Universidade Federal da Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT
Dissertação de Mestrado

Estabilidade exponencial para o sistema termoelástico

Leomar dos Santos Veras

São Luís - MA
Abril de 2016

Estabilidade exponencial para o sistema termoelástico

Leomar dos Santos Veras

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo.

São Luís-MA
Abril de 2016

Veras, Leomar dos Santos

/ Estabilidade exponencial para o sistema termoelástico / Leomar dos Santos Veras. – São Luís - MA, 2016.

55 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

Referências bibliográficas.

1. Sistema termoelástico. 2. Teoria dos Semigrupos . 3. Decaimento exponencial. I. Título.

CDU : 501(812.1)

Estabilidade exponencial para o sistema termoelástico

Leomar dos Santos Veras

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 12 de Abril de 2016.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo (Orientador)
UFMA

Profª. Drª. Renata de Farias Limeira
UFMA

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra
UFPB

A minha família e namorada
pela paciência e incentivo.

" A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original"

(Albert Einstein)

" Do not pray for an easy life, pray for the strength to endure a difficult one"

(Bruce Lee)

Agradecimentos

Aos meus pais, Leomar e Lucilene, pelos incentivos em todos os momentos.

A minha namorada, Aline Lima Rosa, pela paciência e incentivos durante a parte final da dissertação.

Ao Prof. Marcos Antonio Ferreira de Araújo, por ter aceitado ser o meu orientador, por ter também me ajudado durante todo o mestrado.

Tenho muito a agradecer ao Prof. Ronaldo José Sousa Ferreira, pelas horas tentando resolver os "fácil ver" que apareceram durante a dissertação. Foi fundamental para a realização dessa dissertação.

Aos amigos do mestrado, alguns fizemos disciplinas juntos outros conheci na sala do mestrado: Prof.Jadevilson Cruz, Alberto Leandro, Diego Diniz, Geilson Mendes, Prof.Leonardo Rogério, Rondinelle, Geovan Carlos, Péricles, Washington, Alan Kardec, João Coelho,Prof. José Santana, Marlon César, Jorge Augusto, Valdir Mendes, Jadevaldo Cruz.

E não menos importante, à CAPES pelo fomento da bolsa de mestrado proporcionando meu desenvolvimento profissional e formação acadêmica.

Resumo

Neste trabalho inicialmente estudamos via teoria de semigrupos a existência, unicidade e estabilidade da solução do sistema termoelástico, usando técnicas desenvolvidas por Lummer - Phillips e Gearhart. Estudamos também o decaimento exponencial pelo método da energia utilizando a equivalência com o funcional de Lyapunov, $\mathcal{L}$.

Palavras-chave: Sistema termoelástico, Teoria dos Semigrupos, Decaimento exponencial.

Abstract

In this work we study, using semigroups theory, the existence, uniqueness and stability of the thermoelastic system solution, using techniques developed by Lummer - Phillips and Gearhart. We Study also exponential decay by energy method using equivalence with functional of Lyapunov, $\mathcal{L}$.

Keywords: Thermoelastic system, semigroups theory , exponential decay.

Sumário

Introdução

No primeiro capítulo, apresentamos alguns teoremas e definições sobre a Análise Funcional e espaços de Sobolev, que serão usados nos capítulos posteriores.

No segundo capítulo, apresentamos algumas propriedades e definições importantes de semigrupos de classe C_0 em um espaço de Banach. Apresentamos os teoremas importantes, o teoremas de Lumer-Phillips que trata da caracterização de um semigrupo de classe C_0 e o Teorema de Gearhart que estabelece as condições necessárias e suficientes para um semigrupo de classe C_0 ser exponencialmente estável.

No terceiro capítulo, demonstramos a existência, unicidade e o decaimento exponencial da solução do sistema termoelástico. Para obtermos a existência e unicidade de solução, reescrevemos como problema de primeira ordem no tempo:

$$\begin{cases} U_t & = AU, t > 0 \\ U(0) & = U_0 \end{cases}$$

onde A um operador linear associado com o modelo. Em seguida, mostramos que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)_{t\geq 0}$. Assim, usando as propriedades dos semigrupos de classe C_0 em um espaço de Banach, mostramos que $U(t) = S(t)U_0$ é a única solução do problema considerado. Provamos a estabilidade exponencial do semigrupo de contrações de classe C_0 , $S(t)_{t\geq 0}$, associado ao sistema dissipativo usamos o Teorema de Gearhart. A demonstração da estabilidade exponencial é feita por contradição.

No quarto capítulo mostramos o decaimento exponencial pelo método da energia. Nesta etapa encontraremos o funcional de Lyapunov e usando o fato que são equivalentes bastar mostrar que o mesmo decai.

Capítulo 1

Preliminares

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos básicos que serão utilizados ao longo do trabalho.

1.1 Espaço das Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ função contínua.

Denominamos suporte de ϕ, ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde ϕ não se anula.

Denotamos o suporte de ϕ por $supp(\phi)$ e do ponto de vista matemático

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

O $supp(\phi)$ é o menor fechado fora do qual ϕ se anula.

Daremos um destaque especial às funções $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que sejam infinitamente diferenciáveis.

Definimos o espaço $\mathcal{D}(\Omega) = C^{\infty}(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto contido em Ω.

Os elementos de $\mathcal{D}(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Definição 1.1.1. *Uma sequência de funções* $\{\phi_n\} \in \mathcal{D}(\Omega)$ *converge a* 0 *se existir um conjunto compacto e fixado* $K \subset \Omega$ *com* $supp(\phi_n) \subset K$ *para todo* n *e tal que* ϕ_n *e todas as suas derivadas convergem a* 0 *uniformemente em* K

O espaço vetorial $\mathcal{D}(\Omega)$, junto com essa noção de convergência é um espaço vetorial topológico.

1.2 O Espaço das Distribuições

Definição 1.2.1. *Uma distribuiçãao sobre* Ω *é um funcional linear* $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *que satisfaz a seguinte condição:*

$$\phi_n \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow T(\phi_n) \longrightarrow 0\mathbb{R}.$$

O espaço das distribuições é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Toda função contínua é localmente integrável.

Considere então f uma função localmente integrável e defina $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx.$$

T_f é um funcional linear, pois para todo $c \in \mathbb{R}$ e ϕ, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} T_f(c\phi + \psi) &= \int_\Omega f(x)[c\phi + \psi]dx \\ &= c\int_\Omega f(x)\phi dx + \int_\Omega f(x)\psi dx \\ &= cT_f(\phi) + T_f(\psi) \end{aligned}$$

T_f é uma distribuição.

Seja $\{\phi_n\}$ uma sequência de funções com $\phi_n \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T_f(\phi_n) = \int_\Omega f(x)\phi_n(x)dx \longrightarrow \int_\Omega f(x).0dx = 0.$$

Não iremos mais fazer distinção entre função localmente integrável f e a distribuição T_f gerada por f.

Ao dizermos que a distribuição T é uma função, afirmamos que existe uma função localmente integrável f, tal que $T = T_f$.

Derivadas de distribuição. Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uma distribuição qualquer, definimos sua derivada como sendo a distribuição dada por

$$T'(\phi) = -T(\phi') \text{ para toda } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Notemos que

$$T''(\phi) = -T'(\phi') = T(\phi'')$$

de um modo geral

$$T^k(\phi) = (-1)^k T(\phi^k).$$

A derivada no sentido das distribuições, quando restrita às funções do cálculo, é exatamente a derivada clássica.
Consideremos f uma função real com derivada f' em um aberto $\Omega \in \mathbb{R}$. A derivada no sentido das distribuições é calculada como segue

$$\frac{df}{dx}(\phi) = -f(\phi') = -\int_\Omega f(x)\phi'(x)dx = \int_\Omega f'(x)\phi(x)dx = f'(\phi),$$

temos assim,

$$\frac{df}{dx}(\phi) = f'(\phi) \text{ para toda } \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ e então } \frac{df}{dx} = f'.$$

Notação Multi-índice

Seja o espaço

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u_x, u_y \in L^2(\Omega)\}$$

que iremos escrever de um modo mais prático para os nossos propósitos, isto é,

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u_{x_1}, u_{x_2} \in L^2(\Omega)\}$$

onde $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Desse modo, se $u \in H^1(\Omega)$, todas as derivadas de u de ordem 1 continuam em $L^2(\Omega)$.

Consideremos agora,

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, u_{x_2x_1}, u_{x_2x_2} \in L^2(\Omega)\}.$$

Exigimos agora que todas as derivadas de u até ordem 2 continuem em $L^2(\Omega)$.

Vamos apresentar a seguinte notação introduzida por L. Schwartz para escrever esse espaço de modo mais conveniente.

Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$; Um multi-índice é uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, com $\alpha_i \geq 0$ e inteiros.

Associamos ao multi-índice α os seguintes símbolos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} .....x_n^{\alpha_n}$$

definimos

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Escrevendo o $H^2(\Omega)$ com essa nova notação fica

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq 2\}.$$

1.3 Espaço de Sobolev

Nesta seção, definiremos espaços de Sobolev que são necessários neste trabalho e apresentaremos as desigualdades de Desigualdade de Poincaré, Young, Minkowski, Hölder

Definição 1.3.1. *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Para um número inteiro $m > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, representamos o espaço de Sobolev por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções u pertencentes a $L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, temos a derivada de u no sentido das distribuições $D^\alpha u$, pertencente a $L^p(\Omega)$. Então, temos que, $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ com } 1 \leq p < \infty$$

e

$$||u||^p_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)}, \text{ com } p = \infty.$$

Notação. Quando $p = 2$, escreve-se $H^m(\Omega)$ em vez de $W^{m,2}(\Omega)$.

O espaço $H^m(\Omega)$ com o produto interno

$$(f,g)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2}$$

é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.3.2. *(Desigualdade de Poincaré)*
Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então existe uma constante positiva C dependendo de Ω e n tal que

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{(L^2(\Omega))}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Prova em [7]. □

Apresentaremos alguns resultados relacionados aos Espaços $L^p(\Omega)$.

Proposição 1.3.3. *(Desigualdade de Young)*
Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Prova em [6].

□

Proposição 1.3.4. *(Desigualdade de Holder)*
Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1$ e

$$||uv||_1 \leq ||u||_p||v||_q.$$

Demonstração. Prova em [6]. □

Proposição 1.3.5. *(Desigualdade de Minkowski)*
Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$, então

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Demonstração. Prova em [6].

□

Capítulo 2

Semigrupos

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos a definição de semigrupo de classe C_0, propriedades dos semigrupos de classe C_0 em um espaço de Banach X, a caracterização dos geradores infinitesimais de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0.

Definição 2.1.1. *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Dizemos que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X, quando:*

1. *$S(0) = I$, onde I é o operador identidade de X ;*
2. *$S(t+s) = S(t)S(s)$, para todo par $s, t \in \mathbb{R}^+$.*

Definição 2.1.2. *Dizemos que o semigupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é de classe C_0 se:*

$$\lim_{t\to 0^+} ||(S(t)-I)x|| = 0, \forall x \in X.$$

Definição 2.1.3. *Dizemos que o C_0 - semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é uniformente limitado quando $||S(t)|| < M$ e se $||S(t)|| < 1$, dizemos que é um semigrupo contração.*

Queremos relacionar o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ com um certo operador linear A.

Gerador Infinitesimal

Definição 2.1.4. *O operador $A : D(A) \longrightarrow X$, definido por*

$$A(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x, \;\; \textit{para todo } x \in D(A),$$

onde $D(A)$, o domínio de A, é dado por:

$$D(A) = \left\{ x \in X : \;\; \textit{existe o limite } \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x \right\}$$

é dito o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Quando A é o gerador infinitesimal de um $C_0 -$ semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, denotamos $S(t) = e^{At}$.

Propriedade importante.

Seja A o gerador infinitesimal de um $C_0 -$ *semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Se $x \in D(A)$, então:

1. $S'(t)x = AS(t)x$,
2. $S(t)x \in C^0([0, \infty) : D(A)) \cap C^1([0, \infty) : X)$

Demonstração. Prova de (1).

Para $x \in D(A)$, temos, por um lado

$$S^{'}_{+}(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h}$$

$$= S(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = S(t)Ax = AS(t)$$

por outro lado

$$S_{-}^{'} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t-h+h)x}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} S(t-h) \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}$$

$$= S(t)Ax = AS(t)x$$

de onde temos $S^{'}(t)x = AS(t)x$.

□

Demonstração. prova da (2)

Vemos que as aplicações

$$t \longrightarrow S(t)x \in C^0([0,\infty) : X)$$

e

$$t \longrightarrow S^{'}(t)x \in C^0([0,\infty) : X),$$

logo

$$t \longrightarrow S(t)x \in C^1([0,\infty) : X).$$

Notemos que $S(t)x \in D(A)$ e, portanto, $S(t)x \in C^0([0,\infty) : D(A))$, e, então,

$$S(t)x \in C^0([0,\infty) : D(A)) \cap C^1([0,\infty) : X).$$

□

Supomos agora que $S_1(t)$ e $S_2(t)$ possuem o mesmo gerador infinitesimal A e vamos provar que $S_1(t) = S_2(t)$.

Consideremos a função $F(s) = S_1(t-s)S_2(s)$. Então,

$$F^{'}(s) = -AS_1(t-s)S_2(s) + S_1(t-s)AS_2(s) = -S_1(t-s)AS_2(s) + S_1(t-s)AS_2(s) = 0,$$

assim $F^{'}(s)$ é uma função constante. Notemos também que

$$F(0) = S_1(t)S_2(0) = S_1(t)$$

$$F(t) = S_1(0)S_2(s) = S_2(t),$$

segue $S_1(t) = S_2(t)$.

Resumindo tudo

Definindo $U(t) = S(t)U_0$ mostramos que $U^{'}(t) = AU(t)$ e que $U(0) = U_0$; logo, $U(t) = S(t)U_0$ é solução do seguinte problema de evolução

$$U_t - AU = 0, U(0) = U_0, (**)$$

e essa solução satisfaz $U \in C^0([0,\infty) : D(A)) \cap C^1([0,\infty) : X)$.

Observemos que, sendo A o gerador infinitesimal de $S(t)$, podemos afirmar que $U(t) = S(t)U_0$ é a única solução $(**)$.

Tornou-se fundamental entender que, na tentativa de resolver o problema $(**)$, a questão central é obter as condiões necessárias e suficientes para que o operador linear A seja gerador infinitesimal de um $C_0 - \textit{semigrupo}\ S(t)$.

Iremos apresentar o importante teorema de $Lummer - Phillips$, que responde a essa questão.
Para entender o teorema, iniciamos denotando por X^* o dual do espaço de Banach X e por $< \cdot, \cdot >$ a dualidade entre X e X^*. O consideremos o conjunto

$$F(x) = \{x^* \in X^*; < x^*, x >=< x, x^* >= ||x||^2 = ||x^*||^2\}.$$

Pelo Teorema de $Hahn - Banach$, $F(x)$ é não vazio.

Definição 2.1.5. *Dizemos que o operador linear $A : X \longrightarrow X$ é dissipativo quando*

$$Re < Ax, x^* >\leq 0$$

para todo $x \in D(A)$.

Observação 2.1.6. *Escrevemos $A \in G(M, \omega)$ para indicar que o operador A, é o gerador infinitesimal do $C_0 - semigrupo\{S(t)\}_{t\geq 0}$ tal que*

$$||S(t)|| \leq Me^{\omega t}, M \geq 1 \ e \ \omega \geq 0.$$

Em particular, tomando $M = 1$ e $\omega = 0$, temos que, $A \in G(1, 0)$ denota que A gera o C_0 - semigrupo de contrações.

Teorema 2.1.7. *(Lummer-Phillips)*

1. *Seja A dissipativo e $\lambda_0 > 0$ tal que a $Im(\lambda_0 I - A) = X$, então $A \in G(1, 0)$.*

2. *Se $A \in G(1, 0)$, então A é dissipativo e, para todo $\lambda > 0$, temos que*

$$Im(\lambda I - A) = X.$$

Demonstração. Prova ver [10]

□

O teorema de $Lummer - Phillips$ será utilizado para obter a existência e unicidade de solução para o modelo que iremos estudar nesta dissertação.

2.2 Estabilidade exponencial de semigrupos

Para estabelecermos as condições necessárias e suficientes para um C_0-*semigrupo* ser exponencialmente estável utilizaremos o **Teorema de Gearhart**

2.2.1 O Teorema de Gearhart

Apresentaremos um Importante teorema que será usado no próximo capítulo para provarmos o decaimento exponencial da solução do modelo dissipativo associado com sistemas de equações diferenciais parciais de evolução.

Definição 2.2.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 − semigrupo em um espaço de Hilbert H. Definimos o conjunto resolvente de A $\rho(A)$ como*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (\lambda I - A) \text{ é invertível e limitado onde } I : H \longrightarrow H \text{ é o operador identidade } \}.$$

Definição 2.2.2. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 − semigrupo em um espaço de Hilbert H. Definimos o espectro $\sigma(A)$ como*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (\lambda I - A) \text{ não é invertível, onde } I : H \longrightarrow H \text{ é o operador identidade } \}.$$

Comparando as definições anteriores segue que $\rho(A) = \mathbb{C} - \sigma(A)$, o complementar de $\sigma(A)$ em C.

Definição 2.2.3. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em um espaço de Hilbert H. Dizemos que $S(t), t \geq 0$, é exponencialmente estável, se*

$$||S(t)|| \leq Me^{-\omega t}, \forall t \geq 0, M \geq 1 \text{ e } \omega > 0.$$

Teorema 2.2.4. *(Teorema de Gearhart)*
Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0-semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta\}, \beta \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{|\beta| \longrightarrow \infty} \sup ||(i\beta - A)^{-1}|| < \infty.$$

Demonstração. Serão seis etapas para concluirmos a prova

1. $\lambda \in \rho(S(t))$ implicando $||S(t)|| < |\lambda|$, $\forall t \geq 0$.

   Definimos $S := S(t) = e^{At}$, $\forall t \geq 0$ e $\lambda \in \rho(S)$.

   Como

$$(\lambda I - S)^{-1} = \lambda^{-1} \frac{1}{(I - \lambda^{-1} S)}.$$

   e pela série

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n = \frac{1}{I - T}, \text{ se } ||T|| < 1,$$

   obtemos

$$(\lambda I - S)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^{-1} S)^j, \text{ se } ||\lambda^{-1} S|| < 1.$$

   Segue

$$\frac{1}{|\lambda|} ||S|| < 1 \Rightarrow ||S|| < |\lambda|, \forall t \geq 0.$$

2. $||S(t)|| \geq |\lambda| \Rightarrow \sigma(S(t)) \subset B_{||S(t)||}(0) = \{\lambda \in C; \lambda \leq ||S(t)||\}$.

   Pela etapa anterior temos que $\lambda \in \rho(S(t))$ implica $||S(t)|| < |\lambda|$.

   Se $||S(t)|| \geq |\lambda|$ implica $\lambda \notin \rho(S(t))$ e por definição $\lambda \in \sigma(S(t))$. Temos

$$|\lambda| \leq ||S(t)|| \Rightarrow \lambda \in B_{||S(t)||}(0)$$

   e

$$\sigma(S(t)) \subset \{\lambda \in C; |\lambda| \leq ||S(T)||\}.$$

3. Se $1 \in \rho(e^A)$ então

   (a) $\{2\pi in; n \in (Z)\} \subset \rho(A)$;

   (b) $sup||(2\pi inI - A)^{-1}|| =: M < \infty$.

   Se $1 \in \rho(e^A)$, considere a sucessão de operadores $(T_n)_{n\in Z}$, onde para cada $n \in (Z)$ definimos

$$T_n x = (I - e^A)^{-1} \int_0^1 e^{As} e^{-2\pi ins} x ds, \forall x \in H e n \in Z.$$

   Notemos que T_n está bem definido, para todo $n \in Z$, tendo que,$(I - e^A)^{-1}$ é invertível, linear, limitado e a integral é finita.

   O operador A comuta com e^{As} e com $(\lambda I - A)^{-1}$

   Temos $\forall x \in D(A)$,

$$(2\pi inI - A)T_n x = T_n(2\pi inI - A)x.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
T_n(2\pi inI - A)x &= (I-e^A)^{-1}\int_0^1 e^{(A-2\pi inI)s}(2\pi inI - A)xds\\
&= (I-e^A)^{-1}\int_0^1 (2\pi inI - A)e^{(A-2\pi inI)s}xds\\
&= -(I-e^A)^{-1}\int_0^1 (A-2\pi inI)e^{(A-2\pi inI)s}xds\\
&= -(I-e^A)^{-1}\int_0^1 \frac{d}{ds}e^{(A-2\pi inI)s}xds
\end{aligned}
$$

obtemos pelo Teorema Fundamental do Cálculo para operadores

$$-(I-e^A)^{-1}(e^{A-2\pi in}x - Ix) = (I-e^A)^{-1}(Ix - e^{A-2\pi in}x) = (I-e^A)^{-1}(I-e^A)x = x,$$

$$e^{A-2\pi in} = e^A e^{-2\pi in} = e^A(cos(-2\pi n) + isen(-2\pi n)) = e^A, \forall n \in Z$$

logo

$$(2\pi inI - A)T_n x = x.$$

concluimos $(2\pi inI - A)$ é invertível, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $(2\pi inI - A)^{-1} = T_n$.

$$
\begin{aligned}
||(2\pi inI - A)^{-1}|| &= ||T_n|| = ||(I-e^A)^{-1}\int_0^1 e^{(A-2\pi inI)s}||\\
&\leq ||(I-e^A)^{-1}||\ \ ||\int_0^1 e^{(A-2\pi inI)s}||\\
&\leq ||(I-e^A)^{-1}||\int_0^1 ||e^{(A-2\pi inI)s}||\\
&\leq ||(I-e^A)^{-1}|| \sup_{0\leq s\leq 1}||e^{As}|| \leq c.k =: M < \infty,
\end{aligned}
$$

assim obtemos a verificação do item b. Como consequência imediata,

$$\{2\pi in; n \in Z\} \subseteq \rho(A),$$

que verifica o item a.

4. Seja $\mu > 0$ e $L_\mu = \lambda \in C; e^{\lambda=\mu}$. Se $z \in \frac{1}{t}L_1$ então $z \in \rho(A)$.

Se $z \in \frac{1}{t}L_1$ temos $z = \frac{\lambda}{t} \in C$ e $e^{\frac{\lambda}{t}} = 1$, $\forall\lambda = a + bi; a, b \in R$ e $t > 0$.

Então

$$e^{\frac{a+bi}{t}} = e^{\frac{a}{t}}e^{\frac{b}{t}i} = e^{\frac{a}{t}}\left(\cos\frac{b}{t} + \text{ i sen }\frac{b}{t}\right) = 1.$$

tomando $\frac{a}{t} = 0$ e $\frac{b}{t} = 2\pi n, paratodon \in \mathbb{Z}$ e $t > 0$ temos $a = 0$ e $b = 2\pi nt$. Teremos $z = 2\pi ni$.

Segue de a da etapa c que $z = 2\pi ni \in \rho(A)$. Logo,

$$\frac{1}{t} \subset \rho(A).$$

Obtemos

$$sup_{\lambda\in\frac{1}{t}L_1}||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq k.$$

5. Temos de modo geral que se $e^{\alpha t} \in \rho(e^{At})$ então

$$((\frac{2\pi n}{t}i + \alpha)I - A)^{-1} \in \mathcal{L}.$$

Se $e^{\alpha t} \in \rho(e^{At})$ então

$$(e^{\alpha t}I - e^{At})^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow e^{-\alpha t}(I - e^{(A-\alpha I)t})^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow (I - e^{(A-\alpha I)t})^{-1} \in \mathcal{L}(H)$$

$$\Rightarrow 1 \in \rho(e^{(A-\alpha I)t} \Rightarrow 2\pi ni \in \rho((A-\alpha I)t).$$

Isto implica

$$(2\pi niI - ((A-\alpha I)t))^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow t^{-1}((\frac{2\pi n}{t}i + \alpha)I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$$

$$\Rightarrow ((\frac{2\pi n}{t}i + \alpha)I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H),$$

como desejávamos.

6. Para todo $t > 0$, o raio espectral

$$R_E(e^{At}) = \lim_{s \longrightarrow \infty}[||e^{As}||^{\frac{1}{s}}]^t < 1.$$

Das hipotéses do teorema,

$$sup_{\mu \in B}||(\mu I - A)^{-1}|| \leq M, \text{ onde } B := \{i\beta; \beta \in Re||e^{i\beta}|| = 1\}.$$

Sendo $S(t) = e^{At}$ um C_0 - semigrupo de contrações, $||S(t)|| \leq 1$, segue da etapa 2 que o espectro

$$\sigma(e^{At}) \subset B_1[0] := \{\lambda \in C; |\lambda| \leq 1\}$$

Tem-se $e^{\mu} \in \rho(e^{At})$, com $\mu \in iR$. Particularmente, $e^{i\theta} \in \rho(e^{At})$, $\forall \theta \in R$. Existe $\theta = 2k\pi$, $k \in Z$ tal que $e^{i\theta} = 1$, segue que $1 \in \rho(e^{At})$.

Sendo

$$\sigma(e^{At}) \subset B_1[0] \text{ e } 1 \in \rho(e^{At})$$

então

$$\sigma(e^{At}) \subset B_1(0) = \{\lambda \in C.|\lambda| < 1\};$$

Os conjuntos $\sigma(e^{At})$ e $\rho(e^{At})$ são disjuntos e $\rho(e^{At})$ é aberto, concluímos que $\sigma(e^{At})$ é fechado e tambem compacto. Logo

$$sup\sigma(e^{At}) < 1.$$

Por outro lado temos que para todo $t > 0$

$$R_E(e^{At}) = \lim_{k \longrightarrow \infty} ||e^{Atk}||^{\frac{1}{k}}.$$

Fazendo $t \cdot k = s$ temos que $k = \frac{s}{t}$.

$$R_E(e^{At}) = \lim_{\frac{s}{t} \longrightarrow \infty} ||e^{At}||^{\frac{1}{\frac{s}{t}}} = \lim[||e^{As}||^{\frac{1}{s}}]^t.$$

sendo $\lim_{s \longrightarrow \infty} ||e^{As}||^{\frac{1}{s}} < 1$, segue

$$\ln \lim_{s \longrightarrow \infty} ||e^{As}||^{\frac{1}{s}} < \ln 1.$$

usando a continuidade da função logaritmica,

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \ln ||e^{As}||^{\frac{1}{s}} < 0,$$

implicando

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{\ln ||e^{As}||}{s} < 0.$$

Teremos que $\lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{\ln ||e^{As}||}{s} = -\gamma$, $\gamma > 0$.

Por definição, dado $\epsilon > 0$, $\exists s_0$ tal que $s > s_0$ temos

$$\left| \frac{\ln ||e^{As}||}{s} + \gamma \right| < \epsilon.$$

Assim,

$$-\epsilon - \gamma < \frac{\ln ||e^{As}||}{s} < \epsilon - \gamma$$

tomando $\epsilon = \frac{\gamma}{2}$ temos

$$\frac{\ln ||e^{As}||}{s} \leq -\frac{\gamma}{2} \Rightarrow \ln ||e^{As}|| \leq -\frac{\gamma s}{2}.$$

Portanto,

$$||e^{As}|| \leq e^{-\gamma \frac{s}{2}},$$

o que conclui a prova.

$\square$

Capítulo 3

Método via Semigrupos

Neste capítulo, estudaremos existência e unicidade de solução e estabilidade exponencial do semigrupo associado a modelos dissipativos. Para tal estudo, utilizaremos o método via semigrupo.

3.1 Sistema Termoelástico

Provaremos a estabilidade exponencial do semigrupo associado ao sistema termoelástico unidimensional linear. Consideremos uma barra de comprimento l com densidade unitária. Denotaremos por u o deslocamento transversal e por θ a diferença de temperatura entre uma barra e o meio ambiente. As equações descritas no sistema abaixo são ditas equação do momento e equação da energia, respectivamente.

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x = 0, em(0, L) \times (0, \infty), \tag{3.1.1}$$

$$\theta_t - \theta_{xx} + \alpha u_{xt} = 0, em(0, L) \times (0, \infty). \tag{3.1.2}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0, \tag{3.1.3}$$

$$\theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, t > 0, \tag{3.1.4}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in (0, L), \tag{3.1.5}$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), x \in (0, L), \tag{3.1.6}$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), x \in (0, L). \tag{3.1.7}$$

3.1.1 Existência e Unicidade de Solução

O espaço de energia associado ao modelo (3.1.1) – (3.1.7) é

$$H = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L).$$

O produto interno nesse espaço é definido para $U_j = (u^j, v^j, w^j) \in H$, $j = 1, 2$, do seguinte mo do

$$< U_1, U_2 >= \int_0^L u_x^1 u_x^2 dx + \int_0^L v^1 v^2 dx + \int_0^L w^1 w^2 dx.$$

A norma no espaço de energia será denotada por $||U||^2 =< U, U >$,onde H é um espaço de Hilbert.

O sistema (3.1.1) – (3.1.7) pode ser escrito na forma

$$\frac{d}{dt}U(t) - AU(t) = 0,$$

onde $v = u_t, w = \theta$,

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\alpha\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\alpha\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}.$$

O domínio para A é

$$D(A) = \left[H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)\right] \times H_0^1(0,L) \times \left[H_0^1(0,L) \cap H^2(0,l)\right].$$

O domínio $D(A)$ é denso em H.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \overline{D(A)}^H &= \overline{H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)}^{H_0^1(0,L)} \times \overline{H_0^1(0,L)}^{L^2(0,L)} \times \overline{H_0^1(0,L) \cap H^2(0,l)}^{L^2(0,L)} \\ &= H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L) = H. \end{aligned}$$

□

Em relação ao operador A, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.1. *O operador A gera um C_0 - semigrupo de contrações em H.*

Demonstração. Para provarmos essa propridade do operador A usaremos o teorema de $Lummer - Phillips$.

Para $U = (u, v, w) = (u, u_t, \theta) \in D(A)$, integrando por partes, teremos

$$\begin{aligned} < AU, U > &= \int_0^L u_{tx}u_x dx + \int_0^L u_t(u_{xx} - \alpha\theta_x)dx + \int_0^L \theta(-\alpha u_{tx} + \theta_{xx})dx \\ &= \int_0^L u_{tx}u_x dx + \int_0^L u_t u_{xx} dx - \alpha \int_0^L u_t\theta_x dx - \alpha \int_0^L \theta u_{tx} dx + \int_0^L \theta\theta_{xx} dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes e usando a condição de contorno em:

$$-\int_0^L \theta u_{tx} dx = \int_0^L \theta_x u_t dx$$

e

$$\int_0^L u_t u_{xx} dx = -\int_0^L u_{tx} u_x dx.$$

Substituindo teremos

$$< AU, U > = \int_0^L u_{tx}u_x dx - \int_0^L u_{tx}u_x dx - \alpha \int_0^L u_t\theta_x dx + \alpha \int_0^L \theta_x u_t dx + \int_0^L \theta\theta_{xx} dx$$

restando

$$< AU, U >= \int_0^L \theta\theta_{xx} dx.$$

Integrando $\int_0^L \theta\theta_{xx} dx$ por partes obtemos

$$\int_0^L \theta\theta_{xx} dx = -\int_0^L \theta_x\theta_x dx = -\int_0^L |\theta_x|^2 dx.$$

Assim

$$< AU, U >= -\int_0^L |\theta_x|^2 dx \leq 0.$$

Portanto, A é dissipativo c.q.d.

Resta mostrar que existe $\lambda > 0$ tal que a imagem $Im(\lambda I - A) = H$.

Dado $F = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) = H$, existe uma única $U \in H$ tal que U$-AU = F$, ou seja

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha\theta_x \\ \theta_{xx} - \alpha v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix}.$$

Queremos mostrar que

$$U \in D(A) = \left[H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)\right] \times H_0^1(0, L) \times \left[H_0^1(0, L) \cap H^2(0, l)\right].$$

Temos,

$$\begin{aligned} u - v &= f^1 && (1) \\ v - u_{xx} + \alpha\theta_x &= f^2 && (2) \\ \theta - \theta_{xx} + \alpha v_x &= f^3 && (3) \end{aligned}$$

Somando (1) e (2) segue que

$$u - u_{xx} + \alpha\theta_x = f^1 + f^2 \qquad (4)$$

Derivando (1) em relação a x,

$$u_x - v_x = f^1 \Longrightarrow v_x = u_x - f_x^1$$

e substituindo na (3)

$$\theta - \theta_{xx} + \alpha(u_x - f_x^1) = f^3 \Longrightarrow \theta - \theta_{xx} + \alpha u_x = f^3 + \alpha f_x^1 \qquad .(5)$$

Temos então

$$\begin{aligned} u - u_{xx} + \alpha\theta_x &= f^1 + f^2 && (4) \\ \theta - \theta_{xx} + \alpha u_x &= f^3 + \alpha f_x^1 && .(5) \end{aligned}$$

Multipliando (4) por u e integrando, notando que

$$\int_0^L u_{xx} u dx = -\int_0^L |u_x|^2 dx \text{ sobre o intervalo } [0, L].$$

Multiplicando (5) por θ e integrando, notando que

$$\int_0^L \theta_{xx}\theta dx = -\int_0^L \theta_x\theta_x dx = -\int_0^L |\theta_x|^2 dx$$

e que

$$\int_0^L \theta_x u dx = -\int_0^L u_x \theta dx.$$

Substituindo obtemos

$$\int_0^L |u|^2 dx + \int_0^L |u_x|^2 dx + \alpha \int_0^L \theta_x u dx = \int_0^L (f^1 + f^2) u dx$$

$$\int_0^L |\theta|^2 dx + \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \alpha \int_0^L \theta u_x dx = \int_0^L (f^3 + \alpha f_x^1)\theta dx.$$

Somando-se as igualdades anteriores

$$\int_0^L |u|^2 dx + \int_0^L |u_x|^2 dx + \int_0^L |\theta|^2 dx + \int_0^L |\theta_x|^2 dx = \int_0^L (f^1 + f^2) u dx + \int_0^L (f^3 + \alpha f_x^1)\theta dx$$

$$\int_0^L (|u|^2 + |u_x|^2 + |\theta|^2 + |\theta_x|^2) dx = \int_0^L (f^1 + f^2) u dx + \int_0^L (f^3 + \alpha f_x^1)\theta dx$$

assim teremos

$$\int_0^L (|u|^2 + |u_x|^2 + |\theta|^2 + |\theta_x|^2) dx \leq \int_0^L |u|^2 dx \int_0^L |f^1 + f^2|^2 dx + \int_0^L |\theta|^2 dx \int_0^L |f^3 + \alpha f_x^1|^2 dx.$$

Denotando

$$\int_0^L |u|^2 dx = K_1 \text{ e } \int_0^L |\theta|^2 dx = K_2$$

temos

$$\int_0^L (|u|^2 + |u_x|^2 + |\theta|^2 + |\theta_x|^2) dx \leq K_1 \int_0^L |f^1 + f^2|^2 dx + K_2 \int_0^L |f^3 + \alpha f_x^1|^2 dx.$$

Observamos que podemos ter $K_3||f^2||^2 \geq ||f^1 + f^2||^2$,

$$\int_0^L (|u|^2 + |u_x|^2 + |\theta|^2 + |\theta_x|^2) dx \leq K_1 K_3 \int_0^L |f^2|^2 dx + K_2 \int_0^L |f^3 + \alpha f_x^1|^2 dx.$$

Usando a desigualdade Minkowski,

$$\int_0^L (|u|^2+|u_x|^2+|\theta|^2+|\theta_x|^2)dx \leq K_1K_3\int_0^L |f^2|^2dx + K_2\left[\int_0^L |f^3|^2dx + \alpha\int_0^L |f_x^1|^2dx\right]$$

chamando de $K = \text{máx}\,\{K_1K_3, K_2, K_2\alpha\}$

$$\int_0^L (|u|^2+|u_x|^2+|\theta|^2+|\theta_x|^2)dx \leq K\left[\int_0^L |f_x^1|^2dx + \int_0^L |f^2|^2dx + \int_0^L |f^3|^2dx\right] = K||F||.$$

Temos então,

$$v = u - f^1 \text{ e } \begin{cases} u \in H_0^1 \\ f^1 \in H_0^1 \end{cases} \Longrightarrow v \in H_0^1,$$

$$u_{xx} = v + \alpha\theta_x - f^2 \text{ e } \begin{cases} v \in H_0^1 \hookrightarrow L^2 \\ \theta_x \in L^2 \\ f^2 \in L^2 \end{cases} \Longrightarrow u_{xx} \in L^2 \Longrightarrow u \in H_0^1 \cap H^2$$

$$\theta_{xx} = \theta + \alpha v_x - f^3 \text{ e } \begin{cases} \theta \in H_0^1 \hookrightarrow L^2 \\ v_x \in L^2 \\ f^3 \in H_0^1 \hookrightarrow L^2 \end{cases} \Longrightarrow \theta_{xx} \in L^2 \Longrightarrow \theta \in H_0^1 \cap H^2.$$

Mostramos que $U \in D(A)$ e que $U - AU = F$, isto é

$$(I - A)U = F$$

e para $\lambda = 1$

$$Im\lambda I - A = H.$$

Pelo Teorema de Lummer - Phillips A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações ($S(t) = e^{At}$).

□

3.1.2 Estabilidade Exponencial

Iremos provar nesta seção que o semigrupo $S(t)_{t\geq 0}$, gerado pelo operador A, associado ao problema termoelástico é exponencialmente estável pelo Teorema de Gearhart. Temos o Teorema

Teorema 3.1.2. *O semigrupo de contrações de classe C_0, $S(t)_{t\geq 0}$, gerado por A, é exponencialmente estável, isto é, existem constantes positivas M e ω tais que*

$$||S(t)|| \leq Me^{-\omega t}$$

Demonstração. Faremos por contradição em 2 etapas.

1. Se não é verdade que $\rho(A) \supset \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}$, então existe $\beta \in \mathbb{R}$ com $i\beta \in \sigma(A)$.

   Da imersão compacta de $D(A)$ em H, podemos afirmar que $\sigma(A)$ é discreto, logo existe $w \neq 0$ em H que resolve o seguinte problema espectral,

   $$Aw = i\beta w.$$

   Tomando o produto interno por w

   $$< Aw, w >=< i\beta w, w >= i\beta < w, w >= i\beta ||w||^2.$$

   Agora escrevendo $w = (w^1, w^2, w^3)$

   $$Re < Aw, w >= -\int_0^L |w_x^3|^2 dx = 0.$$

   Considerando sistema abaixo e resolvendo,

   $$w^2 = i\beta w^1$$

   $$w_{xx}^1 - \alpha w_x^3 = i\beta w^2$$

   $$w_{xx}^3 - \alpha w_x^2 = i\beta w^3$$

   Obtemos que $w = 0$, onde encontramos uma contradição.

   Logo vale que $\rho(A) \supset \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}$.

2. Suporemos que $\lim_{|\lambda|\longrightarrow\infty} \sup ||(\lambda I - A)^{-1}|| = \infty$, com $\lambda = i\beta$.

   Neste caso temos que existe $(V_n)_{n\in N}$ e que

$$\frac{||(\lambda_n I - A)^{-1} V_n||}{||V_n||} \geq n,$$

   seguindo que

$$||(\lambda_n I - A)^{-1} V_n|| \geq n||V_n||.$$

   Tomando $(V_n)_{n\in N} \in H$ e $\lambda_n \in \rho(A)$, existe uma sequência única $(U_n)_{n\in N} \in D(A)$ que

$$\lambda_n U_n - AU_n = V_n, ||U_n|| = 1.$$

   Substituindo $\lambda_n U_n - AU_n = V_n$ em $||(\lambda_n I - A)^{-1} V_n|| \geq n||V_n||$,

$$||(\lambda_n I - A)^{-1} \lambda_n U_n - AU_n|| \geq n||\lambda_n U_n - AU_n||$$
$$||(\lambda_n I - A)^{-1} (\lambda_n - A) U_n|| \geq n||\lambda_n U_n - AU_n||$$
$$||U_n|| \geq n||\lambda_n U_n - AU_n||,$$

   chamando $f_n = \lambda_n U_n - AU_n$ teremos que

$$||f_n|| \leq \frac{1}{n}$$

   e daí

$$f_n \stackrel{forte}{\longrightarrow} 0 \text{ em } H.$$

Escrevendo $f_n = \lambda_n U_n - AU_n$ na forma

$$\lambda_n u^n - v^n = f_n^1,$$

$$\lambda_n v^n - u_{xx}^n + \alpha\theta_x^n = f_n^2,$$

$$\lambda_n \theta^n - \theta_{xx}^n + \alpha v_x^n = f_n^3.$$

Temos que

$$\int_0^L (|\theta_{xx}^n|^2 + |u_{xx}|^2)dx \leq C \text{ e que } \int_0^L (|u_x^n|^2 + |\theta^n|^2 + |v^n|^2)dx = ||U_n||^2 = 1,$$

existe (u, v, θ) , que $(u^n, v^n, \theta^n) \longrightarrow (u, v, \theta)$ com

$$\int_0^L (|u_x|^2 + |\theta|^2 + |v|^2)dx = 1.$$

Vamos mostrar que $\theta^n \longrightarrow 0$ em L^2 quando $n \longrightarrow \infty$.

Seja $f_n = \lambda_n U_n - AU_n$, fazendo o produto interno por U_n

$$\lambda_n < U_n, U_n > - < AU_n, U_n > = < f_n, U_n >$$

$$\lambda_n ||U_n||^2 + \int_0^L |\theta_x^n|^2 dx = < f_n, U_n >$$

$$i\beta ||U_n||^2 + \int_0^L |\theta_x^n|^2 dx = < f_n, U_n >$$

observando que

$$\int_0^L |\theta_x^n|^2 dx \quad \leq \quad < f_n, U_n > \quad \leq \quad ||f_n|| \quad ||U_n||$$

teremos

$$\int_0^L |\theta_x^n|^2 dx \longrightarrow 0$$

pela desigualdade de Poincaré

$$\int_0^L |\theta^n|^2 dx \leq \int_0^L |\theta_x^n|^2 dx \Longrightarrow \int_0^L |\theta^n|^2 dx \longrightarrow 0 \Longrightarrow ||\theta^n||^2 \longrightarrow 0 \Longrightarrow \theta^n \longrightarrow 0.c.q.d$$

Mostrar que $u_x^n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Dividindo por λ_n a igualdade,

$$\lambda_n v^n - u_{xx}^n + \alpha\theta_x^n = f_n^2,$$

obtemos

$$v^n - \frac{u_{xx}^n}{\lambda_n} + \alpha\frac{\theta_x^n}{\lambda_n} = \frac{f_n^2}{\lambda_n} \longrightarrow 0 \text{ em } L^2,$$

onde $\dfrac{\theta_x^n}{\lambda_n}$ é limitada pela desigualdade de Poincaré

$$\left|\left|\frac{u_x^n}{\lambda_n}\right|\right| \leq C \left|\left|\frac{u_{xx}^n}{\lambda_n}\right|\right|;$$

logo, $\dfrac{u_x^n}{\lambda_n}$ é limitada.
Utilizando a seguinte desigualdade,

$$\theta_x^n u_x^n < 2||\theta_x^n||_{L^\infty}\ ||u_x^n||_{L^\infty}$$

e $\infty > 2 \Longrightarrow ||\cdot||_{L^\infty} < ||\cdot||_{L^2}$ temos que

$$\theta_x^n u_x^n < 2||\theta_x^n||_{L^2}\ ||u_x^n||_{L^2}$$

Agora usando um resultado de interpolação segue que

$$\theta_x^n u_x^n < 2||\theta_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||\theta_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}\ ||u_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||u_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}$$

e usando a desigualdade de Poincaré,

$$\theta_x^n u_x^n < 2||\theta_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||\theta_x^n||_{H^1}^{\frac{1}{2}}\ ||u_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}||u_x^n||_{H^1}^{\frac{1}{2}}.$$

Dividindo a desigualdade anterior por λ_n,

$$\frac{\theta_x^n}{\lambda_n} u_x^n < 2||\theta_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left|\left|\frac{\theta_x^n}{\lambda_n}\right|\right|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\ ||u_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left|\left|\frac{u_x^n}{\lambda_n}\right|\right|_{H^1}^{\frac{1}{2}}.$$

Por resultados anteriores sabemos que

$$||\theta_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$$

$$\left|\left|\frac{\theta_x^n}{\lambda_n}\right|\right|_{H^1}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$$||u_x^n||_{L^2}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

$$\left\|\frac{u_x^n}{\lambda_n}\right\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Portando $u_x^n \longrightarrow 0$. c.q.d.

Mostrar que $v_x^n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Utilizando as igualdades

$$\lambda_n u^n - v^n = f_n^1$$

$$\lambda_n u_{xx}^n + \alpha \theta_x^n = f_n^2,$$

multiplicamos a primeira por $\lambda_n u^n$ e a segunda por u^n, temos como resultado

$$\lambda_n^2 \int_0^L |u^n|^2 dx - \lambda_n \int_0^L v^n u^n dx = \lambda_n \int_0^L f_n^1 u^n dx$$

$$\lambda_n \int_0^L v^n u^n dx - \int_0^L u_{xx}^n u^n dx + \alpha \int_0^L \theta_x^n u^n dx = \int_0^L f_n^2 u^n dx.$$

Somando as igualdades anteriores, temos

$$\lambda_n^2 \int_0^L |u^n|^2 dx - \int_0^L u_{xx}^n u^n dx + \alpha \int_0^L \theta_x^n u^n dx = \lambda_n \int_0^L f_n^1 u^n dx + \int_0^L f_n^2 u^n dx.$$

Sabendo que $\int_0^L u_{xx}^n u^n dx = -\int_0^L |u_x^n|^2 dx$, substituindo na expressão anterior teremos,

$$\lambda_n^2 \int_0^L |u^n|^2 dx + \int_0^L |u_x^n|^2 dx + \alpha \int_0^L \theta_x^n u^n dx = \int_0^L (\lambda_n u^n) \left(f_n^1 + \frac{f_n^2}{\lambda_n} \right) dx.$$

Utilizando a desigualdade de Young $\left(a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$ no lado direito da igualdade anterior

$$\begin{aligned}
\int_0^L (\lambda_n u_n)\left(f_n^1 + \frac{f_n^2}{\lambda_n}\right) dx &\leq \int_0^L \frac{|\lambda_n u^n|^2}{2} dx + \int_0^L \frac{\left|f_n^1 + \frac{f_n^2}{\lambda_n}\right|^2}{2} dx \\
&= \int_0^L \frac{\lambda_n^2 |u^n|^2}{2} dx + \int_0^L \frac{\left|f_n^1 + \frac{f_n^2}{\lambda_n}\right|^2}{2} dx \\
&= \frac{\lambda_n^2}{2} \int_0^L |u^n|^2 dx + \int_0^L \frac{\left|f_n^1 + \frac{f_n^2}{\lambda_n}\right|^2}{2} dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda_n^2 \int_0^L |u^n|^2 dx + \int_0^L |u_x^n|^2 dx + \alpha \int_0^L \theta_x^n u^n dx \leq \frac{\lambda_n^2}{2} \int_0^L |u^n|^2 dx + \int_0^L \frac{\left|f_n^1 + \frac{f_n^2}{\lambda_n}\right|^2}{2} dx$$

$$-\frac{\lambda_n^2}{2} \int_0^L |u^n|^2 dx + \lambda_n^2 \int_0^L |u^n|^2 dx + \int_0^L |u_x^n|^2 dx + \alpha \int_0^L \theta_x^n u^n dx \leq \frac{1}{2} \int_0^L \left|f_n^1 + \frac{f_n^2}{\lambda_n}\right|^2 dx$$

chamando $\frac{1}{\lambda_n} = C$,

$$\frac{\lambda_n^2}{2} \int_0^L |u^n|^2 dx + \int_0^L |u_x^n|^2 dx + \alpha \int_0^L \theta_x^n u^n dx < \int_0^L |f_n^1 + C f_n^2|^2 dx,$$

o que implica $u^n \longrightarrow 0$.

Como $\lambda_n u^n - v^n = f^1 \longrightarrow 0$ e $u^n \longrightarrow 0 \Longrightarrow v^n \longrightarrow 0$.

Portanto, pela unicidade do limite chegamos a uma contradição, logo o teorema está demonstrado.

$\square$

Capítulo 4

Método da Energia

Neste capítulo mostraremos o decaimento exponencial da energia,$E(t)$, mas para isso vamos construir um funcional de Lyapunov $\mathcal{L}$.

4.1 Decaimento Exponencial de $E(t)$

Temos as equações termoelásticas homogêneas com coeficientes constantes,

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \tag{4.1.1}$$

$$\theta_t - \theta_{xx} + \beta u_{xt} = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, \infty). \tag{4.1.2}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t \geq 0,$$

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0, t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in [0, L],$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), x \in [0, L],$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), x \in [0, L].$$

A energia do sistema é dada pela expressão,

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[|u_t|^2 + |u_x|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\right] dx; \alpha, \beta > 0$$

Queremos construir um funcional $\mathcal{L}(t)$ que satisfaça as seguinte condição,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\gamma\mathcal{L}(t).$$

Multiplicando a equação (4.1.1) por u_t e equação (4.1.2) por $\frac{\alpha}{\beta}\theta$ temos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u_x|^2 dx - \alpha\int_0^L \theta u_{tx} dx = 0$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{\alpha}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx + \alpha\int_0^L u_{xt}\theta dx = 0.$$

Somando-as,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\alpha}{2\beta}\frac{d}{dt}\int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{\alpha}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx = 0$$

usando as propriedades da derivada,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^L |u_t|^2 dx + \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^L |\theta|^2 dx\right] = -\frac{\alpha}{\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left[\int_0^L \left(|u_t|^2 + |u_x|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\right) dx\right] = -\frac{\alpha}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx$$

chegamos a,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{\alpha}{\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx.$$

Mostramos até aqui que a Energia decresce com o passar do tempo. Mas o nosso objetivo principal é justamente mostrar que $E(t) \to 0$ exponencialmente quando $t \to +\infty$.

Agora faremos o seguinte,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{\alpha}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx - \frac{\alpha}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx,$$

temos pela desigualdade de Poincaré que

$$\int_0^L |\theta|^2 dx \leq c_p \int_0^L |\theta_x|^2 dx \Longrightarrow -\frac{1}{c_p}\int_0^L |\theta|^2 dx \geq -\int_0^L |\theta_x|^2 dx \Longrightarrow$$

$$-\frac{\alpha}{2c_p\beta}\int_0^L |\theta|^2 dx \geq -\frac{\alpha}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx$$

chamando $c_2 = \dfrac{\alpha}{2c_p\beta}$, teremos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{\alpha}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx - \frac{\alpha}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx \leq -\frac{\alpha}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx - c_2\int_0^L |\theta|^2 dx. \tag{4.1.3}$$

Multiplicamos agora a equação (4.1.1) por u,

$$\int_0^L u_{tt} u dx - \int_0^L u_{xx} u dx + \alpha\int_0^L \theta_x u dx = 0,$$

agora observamos as seguintes igualdades,

$$\frac{d}{dt}(u, u_t) = (u_t, u_t) + (u, u_{tt}) \Longrightarrow (u, u_{tt}) = \frac{d}{dt}(u, u_t) - (u_t, u_t)$$

$$\Longrightarrow \int_0^L u u_{tt} dx = \frac{d}{dt}\int_0^L u u_t dx - \int_0^L |u_t|^2 dx$$

e integrando por partes obtemos

$$\int_0^L uu_{xx}dx = u_x u\Big|_0^L - \int_0^L u_x u_x dx \Longrightarrow \int_0^L uu_{xx}dx = -\int_0^L |u_x|^2 dx$$

$$\int_0^L u\theta_x dx = \theta u\Big|_0^L - \int_0^L \theta u_x dx \Longrightarrow \int_0^L u\theta_x dx = -\int_0^L \theta u_x dx$$

teremos então que ,

$$\frac{d}{dt}\int_0^L uu_t dx - \int_0^L |u_t|^2 dx + \int_0^L |u_x|^2 dx + \alpha \int_0^L \theta_x u dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^L uu_t dx = \int_0^L |u_t|^2 dx - \int_0^L |u_x|^2 dx + \alpha \int_0^L \theta u_x dx.$$

Utilizando a desigualdade $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ em $\alpha \int_0^L \theta u_x dx$

$$\begin{aligned}\alpha \int_0^L \theta u_x dx = \int_0^L \alpha\theta u_x dx \quad &\leq \frac{1}{2}\int_0^L |\alpha\theta|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L |u_x|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \alpha^2|\theta|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L |u_x|^2 dx = \frac{\alpha^2}{2}\int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L |u_x|^2 dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_0^L uu_t dx \leq \int_0^L |u_t|^2 dx - \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L |u_x|^2 dx.$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^L uu_t dx \leq \int_0^L |u_t|^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^L |\theta|^2 dx. \qquad (4.1.4)$$

Somando (4.1.3) com (4.1.4) e ε suficientemente pequeno,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t)+\varepsilon\frac{d}{dt}\int_0^L uu_t dx &= \frac{d}{dt}\left(E(t)+\varepsilon\int_0^L uu_t dx\right)\\
&\leq -\frac{\alpha}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2dx - c_2\int_0^L |\theta|^2dx + \varepsilon\int_0^L |u_t|^2dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_0^L |u_x|^2dx\\
&+\frac{\varepsilon\alpha^2}{2}\int_0^L |\theta|^2dx\\
&= -\frac{\alpha}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2dx - \left(c_2-\varepsilon\frac{\alpha^2}{2}\right)\int_0^L |\theta|^2dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_0^L |u_x|^2dx\\
&+\varepsilon\int_0^L |u_t|^2dx.
\end{aligned}
$$

Agora iremos integra a expressão (4.1.2) de 0 a x

$$\int_0^x \theta_t ds - \int_0^x \theta_{xx} ds + \beta\int_0^x u_{tt} ds = 0.$$

Pelo Teorema fundamental do Cálculo obtemos,

$$\int_0^x \theta_t ds - [\theta_x(x)-\theta_x(0)] + \beta[u_t(x)-u_t(0)] = 0$$

pelas condições de contorno

$$\int_0^x \theta_t ds - \theta_x + \beta u_t = 0$$

multiplicando por u_t e integrando de 0 a L, obtemos

$$\int_0^L \left(\int_0^x \theta_t\right) u_t dx - \int_0^L \theta_x u_t dx + \beta\int_0^L |u_t|^2 dx = 0$$

$$\int_0^L \frac{d}{dt}\left(\int_0^x \theta\right) u_t dx = \int_0^L \theta_x u_t dx - \beta \int_0^L |u_t|^2 dx \leq \frac{1}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx - \frac{\beta}{2}\int_0^L |u_t|^2 dx. \tag{4.1.5}$$

Agora observamos que

$$\frac{d}{dt}(\int_0^x \theta, u_t) = \left(\frac{d}{dt}\int_0^x \theta, u_t\right) + \left(\int_0^x \theta, u_{tt}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \left(\int_0^x \theta\right) u_t dx\right\} = \int_0^L \frac{d}{dt}\left(\int_0^x \theta\right) u_t dx + \int_0^L \left(\int_0^x \theta\right) u_{tt} dx.$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \left(\int_0^x \theta\right) u_t dx\right\} - \int_0^L \left(\int_0^x \theta\right) u_{tt} dx = \int_0^L \frac{d}{dt}\left(\int_0^x \theta\right) u_t dx.$$

Substituindo na desigualdade (4.1.5) obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \left(\int_0^x \theta\right) u_t dx\right\} - \int_0^L \left(\int_0^x \theta\right) u_{tt} dx \leq \frac{1}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx - \frac{\beta}{2}\int_0^L |u_t|^2 dx. \tag{4.1.6}$$

Usando a equação $u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x = 0$,

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha\theta_x = 0 \Longrightarrow u_{tt} = u_{xx} - \alpha\theta_x$$

na expressão

$$\begin{aligned}\int_0^L \left(\int_0^x \theta\right) [u_{xx} - \alpha\theta_x] dx &= \int_0^L \left(\int_0^x \theta\right) \frac{d}{dx}[u_x - \alpha\theta] dx \\ &= -\int_0^L \theta(u_x - \alpha\theta) dx = \alpha \int_0^L |\theta|^2 dx - \int_0^L \theta u_x dx. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

substituindo (4.1.7) em (4.1.6) obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \left(\int_0^x \theta\right) u_t dx\right\} \leq \alpha \int_0^L |\theta|^2 dx - \int_0^L \theta u_x dx + \frac{1}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx - \frac{\beta}{2}\int_0^L |u_t|^2 dx.$$

Faremos agora um estimativa para

$$\begin{aligned}\left|\int_0^L \theta u_x dx\right| = \left|\int_0^L \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\theta\sqrt{\varepsilon}u_x dx\right| \quad &\leq \int_0^L \left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\theta\sqrt{\varepsilon}u_x\right| dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L (\sqrt{\varepsilon}u_x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^L |u_x|^2 dx.\end{aligned}$$

Definimos o seguinte funcional, com δ não dependendo de ε

$$\mathcal{L}(t) = E(t) + \varepsilon\int_0^L u u_t dx + \delta\int_0^L \left(\int_0^x \theta ds\right) u_t dx.$$

Calculando a variação do operador em relação ao tempo teremos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq \quad & -\left(\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\delta}{2\beta}\right)\int_0^L |\theta_x|^2 dx - \left(c_2 - \frac{\alpha^2\varepsilon}{2} - \frac{\alpha\delta}{2} - \frac{\delta}{2\varepsilon}\right)\int_0^L |\theta|^2 dx \\ & -\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta}{2}\right)\int_0^L |u_x|^2 dx - \left(\frac{\beta\delta}{2} - \varepsilon\right)\int_0^L |u_t|^2 dx.\end{aligned}$$

O δ não foi suficiente, vamos agora escolher outra constante. Multiplicando (4.1.3) por $N > 0$ temos

$$\frac{d}{dt}NE(t) \leq -\frac{\alpha N}{2\beta}\int_0^L |\theta_x|^2 dx - c_2 N\int_0^L |\theta|^2 dx.$$

Agora restingindo as constantes, $\delta < 1$, e tomando $\varepsilon << \delta < 1$, N suficientemente grande, segue que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq \; -\left(\frac{\alpha N}{2\beta} - \frac{\delta}{2\beta}\right)\int_0^L |\theta_x|^2 dx - \left(c_2 N - \frac{\alpha^2\varepsilon}{2} - \frac{\alpha\delta}{2} - \frac{\delta}{2\varepsilon}\right)\frac{\beta}{\alpha}\int_0^L \frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2 dx$$
$$-\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta}{2}\right)\int_0^L |u_x|^2 dx - \left(\frac{\beta\delta}{2} - \varepsilon\right)\int_0^L |u_t|^2 dx.$$

existe uma constante $k_0 > 0$ tal que:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -k_0\int_0^L \left(|u_t|^2 + |u_x|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|\theta|^2\right) dx = -k_0 E(t)$$

e k_0 tem valor mínimo no sentido que é o menor número positivo tal que uma desigualdade do tipo $0 < k_0 \leq min\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ vale.

Existe a equivalência abaixo

$$c_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_1 E(t)$$

sabendo que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -k_0 E(t)$$

e observando que

$$-k_0 E(t) \leq \frac{-k_0}{c_1} E(t) \text{ e } \frac{-k_0}{c_1} E(t) \leq \frac{-k_0}{c_1}\mathcal{L}(t)$$

assim

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq \frac{-k_0}{c_1}\mathcal{L}(t).$$

Multiplicando por $\mathcal{L}^{-1}(t)$ e integrando 0 a t, obtemos

$$\int_0^t \mathcal{L}^{-1}(t)\frac{d}{ds}\mathcal{L}(t)ds \leq \int_0^t \frac{-k_0}{c_1}dt \Longrightarrow ln\mathcal{L}(t) - ln\mathcal{L}(0) \leq \frac{-k_0}{c_1}t \Longrightarrow ln\left(\frac{\mathcal{L}(t)}{\mathcal{L}(0)}\right) \leq \frac{-k_0}{c_1}t.$$

Calculando a exponencial de ambos os lados

$$\frac{\mathcal{L}(t)}{\mathcal{L}(0)} \leq e^{\frac{-k_0}{c_1}t} \Longrightarrow \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{\frac{-k_0}{c_1}t}.$$

segue imediatamente que

$$c_0E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{\frac{-k_0}{c_1}t} \leq c_1E(0)e^{\frac{-k_0}{c_1}t}.$$

Assim,

$$c_0E(t) \leq c_1E(0)e^{\frac{-k_0}{c_1}t}.$$

Portanto,

$$E(t) \leq \frac{c_1}{c_0}E(0)e^{\frac{-k_0}{c_1}t}$$

como queríamos demonstrar.

Conclusão

Dado o grande interesse em se enterder matematicamente fenômenos físicos como o descrito pelo sistema $(3.1.1) - (3.1.7)$, é vasta a literatura que aborda o assunto.

A teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados mostrou-se uma ferramenta poderosa na demonstração de existência e unicidade de solução do problema $(3.1.1) - (3.1.7)$. A teoria pode ser aplicada a problemas mais gerais, incluindo os não-lineares.

O comportamento assintótico da solução, o método empregado pode ser utilizado em problemas de evolução mais gerais, com outras condições de contorno. Nestes casos é preciso encontar multiplicadores mais adequados a cada situação.

No caso em que se considera o sistema termoelástico linear em dimensão um, Rivera obteve resultados de decaimento exponencial para a energia, até terceira ordem, do problema $(3.1.1) - (3.1.7)$, mas sem considerar mecanismos de dissipação interna. O resultado obtido é de extrema relevância, visto que só a dissipação térmica é suficiente para a estabilização assintótica da energia.

A análise matemática do comportamento da energia total é, obviamente, de grande interesse para outros sistemas de equações diferenciais parciais, que modelam diferentes fenômenos físicos.

A perspectiva futura é de abordar modelos não-lineares associados ao sistema $(3.1.1) - (3.1.2)$, bem como considerar mecanismos de dissipação da energia.

Referências

[1] BARTLE, Robert G. 1995, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*.

[2] BRÉZIS, H. 2010, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equation*, Springer.

[3] CUNHA, Carlos A.R da. 2007, *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP* - Florianópolis, SC : SBMAC - (Notas em Matemática Aplicada;v.32)

[4] E. Kreyszig. 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley e Sons.

[5] GÓMEZ, Félix P. Q. 2009, *Tópicos em Termoelásticidade Linear*, Paraná .

[6] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E.A. 1989. *A Integral de Lebesgue*. Textos de Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM - UFRJ.

[7] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA,M. M. 2000. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Eliticos Não Homogênos*. Editora IM - UFRJ, Rio de Janeiro.

[8] PAZY, A. 1983. *Semigrups of Linear Operators and Appplications to Partial Diferential Equations*, Springer - Verlag, New York.

[9] RIVERA, Jaime E. M. 2008, *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*. Academia das contas, Petrópolis - RJ, IM - UFRJ.

[10] RIVERA, Jaime E. M. 2007, *Semigrupos e equações diferenciais parciais*. Instituto de Matemática, Petrópolis - RJ, IM - UFRJ.

[11] RIVERA, J. E. M, BARRETO; R. K,. 1998, *Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, vol.31

[12] Z.Liu ; S. Zeng. 1999, *Semigroups associated with dissipative systems*. Chapman & Hall/CRC, London.