifício anterior, resulta em

$$\varphi(x) = \lambda f(x) + x \leq \frac{b - x_2}{m} f(x) + x = \frac{b - x_2}{-m}(-f(x)) + x \leq \frac{b - x_2}{-m}(-m) + x = b - x_2 + x.$$

Isto implica que, $\varphi(x) = \lambda f(x) + x \leq b$ para todo $x \in [a, b]$, ou seja $\varphi(x) \leq b$ para todo $x \in [a, b]$, tal que $f(x) \leq 0$.

Assim, $\varphi(x)$ aplica $[a, b]$ em $[a, b]$, de forma que $\varphi(x)$ tem pelo menos um ponto fixo x_0 em $[a, b]$. Ou seja,

$$\varphi(x_0) = \lambda f(x_0) + x_0 = x_0 \Leftrightarrow \lambda f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0.$$

Para o caso $c \neq 0$, basta utilizar o mesmo argumento definindo a função
$\varphi_c = \lambda\,[f(x) - c] + x$. ■

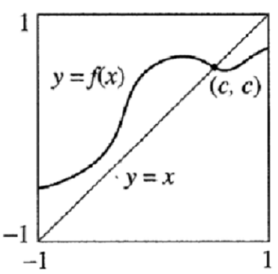
Teorema 2.5.5 (**Teorema do ponto fixo de Brouwer - em uma dimensão**). *Seja $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ uma função contínua. Então, existe pelo menos um ponto fixo $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.*

Demonstração: Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, o teorema está provado.
Supondo que $f(a) > a$ e $f(b) < b$, podemos definir uma nova função $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, dada por $\varphi(x) = x - f(x)$, com $\varphi(a) > 0$ e $\varphi(b) < 0$. Pelo TVI, deve existir $c \in [a, b]$ tal que $\varphi(c) = 0$, isto é, $f(c) = c$. ■

Teorema 2.5.6 (**Teorema da não-retraçao em dimensão 1**). *Não existe retração de $B^1 = [-1, 1]$ sobre sua fronteira $\partial B = S^0 = \{-1, 1\}$.*

Demonstração: É imediato que não existe retração de $[-1, 1]$ sobre $\{-1, 1\}$, desde que, se existisse retração de $[-1, 1]$ sobre $\{-1, 1\}$ seria uma aplicação contínua de um espaço conexo sobre um desconexo, o que é uma impossibilidade. ■

Exemplo 2.5.7. Interpretação Geométrica: Seja $f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, f tem um ponto fixo, o que equivale a afirmar que: Não é possível ligar dois lados paralelos de um quadrado por uma linha contínua, sem intersectar a diagonal do quadrado.



Bidimensional: Apresenta-se o teorema do ponto fixo de Brouwer para duas dimensões, e o teorema de não-retração, e a equivalencia entre os dois teoremas.

Teorema 2.5.8 (**Teorema do ponto fixo de Brouwer - em duas dimensões**). *Toda função contínua $f : D \longrightarrow D$ que aplica o disco sobre si mesmo, tem um ponto fixo.*

Teorema 2.5.9 (**Teorema da não-retração em duas dimensões, a prova pode ser vista em** [**2**]). *Não existe retração do disco $D \subset \mathbb{R}^2$ sobre sua fronteira $\partial D = S^1$.*

Como indicamos, nossa abordagem para provar o teorema do ponto fixo de Brouwer consiste em mostrar a equivalência ao teorema da não-retração, e isto é feito no próximo teorema.

Teorema 2.5.10. *O disco D, como subespaço do $\mathbb{R}^2$ tem a propriedade de ponto fixo se, e somente se não existe retração de D sobre sua fronteira S^1.*

Demonstração: Inicialmente, assumindo que exista uma retração $r : D \longrightarrow S^1$. E, considera-se a aplicação $q : S^1 \longrightarrow D$; tal que $q(x) = -x$, para todo $x \in S^1$, onde x é um vetor no plano. A função composta $q \circ r : D \longrightarrow D$ é contínua e não tem ponto fixo. Portanto, se existe retração $r : D \longrightarrow S^1$ então D não tem a propriedade do ponto fixo. Por outro lado, assumindo também que a função contínua $f : D \longrightarrow D$ não tem ponto fixo, mostra-se que existe uma retração $r : D \longrightarrow S^1$, e define-se assim:
Seja um raio em $\mathbb{R}$ que vai de $f(x)$ até x. Este raio está bem definido, desde que não existe ponto fixo. E seja $r(x)$ o ponto onde o raio intersepta S^1. Obviamente, r aplica D sobre S^1 e $r(x) = x$ para todo $x \in S^1$. e assim segue que r é uma retração, desde que a continuidade de r é estabelecida. Então mostra-se que r é contínua: Seja U um aberto em S^1 e x um ponto de $r^{-1}(U)$. Mostra-se que existe um conjunto aberto V contendo x tal que $r(V) \subset U$ e além disso $r^{-1}(U)$ é aberto. Escolhendo pequenas bolas abertas O_1 e O_2 centradas em x e $f(x)$, respectivamente, tal que todo raio iniciando em O_1 e passando através de O_2 intercepta S^1 no conjunto U. Desde que f é contínua, pode-se encontrar um conjunto aberto V contendo x e contido em O_2 tal que $f(V) \subset O_1$. Assim, para todo $v \in V$, o raio iniciando em $f(v)$ passando através de v intercepta S^1 em U. E como $r(V) \in U$, e disto segue que r é contínua. Mas isto é impossível pelo teorema da não-retração Por isto, estabeleceu-se que se D não tem a propriedade do ponto fixo, então existe uma retração $r : D \longrightarrow S^1$. $\blacksquare$

Teorema do ponto fixo de Brouwer - em dimensão n, e o Teorema da não-retração

Seja $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$. Um subconjunto $E \subset B^n$ é chamado um retrato de B^n se existe uma aplicação contínua $r : B^n \longrightarrow E$ (chamada retração), tal que $r(x) = x$, para todo $x \in E$

Teorema 2.5.11 (**Teorema do ponto fixo de Brouwer**). *Toda aplicação contínua da B^n bola unitária e fechada em si mesmo tem um ponto fixo.*

Teorema 2.5.12 (**Teorema da não-retração, a prova pode ser vista [14]**). *Não existe retração de B^n sobre S^{n-1}*

O resultado seguinte mostra a equivalência entre os dois teoremas.

Teorema 2.5.13. *Sejam $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$ e $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$. Para $n \geq 1, S^{n-1}$ não é um retrato de B^n, em outras palavras, o conjunto B^n tem a propriedade do ponto fixo se, e somente se não existe aplicação retração de B^n sobre S^{n-1}.*

Iremos apresentar o Lema do Raio, e sua demonstração.

Lema 2.5.14. *Suponha que X é um subconjunto compacto, convexo do $\mathbb{R}^n$ com interior não-vazio. Seja $x_0 \in IntX$ e $x_1 \in X$ tal que $x_0 \neq x_1$.*

1. *Se $R_{x_0,x_1} = \{x_0 + t(x_1 - x_0); t \geq 0\}$ é o raio que vai de x_0 através de x_1. Então R_{x_0,x_1} encontra a fronteira de X em um único ponto.*

2. *De fato, todo $x \in X$ encontra-se no único raio R_{x_0,x_n} tal que x_n encontra-se na fronteira de X.*

Demonstração: a) Seja ∂X definido como a fronteira de X. Afirma-se que $R_{x_0,x_1} \cap X \neq \emptyset$. Pois X é limitado, logo existe $M > 0$ tal que $d(x_0, y) < M$, *para todo* $y \in X$. Mas, R_{x_0,x_1} é ilimitado, logo existe algum $x_n \in R_{x_0,x_1}$ tal que $d(x_0, x_n) > M$. Assim $R_{x_0,x_1} \cap (\mathbb{R}^n - X) \neq \emptyset$. Por hipótese, $x_0 \in IntX$, logo $R_{x_0,x_1} \cap IntX \neq \emptyset$. Desde que R_{x_0,x_1} é conexo, R_{x_0,x_1} encontra ∂X. Pelo fato de X ser fechado, qualquer ponto de $R_{x_0,x_1} \cap \partial X$ está também em X. Suponha que $y_1, y_2 \in R_{x_0,x_1} \cap \partial X$ onde $y_1 \neq y_2$. Então o segmento de reta fechado definido por $[y_1.y_2] \subset X$, pois X é convexo. Sem perda de generalidade, seja $y_2 \in (x_0, y_1) =$ *intervalo aberto*, seja $x_0 \in IntX =$ *conjunto* *aberto*, existe $r > 0$, tal que $U_0 \subset B_r(x_0)$. Dado qualquer $x \in B_r(x_0), (x, y_1) \in X$. Seja $A = \bigcup_{x \in U_0}(x, y_1)$. Então, $A \subset X$ desde que $(x, y_1) \subset X$, *para todo* $x \in X$. Define-se $U_\lambda = y_1 + (1 - \lambda)(U_0 - y_1), 0 < \lambda < 1$. Este é um conjunto aberto desde que é obtido por translação e redefinição de U_0. Então,

$$A = \bigcup_{x \in U_0}(x, y_1) = \bigcup_{x \in U_0}\{y_1 + (1 - \lambda)(x - y_1); 0 < \lambda < 1\} = \bigcup U_\lambda = \bigcup(\textit{conjuntos abertos}).$$

Mas, $y_2 \in (x_0, y_1)$, logo existe um λ tal que $y_2 \in U_\lambda$ assim y_2 está no interior de X. Isto é uma contradição. Portanto, $R_{x_0,x_1} \cap \partial X$ tem um único ponto. b) Todo ponto $x \in X$, com $x \neq x_0$, encontra-se no único raio R_{x_0,x_1} com $x \in \partial X$, ou seja $R_{x_0,x} = R_{x_0,x_1}$ com $\{x\} = R_{x_0,x_1} \cap \partial X$. ■

Demonstração do teorema: Afirmação 1: Se B^n tem a propriedade do ponto fixo, então não existe retração de B^n sobre S^{n-1}. Isto é, se existir uma retração de B^n sobre S^{n-1}, então existirá uma aplicação de B^n em B^n sem pontos fixos. Seja $r : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ uma aplicação retração. E define-se $m : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ por $m(x) = -x$ e também $i : S^{n-1} \longrightarrow B^n$ para ser a aplicação inclusão, $i(x) = x$. Então, para todo $x \in B^n$, $i \circ m \circ r(x) \neq x$. Se $x \in IntB^n$, então $[i \circ m \circ r(x) \in S^{n-1} \Longrightarrow i \circ m \circ r(x) \neq x]$. Se $x \in S^{n-1}$, então $r(x) = -x \neq x$. Assim, existe uma aplicação de B^n para B^n sem pontos fixos.

Afirmação 2: Se não existe aplicação retração de B^n sobre S^{n-1}, então B^n tem a propriedade do ponto fixo. Isto é, se existe uma aplicação de B^n em B^n sem pontos fixos, então existe uma aplicação retração de B^n sobre S^{n-1}. Seja $f : B^n \longrightarrow B^n$ não tendo pontos fixos. Pode-se construir uma aplicaçao retração r, assim: Defina-se $r : B^n \longrightarrow S^{n-1}$, por $r(x) = f(x) + g(x)(x - f(x))$ onde $g(x) \geq 1$, desde que $x \neq f(x)$ resultando em $f(x) \neq r(x)$ para todo x, e é escolhido de modo que $r(x) \in S^{n-1}$. Isto exige que:

$$\langle f(x) + g(x)(x - f(x)), f(x) + g(x)(x - f(x))\rangle = ||r(x)||^2 = 1$$

$$||x - f(x)||^2 g(x)^2 + 2\langle f(x), x - f(x)\rangle g(x) + ||f(x)||^2 - 1 = 0$$

Daí, pela formula quadrática e o fato que $||f(x)|| \leq 1$

$$g(x) = \frac{-\langle f(x), x - f(x)\rangle + \sqrt{\langle f(x), x - f(x)\rangle^2 - ||x - f(x)||^2(||f(x)||^2 - 1)}}{||x - f(x)||^2}$$

O valor de $g(x)$ depende do fato que $x \neq f(x)$ para todo $x \in B^n$. Precisa-se mostrar que, de fato, r é uma retração. Pela hipótese, $f(x)$ é contínua. Pois $g(x)$ é dependente dos valores de x e de $f(x)$, e este é uma variável escalar contínua. Sendo r uma combinação linear de funções contínuas, é então uma função contínua. Seja $x \in S^{n-1}$. Por definição r extende o vetor $x - f(x)$, baseado em $f(x)$, logo, este encontra-se na fronteira de B^n, em $r(x)$. Pois $[x, f(x)]$ é um segmento de reta nesta extensão. O Lema do Raio mostra que esta extensão encontrará a fronteira, exatamente em um ponto. Por definição, este é $r(x)$. Mas, $x \in \partial B^n$ está neste raio. Assim, $r(x) = x$. ■

Segue a prova de que os subconjuntos, compactos, convexos do $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade do ponto fixo.

Os subconjuntos compactos convexos do $\mathbb{R}^n$

Teorema 2.5.15. *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, convexo e tem interior não-vazio, então K é homeomorfo a uma bola fechada $B \subset \mathbb{R}^n$*

Demonstração: (i) Inicialmente, estabelecendo um homeomorfismo $\rho : \partial K \longrightarrow S$, entre a fronteira de K e uma esfera S em $\mathbb{R}^n$. Para simplificar a notação: admitindo que $0 \in intK$, por translação. Sejam $B = B[0, \epsilon]$ uma bola fechada de centro 0 contida em K e $S = (0, \epsilon)$ a fronteira de B.
Definindo $\rho : \partial K \longrightarrow S$, pondo $\rho(x) = \epsilon \frac{x}{|x|}$. Logo, ρ é uma aplicação contínua de ∂K em B. Para cada $x \in \partial K$, $\rho(x)$ é o ponto onde a semi-reta que sai de zero e contém x corta a esfera S. Para cada $u \in S$, como K é limitado e a semi-reta $\vec{Ou}$ é ilimitada, existem nela pontos que não pertencem a K.
Como a semi-reta $\vec{Ou}$ é um conjunto conexo, segue-se do teorema da alfandega que $\vec{Ou}$ contém algum ponto x da fronteira de K, ou seja, $\rho(x) = u$. Isto mostra que $\rho : K \longrightarrow S$ é sobrejetiva. Afirma-se que ρ é injetiva: de fato, supondo que existissem $x, y \in \partial K$, com $x \neq y$, e $\rho(x) = \rho(y)$. Então, x, e y pertenceriam a mesma semi-reta.
Esolhendo a notação de modo que seja $y \in [0, x]$, tem-se $y = (1 - \lambda)x$, com $0 < \lambda < 1$. A aplicação $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $h(z) = x + \lambda(z - x)$, é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ (homotetia de centro x e razão λ) tal que $h(0) = y$. Como K é convexo e $h(z) = (1-\lambda)x + \lambda z$, ve-se que $h(K) \subset K$. Segue-se que $h(B)$ é uma vizinhança de y, contida em K, o que contradiz ser $y \in \partial K$. Assim $\rho : \partial K \longrightarrow S$ é uma bijeção contínua. Como ∂K é um subconjunto fechado do compacto K, e portanto é compacto, segue que ρ é um homeomorfismo.
(ii) Definindo uma aplicação $f : K \longrightarrow B$ do seguinte modo: $f(0) = 0$ e, se $0 \neq y \in K$ então, como visto acima, a semi-reta $\vec{Oy}$ corta a fronteira ∂K num único ponto x. Tem-se portanto $y = t.x$, com $t \in (0, 1]$ e $x \in \partial K$ univocamente determinados. Pondo

$f(y) = t.\rho(x)$.

Mostrando que $f : K \longrightarrow B$ assim definida, é um homeomorfismo. Observando primeiramente que, se $I = [0, 1]$, o produto $I \times \partial K$ é compacto e portanto a sobrejeção contínua $m : I \times \partial K \longrightarrow K$, dada por $m(t, x) = t.x$, é uma aplicação quociente, e sendo $f \circ m : I \times \partial K \longrightarrow B$, dada por $(f \circ m)(t, x) = t.\rho(x)$, é contínua. Logo, f é contínua e bijetiva.

Segue-se que, $f : K \longrightarrow B$ é um homeomorfismo. ■

Em geral, para a demonstração do teorema do ponto fixo de Brouwer é necessário ferramentas da topologia algébrica, as quais estão alem do propósito deste trabalho. No exemplo a seguir verificaremos a validade do teorema do ponto fixo de Brouwer em ambientes de dimensão infinita. A continuidade é deveras importante em dimensão finita, mas não nos permite ir muito longe, quando os ambientes são de dimensão infinita.

Exemplo 2.5.16. Denotando por B a bola fehada e unitária de ℓ_2, considere a aplicação contínua

$$f : B \longrightarrow B, f(a = (a_j)_{j=1}^{\infty}) = \left((1 - \|a\|_2^2)^{1/2}, a_1, a_2, ...\right).$$

observando que

$$\|f(a)\|^2 = 1 - \|a\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 = 1$$

Verifica-se a seguir que f não tem ponto fixo. De fato, se existisse $b \in B$ tal que $f(b) = b$, teríamos $\|b\|_2 = \|f(b)\|_2 = 1$ e então

$$(b_1, b_2, ...) = b = f(b) = \left((1 - \|b\|_2^2)^{1/2}, b_1, b_2, ...\right) = (0, b_1, b_2, ...).$$

isto implica que $b = 0$, o que é uma contradição pois $\|b\|_2 = 1$. Concluímos que f mesmo sendo contínua, não tem ponto fixo.

O exemplo acima mostra que o teorema do ponto fixo de Brouwer é um resultado confinado a espaços euclidianos, muito embora, este resultado pode ser exportado para espaços de Banach, utilizando-se outras hipóteses, o que veremos nas próximas seções.

Comentário 1: O teorema da não-retração pode ser provado por meios de ferramentas da topologia algébrica, embora esta abordagem esteja além deste trabalho.

Comentário 2: Sobre a prova do torema do ponto fixo de Brouwer utilizando o teorema de Stokes, conforme [3]:

Para provar que uma aplicação tem pontos fixos, pode-se assumir que ela é suave, pois se uma aplicação não tem pontos fixos, então envolvendo esta com uma função suave de suporte suficientemente pequeno, esta produz uma função suave sem pontos fixos. Como na prova em duas dimensões e na n-dimensional, e até mesmo quando se usa conceitos de homologia, a *não-retração* é o ponto chave da demonstração. Assim, fica reduzido a provar que não existe retração suave f da bola B sobre sua fronteira ∂B. Se ω é a forma volume na fronteira então pelo teorema de Stokes, onde se utilizam conceitos de *formas diferenciais*, temos:

$$0 < \int_{\partial B} \omega = \int_{\partial B} f^*(\omega) = \int_B df^* = \int_B f^*(d\omega) = \int_B f^*(0) = 0$$

dando uma contradição.

É possível, utilizando Stone-Weierstrass, aproximar funções contínuas por aplicações C^1, ou se a função não é C^1 pode ser aproximada utilizando (S-W). Mas, o resultado seguinte é para aplicações suaves.

Teorema 2.5.17. *Toda aplicação C^1, $f : B^n \longrightarrow B^n$ da bola n-dimensional em si mesma, tem ao menos um ponto fixo.*

Demonstração Suponha que $f : B^n \longrightarrow B^n$ não tenha pontos fixos. Então define-se uma aplicação $F : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ da bola para sua fronteira, atribuindo a cada ponto $x \in B^n$, o ponto de interseção do raio que de $f(x)$, através de x, com a esfera S^{n-1}. A formula para F,

$$F(x) = x + \left[\sqrt{1 - ||x||^2 + \left\langle x, \frac{x - f(x)}{||x - f(x)||} \right\rangle^2} - \left\langle x, \frac{x - f(x)}{||x - f(x)||} \right\rangle \right] \frac{x - f(x)}{||x - f(x)||}.$$

mostra que F é suave, e além disso, atua na fronteira da bola como a identidade, $F(x) = x$, para todo $x \in S^{n-1}$. F **é uma retração** Seja $F^1, ..., F^n$ as componentes de F. E diferenciando a seguinte relação que é válida para todo $x \in B^n$.

$$\sum_{i=1}^{n} (F^i(x))^2 = 1,$$

produzindo,

$$2\sum_{i=1}^{n} F^i(dF^i) = 2\sum_{i,j=1}^{n}(F^i\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j})dx^j = 0,$$

e portanto para cada índice j

$$\sum_{i=1}^{n} F^i(x)\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} = 0.$$

Além disso, o sistema de equações

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha^i(x)\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} = 0$$

tem uma solução não trivial

$$(\alpha^1, ..., \alpha^n) = (F^1(x), ..., F^n(x)) \neq (0, ..., 0).$$

Daí,o determinante da matriz se torna zero $det(\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j}) = 0$. Agora, aplica-se esta observação de formas diferenciais:

$$\omega^{n-1} = F^1 \wedge dF^2 \wedge ... \wedge dF^n,$$

E, concluí-se que esta diferencial se torna zero:

$$d\omega^{n-1} = dF^1 \wedge dF^2 \wedge ... \wedge dF^n = det(\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j})dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = 0$$

Pelo teorema de Stokes, a integral da forma ω^{n-1} sobre a fronteira S^{n-1} de B^n é igual a zero.

$$0 = \int_{B^n} d\omega^{n-1} = \int_{S^{n-1}} \omega^{n-1}.$$

Por outro lado, F atua na fronteira da esfera S^{n-1} como a identidade; por isso

$$\omega^{n-1}|_{S^{n-1}} = x^1dx^2 \wedge ... \wedge dx^n|_{S^{n-1}}.$$

Isto implica que,

$$0 = \int_{S^{n-1}} x^1dx^2 \wedge ... \wedge dx^n = \int_{B^n} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = vol(B^n),$$

e chega-se a uma contradição. ■

2.6 O teorema do ponto fixo de Schauder-Tychonoff

Este teorema é uma extensão do Teorema do ponto fixo de Brouwer para uma situação mais geral. Para um melhor entendimento iniciaremos com os enunciados dos teoremas de ponto fixo devido a Brouwer, Schauder e Tychonoff. A prova de Schauder e Tychonoff pode ser vista em [4].

Teorema 2.6.1 (**Teorema do ponto fixo de Brouwer**). - *Toda aplicação contínua da bola unitária e fechada de $\mathbb{R}^n$ em si mesma, tem um ponto fixo.*

Teorema 2.6.2 (**Teorema do ponto fixo de Schauder**). - *Seja C um subconjunto, não-vazio, fechado, convexo, limitado de um espaço de Banach X. Então, toda aplicação contínua, compacta $T : C \longrightarrow C$ tem um ponto fixo.*

Teorema 2.6.3 (**Teorema do ponto fixo de Tychonoff**). - *Seja C um subconjunto, não-vazio, compacto, convexo de um espaço topológico linear X, localmente convexo e $T : C \longrightarrow C$ uma aplicação contínua. Então, T tem um ponto fixo.*

um espaço topológico linear é um espaço vetorial topológico cujas estruturas algébricas e topológicas são compatíveis.

Lema 2.6.4. *Seja K um não-vazio, compacto, convexo subconjunto de um espaço de Banach real de dimensão finita. Então, toda função contínua $f : K \longrightarrow K$ tem um ponto fixo $\overline{x} \in K$.*

Demonstração: Desde que, X é homeomórfico ao $\mathbb{R}^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, assumindo sem perda de generalidade, que $X = \mathbb{R}^n$. Também, assume-se $K \subset D^n$. Para todo $x \in D^n$, seja $p(x) \in K$ o único ponto da norma do mínimo do conjunto $x - K$. Além disso, p é contínua em D^n . De fato, dado $x, x_n \in D^n$, com $x_n \to x$,

$$\|x - p(x)\| \leq \|x - p(x_n)\| \leq \|x - x_n\| + inf_{k \in K} \|x_n - k\| \longrightarrow \|x - p(x)\| .$$

quando $n \to \infty$. Assim, $x - p(x_n)$ é uma sequência minimizada quando $x_n \to x$ em $x - K$ e isto implica a convergência de $p(x_n) \to p(x)$. Defina agora, $g(x) = f(p(x))$. Então g aplica continuamente D sobre K. Do teorema do ponto fixo de Brouwer, existe um $\overline{x} \in K$ tal que $g(\overline{x}) = \overline{x} = f(\overline{x})$. ■

Como imediata aplicação, considere o exemplo 1 de capítulo 2. Se existe um conjunto compacto, convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $h(K) \subset K$, então h tem um ponto fixo $\overline{x} \in K$

Outras aplicações bastante diretas são o teorema de Frobenius e o teorema fundamental da Álgebra.

Teorema 2.6.5 (Frobenius). *Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz $n \times x$ com entradas estritamente positiva, então $\boldsymbol{A}$ tem autovalores estritamente positivos.*

Demonstração: A matriz $\mathbf{A}$ pode ser vista como uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$. Introduzindo o conjunto compacto convexo

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, x_j \geq 0, \ para \ \ j = 1, ..., n \right\}.$$

e defina $f(x) = \mathbf{A}x / \|\mathbf{A}x\|_1$ (onde $\|\cdot\|_1$ é a norma euclideana 1). Observe que se $x \in K$ então toda as entradas de x são não negativas e ao menos uma é estritamente positiva, daí, todas as entradas de $\mathbf{A}x$ são estritamente positivas. Então f é uma função contínua aplicando K em K e portato, existe $\overline{x} \in K$ tal que $\mathbf{A}\overline{x} = \|\mathbf{A}\overline{x}\|_1 \overline{x}$. ■

Partições da unidade: - Suponha que $V_1, ..., V_n$ são subconjuntos abertos de um espaço de Hausdorff X, localmente compacto, $K \subset X$ é compacto, e

$$K \subset V_1 \cup ... \cup V_n.$$

Então, para todo $j = 1, ..., n$ existe $\varphi_j \in C(X), 0 \leq \varphi_j \leq 1$ com suporte em V_j tal que

$$\varphi_1(x) + ... + \varphi_n(x) = 1, \quad para \ \ todo \ \ x \in K.$$

A coleção $\varphi_1, ..., \varphi_n$ é dita ser uma *partição da unidade* para K, subordinada a cobertura aberta $\{V_1, ..., V_n\}$. A existência de partições da unidade, é consequência direta do Lema de Urysohn, que de maneira geral afirma que dados A, B dois subconjuntos fechados e disjuntos de um espaço topológico X, existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ e $f(B) \subseteq \{1\}$. Frequentemente, é interessante encontrar partições da unidade de um conjunto compacto $K \subset X$, cujos membros, são funções contínuas definidas em K. Claramente, neste caso, X não precisa ser localmente compacto.

Teorema 2.6.6 (Schauder-Tychonoff). *Seja X um espaço localmente convexo, $K \subset X$, não-vazio e convexo, $K_0 \subset K$, e K_0 compacto. Dado uma aplicação contínua $f : K \longrightarrow K_0$. Então, existe $\overline{x} \in K_0$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.*

Demonstração: Denote por B uma base local para a topologia em X gerada pela família separável de seminormas de P em X. Dado $U \in B$, da compacidade de K_0, existe

$x_1, ..., x_n \in K_0$ tal que

$$K_0 \subset \bigcup_{j=1}^{n}(x_j + U),$$

Seja $\varphi_1, ..., \varphi_n \in C(K_0)$ uma partição de unidade de K_0 subordinada a cobertura aberta $\{x_j + U\}$, defina

$$f_U(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(f(x))x_j, \qquad para \;\; todo \;\; x \in K$$

então,

$$f_u(K) \subset K_u := co(\{x_1, ..., x_n\}) \subset K,$$

o Lema 2.6.4, assegura a existência de $x_U \in K_U$ tal que $f_U(x_U) = x_U$. Então,

$$x_U - f(x_U) = f_U(x_U) - f(x_U) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(f(x_U))(x_j - f(x_U)) \in U \tag{2.2}$$

para $\varphi_j(f(x_U)) = 0$ quando $x_j - f(x_U) \notin U$, apelando novamente para a compacidade de K_0, existe

$$\overline{x} \in \bigcap_{W \in B} \overline{\{f(x_U) : U \in B, U \subset W\}} \subset K_0, \tag{2.3}$$

Selecione agora, $p \in P$ e $\epsilon > 0$, e seja

$$V = \{x \in X : p(x) < \epsilon\} \in B,$$

Desde que f é contínua em K, existe $W \in B, W \subset V$, tal que

$$f(x) - f(\overline{x}) \in V$$

quando $x - \overline{x} \in 2W, x \in K$. Além disso, por (2.3), existe $U \in B, U \subset W$, tal que

$$\overline{x} - f(x_U) \in W \subset V, \tag{2.4}$$

Coletando (2.2) e (2.4), obtem-se

$$x_U - \overline{x} = x_U - f(x_U) + f(x_U) - \overline{x} \in U + W \subset W + W = 2W,$$

o que produz

$$f(x_U) - f(\overline{x}) \in V, \tag{2.5}$$

Por isso, (2.4) - (2.5) acarreta

$$p(\overline{x} - f(\overline{x})) \leq p(\overline{x} - f(x_U)) + p(f(x_U) - f(\overline{x})) < 2\epsilon.$$

Sendo p e ϵ arbitrário, conclui-se que $p(\overline{x} - f(\overline{x})) = 0$ para todo $p \in P$, o que implica na igualdade $f(\overline{x}) = \overline{x}$. ■

2.7 O teorema de Markov-Kakutani

O seguinte teorema refere-se a pontos fixos comuns de uma família de aplicações lineares comutativas.

Teorema 2.7.1 (Markov-Kakutani). *Seja X um espaço localmente convexo, e seja $K \subset X$ um conjunto não-vazio, compacto, convexo. Assumindo que G é uma família de operadores lineares e limitados de X em X tal que:*
(a) G é abeliano, isto é, $TS = ST$, para todo $S, T \in G$;
(b) $TK \subset K$ para todo $T \in G$.
Então existe, $\overline{x} \in K$ tal que $T\overline{x} = \overline{x}$ para todo $T \in G$.

Demonstração: *Para qualquer $T \in G$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$, defina o operador*

$$T_n = \frac{\mathbb{I} + T + ... + T^n}{n+1}$$

Observando que (b) e a convexidade de K implicam que

$$T_n K \subset K.$$

Dado $T^{(1)}, ..., T^{(k)} \in G$ e $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\bigcap_{j=1}^{k} T_{n_j}^{(j)} \neq \emptyset.$$

De fato, de (a) para qualquer $T, S \in G$, e qualquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$T_n K \cap S_m K \supset T_n S_m K - S_m T_n K \neq \emptyset$$

Envolvendo a compacidade de K, a propriedade da interseção finita fornece

$$F = \bigcap_{T \in G, n \in \mathbb{N}} T_n K \neq \emptyset$$

Afirma-se que, todo $x \in F$, é ponto fixo de todo $T \in G$. Seja então, $\overline{x} \in F$, e qualquer $T \in G$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $y = y(n) \in K$ tal que $\overline{x} = T_n y$. Por isso,

$$T\overline{x} - \overline{x} = \frac{Ty + T^2 y + ... + T^{n+1}}{n+1} - \frac{y + Ty + ... + T^n y}{n+1} = \frac{T^{n+1}y - y}{n+1} \in \frac{1}{n+1}(K - K).$$

Assim,

$$T\overline{x} - \overline{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1}(K - K).$$

O conjunto $K - K$ *é claramente compacto, pois é a imagem de* $K \times K$ *sob a aplicação contínua* $\Phi(x_1, x_2) = x_1 - x_2$*. Seja então,* p *a seminorma em* X*. Então para qualquer* $\epsilon > 0$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{1}{n+1}(K - K) \subset \{x \in X : p(x) < \epsilon\}.$$

Conclui-se que $p\,(T\overline{x} - \overline{x}) = 0$*, para toda seminorma em* X*, o que acarreta a igualdade* $T\overline{x} = \overline{x}$*.* $\blacksquare$

Capítulo 3

ANÁLISE COMPARATIVA

Neste capítulo iremos comparar e analisar os teoremas do ponto fixo de Banach e de Brouwer em seus aspectos mais gerais, os assuntos iniciais que embasam esta abordagem estão contidos na capítulo 2, especificamente na seção 2.1 e na seção 2.5 , pois contém os enunciados clássicos destes teoremas.

Quadro preliminar comparativo:

item	**BROUWER (1910)**	**BANACH (1922)**
1	f é uma aplicação contínua	f é uma aplicação contração (Lipschitziana)
2	X é um espaço topológico. Mais especificamente, X é um subconjunto compacto, convexo do R^n	X é um espaço métrico completo
3	A prova clássica padrão é não-construtiva	A prova padrão é essencialmente construtiva. Exibe um método para localizar o ponto fixo.
4	teorema de existência	teorema de existência e unicidade

Inicialmente se observa uma diferença na natureza das demonstrações destes dois teoremas clássicos, sendo a de Brouwer de forma indireta ou por equivalencias e a de Banach, essencialmente construtiva.

Um outro aspecto observado foi o ambiente comun em que os teoremas foram concebidos, a saber: o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ ou seja, foi considerado espaços de dimensão finita e também foram consideradas funções f ou aplicações onde o domínio e a imagem são os mesmos, já que em dimensão infinita o domínio e a imagem de uma aplicação podem ter diferentes topologias.

E em Brouwer o subconjunto X do $\mathbb{R}^n$ considerado é um espaço topológico, no caso, a bola unitária B^n e f uma função contínua, e em Banach o subconjunto X considerado é um espaço métrico completo e f uma contração que garante a existência de um único ponto fixo.

A métrica em X utilizada no teorema de Banach é crucial na hipotése de f ser uma contração, e muito embora, a bola unitária no espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ ser um espaço métrico, e a topologia métrica determinar a continuidade da função f e esta garantir a existência de pelo menos um ponto fixo, a ênfase em Brouwer é na característica topológica da bola unitária que por sua vez é contrátil.

Em função desta análise preliminar apresentada no quadro, é imediato verificar que o aspecto em que há um ponto mais dissonante entre os teorema é exatamente a sua demonstração, e aí reside a principal motivação para este trabalho, por duas razões bem conhecidas historicamente: A natureza não construtiva do teorema do ponto fixo de Brouwer; e o fato da prova padrão do teorema do ponto fixo de Banach, ser definitivamente construtiva.

Um teorema de ponto fixo, em geral, é conhecido como um resultado de existência real, ou seja, como um princípio de existência em matemática, e estes são basicamente de dois tipos: a saber, de natureza construtiva em que a demonstração da existência de um determinado objeto matemático consiste em exibir um algoritmo que permite pelo menos em tese, calculá-lo. E o outro tipo, é de natureza conceitual, onde se garante a existência e eventualmente se caracteriza o objeto, mas não fornecendo nenhum método de obtê-lo. A versão classica do teorema de Brouwer se encaixa, pelo menos até o momento, neste ultimo tipo, e por isto muitos estudiosos afirmam que este teorema não pode ser provado construtivamente. Mas, desde que, suas muitas formulações equivalentes ou extensões podem mostrar a existência de soluções para muitos problemas em matemática pura e aplicada se empreendeu uma busca no sentido de se prová-lo diretamente.

As idéias sobre construtividade ou provas construtivas, surgem com Leopold Kronecker (1823-1891), pois este acreditava que a prova da existência de um ente matemático deveria se basear em um algoritmo finito que permitisse a sua construção, e isto deu impulso para a formação da escola intuicionista, a qual teve Brouwer como um de seus expoentes, em oposição à esola formalista, fundada por David Hilbert.

De maneira breve e objetivando entender neste texto o termo - matemática construtiva, afirma-se que: Primeiro, são matemáticas feitas no ambito da matemática construtiva proposta por Bishop [6], que é essencialmente a matemática feita com o uso da lógica intuicionista e escolhas dependentes.

Segundo, o uso da lógica intuicionista garante que as provas prosseguem de maneira que preservem o significado computacional, em particular, uma prova construtiva de existência de $P(x)$ incorpora um algorítmo para a construção de um objeto x e um algoritmo para verificação de que $P(x)$ se mantém. Desta forma, matemáticas construtivas podem ser vistas como um alto nível de linguagem de programação. O que contrastaria com as demonstrações aceitas de forma indireta de um dado primeiro teorema, e que são aceitas como válidas após verificar a demonstração de um segundo teorema, implicando assim em uma formulação equivalente.

O teorema do ponto fixo de Brouwer em sua versão original ou clássica, até o momento não tem uma prova direta. Mas em versões cuja idéia foi de utilizar o argumento da *aproximação de pontos fixos*, tem surgido várias provas, este argumento foi defendido pelo próprio Brouwer em 1952, conforme [14]. No artigo de 1976, R. B Kellogg e etc. [9] apresenta a prova construtiva do teorema do ponto fixo de Brouwer que resulta em um algoritmo ou metódo para se obter um ponto fixo, chamado de *método da continuação*, no qual em linhas gerais se considera: D um conjunto aberto, convexo e limitado em $\mathbb{R}^n$, e seja $F : \bar{D} \longrightarrow \bar{D}$ contínua. O teorema do ponto fixo de Brouwer garante a existência de um ponto fixo, um ponto x tal que $x = F(x)$.

Para esta prova recente, foi observado que a técnica utilizada é a de $\epsilon - pontos\ fixos$, e é neste contexto que encontramos uma equivalencia nas demonstrações dos teoremas de Brouwer e de Banach: A utilização de $\epsilon - pontos\ fixos$, um argumento defendido por Brouwer como tendo significado intuicionista.

Nos teoremas de Kellogg , a demonstração consiste em provar que existe ϵ-aproximação no conjunto, a qual nos leva a encontrar um ponto fixo, e em caso contrário podemos melhorar esta aproximação o quanto desejarmos até que se encontre o ponto desejado, isto permite construir um algoritmo que levará a encontrar o ponto fixo.

Em Kellogg, observa-se que ao utilizar todas as hipotéses clássicas do teorema de Brouwer, juntamente com o teorema da não retração, e introduzindo a hipótese da diferenciabilidade de uma aplicação, chega-se a uma situação em que se utiliza o argumento intuicionista, para aproximação de pontos fixos. O qual é muito semelhante ao argumento utilizado no teorema de Banach, e que resultou em um método, chamado de *método das aproximações sucessivas*.

O argumento considerado por Brouwer como o único tendo significado para os intuicionistas consiste na validade deste teorema.

Teorema 3.0.2. *Seja M um espaço métrico. E supondo que f seja uma aplicação contínua de um subconjunto fechado de M em um subconjunto compacto de M e que para cada $\epsilon > 0$, deve existir $x(\epsilon)$ tal que:*

$$d(f(x(\epsilon)), x(\epsilon)) < \epsilon, \tag{3.1}$$

Então, f tem um ponto fixo.

Demonstração: Seja X um subconjunto fechado de U e seja Y uma subconjunto compacto de U e seja $T : X \longrightarrow Y$, logo $T(x(\epsilon))$ está em Y.
Pode-se assumir que para alguma sequência $\epsilon_n \longrightarrow 0$ tenhamos $T(x(\epsilon_n)) \longrightarrow y \in Y$ e por $d(T(x(\epsilon), x(\epsilon)) < \epsilon$, $x(\epsilon_n) \longrightarrow y$; tal que $y \in X$ Assim, $T(y)$ está definido e $T(y) = T(\lim x(\epsilon_n)) = \lim T(x(\epsilon_n)) = y$. ■

Definição 3.0.3. Os $x(\epsilon)$ satisfazendo (3.1) são chamados de ϵ-pontos fixos para f.

Enunciaremos os teoremas e lema devido a R. B Kellogg e etc., sem demonstração, no entanto, a prova está detalhada em [9], e esta é, uma prova construtiva do Teorema do ponto fixo de Brouwer, a qual serve com base para a nossa abordagem comparativa.

Teorema 3.0.4. *Para $x^0 \in U \cap \partial D$. O conjunto $H^{-1}(x^0) \cap D$ consiste de um número de componentes conexas, cada uma das quais é uma imagem difeomórfica C^1 de um círculo ou de um intervalo aberto.*

Lema 3.0.5. *Cada componente conexa de $H^{-1}(x^0) \cap D$ é um subconjunto fechado de $D \setminus C$ na topologia relativa de $D \setminus C$.*

O próximo teorema mostra a existência de um ponto fixo e dá a base para o método numérico de Kellogg.

Teorema 3.0.6. *Seja $x^0 \in R$, e seja s_j uma sequência com $s_j \longrightarrow L(x^0)$. Então $x(s_j, x^0)$ contém uma subsequência que converge para um ponto fixo de F, logo C não é vazio. Além disso, para $\epsilon > 0$ existe um $s(\epsilon, x^0) < L(x^0)$ tal que $s(\epsilon, x^0) < s < L(x^0)$, $dist(x(s, x^0), C) < \epsilon$.*

A partir destas provas, claramente o teorema do ponto fixo de Brouwer fornece agora um método para se obter um ponto fixo, tal qual o faz, o teorema do ponto fixo de Banach.

Capítulo 4

APLICAÇÕES DE TEOREMAS DO PONTO FIXO

Ao longo deste capítulo iremos tratar de algumas aplicações de teoremas de ponto fixo, como ferramentas importantes para provar teoremas da Análise, e da Teoria dos Jogos.

4.1 O teorema da função ímplícita

Diferenciabilidade Fréchet - Sejam X, Y espaços de Banach (real ou complexos), $U \subset X$, U aberto e $x_0 \in X$ e $f : U \longrightarrow Y$

Definição 4.1.1. f é Fréchet-diferenciável em x_0 e existe $T \in L(X, Y)$ e $\sigma : X \longrightarrow Y$, com $\frac{\|\sigma(x)\|_Y}{\|x\|_X} \longrightarrow 0$ quando uniformemente $\|x\|_X \longrightarrow 0$ tal que

$$f(x) - f(x_0) = T(x - x_0) + \sigma(x - x_0), \quad \textit{para todo } x \in X.$$

O operador T é chamado de a derivada de Fréchet de f em x_0, e é denotado por $f'(x_0)$. A função f e dita ser Fréchet-diferenciável em U se é Fréchet-diferenciável em todo $x_0 \in U$. É imediato verificar que a derivada de Fréchet em um ponto, se existe, é única.

Lema 4.1.2. *Sejam X, Y espaços de Banach, e seja $f : B_X(0, r) \longrightarrow Y$ Fréchet-diferenciável e $\|f'(x)\|_{L(X,Y)} \leq \lambda$ para todo $x \in B_X(0, r)$ e algum $\lambda \geq 0$. Então, f é Lipschitz contínua com constante de Lipschitz menor que ou igual a λ.*

Demonstração: Seja $x_1, x_2 \in B_X(0, r)$. Pelo teorema de Hahn-Banach, existe $\Lambda \in Y'$, onde Y' é o espaço dual de Y, de norma unitária tal que

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y = |\Lambda(f(x_1) - f(x_2))|,$$

Para $t \in [0, 1]$ o conjunto

$$\Phi(t) = \Lambda f(tx_1 + (1 - t)x_2).$$

Aplicando o teorema do valor médio de Lagrange para Φ, existe $\tau \in (0, 1)$ tal que $|\Lambda f(x_1) - \Lambda f(x_2)| = |\Phi(1) - \Phi(0)| \leq |\Phi'(\tau)| = |\Lambda f'(\tau x_1 + (1 - \tau)x_2)(x_1 - x_2)|$ Daí,

$$\|f(x_1) - f(x_2\|_Y \leq \|f'(\tau x_1 + (1 - \tau)x_2)(x_1 - x_2)\| \leq \lambda \|x_1 - x_2\|_X. \quad \blacksquare$$

Dado dois espaços de Banach X e Y, o espaço vetorial $X \times Y$ é um espaço de Banach com qualquer das normas euclideanas (equivalentes). $\|(x,y)\|_p = (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{1/p}$, $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$, $(p \geq 1)$. Na sequência, sempre se usará a ∞-norma, de modo que

$$B_{X\times Y}((x_0,y_0),r) = B_X(x_0,r) \times B_Y(y_0,r)$$

Para espaços de Banach X, Y, Z, dado $T \in L(X,Z)$ e $S \in L(Y,Z)$, o operador $R : X \times Y \longrightarrow Z$ definido por

$$R(x,y) = Tx + Sy$$

pertence a $L(X \times Y, Z)$. Reciprocamente, qualquer $R \in L(X \times Y, Z)$, tem a representação acima com $Tx = R(x,0)$ e $Sy = R(0,y)$. É imediato ver que, $L(X,Z) \times L(Y,Z)$ *e* $L(X \times Y, Z)$ são espaços de Banach isomórficos. Dado então, $f : U \subset X \times Y \longrightarrow Z$, onde U é aberto e f é Fréchet-diferenciável em $u_0 = (x_0, y_0) \in U$, uma verificação fácil é que as derivadas parciais $D_x f(u_0)$, e $D_y f(u_0)$ existem, (que é a derivada de Fréchet de $f(\cdot, y_0) : X \longrightarrow Z$ em x_0 e de $f(x_0, \cdot) : Y \longrightarrow Z$ em y_0 respectivamente), e

$$f'(u_0)(x,y) = D_x f(u_0)(x) + D_y f(u_0)(y)$$

Teorema 4.1.3 (Dini). *Sejam X, Y, Z espaços de Banach, $U \subset X \times Y$ um conjunto aberto, $u_0 = (x_0, y_0) \in U$, $F : U \longrightarrow Z$, tal que*
(a) F é contínua e $F(u_0) = 0$;
(b) $D_y F(u)$ existe para todo $u = (x,y) \in U$;
(c) $D_y F$ é contínua em u_0 e $D_y F(u_0)$ é invertível.
Então existe $\alpha, \beta > 0$ para o qual $\overline{B}_X(x_0,\alpha) \times \overline{B}_Y(y_0,\beta) \subset U$ e a única função contínua $f : \overline{B}_X(x_0,\alpha) \longrightarrow \overline{B}_Y(y_0,\beta)$ tal que a relação

$$F(x,y) = 0 \iff y = f(x)$$

É válido para todo $(x,y) \in \overline{B}_X(x_0,\alpha) \times \overline{B}_Y(y_0,\beta)$.

Demonstração Sem perda de generalidade, assume-se $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Defina

$$\Phi(x,y) = y - [D_y F(0,0)]^{-1} F(x,y), \quad (x,y) \in U$$

Por (a) Φ é contínua de U em Y. Desde que,

$$[D_y \Phi(0,0)]^{-1} (D_y \Phi(0,0) - D_y \Phi(x,y)),$$

por (c) existe $\gamma > 0$ pequeno o suficiente tal que

$$\|D_y\Phi(x,y)\|_{L(Y)} \leq \frac{1}{2}, \quad \textit{para todo } (x,y) \in B_X(0,\gamma) \times B_Y(0,\gamma) \subset U.$$

Assim o Lema 3.1.2 e a continuidade de Φ acarreta a desigualdade

$$\|\Phi(x,y_1) - \Phi(x,y_2)\|_Y \leq \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|_Y\,, \quad \|x\|_X\,, \|y_1\|_Y\,, \|y_2\|_Y \leq \beta < \gamma.$$

Usando agora (a), encontra-se $0 < \alpha < \beta$ tal que

$$\|\Phi(x,0)\|_Y \leq \frac{\beta}{2}, \quad \|x\|_X \leq \alpha.$$

Então para, $\|x\|_X \leq \alpha$ e $\|y\|_Y \leq \beta$,

$$\|\Phi(x,y)\|_Y \leq \|\Phi(x,0)\|_Y + \|\Phi(x,y) - \Phi(x,0)\|_Y \leq \frac{1}{2}(\beta + \|y\|_Y) \leq \beta.$$

Portanto, a aplicação contínua $\Phi : \overline{B}_X(0,\alpha) \times \overline{B}_Y(0,\beta) \longrightarrow \overline{B}_Y(0,\beta)$ é uma contração em $\overline{B}_Y(0,\beta)$ uniformemente em $\overline{B}_X(0,\alpha)$. Do Corolário 2.1.4, existe uma única função contínua $f : \overline{B}_X(0,\alpha) \longrightarrow \overline{B}_Y(0,\beta)$ tal que $\Phi(x,f(x)) = f(x)$, isto é $F(x,f(x)) = 0$. ■

É obvio, que a tese se mantém ao se substituir na hipótese as bolas fechadas por bolas abertas.

Corolário 4.1.4. *Seja a hipótese do Teorema 4.1.3. Se, em adição F é Fréchet-diferenciável em $u_0 = (x_0, y_0)$, então f é Fréchet-difrenciável em x_0, e*

$$f'(x_0) = -\left[D_y F(u_0)\right]^{-1} D_x F(u_0),$$

Demonstração: Aplicando a definição da diferenciabilidade Fréchet para $F(x,f(x))$ em um ponto $(x_0, f(x_0))$, obtem-se

$$0 = D_x F(u_0)(x - x_0) + D_y F(u_0)(f(x) - f(x_0)) + \sigma(x - x_0, f(x) - f(x_0)),$$

Observe que a relação acima implica que f é localmente Lipschitz em x_0. Por isso,

$$\frac{\|\sigma(x - x_0, f(x) - f(x_0))\|_Z}{\|x - x_0\|_X} \longrightarrow 0,$$

uniformemente quando $\|x - x_0\|_X \longrightarrow 0$ o que produz a tese. ■

Uma consequência do Teorema 4.1.3, é o teorema da função inversa.

Teorema 4.1.5. *Sejam X, Y espaços de Banach, $V \subset Y$ e $y_0 \in V$. Seja $g : V \longrightarrow X$ Fréchet-diferenciável em uma vizinhança de y_0, $g(y_0) = x_0$, g' é contínua em y_0 e $g'(y_0)$ é invertível. Então existem $\alpha, \beta > 0$ e uma única função contínua $f : B_X(x_0, \alpha) \longrightarrow B_Y(y_0, \beta)$ tal que $x = g(f(x))$ para todo $x \in B_X(x_0, \alpha)$. Além disso, f é Fréchet-diferenciável em x_0 e $f'(x_0) = g(y_0)^{-1}$.*

Demonstração: Aplicando o Teorema 4.1.3 e o subsequente corolário para $F(x, y) = g(y) - x$, guardando em mente as considerações feitas antes do teorema de Dini. ■

O teorema de Dini, pode ser explorado para fornecer uma prova alternativa do fato bem conhecido, no qual o conjunto de operadores lineares, limitados e invertíveis entre espaços de Banach é aberto.

Teorema 4.1.6. *Sejam X, Y espaços de Banach, e seja $L_{reg}(X, Y) \subset L(X, Y)$ o conjunto de operadores lineares, limitados e invertíveis de X sobre Y. Então $L_{reg}(X, Y)$ é aberto em $L(X, Y)$. Além disso, a aplicação $T \longrightarrow T^{-1}$ é contínua.*

Demonstração: Seja $F : L(X, Y) \times L(Y, X) \longrightarrow L(X)$ definda por $F(T, S) = \mathbb{I}_Y - TS$. Seja $T_0 \in L_{reg}(X, Y)$, e seja $S_0 = T_0^{-1}$. Observando que $D_S(T, S) = -TR$. Em particular, $D_S(T_0, S_0) = -T_0R$. Então, a hipótese do Teorema 4.1.3, estã satisfeita; portanto, existe uma função contínua $f : B_{L(X,Y)}(T_0, \alpha) \longrightarrow L(X, Y)$ tal que $\mathbb{I}_Y - Tf(T) = 0$, que é, $\mathbb{I}_Y = Tf(T)$. Analogamente, se pode encontrar uma função contínua $f_1 : B_{L(X,Y)}(T_0, \alpha) \longrightarrow L(X, Y)$ (talvez para um pequeno α) tal que $f_1(T)T = \mathbb{I}_X$. E é imediato verificar que $f \equiv f_1$, que é, $f(T) = T^{-1}$ para todo $T \in B_{L(X,Y)}(T_0, \alpha)$. ■

Localização de Zeros - Sejam X, Y espaços de Banach e $f : B_X(x_0, r) \longrightarrow Y$ uma aplicação Fréchet-diferenciável. Afim de encontrar um zero de f, a idéia é aplicar um método iterativo, construindo uma sequência x_n (iniciando de x_0) de modo que x_{n+1} é o zero da tangente de f em x_n. Assumindo que $f'(x)^{-1} \in L(Y, X)$ em $B_X(x_0, r)$, tem um

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n), \tag{4.1}$$

fornecendo $x_n \in B_X(x_0, r)$ para todo n. Este procedimento é conhecido como o *método de Newton*. Contudo, na prática, poder ser complicado inverter f' em cada passo. Assim pode se tentar uma modificação

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_0)^{-1} f(x_n). \tag{4.2}$$

Claramente, usando (4.2) em lugar de (4.1), uma menor taxa de convergência é esperada.

O próximo resultado é baseado em (4.2).

Teorema 4.1.7. *Sejam X, Y espaços de Banach, e $f : B_X(x_0, r) \longrightarrow Y$, uma aplicação Fréchet-diferenciável. Assuma que, para algum $\lambda > 0$,*
(a) $f'(x_0)$ é invertível;
(b) $\|f'(x) - f'(x_0)\|_{L(X,Y)} \leq \lambda \|x - x_0\|_X$, para todo $x \in B_X(x_0, r)$;
(c) $\mu := 4\lambda \|f'(x_0)^{-1}\|^2_{L(X,Y)} \|f(x_0)\|_Y \leq 1$;
(d) $s := 2\|f'(x_0)^{-1}\|_{L(x,Y)} \|f(x_0)\|_Y < r$.
Então, existe um único $\overline{x} \in \overline{B}_X(x_0, s)$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.

Demonstração: Defina $\Phi : \overline{B}_X(x_0, s) \longrightarrow X$ como $\Phi(x) = x - f'(x_0)^{-1} f(x)$. Então,

$$\|\Phi'(x)\|_{L(X)} \leq \left\|f'(x_0)^{-1}\right\|_{L(Y,X)} \|f'(x_0) - f'(x)\|_{L(X,Y)} \leq \lambda s \left\|f'(x_0)^{-1}\right\|_{L(Y,X)} = \frac{\mu}{2}.$$

Por isso Φ é Lipschitz, com contante de Lipschitz menor que ou igual a $\mu/2 \leq 1/2$. Além disso,

$$\|\Phi(x_0) - x_0\|_X \leq \left\|f'(x_0)^{-1}\right\|_{L(Y,X)} \|f(x_0)\|_Y = \frac{s}{2}$$

que por sua vez dá

$$\|\Phi(x) - x_0\|_X \leq \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\|_X + \|\Phi(x_0) - x_0\|_X \leq \frac{\mu}{2} \|x - x_0\|_X + \frac{s}{2} \leq s.$$

Logo , Φ é uma contração em $\overline{B}_X(x_0, s)$. Do princípio da contração, existe um único $\overline{x} \in \overline{B}_X(x_0, s)$ tal que $\Phi(\overline{x}) = \overline{x}$, o que implica em $f(\overline{x}) = 0$. Em relação a velocidade da convergência de x_n para $\overline{x}$, em virtude da observação após o Teorema 2.1.2, obtem-se

$$\|x_n - \overline{x}\|_X \leq \frac{s\mu^n}{(2-\mu)2^n}.$$

Também, desde que

$$x_{n+1} - \overline{x} = f'(x_0)^{-1}(f'(x_0 - f'(x_n))(x_n - \overline{x}) + o(\|x_n - \overline{z}\|_X)$$

segue que,

$$\|x_{n+1} - \overline{x}\|_X = \frac{\mu}{2} \|x_n - \overline{x}\|_X + o(\|x_n - \overline{z}\|_X)$$

como consequência,

$$\|x_{n+1} - \overline{x}\|_X \leq c \|x_n - \overline{x}\|_X$$

para algum $c \in (0,1)$, e para todo n grande. Isto é referido como, a convergência linear do método. $\blacksquare$

Observação: Se fizer $\mu < 2$ e se for assumido que f' e Lipschitz contínua em $B_X(x_0, r)$ com constante de Lipschitz λ, pode-se obter a tese com uma prova inteiramente diferente explorando o método iterativo (4.1). Neste caso, obtem-se uma estimativa muito melhor

$$\|x_n - \overline{x}\|_X \leq \frac{s}{2^n} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{2n-1}$$

e

$$\|x_{n+1} - \overline{x}\|_X \leq c \, \|x_n - \overline{x}\|_X^2$$

para algum $c > 0$ (isto é, tem-se a convergência quadrática).

4.2 Equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach

Apresenta-se a prova do teorema de existência e unicidade de soluções de EDO's numa situação particular

Teorema de Picard

Considere o problema da existência de solução de uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem geral.

$$y' = f(x, y), \tag{4.3}$$

onde $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é qualquer função contínua definida em algum domínio (conjunto aberto e conexo) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, onde y é a variável dependente, e x é variável independente. Isto é, $y = y(x)$ é a função desconhecida. O principal objetivo é provar que a classe de equações da forma (4.3) tem solução local, e que a solução para tal problema de valor inicial é única.

Definição 4.2.1. Seja $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo dado e $a \in (\alpha, \beta)$ e $y(x)$ contínua em (α, β). Dada qualquer constante fixa b, um problema de valor inicial para a equação (4.3) é

$$y' = f(x, y), \qquad y(a) = b. \tag{4.4}$$

A idéia chave para solucionar o problema de valor inicial da equação em (4.4), reside na substituição pela equação integral equivalente em y

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))dt, \tag{4.5}$$

onde $x \in (\alpha, \beta)$.

Proposição 4.2.2. *A função φ é solução do problema de valor inicial (4.4), no intervalo $(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ se, e somente se, φ é solução da equação integral (4.5) em (α, β).*

Demonstração: Se φ é solução do problema de valor inicial (4.4), então, para $t \in (\alpha, \beta)$

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \tag{4.6}$$

e $\varphi(a) = b$. Desde que, φ é contínua em (α, β), e f é contínua em Ω, a função $f(t, \varphi(t))$ é contínua em (α, β). Daí, integrando (4.6) de a até x acarreta que

$$\varphi(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t))dt, \tag{4.7}$$

e assim, φ é solução de (4.5). Reciprocamente, se φ satisfaz a equação integral (4.5), então, $\varphi(a) = b$ e diferenciando (4.7), encontra-se usando o teorema fundamental do cálculo, que

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)), \quad em \quad (\alpha, \beta)$$

Assim, φ é solução do problema de valor inicial em (4.4). $\blacksquare$

Definição 4.2.3. Uma função $f(x, y)$ definida em um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ é dita satisfazer a *condição de Lipschitz* em y no conjunto S, se existe uma contante $M > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M\,|y_1 - y_2|\,, \tag{4.8}$$

para todo (x, y_1) e (x, y_2) em S.

Observação: Uma condição suficiente para uma função $f(x, y)$ satisfazer a condição de Lipschitz em um retângulo fechado S em $\mathbb{R}^2$ é a continuidade de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ em S. Utilizando o teorema do valor extremo de Weierstrass, existe $M > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq M, \tag{4.9}$$

para todo $(x, y) \in S$. Ao mesmo tempo, para $(x, y_1), (x, y_2) \in S$ o teorema do valor médio (T.V.M) implica que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varsigma)\right| |y_1 - y_2|\,,$$

onde $y_1 < \varsigma < y_2$, agora, desde que $(x, \varsigma) \in S$, utilizando (4.6), obtem-se

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M\,|y_1 - y_2|\,.$$

Assim, no teorema seguinte é suficiente assumir que f e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em Ω.

Teorema 4.2.4 (Picard)**.** *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^2$ e seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Seja $(a, b) \in \Omega$ e considere o prolema de valor inicial*

$$y'(x) = f(x, y), \qquad y(a) = b, \tag{4.10}$$

supondo que f satisfaz a condição de Lipschitz em y no domínio Ω. Então, existe um $\delta > 0$ e uma única solução $\varphi = \varphi(x)$ para o problema de valor inicial, para todo $|x - a| \leq \delta$

Demonstração: Desde que, Ω é aberto e $v = (a, b) \in \Omega$, existe $r_1 > 0$ tal que, o disco aberto $B_{r_1}(v) \subseteq \Omega$. Escolhendo $0 < r < r_1$, de forma qu o disco fechado $\overline{B}_r(v) \subseteq B_{r_1}(v)$. desde que, f é contínua em Ω e também em $\overline{B}_r(v)$, existe $K > 0$ tal que

$$|f(x, y)| \leq K$$

para $(x, y) \in \overline{B}_r(v)$. Em adição, f satisfaz a condição de Lipschitz em y no domínio Ω, e portanto, em $\overline{B}_r(v)$, existe $M > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M \, |y_1 - y_2| \, ,$$

para todo $(x, y_1), (x, y_2)$ em $\overline{B}_r(v)$. Agora, escolhendo $0 < \delta < \min\left\{\frac{r}{K+1}, \frac{1}{M}\right\}$ tal que $\delta < \frac{1}{M}$ e o retângulo $\{(x, y) : |x - a| \leq \delta, |y - b| \leq K\delta\} \subseteq \overline{B}_r(v)$. Seja $J = [a - \delta, a + \delta]$ e considere o espaço métrico $C(J)$ de toda função contínua real $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ com a métrica

$$d(\phi, \psi) = \max_{x \in J} |\phi(x) - \psi(x)| \, .$$

Seja

$$C = \{\psi \in C(J) : |\psi(x) - b| \leq K\delta\} \, .$$

O conjunto C é um não-vazio (C contém a função constante $\psi(x) = b$) subconjunto fechado do espaço métrico completo $(C(J), d)$ e ele mesmo é um espaço métrico completo. Em adição, note-se que, se $\psi \in C$, então, $|\psi(x) - b| \leq K\delta$ e $(x, \psi(x)) \in \Omega$ para todo $x \in J$.

Agora para cada $\psi \in C$ considere a aplicação F dada por

$$F(\psi)(x) = b + \int_a^x f(t, \psi(t))dt,$$

onde $x \in J$. Observando que, f e ψ são contínuas, toda $F(\psi)$ é contínua em J. Além disso, a estimativa

$$|F(\psi(x)) - b| = \left| \int_a^x f(t, \psi(t))dt \right| \leq \int_a^x |f(t, \psi(t))| \, dt \leq K \int_a^x dt \leq K\delta,$$

mostrando que $F(\psi) \in C$. Agora, mostrando que $F : C \longrightarrow C$ é uma aplicação contração deste espaço. Seja $\psi_1, \psi_2 \in C$. Então,

$$\begin{aligned}
d(F(\psi_1), F(\psi_2)) &= \max_{x\in J} |F(\psi_1(x) - F(\psi_2(x))| \\
&\leq \max_{x\in J} \left| \int_a^x |f(t,\psi_1(t)) - f(t,\psi_2(t))|\, dt \right| \\
&\leq \max_{x\in J} \left| \int_a^x M\, |\psi_1(t) - \psi_2(t)|\, dt \right| \\
&\leq \max_{x\in J} \left| M \int_a^x d(\psi_1,\psi_2) dt \right| \\
&\leq M d(\psi_1,\psi_2) \max_{x\in J} |x-a| \\
&= M\delta d(\psi_1,\psi_2).
\end{aligned}$$

Desde que $M\delta < 1$, F é uma aplicação contração. Portanto, do princípio da aplicação contração segue que existe $\varphi \in C$ tal que, $F(\varphi) = \varphi$. Isto é

$$\varphi(x) = b + \int_a^x f(t,\varphi(t))dt.$$

Em outras palavras, φ é solução a equação integral (4.5). E segue da proposição acima que φ é solução do problema de valor inicial (4.10) . Além disso, φ é a unica solução de (4.10). Se houver ψ como outra solução de (4.10), ψ também satisfará a equação integral

$$\psi(x) = b + \int_a^x f(t,\psi(t))dt.$$

Portanto, $F(\psi) = \psi$, o que contradiz a unicidade de φ (isto é, a unicidade do ponto fixo).
■

Considerando agora, os casos em espaços de Banach.

A integral de Riemann - Seja X um espaço de Banach, $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. A noção da Integral de Riemann e as propriedades relacionadas podem ser extendidas sem nenhuma diferença do caso de funções a valores reais para a função de valores X em I. Em particular, se $f \in C(I, X)$, onde $C(I, X)$é o conjuntos das funções contínuas e limitadas, então f é Riemann integrável em I,

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \right\|_X \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|f(t)\|_X \, dt$$

e $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\alpha}^{t} f(y)dy = f(t), \quad para\ todo\ t \in I.$ Recordando, que a função $h : I \longrightarrow X$ é diferenciável em $t_0 \in I$ se o limite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$$

existe em X. Este limite é a derivada de h em t_0 e é denotada por $h'(t_0)$ ou $\frac{d}{dt}h(t_0)$. Se $t_0 \in (\alpha, \beta)$ recorda-se a definição da diferenciabilidade Fréchet. É facil ver que, se $h'(t) = 0$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$, então $h(t)$ é constante em $[\alpha, \beta]$. De fato, para todo $\Lambda \in X'$, tem-se, $(\Lambda \circ h)'(t) = \Lambda' h(t) = 0$, que implica $\Lambda(h(t) - h(t_0)) = 0$, e do teorema de Hahn- Banach, existe $\Lambda \in X'$ tal que $\Lambda(h(t) - h(\alpha)) = \|h(t) - h(\alpha)\|$.

O problema de Cauchy - Seja X um espaço de Banach, $U \subset \mathbb{R} \times X, U$ é aberto $u_0 = (t_0, x_0) \in U$, $f : U \longrightarrow X$ contínua. O problema é para encontrar um intervalo fechado I, com t_0 pertencente ao interior de I e uma função diferenciável $x : I \longrightarrow X$ tal que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ t \in I, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{4.11}$$

É evidente que x é automaticamente de classe C^1 em I. Também, é rapidamente visto que (4.11) é equivalentes a equação integral

$$x(t) = x_0 + \textstyle\int_{t_0}^{t} f(y, x(y))dy, \quad t \in I \tag{4.12}$$

A saber, x é solução de (4.11) se, e somente se, é solução de (4.12).

Teorema 4.2.5 (Solução Local). *Assuma as seguintes hipóteses:*

(a) f é contínua;

(b) A desigualdade

$$\|f(t,x_1 - f(t,x_2\|_X \le k(t)\,\|x_1 - x_2\|_X\,,$$

para todo $(t,x_1),(t,x_2) \in U$*, se mantém para algum* $k(t) \in [0,\infty]$*;*

(c) $k \in L^1((t_0 - a, t_0 + a))$ *para algum* $a > 0$*;*

(d) Existe $m \ge 0$ *e* $\overline{B}_{\mathbb{R}\times X}(u_0,s) \subset U$ *tal que*

$$\|f(t,x)\|_X \le m, \quad \textit{para todo } (t,x) \in \overline{B}_{\mathbb{R}\times X}(u_0,s).$$

Então, existe $\tau_0 > 0$ *tal que, para qualquer* $\tau < \tau_0$*, existe uma única solução* $x \in C^1(I_\tau, X)$ *para o problema de Cauchy, com* $I_\tau = [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$*.*

Observação: Observando primeiro, que de (b), desde que U é aberto, k é definido em uma vizinhança de zero. Se k é constante, então $(c),(d)$ são automaticamente satisfeitos. De fato, para $(x,t) \in \overline{B}_{\mathbb{R}\times X}(u_0,s)$, tem-se

$$\|f(t,x)\|_X \le ks + \max_{|t-t_0|} \|f(t,x_0)\|_X\,.$$

Também, (d) é sempre verdadeiro, se X é de dimensão finita, e bolas fechadas são compactas. Em ambos os casos, definindo

$$s_0 = \sup\left\{\sigma > 0 : \overline{B}_{\mathbb{R}\times X}(u_0,\sigma) \subset U\right\}$$

pode se escolher qualquer $s < s_0$.

Demonstração: Seja $r = \min\{a,s\}$ e o conjunto

$$\tau_0 = \min\left\{r, \frac{r}{m}\right\}$$

Selecione então, $\tau < \tau_0$ e considere o espaço métrico completo $Z = \overline{B}_{C(I_\tau,X)}(x_0,r)$ com a métrica induzida pela norma de $C(I_\tau,X)$ (aqui x_0 é uma função constante igual a x_0). Desde que, $\tau < r$, se $z \in Z$, então $(t,z(t)) \in \overline{B}_{\mathbb{R}\times X}(u_0,r) \subset U$ para todo $t \in I_\tau$. Por isso, para $z \in Z$ define-se

$$F(z)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y,z(y))dy,$$

paratodot $\in I_\tau$. Observe que

$$\sup_{t\in I_\tau} \|F(z)(t) - x_0\|_X \le \sup_{t\in I_\tau} \left|\int_{t_0}^{t} \|f(y,z(y))\|_X\,dy\right| \le m\tau \le r$$

Conclui-se que F aplica Z em Z. O último passo é para mostrar que F^n é uma contração em Z para algum $n \in \mathbb{N}$. Por indução, mostra-se também, que para todo $t \in I_\tau$,

$$\|F^n(z_1)(t) - F^n(z_2)(t)\| \leq \frac{1}{n!}\left|\int_{t_0}^{t} k(y)dy\right|^n \|z_1 - z_2\|_{C(I_\tau,X)}. \tag{4.13}$$

Para $n = 1$ é uma verificação fácil. Logo assumindo ser verdadeiro para $n-1,\ n \geq 2$. Então, fazendo $t > t_0$ (o argumento para $t < t_0$ é análogo),

$$\begin{aligned}
\|F^n(z_1)(t) - F^n(z_2)(t)\|_X &= \left\|FF^{n-1}(z_1)(t) - FF^{n-1}(z_2)(t)\right\|_X \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \left\|f(y, F^{n-1}(z_1)(t)) - f(y, F^{n-1}(z_2)(t))\right\|_X dy \\
&\leq \int_{t_0}^{t} k(y)\left\|F^{n-1}(z_1)(t) - F^{n-1}(z_2)(t)\right\|_X dy \\
&\leq \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_{t_0}^{t} k(y)\left(\int_{t_0}^{y} k(w)dw\right)^{n-1} dy\right] \|z_1 - z_2\|_{C(I_\tau,X)} \\
&= \frac{1}{n!}\left(\int_{t_0}^{t} k(y)dy\right)^n \|z_1 - z_2\|_{C(I_\tau,X)}.
\end{aligned}$$

Logo, vale para $n-1$. Portanto, de (4.13) obtem-se

$$\|F^n(z_1) - F^n(z_2)\|_{C(I_\tau,X)} \leq \frac{1}{n!}\|k\|^n_{L^1(I_\tau)} \|z_1 - z_2\|_{C(I_\tau,X)}.$$

isto mostra que para n suficientemente grande F^n é uma contração. Pelo Corolário 2.1.7, conclui-se que F admite um único ponto fixo, o qual é claramente a solução da equação integral (4.12) e também de (4.11). ■

4.3 O teorema fundamental da Álgebra

Como aplicação do teorema do ponto fixo de Brouwer, apresentamos uma prova para o teorema fundamental da Álgebra que enfatiza a invariância de uma função em conjuntos compactos.

Teorema 4.3.1 (Fundamental da Álgebra). *Seja* $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ *um polinômio complexo de grau* $n \geq 1$ *em* $\mathbb{C}$*. Então, existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* $p(z_0) = 0$*.*

Demonstração: Para este propósito, se identificará $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$. Pode-se supor, sem perda de generalidade que $a_n = 1$ e

$$r = 2 + |a_0| + ... + |a_{n-1}|.$$

Define-se a função contínua $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{p(z)}{r} e^{i(1-n)\theta}, & se\ |z| \leq 1, \\ z - \frac{p(z)}{r} z^{(1-n)}, & se |z| > 1 \end{cases}.$$

onde $z = \rho e^{i\theta}$ com, $\theta \in [0, 2\pi)$ e considerando agora o conjunto $K = \{z; |z| \leq r\}$, que é compacto e convexo do plano. O objetivo é mostrar que K é invariante pela g, ou seja $g(K) \subset K$ De fato, se $|z| \leq 1$, então

$$|g(z)| \leq |z| + \frac{|p(z)|}{r} \leq 1 + \frac{1 + |a_0| + ... + |a_{n-1}|}{r} \leq 1 + 1 = 2 \leq r.$$

reciprocamente, se $1 < |z| \leq r$, então tem-se

$$|g(z)| \leq \left| z - \frac{p(z)}{rz^{n-1}} \right| = \left| z - \frac{z}{r} - \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1}}{rz^{n-1}} \right|$$

$$\leq r - 1 + \frac{|a_0| + ... + |a_{n-1}|}{r} \leq r - 1 + \frac{r-2}{r} \leq r$$

Assim K é invariante pela g. Seja $z_0 \in K$ ponto fixo de g, que é claramente a raiz de p, e assim $p(z_0) = 0$. ■

4.4 Teoria dos jogos

Iremos apresentar um dos importantes resultados da teoria dos jogos, este é devido ao matemático *John Nash*, que é sobre jogos não-cooperativos, e que por este resultado obteve o Prêmio Nobel de Economia. Na demonstração do seu teorema, John Nash utilizou o teorema do ponto fixo de Brouwer.

Considerando um jogo, com $n \geq 2$ jogadores, sob a suposição que os jogadores não cooperam entre si. Cada jogador adota uma estratégia, independente da estratégia dos outros jogadores. Denote o conjunto de todas as estratégias possíveis do K^{th} jogador por K_k e o conjunto $K = K_1 \times ... \times K_n$. Um elemento $x \in K$ é chamado perfil estratégico. Para cada k, seja $f_k : K \longrightarrow \mathbb{R}$, a função perda do K^{th} jogador. Se

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 0, \qquad para \;\; todo \;\;\; x \quad \in K \tag{4.14}$$

O jogo é chamado de *soma-zero*. O objetivo de cada jogador é minimizar sua perda, ou equivalentemente, maximizar seu ganho.

Definição 4.4.1. Um *Equilibrio de Nash* é um perfil estratégico, com a propriedade de que um jogador não pode ser beneficiado pela mudança de sua estratégia, enquanto os outros jogadores mantém as suas estratégias inalteradas. Em fórmula, ele é um elemento $\overline{x} = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in K$ tal que

$$f_k(\overline{x}) \leq f_k(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_{k-1}, \overline{x}_k, \overline{x}_{k+1}, , ..., \overline{x}_n), \quad para \;\; todo \;\; x_k \in K_k. \tag{4.15}$$

para todo $k = 1, 2, ..., n$.

Estritamente falando, um equilibrio de Nash sugere uma conveniente estratégia cautelosa a ser adotada por cada jogador no jogo. Afirma-se, uma estratégia, ao invés, da estratégia, desde que um equilibrio de Nash (se existir), pode não ser único.

Precisa-se, é claro, de outras hipóteses sobre os conjuntos K_k e nas aplicações f_k. É razoável assumir que, com todas as outras estratégias fixadas, a função perda f_k tenha uma pequena variação em correspondência com uma pequena variação em x_k. Além disso, francamente falando, presume-se que as médias das perdas, que corresponde a duas diferentes estratégias do K^{th} jogador é maior que a perda correspondente a média estratégica. Convexidade, pode traduzir melhor esta questão.

Um dos resultados fundamentais da teoria dos jogos é o seguinte:

Teorema 4.4.2 (Nash). *Para todo $k = 1, 2, ..., n$, seja K_k um subconjunto, não-vazio, compacto e convexo de um espaço localmente convexo X_k. Assuma que para todo k a função perda f_k é contínua em K. Em adição, para todo $x_j \in K_j$ fixado, com $j \neq k$, a aplicação $f_k(x_1, ..., x_{k-1}, \cdot, x_{k+1}, ..., x_n) : K_k \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa. Então, existe $\overline{x} \in K$ satisfazendo (4.14), isto é, existe um* equilibrio de Nash.

Demonstração: Defina $\Phi : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$, como

$$\Phi(x, y) \;=\; \sum_{k=1}^{n} [f_k(x) - f_k(x_1, ..., x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, ..., x_n)]$$

Então, Φ é contínua, $\Phi(x, \cdot)$ e é concava para todo $x \in K$, fixado. Da desigualdade de Ky Fan, existe um $\overline{x} \in K$ tal que,

$$\sup_{y \in K} \Phi(\overline{x}, y) \leq \sup_{y \in K} \Phi(y, y) = 0.$$

Em particular, se nosso conjunto $\overline{y} = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_{k-1}, \overline{x}_k, \overline{x}_{k+1}, , ..., \overline{x}_n)$, para todo $x_k \in K_k$, obtem-se

$$\Phi(\overline{x}, \overline{y}) \leq 0, \quad \textit{para todo } x_k \in K_k.$$

que nada mais é do que (4.15). ■

REFERÊNCIAS

[1] Agarwal, Ravi P, O'Regan, Donal, Sahu, D. R. *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, Nova York, USA, 2004.

[2] Adams, Colin e Franzosa, Robert. *Introduction to Topology Pure and Applied*, Pearson, India, 2009.

[3] Agricola, Ilka e Friedrich, Thomas. *Global Analysis - Differential Forms in Analysis, Geometry and Physics - volume 52*, American Mathematical Society, Rhode Island, 2002.

[4] Botelho, Geraldo e Pellegrino, Daniel e Teixeira, Eduardo. *Fundamentos da análise funcional*, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[5] Brown, Robert F., Furi, M., Gorniewicz, L., Jiang, B. *Handbook of Topological Fixed Point Theory*, Springer, Netherlands, 2005.

[6] Bridges, Douglas e Richman Fred, *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge University Press, 1987.

[7] Carbery, Anthony, *The Brouwer fixed point theorem and Borsuk-Ulam theorem*, Math At, USA, 2012.

[8] Hirsh, Morris W, *Differential Topology*, New York: Springer pp 72-73. 1976.

[9] Kellogg, R. B., Li, T. Y., Yorke, J. *A Constructive Proof of the Brouwer Fixed Point Theorem and Cumputacional Results*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol 13, pp 473-483, 1976 .

[10] Kirk, William, e Sims, Brailey. *Handbook of Metric Fixed Point Theory* Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2001

[11] Lima, Elon Lages. *Análise Real - volume 1. Funções de Uma Variável*, 8ª. Edição, Impa, Rio de Janeiro, 2006.

[12] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise - Vol. 2 11ª. Ed.*, IMPA Projeto Euclides, Rio de Janeiro , 2009.

[13] Park, Sehie. *Ninety Years of the Brouwer Fixed Point Theorem* Vietnam Journal of Mathematics, Springer-Verlag, 1999.

[14] Smart, D. R., *Fixed point theorems*, Cambridge University Press, Great Britain, 1974.