Universidade Federal da Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT
Dissertação de Mestrado

Estabilidade assintótica para um modelo dissipativo de equação de placas com p - Laplaciano e termo de memória

Alan Kardec Reis Paciencia

São Luís - MA

Dezembro de 2016

Estabilidade assintótica para um modelo dissipativo de equação de placas com p - Laplaciano e termo de memória

Alan Kardec Reis Paciencia

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo.

São Luís-MA

Dezembro de 2016

Paciencia, Alan Kardec Reis

/ Estabilidade assintótica para um modelo dissipativo de equação de placas com p - Laplaciano e termo de memória /Alan Kardec Reis Paciencia. – São Luís - MA, 2016.

55 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

Referências bibliográficas.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Equações de Placas . 3. Estabilidade Assintótica. 4. Pseudo Laplaciano. 5. Memória I. Título.

CDU : 501(812.1)

Estabilidade assintótica para um modelo dissipativo de equação de placas com p - Laplaciano e termo de memória

Alan Kardec Reis Paciencia

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em XXXXXXXXXXXXXX de 2016.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo (Orientador)
UFMA

Prof^{a}. Dr^{a}. Renata de Farias Limeira Carvalho
UFMA

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra
UFPB

A minha família, esposa e filha.

“ A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza.”

(Stephen Hawking)

“ Se tu o desejas, podes voar, só tens de confiar muito em ti.”

(Steve Jobs)

Agradecimentos

Inicialmente a Deus, por ter me fortalecido, cativado e me restabelecido nos momentos de desânimos, desmotivação e cansaços.

Aos meus pais, por sempre contribuir, e muito, em meio a tantas dificuldades pela minha formação.

A minha esposa, Samara dos Santos e Santos, pela paciencia e companheirismo nas noites de intensos estudos.

Ao Prof. Marcos Antonio Ferreira de Araújo, por ter me acompanhado desde a graduação e agora como meu orientador na pós graduação. Por ter também me auxiliado pacientemente durante todo o programa de pós graduação em Matemática.

Aos amigos do mestrado: Jadevilson Cruz, Geilson Mendes, Rondinelle, Geovan Carlos, Péricles, Washington, João Coelho, José Santana, Marlon César, Jadevaldo Cruz, Caio Damasceno, Dede Santos.

Aos amigos, amigas e alunos, por sempre me incentivarem com palavras positivas e construtivas ao longo dessa jornada.

E não menos importante, à CAPES pelo fomento da bolsa de mestrado proporcionando meu desenvolvimento profissional e formação acadêmica.

Resumo

No presente trabalho, estudaremos situações relacionadas à existência, unicidade, taxas de decaimento e comportamentos assintóticos de soluções para uma classe de equações de placas não linear e com memória. Em particular, no primeiro capítulo revisamos alguns assuntos relacionados a uma série de resultados oriundos da teoria geral da análise funcional, tambem de forma concisa e particular, semigrupos e atratores, os quais serão aplicados no decorrer dessa dissertação. No capítulo seguinte, abordaremos uma equação da placa de quarta ordem dissipativa com pertubações não lineares do tipo p - Laplaciano e localmente Lipschitz e com memória. Continuando, provamos a estabilidade exponencial de energia correspondente ao problema homogêneo com memória de segunda ordem.

Palavras-chave: Equação de placa, p - Laplaciano, memória, estabilidade assintótica, decaimento de energia,analiticidade, exponencialmente estável, semigrupos, atrator global.

Abstract

In this paper, we study situations involving the existence, uniqueness, decay rates and asymptotic behavior of solutions for a class of nonlinear equations cards and memory. In particular, in the first chapter we review some issues related to a number of results derived from the general theory of functional analysis, also concise and particular, semigroups and attractors, which will be applied during this dissertation. The next chapter will discuss an equation of the fourth order dissipative plate with nonlinear perturbations of type p - Laplacian and locally Lipschitz and memory. Continuing, we prove the exponential stability of energy corresponding to the homogeneous problem with second-order memory

Keywords: Plate equation p - Laplacian, memory, asymptotic stability, Energy decay, analyticity, exponentially stable, semigroups, global attractor

ÍNDICE DE NOTAÇÕES

Geral

$|\Omega| :=$ medida de Lebesgue de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$ e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_N$ para todo $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N!) \in \mathbb{N}^N$;

$p' = \dfrac{p}{p-1}$ expoente conjugado de p;

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_N^{\alpha_N}$ para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$;

$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$;

$\hookrightarrow$ inclusão contínua;

$\hookrightarrow\hookrightarrow$ inclusão compacta;

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ dualidade;

$(X, ||\cdot||_X)$ espaço de Banach

Operações de derivação

$$D^\alpha u = \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}, & \text{se } \alpha \neq (0, ..., 0) \\ u, & \text{se } \alpha = (0, ..., 0) \end{cases}$$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$$

$$\Delta_p u = \text{div}(|\nabla|^{p-2}\nabla u)$$

Espaços de funções

$C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ é contínua$\}$

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ é k - vezes continuamente diferenciável$\}$

$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ é infinitamente diferenciável$\}$

$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid \text{supp}(u) \subset \Omega$ é compacta$\},\ k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$

$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid D^k u$ é α - Holder contínua$\}$

$\mathcal{D}\ (\Omega) :=$ espaço das funções teste

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ é mensurável e $\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ é mensurável e $|u(x)| \leq K$q.s. em $\Omega\}$

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$

$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$

$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$

$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$

$L^2_\mu(\mathbb{R}^+; X) = \{\eta : \mathbb{R}^+ \to X \mid \int_0^\infty \mu(s)||\eta(s)||_X^2 ds < \infty\}$

$L^p(0,T;X) = \{u : (0,T) \to X \mid u$ é mensurável e $\int_0^T ||u(t)||_X^p dt < \infty\}$

$L^\infty(0,T;X) = \{u : (0,T) \to X \mid u$ é mensurável e $||u(t)||_X \leq K$ q.s em $(0,T)\}$

$C([0,T];X) = \{u : [0,T] \to X \mid u$ é contínua de $[0,T]$ em $X\}$

$C^k([0,T];X) = \{u : [0,T] \to X \mid u$ é k - vezes continuamente diferencialvel de $[0,T]$ em $X\}$

$C_w([0,T];X) = \{u : (0,T) \to X \mid u$ é fracamente contínua de $[0,T]$ em $X\}$

$\mathcal{L}\ (X;Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ é linear e contínua}\}$

Espaços duais

$X' = \mathcal{L}\ (X;\mathbb{R})$ dual de X

$[L^p(\Omega)]' = L^{p'}(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$

$[W_0^{m,p}(\Omega)]' = W^{-m,p'}(\Omega),\ 1 \leq p < \infty,\ m \in \mathbb{N}$

$[H_0^m(\Omega)]' = H^{-m}(\Omega),\ m \in \mathbb{N}$

$[L^p(0,T;X)]' = L^{p'}(0,T;X'),\ 1 \leq p < \infty$

$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega),\mathbb{R})$

$\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),X)$

Convergências

$\to$ convergência forte

$\rightharpoonup$ convergência fraca

$\overset{*}{\rightharpoonup}$ convergência fraca estrela

Memória

$(g * u)(t) = \int_0^t g(t-s)u(x,s)ds$

$(g\Box u)(t) = \int_0^t g(t-s)\int_\Omega |u(x,t)-u(x,s)|^2 dxds$

Normas

$||u||_p = (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$

$||u||_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess } |u(x)|$

$$||u(x)||_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$||u||_{m,\infty} = \max_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_\infty$

$||u||_{W_0^{1,p}} = ||\nabla u||_p$

$||\eta||_{\mu,X} = \left(\int_0^\infty \mu(s)||\eta(s)||_X^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$

$||\eta||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||u(s)||_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$

$||u(x)||_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} \text{ ess } ||u(t)||_X$

$$||u||_{C^k([0,T],X)} = \sum_{j=0}^k \max_{t\in[0,T]} \left|\left|\frac{d^j u(t)}{dt^j}\right|\right|_X$$

$||\varphi||_{X'} = \sup_{x\in X, ||x||_X\leq 1} |\langle\varphi, x\rangle|$

$$||T|| = \sup_{x\in X,||x||_X=1} ||Tx||_Y = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X}$$

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 Espaços de Banach e de Hilbert 5

1.1.1 Uma breve noção ao conceito de topologia fraca e fraca estrela 9

1.2 Alguns resultados importantes 10

1.3 O operador p-Laplaciano 14

1.3.1 Uma desigualdade importante 14

1.4 Operadores lineares não limitados 16

1.4.1 Operador A associado à uma forma bilinear 17

1.4.2 Potências fracionárias do operador A 18

2 Noções de semigrupos lineares e atratores globais **19**

2.1 C_0-semigrupos de operadores lineares 19

2.1.1 Caracterização dos geradores infinitesimais de C_0-semigrupos 20

2.1.2 Analiticidade e estabilidade assintótica de C_0-semigrupos 21

2.1.3 Problema de Cauchy abstrato 22

2.2 Uma noção sobre atratores globais 23

2.2.1 Condições suficientes para existência de atratores globais 24

2.2.2 Dimensão Fractal 26

3 Um modelo de placas com p-Laplaciano e memória **27**

3.1 Introdução 27

3.2 Hipóteses e notações iniciais 28

3.2.1 Uma identidade para a memória 29

3.3 Existência e unicidade 29

3.3.1 Problema aproximado 30

3.3.2 Estimativa a priori 1 31

3.3.3 Passagem ao limite e solução fraca 32

3.3.4 Estimativa a priori 2 37

3.3.5 Passagem ao limite e solução fraca mais regular 39

3.3.6 Unicidade 39
3.4 Decaimento exponencial de Energia 41

Referências **46**

Introdução

Recentemente muitos estudos sobre equação de placa (de quarta ordem) e equação de onda (de segunda ordem), e também, pertubações nao lineares das mesmas, tem sido estudados e desenvolvidos por matemáticos dentro da realidade de equação de evolução de segunda ordem, com respeito ao tempo $t > 0$. Dentro da linha de pesquisa de equações diferenciais parciais, constitui uma primeiro passo, analisar questões relacionados a existência, unicidade e dependência contínuas de problemas de Valor Inicial e de Fronteira. Em um segundo momento, é importante estudar as propriedades qualitativas das soluções globais obtidas inicialmente, como por exemplo, comportamento assintótico de soluções, que consiste basicamente, em decaimento exponencial, ou polinomial de soluções, ou mais ainda, a existência de atratores globais para o sistema dinâmico gerado por tais soluções do Problemas de Valor inicial e de Fronteira.

Sendo mais claro e especifico, equações de placas com pertubações nao linear do tipo ϕ - Laplaciano

$$u_{tt} + \Delta_x^2 u - \mathrm{div}_x(\phi(\nabla_x u)) = F(x, u, u_t) \tag{1}$$

onde $\phi(z) \approx |z|^{(p-2)}$, $p \geq 2$ e $F(x, u, u_t)$ representa, a adição de uma força externa e/ou uma dissipação linear(es) ou não linear(es). Neste Exemplo, o operador $\mathrm{div}_x(\phi(\nabla_x u))$ aparece como uma pertubação não linear de menor ordem do operador biharmônico Δ_x^2 na equação (1).

Retornando à equação (1), observamos que esta é um modelo de varios outros modelos importante que se aplicam em situações do cotidiano no que diz respeito a pertubações da equação da placa. Vejamos outros casos:

No caso bidimensional, a seguinte equação da placa não linear referente um modelo de Kirchhoff - Boussinesq

$$u_{tt} + ku_t + \Delta^2 u = \mathrm{div}\{|\nabla u|^2 \nabla u\} + \sigma \Delta\{f_1(u)\} - f_2(u)$$

definida sobre um domínio limitado $\mathbb{R}^2$, considerando três condições de fronteira.

No caso N - dimensional trata - se de uma classe de modelos de Kirchhoff por meio da equação

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \mathrm{div}\{|\nabla|^{m-1} \nabla u\} - \Delta u_t = h(x, u, u_t)$$

definida sobre um domínio de $\mathbb{R}^N$, com $N \leq 1$ natural e $m \leq 1$ delimitando por uma constante que depende de N em dimensões mais altas, levando em consideração as condições de fronteiras pré - fixadas ou apoiadas.

Para completar o raciocínio, lembramos que um modelo corresponde ao fluxo de microestruturas elastoplásticas da forma

$$u_{tt} + u_{xxxx} + a(|u_x|^2)_x = 0$$

onde $a > 0$, para o caso unidimensional. Assim sendo, ao observar o termo $a(|u_x|^2)_x$ como um operador do tipo p - Laplaciano, notamos que este último modelo difere dos dois anteriores pelo sinal da perturbação oriunda do operardor p - Laplaciano.

Em dimensões maiores com $N \geq 3$ a dissipação forte $-\Delta u_t$, constitui papel importante no modelo de placa com pertubação de menor ordem do tipo p - Laplaciano

$$u_{tt} + \alpha\Delta^2 u - \Delta_p u = F(x, u, u_t) \tag{2}$$

onde

$$\Delta_p u = \text{ div } (|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad p \geq 2$$

e $\alpha > 0$ é uma constante. De fato, para $\alpha = 1$ a existência global e unicidade de soluções podem ser verificadas adicionando uma dissipação forte $-\Delta u_t$. Contudo, se considerarmos apenas uma dissipação fraca u_t, então, se torna dificil obter unicidade e a continuidade de soluções globais no caso N - dimensional, para $N \geq 3$. Ao contrário, para $N = 1$ ou $N = 2$, a boa colocação do problema (2) adicionando uma dissipação fraca, já é conhecida.

O presente trabalho, procura fornecer resultados relacionados a existência global de soluções para a equação (2) sob o efeito de um termo de memória. A seguir, buscaremos as propriedades qualitativas das soluções com respeito a estabilidade assintótica ao longo do tempo.

De forma mais concisa, estudaremos em um primeiro momento a existência de soluções e decaimento de energia para equação (2) em um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, considerando

$$F(x, u, u_t) := -(g * \Delta u)(t) + \Delta u_t - f(u) \tag{3}$$

onde a convulação em (3), representando um termo de memória não local (*memória sem história*), sendo dado por

$$(g * y)(t) = \int_0^t g(t-s)y(s)ds, \quad t > 0,$$

e a função g é chamada de *núcleo da memória*. Sendo assim, relacionando (2) e (3), estudamos no próximo capítulo um problema de valor inicial e de fronteira para a seguinte equação da placa não linear com memória

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \Delta u_t + f(u) = 0 \tag{4}$$

em $\Omega \times (0, +\infty)$, onde $\alpha = 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado.

É importante enfatizar que o procedimento utilizado para estudar (4) gerou, em um primeiro momento, uma certa dificuldade técnica ao considerar um termo de memória do tipo

$\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds$. Contudo, com um pouco mais de perícia, também podemos concluir a veracidade dos resultados de existência e comportamento assintótico substituindo o termo de memória de segunda ordem $\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds$ por um termo de memória de quarta ordem $\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds$, a menos do sinal.

Continuando, nosso objetivo em um segundo momento foi de estender os conceitos estabelecidos anteriormente e acoplando à equação (2) uma memória com história para $t < 0$, de onde teremos de introduzir a história com deslocamento relativo. O motivo pra tal, é que a equação (4) não corresponde a um sistema autônomo, justamente pela convulação $(g * \Delta u)(t) = \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds$, que depende de $t > 0$, e é de segunda ordem. Em função disso, não poderiamos estudar a dinâmica assintótica para as soluções do problema por meio da teoria estabelicida para problemas auntônomos. No entanto, para contornar essa situação, estudamos a existência de soluções para a equação (2) em domíminio limitado de $\mathbb{R}^N$, definindo $F(x, u, u_t)$ como

$$F(x, u, u_t) := \int_{-\infty}^{t} \mu(t-s)\Delta^2 u(s) + \Delta u_t - f(u) + h(x) \tag{5}$$

O comportamento assintótico de soluções também foi estudado quando a força externa h é identicamente nula, ou seja, quando $h \equiv 0$. Note que o termo integral (memória original) que surge em (5) pode ser reescrito como

$$\int_{-\infty}^{t} \mu(t-s)\Delta^2 u(s)ds = \int_0^\infty \mu(s)\Delta^2 u(t-s)ds \tag{6}$$

Assim, combinando a equação (2) com as identidades (5) e (6), chegamos a seguinte classe de equações da placa não linear com memória, com história $t < 0$

$$u_{tt} + \alpha\Delta^2 u - \Delta_p u - \int_0^\infty \mu(s)\Delta^2 u(t-s)ds - \Delta u_t + f(u) = h \tag{7}$$

em $\Omega \times (0, +\infty)$, com condições iniciais e de fronteira pré - estabelecidas, onde $\alpha = \alpha(0) > 0$ é uma constante interligada ao núcleo de memória μ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um dominio limitado.

Por outro lado, nos deparamos com uma forma de modelar a equação da placa no caso bidimensional, $N = 2$, por meio de um sistema de equações de segunda ordem, do tipo "equações de ondas", a saber, o modelo de placas finas de Mindlin - Timoshenko. Mais precisamente, consideremos o seguinte modelo de placas de Mindlin - Timoshenko

$$\left\{\begin{array}{lcl} \rho h w_{tt} & - & K\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\psi + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varphi + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\right] = 0 \\ \dfrac{\rho h^3}{12}\psi_{tt} & - & D\left(\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right) + K\left(\psi + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \\ \dfrac{\rho h^3}{12}\varphi_{tt} & - & D\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right) + K\left(\varphi + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \end{array}\right. \tag{8}$$

em $\Omega \times (0, \infty)$, onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^2$. As constantes positivas ρ representa a densidade, h representa a espessura uniforme da placa, K exprime o módulo de cisalhamento,

D denota o módulo de rigidez à flexão e a constante $0 < \mu < 1/2$ é chamada *coeficiente de Poisson*, sendo proveniente de considerações físicas sobre a placa. Já as funções $\psi = \psi(x, y, t)$ e $\varphi = \varphi(x, y, t)$ representam os ângulos de rotação de um filamento de placa e a função $w = w(x, y, t)$ denota o deslocamento transversal da superficie média da placa, para $(x, y) \in \Omega$ e $t \geq 0$.

De modo mais conciso, demotando por $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ e $\mathcal{L}_3$ os seguintes operadores lineares elípticos de segunda ordem

$$\mathcal{L}_1(\psi, \varphi, w) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\mathcal{L}_2(\psi, \varphi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

,

$$\mathcal{L}_3(\varphi, \psi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

estudamos o comportamento assintótico de soluções para o seguinte sistema de placas de Mindlin - Timoshenko com dissipação viscosa

$$\left\{\begin{array}{lcccccc} \rho h w_{tt} & - & K\mathcal{L}_1(\psi, \varphi, w)) & - & D_0 \Delta w_t & = & 0 \\ \dfrac{\rho h^3}{12}\psi_{tt} & - & D\mathcal{L}_2(\psi, \varphi) + K\left(\psi + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) & - & D_1 \mathcal{L}_2(\psi_t, \varphi_t) & = & 0 \\ \dfrac{\rho h^3}{12}\varphi_{tt} & - & D\mathcal{L}_3(\varphi, \psi) + K\left(\varphi + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) & - & D_1 \mathcal{L}_3(\varphi_t, \psi_t) & = & 0 \end{array}\right.$$

em $\Omega \times (0, \infty)$, com condições iniciais e de fronteira pré - estabelecidas.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo incial, tem um caráter introdutório e particular sobre alguns conceitos. Aqui, vamos introduzir as notações que serão utilizadas em toda a dissertação, bem como, apresentar alguns dos resultados mais clássicos da teoria geral de análise não linear, análise funcional, espaços de Sobolev, semigrupos lineares, semigrupos não lineares e atratores. Faremos uso de tais resultados no capítulo seguinte para facilitar a compreensão do conteúdo abordado e, também de tornar este trabalho autossuficiente e didáticamente lógico. Os teoremas, proposições, lemas e outros, serão apresentados sem nenhuma prova formal, salvo justificativas e execessões bem particulares.

1.1 Espaços de Banach e de Hilbert

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Para $1 \leq p < \infty$ denotamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das classes de funções Lebesgue mensuráveis u, tais que $|u|^p$ é uma função integrável sobre Ω. Em termos de conjuntos

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável}, \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

Em $L^p(\Omega)$ podemos definir a norma usual como segue

$$||u|| = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Deste modo, $(L^p(\Omega); || \cdot ||_p)$ é um espaço de Banach. No caso particular, quando $p = 2$, temos também que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar $(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$ e a norma $||u||_2 = (u, u)^{\frac{1}{2}}$.

Para $p = \infty$, definimos $L^\infty(\Omega)$ com sendo o conjunto das classes de funções Lebesgue mensuráveis u, limitadas quase sempre (q.s) sobre Ω. Em termos de conjuntos

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é mensurável}, |u(x)| \leq K \text{ q.s em } \Omega \}$$

Neste caso, diz - se que o único número real K é um *majorante essencial* de u e denotado por $A = \{K \in \mathbb{R}|\ |u(x)| \leq K$ q.s em $\Omega\}$, podemos definir uma norma em $L^\infty(\Omega)$ como

$$||u||_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)| = \inf A$$

Neste modo, $(L^\infty(\Omega); ||\cdot||_\infty)$ é um Espaço de Banach.

Dado um multi - índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ e um ponto $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$, defini-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N} \text{ e } \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_N!$$

O *operador de Derivação* de ordem α, denotado por D^α, é definido como

$$D^\alpha u = \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}, & \text{se} \quad \alpha \neq (0, ..., 0 \\ \quad u \quad , & \text{se} \quad \alpha = (0, ..., 0) \end{cases}$$

Quando o multi-índice é da forma $\alpha = (0, ..., 0, i, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}^N$, o operador derivação D^α também é representado pelas seguintes notações

$$D^i = D_i = \partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} = (\cdot)_{x_i}, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Agora, para $k = 0, 1, 2, ...$, denotaremos por $C^k(\Omega)$ o conjunto da funções $k-$vezes continuamente diferenciáveis sobre o aberto Ω. Quando $k = 0$ dizemos simplesmente que $C^0(\Omega)$ é o conjunto das funções contínuas sobre Ω e, também, o denotaremos por $C(\Omega)$. Quando $k = \infty$, diremos que $C^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis sobre Ω. Para uma função $u \in C^k(\Omega)$, defini-se o *suporte* de u como $\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}^\Omega \subset \Omega$ e por $C_0^k(\Omega)$ denotaremos as funções u de C^k cujo suporte é compacto em $\mathbb{R}^N$. Em termos de conjuntos

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é contínua}\}$$

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é k - vezes continuamente diferenciável}\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ é infinitamente diferenciável}\}$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) \mid \text{supp}(u) \subset \Omega \text{ é compacta}\}, \ k \in \mathbb{N} \text{ ou } k = \infty$$

Definição 1.1.1. *Diremos que uma sequência (ou sucessões) de funções* $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty$ *converge à uma função* $\varphi \in C_0^\infty$ *se, e somente se, existe um subconjunto compacto* $K \subset \Omega$ *tal que*
(i) supp$(\varphi) \subset K$ *e supp*$(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$.
(ii) $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ *uniformemente sobre* $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N$

Com esta noção de convergência nos espaços C_0^∞, o denotaremos também por $\mathcal{D}(\Omega)$ e o chamaremos de *espaços das funções teste.* Além disso, denotaremos também por $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ o espaço vetorial dos funcionais lineares e contínuos de X em $\mathbb{R}$, definimos o espaço das *distribuição* sobre Ω com valores em $\mathbb{R}$ por

$$\mathcal{D}'(\Omega) := \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R})$$

onde a continuidade é entendida no sentido da convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Com relação à derivada de uma distribuição a valores reais, lembramos que para $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, sua derivada de ordem $\alpha \in \mathbb{N}^N$ é dada por

$$\langle D^\alpha f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha \varphi\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A seguir vamos relembrar a definição dos *espaços de Sobolev*, os quais constituirão fundamental importância em nossas considerações futuras. Para $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto da classes de funções u em $L^p(\Omega)$, tais que suas derivadas $D^\alpha u$, $0 \leq |\alpha \leq m$, ainda pertençam a $L^p(\Omega)$, onde a derivada se dá no sentido das distribuições. Em termos de conjuntos,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) |\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

Em $W^{m,p}(\Omega)$ tem-se bem definida uma norma dada por

$$||u||_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_p^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

e

$$||u||_{m,p} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||$$

No caso particular $p = 2$, o espaço $W^{m,2}$ $\left(W_0^{m,2}\right)$ é também um espaço de Hilbert com o correspodente produto interno e, usualmente, é denotado por $H^m(\Omega)$ $(H_0^m(\Omega))$.

No que segue, X denotará um espaço de Banach com a norma $||\cdot||_X$ e H denotará um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot,\cdot)_H$ e norma $||\cdot||_H$.

Terminaremos esta primeira seção apresentando os espaços de Banach, ou Hilbert, a valores abstratos $L^p(a, b; X)$, $C^k([a, b], X)$, $C_w([a, b], X)$ e os espaços das distribuições vetoriais $\mathcal{D}'(a, b; X)$, para $1 \leq p \leq \infty$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $k \in \mathbb{N}$. Contudo, para nossos objetivos futuros é suficiente compreender os espaços acima com $a = 0$ e $b = T$, onde $T > 0$ é um número real positivo fixado ou $T = \infty$.

Para $1 \leq p < \infty$, representaremos por $L^p(0, T; X)$ o conjunto das classes de funções vetoriais mensuráveis $u : (0, T) \to X$, tais que $||u(t)||_X$ pertence a $L^p(0, T)$. Em termos de conjunto,

$$L^p(0, T; X) = \left\{u : (0, T) \to X \mid u \text{ é mensurável, } \int_0^T ||u(t)||_X^p dt < \infty\right\}$$

O espaço $L^p(0, T; X)$ munido da norma

$$||u||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T ||u(t)||_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

torna-se um espaço de Banach.

Quando $p = \infty$, representaremos por $L^\infty(0,T;X)$ o conjunto das classes de funções vetoriais mensuráveis $u : (0,T) \to X$, tais que $||u(t)||_X$ pertence a $L^\infty(0,T)$. Em termos de conjunto,

$$L^\infty(0,T;X) = \{u : (0,T) \to X \mid u \text{ é mensurável, } ||u(t)||_X \leq K \text{ q.s. em } (0,T)\}$$

Em $L^\infty(0,T;X)$ defini-se uma norma dada por

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} \text{ess}||u(t)||_X,$$

o que o torna também um espaço de Banach.
Além disso, é fácil ver que valem as seguintes propriedades:

a) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^p(0,T;Y),\ 1 \leq p \leq \infty$.

b) $L^\infty(0,T;X) \overset{T\leq\infty}{\hookrightarrow} L^1(0,T;X),\ 1 < p < \infty$

Para $k \in N$, definimos também o espaço de Banach

$$C^k([0,T],X) = \{u : [0,T] \to X \mid u \text{ é k-vezes continuamente diferenciáveis de } [0,T] \text{ em } X\}$$

munido da norma

$$||u||_{C^k([0,T],X)} = \sum_{j=0}^{k} \max_{t\in[0,T]} \left|\left| \frac{d^j u(t)}{dt^j} \right|\right|_X$$

Para abrangir todos os espaços que surgirão mais adiante, lembraremos também o conceito *continuidade fraca* de funções a valores abstratos. Denotaremos por $C_w([0,T],X)$ o espaço de todas as funções $u : [0,T] \to X$ que é contínua de $[0,T]$ em (x,τ), onde $\tau = \sigma(X,X')$ designa a topologia fraca de X, ou seja, para toda $\varphi \in X'$, onde X' (é o dual de X), a função $t \mapsto \langle u(t), \varphi\rangle$ é contínua em $[0,T]$. Em termos de conjunto temos

$$C_w([0,T],X) = \{u : [0,T] \to X \mid u \text{ é contínua de } [0,T] \text{ em } (X,\tau)\}.$$

Um pouco mais adiante, em um subseção separada, faremos uma breve revisão sobre o conceito de topologia fraca para qua a definição não fique vaga no texto. Antes disso, vamos expor também o espaço das distribuição a valores abstratos.

Denotando por $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço vetorial das transformações lineares e contínuas de X em Y, definimos o espaço das *distribuições vetoriais* de $(0,T)$ com valores em X por

$$\mathcal{D}'(0,T;X) := \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T),X).$$

Para $f \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, lembramos que sua derivada de ordem n no sentido das distribuições vetoriais é definida por

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T) \tag{1.1}$$

Além disso, se f é derivável no sentido das distribuições vetoriais, então podemos enxergar $\dfrac{df}{dt}$ como um elemento de $\mathcal{D}'(0,T;X)$, valendo a relação (1.1).

Fazendo uma conexão entre os espaços definidos acima. De fato, dada $f \in L^p(0,T;X)$, então pode-se identificar f com uma distribuição vetorial, que ainda denotaremos por f, de modo que

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

onde a integral é entendida no sentido de Bochner. Com isto, podemos dizer com um certo abuso de notação, que

$$L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X).$$

1.1.1 Uma breve noção ao conceito de topologia fraca e fraca estrela

Vamos estabelecer a seguir os conceitos de convergência fraca e fraca estrela num espaço de Banach X com norma $||\cdot||_X$. Consideremos inicialmente o *dual topológico* $X' = \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, que é também um espaço de Banach quando munido da norma

$$||f||_{X'} = \sup_{x\in X, ||x||\leq 1} |\langle f, x\rangle|.$$

Além disso, podemos considerar o espaço de Banach *Bidual* $X'' = \mathcal{L}(X',\mathbb{R})$ de X, munido da norma

$$||\xi||_{X''} = \sup_{f\in X', ||f||_{X'}\leq 1} |\langle \xi, f\rangle|.$$

Como é bem sabido da teoria de análise funcional, a aplicação

$$\begin{array}{rcccc} J & : & X & \longrightarrow & X'' \\ & & x & \longmapsto & J_x \end{array}$$

com

$$\begin{array}{rcccc} J_x & : & X' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & J_x(f) \end{array}$$

onde $J_x(f) := \langle f, x\rangle$, é um isomorfismo de X sobre $J(X)$. Isto nos permite identificar X com $J(X) \subset X''$.

Agora, para cada $f \in X'$ consideremos o funcional

$$\begin{array}{rcccc} \varphi_f & : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \varphi_f(x) \end{array}$$

onde $\varphi_f(x) := \langle f, x\rangle$. Assim, percorrendo $f \in X'$ obteremos uma família de aplicações $\{\varphi_f\}_{f\in X'}$. Sob estas considerações dizemos que:

(i) A *topologia fraca* $\sigma(X, X')$ em X é a topologia mais grossa (menos fina) em X no qual são contínuas todas as funções $\varphi_f,\ f \in X'$.

(ii) A *topologia fraca estrela* $\sigma(X', X)$ em X' é a topologia mais grossa (menos fina) em X' no qual são contínuas todas funções $J_x,\ x \in X$.

Definição 1.1.2. *Diremos que uma sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ **converge fraco** *para* $x \in X$, *quando* $\{x_n\}$ *converge a* x *na topologia fraca* $\sigma(X, X')$. *Isto é, para todo funcional* $f \in X'$ *temos*

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle.$$

Denotaremos a convergência fraca de $\{x_n\}$ *a* x *por* $x_n \rightharpoonup x$.

Definição 1.1.3. *Diremos que uma sequência* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ **converge fraco estrela** *para* $f \in X'$, *quando* $\{f_n\}$ *converge a* f *na topologia fraca estrela* $\sigma(X', X)$. *Isto é, para todo funcional* $x \in X$ *temos*

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle.$$

Denotaremos a convergência fraca estrela de $\{f_n\}$ *a* f *por* $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x$.

Como é usual a **convergência forte** (em norma) de $\{x_n\}$ a $x \in X$, será denotada por $x_n \to x$.

Definição 1.1.4. *Um espaço de Banach* X *é chamado* **reflexivo** *quando* $J(X) = X''$, *onde a aplicação* J *definida acima, é chamado de mergulho canônico. O espaço* X *é chamado* **separável** *quando existe um subconjunto enumerável e denso* $Y \subset X$.

Com relação aos espaços mencionados na seção 1.1, valem as seguintes identificações para $1 \leq p < \infty$, q satisfazendo $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $m \geq 1$,

$$[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega) \;\text{ e }\; [L^\infty(\Omega)]' \supsetneq L^1(\Omega),$$

$$[W_0^{m,p}(\Omega)] \;\cong\; W^{-m,p}(\Omega),$$

$$[L^p(0,T,X)]' \;\cong\; L^q(0,T,X').$$

1.2 Alguns resultados importantes

Nesta seção faremos uma coletânea de alguns resultados clássicos oriundos da teria geral de análise funcional e espaços de Sobolev, os quais serão extremamente úteis ao longo desse trabalho.

Lema 1.2.1. *Seja* Ω *um domínio de* $\mathbb{R}^N$.
(i) Se $1 < p < \infty$, *então* $L^p(\Omega)$ *é reflexivo. Entretanto,* $L^1(\Omega)$ *e* $L^\infty(\Omega)$ *não são reflexivos.*
(ii) Se $1 \leq p < \infty$, *então* $L^p(\Omega)$ *é separável. Entretanto,* $L^\infty(\Omega)$ *não é separável.*

Teorema 1.2.2 (Teorema de Densidade)**.** *Seja* Ω *um domínio de* $\mathbb{R}^N$
(i) Se $k \geq 0$, *então* $C_0^k(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$, *para* $1 \leq p < \infty$.
(ii) Se Ω *é de classe* C^m, $m \geq 1$, *entõa* $C^m(\overline{\Omega})$ *é denso em* $W^{m,p}(\Omega)$, *para* $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.2.3 (Imersões de Sobolev). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira de classe C^m.*
(i) $mp < N$, então a seguinte inclusão é contínua

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega), \quad \text{onde} \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}.$$

Além disso, a inclusão é compacta para qualquer q, com $1 \leq q < q^*$.
(ii) Se $mp = N$, então a seguinte inclusão é contínua e compacta

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega), \quad \text{para todo} \quad 1 \leq q < \infty$$

(iii) Se $k+1 > m - \frac{N}{p} > k$, $k \in \mathbb{N}$, então escrevendo $m - \frac{N}{p} = k + \alpha$, com $0 < \alpha < 1$, temos que a seguinte inclusão é contínua

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

onde $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ representa o espaço das funções em $C^k(\overline{\Omega})$ cujas derivadas de ordem k são $\alpha-$Holder contínuas. Além disso, se $N = m - k - 1$, $\alpha = 1$ e $p = 1$, então a inclusão vale também para $\alpha = 1$, e a inclusão $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ é compacta para todo $0 \leq \beta < \alpha$.

Teorema 1.2.4 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg). *Seja Ω um domínio limitado com fronteira de classe C^m e $u \in W^{m,r} \cap L^q(\Omega)$ onde $1 \leq r$, $q \leq \infty$. Para qualquer inteiro j com $0 \leq j < m$ e qualquer θ com $j/m \leq \theta \leq 1$, temos*

$$||D^j u||_p \leq C||u||_{m,r}^{\theta}||u||_q^{1-\theta}, \tag{1.2}$$

desde que

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}\right) + (1-\theta)\frac{1}{q}$$

e $m - j - N/r$ não é um inteiro não negativo. Se $m - j - N/r$ é um inteiro não negativo, (1.2) vale com $\theta = j/m$.

Teorema 1.2.5 (Teorema de Interpolação). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave. Suponhamos que*

$$p \leq q \leq \infty \quad se \quad mp > N,$$

$$p \leq q < \infty \quad se \quad mp = N,$$

$$p \leq q \leq \frac{Np}{N - mp} \quad se \quad mp < N.$$

Então existe uma constante $K = K(N, m, p, q, \Omega) > 0$ talque para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$,

$$||u||_q \leq K||u||_{m,p}^{\theta}||u||_p^{1-\theta},$$

onde $\theta = (N/mp) - (N/mq)$.

Teorema 1.2.6 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante $C = C(p, |\Omega|) > 0$ tal que*

$$||u||_p \leq C||\nabla u||_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Teorema 1.2.7 (Fórmula de Green). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira Γ suave. Se $u,\ v \in H^2(\Omega)$,*

$$-\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS,$$

onde ν representa o vetor normal unitário exterior a Γ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} := \nabla u \cdot \nu$ a derivada normal de u.

Teorema 1.2.8 (Desigualdade de Holder). *Sejam $1 \leq p,\ q \leq \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)| dx \leq ||u||_p ||v||_q.$$

Teorema 1.2.9 (Desigualdade de Holder Generalizada). *Sejam $1 \leq p_1, p_2, ..., p_n \leq \infty$ tais que $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_n} = \dfrac{1}{r} \leq 1$. Se $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ para $i = 1, ..., n$, então $f := \prod_{i=1}^{n} f_i \in L^r(\Omega)$ e*

$$||f||_r \leq \prod_{i=1}^{n} ||f_i||_{p_i}.$$

Lema 1.2.10 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam $\alpha \geq 0$ uma constante e $\phi \in L^\infty(a,b)$, $\beta \in L^1(a,b)$ tais que $\beta > 0$, $\phi \geq 0$. Se*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^b \beta(s)\phi(s) ds, \quad a \leq t \leq b$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_a^b \beta(s) ds}, \quad a \leq t \leq b.$$

Lema 1.2.11 (Desigualdade de Young). *Seja $1 < p,\ q < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \forall a, b \leq 0.$$

Lema 1.2.12 (Desigualdade de Young com ϵ). *Seja $1 < p,\ q < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $\epsilon > 0$ qualquer. Então*

$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^q,\ \forall a, b \geq 0.$$

onde $C_\epsilon = (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1}$. No caso particular em que $p = q = 2$, a desigualdade de Young com $\epsilon > 0$ se reduz em $ab \leq \epsilon a^2 + \dfrac{1}{4\epsilon} b^2$, $\forall a, b \geq 0$, sendo conhecida como deseigualdade de Cauchy com ϵ.

Teorema 1.2.13 (Aubin-Lions). *Sejam X_0, X_1, X três espaços de Banach com X_0 e X_1 reflexivos. Suponhamos que $X_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$, e para quaisquer $p_0,\ p_1$ com $1 < p_0,\ p_1 < \infty$, consideremos o espaço*

$$W = \{u \mid u \in L^{p_0}(0,T;X_0), u_t \in L^{p_1}(0,T;X_1)\},$$

munido da norma $||u||_W = ||u||_{L^{p_0}(0,T;X)} + ||u_t||_{L^{p_1}(0,T;X_1)}$. Então,

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_0}(0,T;X).$$

Lema 1.2.14. *Seja X um espaço de Banach. Se $f \in L^p(0,T;X)$ e $\dfrac{df}{dt} \in L^p(0,t;x)$, então $f \in C([0,T],X)$,a menos de um conjunto de medida nula em $[0,T]$.*

Lema 1.2.15. *Sejam X e Y espaços de Banach tal que $X \hookrightarrow Y$. Então*

$$[L^\infty(0,T;X) \cap C_w([0,T],Y)] \subset C_w([0,T],X).$$

Se a inclusão de X em Y for densa e X for reflexivo, então vale também a inclusão contrária.

Teorema 1.2.16 (Teorema de Representação de Riesz-Fréchet). *Seja $(H, ||\cdot||, (\cdot,\cdot)_H)$ um espaço de Hilbert. Para todo funcional $\varphi \in H'$, existe um único $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, v\rangle_{H',H} = (f,v)_H, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, $||\varphi||_{H'} = ||f||_H$.

Teorema 1.2.17 (Teorema de Lax-Milgram). *Seja $(H, ||\cdot||, (\cdot,\cdot)_H)$ um espaço de Hilbert e $a(u,v)$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Então para todo funcional $\varphi \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle_{H',H}, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se $a(u,v)$ é simétrica, então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \quad e \quad \frac{1}{2}a(u,v) - \langle \varphi, u\rangle_{H',H} = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(u,v) - \langle \varphi, v\rangle_{H',H}\right\}.$$

Teorema 1.2.18 (Compacidade Fraca). *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se $B \subset X$ é limitado, então B é compacto na topologia fraca $\sigma(X,X')$, isto é, qualquer sequência $\{x_n\} \subset B$ possui uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ convergente em X na topologia fraca $\sigma(X,X')$.*

Teorema 1.2.19 (Compacidade Fraca Estrela). *Seja X um espaço de Banach separável. Se $F \subset X'$ é limitado, então F é compacto na topologia fraca estrela $\sigma(X',X)$, isto é, qualquer sequência $\{f_n\} \subset F$ possui uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ convergente em X' na topologia fraca estrela $\sigma(X',X)$.*

1.3 O operador p-Laplaciano

O operador pseudo Laplaciano, que neste trabalho será chamado simplesmente de *operador p-Laplaciano*, e denotado por Δ_p, é definido sob duas formas:

$$\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou

$$\Delta_p u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $p > 1$. Estas duas formas assumidas pelo operador $p-$Laplaciano correspondem às derivadas de Frèchet em $W_0^{1,p}(\Omega)$ dos funcionais

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx \quad \text{e} \quad \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^p dx,$$

respectivamente. Cabe ressaltar que $\Delta_p u$ é um operador de segunda ordem não linear, sendo que no caso particular $p = 2$ o mesmo se reduz ao operador (linear) Laplaciano $\Delta u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$. Por questões técnicas vamos utilizar, por todo esse trabalho, a primeira das formas estipuladas para o operador $p-$Laplaciano.

É interessante lembrar também que o operador $p-$Laplaciano aplica $W_0^{1,p}(\Omega)$ no espaço $W^{-1,p'}(\Omega) = \left[W_0^{1,p}(\Omega)\right]'$, onde $2 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ou seja,

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & : & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) \\ & & u & \longmapsto & \Delta_p u \end{array}$$

onde $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$.

Vale a pena lembrar, que Δ_p é um operador limitado, isto é, leva conjuntos limitados de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em conjuntos limitados de $W^{-1,p'}$

Vamos introduzir agora uma importante condição relacionada ao operador $p-$Laplaciano que usaremos com certa frequência mais adiante desse trabalho, a saber, a seguinte identidade

$$-\langle \Delta_p u, v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla v\rangle_{L^{p'}(\Omega), L^p(\Omega)}$$

vale para todos $u,\ v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.3.1 Uma desigualdade importante

A seguir fornecemos uma desigualdade que será útil ao trabalharmos com termos que envolvem o operador $p-$Laplaciano em nossas considerações futuras. Além de eficaz, veremos que esta desigualdade segue como consequência da desigualdade do valor médio para aplicações em $\mathbb{R}^N$.

Lema 1.3.1. *Exite uma constante $M = M(p, N) > 0$ tal que*

$$\big||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\big| \leq M(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,$$

o simbolo $|\cdot|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$ e $p \geq 2$.

Demonstração. Definamos inicialmente a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} F \ : \ \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ x & \longmapsto & F(x) \end{array}$$

onde $F(x) := |x|^{p-2}x, \quad x = (x_1, ..., x_N)$.

Note que as funções componentes de F, dadas por

$$F_j(x) = |x|^{p-2}x_j, \quad j = 1, ..., N,$$

são diferenciáveis em $\mathbb{R}^N$. De fato, simples cálculos implicam

$$\frac{\partial}{\partial x_i}F_j(x) = (p-2)|x|^{p-4}x_i x_j \qquad \text{se} \quad i \neq j,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}F_j(x) = (p-2)|x|^{p-4}x_j + |x|^{p-2} \quad \text{se} \quad i = j,$$

para $i, j = 1, ..., N$. Assim é claro que $\dfrac{\partial}{\partial x_i}F_j(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}^N - \{0\}$ e também é simples verificar pela definição que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}F_j(\mathbf{0}) = 0 = \lim_{x \to \mathbf{0}} \frac{\partial}{\partial x_i}F_j(x), \quad \mathbf{0} = (0, ..., 0),$$

para $i, j = 1, ..., N$. Isto implica que as derivadas parciais das funções componentes F_j existem e são contínuas em $\mathbb{R}^N$, ou seja, as funções F_j são diferenciáveis em $\mathbb{R}^N$ e, consequentemente, a aplicação F é também diferenciáveis em $\mathbb{R}^N$. Logo, fica bem definida a aplicação derivada operador linear

$$\begin{array}{rcl} F' \ : \ \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ x & \longmapsto & F'(x) \end{array}$$

onde

$$F'(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

Além disso, temos

$$||F'(x)|| \leq N^2(p-1)|x|^{p-2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{1.3}$$

onde $||\cdot||$ menciona a norma no espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Com efeito, note que

$$||F'(x)|| = \sup_{v \in \mathbb{R}^N, |v| \leq 1} \big|F'(x) \cdot v\big| = \sup_{v \in \mathbb{R}^N, |v| \leq 1} \left|\frac{\partial F(x)}{\partial v}(x)\right| = \sup_{v \in \mathbb{R}^N, |v| \leq 1} = \left|\left(\frac{\partial F_1}{\partial v}(x), ..., \frac{\partial F_N}{\partial v}(x)\right)\right|,$$

o que aplica em

$$||F'(x)|| \leq N \sup_{|v| \leq 1} \max_{1 \leq j \leq N} \left|\frac{\partial F_j}{\partial v}(x)\right|. \tag{1.4}$$

Agora, tomando $v = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ e observando que as funções F_j são diferenciáveis em $\mathbb{R}^N$ segue que

$$\frac{\partial F_j}{\partial v}(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}\alpha_i, \quad j = 1, ..., N$$

Logo,

$$\left|\frac{\partial F_j}{\partial v}(x)\right| \leq \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}\right| |\alpha_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq N \max_{1\leq i\leq N} \left|\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)\right| |v|,$$

de onde segue que

$$\max_{1\leq j\leq N} \left|\frac{\partial F_j}{\partial v}(x)\right| \leq N \max_{1\leq i,j\leq N} \left|\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)\right| |v| \leq N(p-1)|x|^{p-2}|v|,$$

ou ainda,

$$\sup_{|v|\leq 1} \max_{1\leq j\leq N} \left|\frac{\partial F_j}{\partial v}(x)\right| \leq N(p-1)|x|^{p-2}. \tag{1.5}$$

Substituindo (1.5) em (1.4), obtemos (1.3) com desejada.

Dado $x, y \in \mathbb{R}^N$ considere o segmento $[y, x] \subset \mathbb{R}^N$. Para todo $\xi \in [y, x]$ segue de (1.3) que

$$||F'(\xi)|| \leq N^2(p-1)|\xi|^{p-2}.$$

Mais ainda, para $\xi \in [y, x]$ existe uma constante $\theta = \theta(x, y) \in [0, 1]$ tal que $\xi = (1-\theta)y + \theta x = y + \theta(x - y)$. Logo,

$$|\xi|^{p-2} \leq (|y| + \theta|x-y|)^{p-2} \leq 2^{p-2}(|y| + |x|)^{p-2} \leq 2^{2(p-2)}(|y|^{p-2} + |x|^{p-2}).$$

Assim,

$$||F'(\xi)|| \leq (2^{p-2}N)^2(p-1)(|y|^{p-2} + |x|^{p-2}), \quad \forall \xi \in [y, x] \tag{1.6}$$

Como F é diferenciável no segmento aberto (y, x), contínua no segmento fechado $[y, x]$ e vale a estimativa (1.6), então a Desigualdade de Valor Médio para aplicações implica que vale

$$|F(x) - F(y)| \leq M(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})|x - y|,$$

onde $M = (2^{p-2}N)^2(p-1)$. Concluindo a Demonstração. □

1.4 Operadores lineares não limitados

Iniciaremos esta seção fazendo uma breve síntese sobre a construção de operadores lineares não limitados associados a uma forma bilinear. Posteriormente, relembraremos alguns fatos sobre os operadores com potência fracionária, os quais terão papel importante em nossas considerações futuras.

1.4.1 Operador A associado à uma forma bilinear

Sejam $(V, ||\cdot||_V, (\cdot,\cdot)_V)$ e $(H, ||\cdot||_H, (\cdot,\cdot)_H)$ dois espaços de Hilbert tais que V é denso em H, com inclusão $V \hookrightarrow H$ contínua e compacta. Denotaremos por V' o dual de V e por $\langle \cdot,\cdot \rangle$ a dualidade entre V' e V. Identificando H com seu dual, por meio do Teorema da representação de Riesz, obtemos a seguinte de inclusões

$$V \hookrightarrow H \cong H' \hookrightarrow V'.$$

Considerando uma forma bilinear e contínua $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, podemos definir um operador linear $A : V \to V'$ dado por

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v), \quad \forall u, v \in V.$$

Mais ainda, o domínio do operador A é dinido como

$$D(A) = \{u \in V \mid \ Au \in H\},$$

e dizemos ainda que o operador linear A é definido pela terna $\{V, H, a(\cdot,\cdot)\}$.

Relembrando ainda ada teoria de análise funcional, que se $a(\cdot,\cdot)$ for uma forma bilinear contínua, coerciva e simétrica, então o operador linear $A : D(A) \subset H \to H$ é fechado, não limitado, positivo e definido, autoadjunto e uma bijeção (isomorfismo). Além disso, dotando o domínio $D(A)$ com norma $||u||_{D(A)} = ||Au||_H$, que é equivalente a norma do gráfico $||u||_G^2 = ||u||_H^2 + ||Au||_H^2$ obtemos que $D(A)$ é um espaço de Hilbert denso em H. Um clássico exemplo de uma forma bilinear satisfazendo as condições acima é dada pelo produto interno $(\cdot,\cdot)_V$ em V. Neste caso, considerando o operador A dado pela terna $\{V, H, (\cdot,\cdot)_V\}$, então $A : D(A) \subset H \to H$ é tal que

$$(Au, v)_H = (u, v)_V, \quad \forall v \in V$$

Mediante às condições satisfeitas pelo operador A acima e usando também que a inclusão $H \hookrightarrow H$ é compacta, segue da teoria espectral que existe uma base ortonormal completa $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de H e uma sequência de números reais $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tais que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \quad \text{com } \lambda_j \to \infty \quad \text{quando} \quad j \to \infty,$$

$$\omega_j \in D(A) \quad \text{e} \quad A\omega_j = \lambda_j \omega_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Note que vale ainda as seguintes relações

$$(\omega_i, \omega_j)_H = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad a(\omega_i, \omega_j) = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N},$$

onde δ_{ij} denota o delta de Kronecker.

1.4.2 Potências fracionárias do operador A

Sob as hipóteses da subseção anterior, podemos definir também os operadores com potências fracionárias A^s, $s \in \mathbb{R}$, do operador A. Mais ainda, os operadores A^s podem ser caracterizados em termos da base $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Iniciamos observando que para $s > 0$ o operador $A^s : D(A^s) \subset H \to H$ é um operador linear não limitado, positivo definido, autoadjunto e injetivo, cujo o domínio $D(A^s)$ é denso em H. Além disso, munindo $D(A^s)$ com o produto interno e norma

$$(u,v)_{D(A^s)} = (A^s u, A^s v)_H \quad \text{e} \quad ||u||_{D(A^s)} = ||A^s u||_H,$$

obtemos que $D(A^s)$ é um espaço de Hilbert. Mais ainda, $D(A^{-s})$ é definido como sendo o dual de $D(A^s)$ e com isto o operador A^s pode ser estendido como um isomorfismo de H em $D(A^{-s})$. Em $D(A^{-s})$ consideramos o produto interno e norma como acima substituindo s por $-s$.

Usando novamente que a inclusão $V \hookrightarrow H$ é compacta, pode-se definir A^s, para $s > 0$, em termos da base $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ por

$$A^s u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s (u,\omega_j)_H \omega_j, \quad \forall u \in D(A^s),$$

onde

$$D(A^s) = \left\{ u \in H \mid \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s} |(u,\omega_j)_H|^2 < \infty \right\}.$$

Neste caso, a norma em $D(A^s)$ pode ser reescrita como

$$||u||_{D(A^S)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s} |(u,\omega_j)_H|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in D(A^s).$$

Ademais, $D(A^{-s})$ é o complemento de H para a norma $(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s} |(u,\omega_j)_H|^2)^{\frac{1}{2}}$ e A^{-s} é definido como acima, com $-s$ no lugar de s.

Lema 1.4.1. *Se $\alpha \geq 0$ e $\beta > 0$, então $D(A^{\alpha+\beta}) \hookrightarrow\hookrightarrow D(A^{\alpha})$.*

Capítulo 2

Noções de semigrupos lineares e atratores globais

No presente capitulo, relembraremos alguns conceitos e resultados oriundos de teoria geral de semigrupos lineares e atratores globais. Inicialmente, teremos varias definições e, em seguida, daremos os principais resultados que nos interessa.

2.1 C_0-semigrupos de operadores lineares

Como ja foi mencionado e definido anteriormente, $(X, ||\cdot||_X)$ é um espaço de Banach, $(H, ||\cdot||_H, (\cdot,\cdot)_H)$ um espaço de Hilbert e $(\mathcal{L}(X,X), ||\cdot||)$ o espaço dos operadores lineares e contínuo em X.

Definição 2.1.1. *Uma família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares e limitados definida sobre um espaço de Banach X é chamado de* **semigrupo de operadores lineares limitados** *ou simplesmente* **semigrupo**, *quando*
(i) $T(0) = I : X \to X$ *(Operador Identidade em X)*
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \quad$ *para cada* $t, s \geq 0$
Ademais, dizemos que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um **semigrupo de classe C_0** *ou simplesmente* **C_0-semigrupo**, *se além dons itens acima, tivermos que*
(iii) $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x,$ *para todo* $x \in X$.

Definição 2.1.2. *Um operador A é chamado de* **gerador infinitesimal** *de um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ quando A é definido como*

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}$$

e para cada $x \in D(A)$ temos

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

Às vezes diz-se também que o semigrupo $T(t)$ é **gerado** *por A. Usaremos com frequência a seguinte notação $T(t) = e^{At}$. Note também que o domínio $D(A)$ do operador A pode ser reescrito como*

$$D(A) = \{x \in X \mid Ax \in X\}.$$

Definição 2.1.3. *Um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é chamado de* **uniformemente limitado** *se existe uma constante $M \geq 1$ tal que*

$$||T(t)|| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Quando $M = 1$, diremos também que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de **contrações**.

Definição 2.1.4. *Um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é chamado de* **exponencialmente estável** *se existem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$||T(t)|| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Definição 2.1.5. *Seja $R = \{z := re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta_1 < \theta < \theta_2,\ \theta_1 < 0 < \theta_2\}$. Uma família de operadores lineares limitados $\{T(z)\}_{z\in R}$ definido em R, é chamada de* **semigrupo analítico** *sobre R quando*
(i) $z \mapsto T(z)$ é analítica em R
(ii) $T(0) = I$ e $\lim\limits_{z\in R, z\to 0} T(z)x = x$, para todo $x \in R$.
(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para todos $z_1, z_2 \in R$.

Definição 2.1.6. *Um C_0-semigrupo real $T(t) := e^{At}$ é chamado de* **analítico** *se ele possui uma extensão analítica $T(z)$ em algum setor R que contém o eixo real não negativo.*

Pelas definições acima, podemos ver que a restrição de um semigrupo analítico ao eixo real é, em particular, um C_0-semigrupo.

Definição 2.1.7. *Seja A um operador linear, não necessariamente limitado, definido sobre o espaço de Banach X. O* **conjunto resolvente** *denotado por $\rho(A)$, é definido como*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \text{ é invertível e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)\}.$$

O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ é chamado de **espectro** *de A.*

Definição 2.1.8. *Seja A um operador linear definido sobre um espaço de Hilbert H com domínio $D(A) \subseteq H$. Dizemos que A é um* **operador dissipativo** *quando*

$$Re(Ax, x)_H \leq 0, \quad \forall\ x \in D(A).$$

2.1.1 Caracterização dos geradores infinitesimais de C_0-semigrupos

Teorema 2.1.9 (Hille-Yosida)**.** *Um operador linear não limitado A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ se, e somente se,*

(a) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.
(b) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de contém $\mathbb{R}^+$ e para cada $\lambda > 0$

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

O teorema seguinte, nos fornece a caracterização dos geradores infinitesimais de C_0-semigrupos de contrações sobre os espaços de Hilbert. O mesmo resultado vale em espaços de Banach, sendo de grande valia neste trabalho somente os resultados sobre espaços de Hilbert.

Teorema 2.1.10 (Lumer-Phillips)**.** *Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H. Temos:*
(a) Se A é dissipativo e existe um número $\lambda > 0$ tal que $\mathcal{I}m(\lambda I - A) = H$, então A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H.
(b) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H, então $\mathcal{I}m(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

Corolário 2.1.11. *Seja A um operador linear dissipativo com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H. Se $0 \in \rho(A)$, então A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H.*

2.1.2 Analiticidade e estabilidade assintótica de C_0-semigrupos

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados que lidam com analiticidade, estabilidade exponencial e que geram decaimento do tipo polinomial de C_0-semigrupos definidos sobre espaços de Hilbert.

Teorema 2.1.12. *Seja $T(t) = e^{At}$ um C_0-semigrupo de contrações em um espaços de Hilbert H tal que*

$$i\mathbb{R} := \{i\beta;\ \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(A) \tag{2.1}$$

Então, $T(t)$ é analítico se, e somente se,

$$\overline{\lim_{|\beta| \to \infty}} ||\beta(i\beta I_d - A)^{-1}|| < \infty, \tag{2.2}$$

onde a norma $||\cdot||$ é dada no espaço $\mathcal{L}(H, H)$.

O próximo resultado concede estabilidade exponencial para um semigrupo. Onde observamos que existe duas maneiras equivalentes de se obter estabilidade exponencial para C_0-semigrupo de contrações em espaços de Hilbert, a saber, uma versão que fornece uma condição necessaria e suficiente para estabilidade exponencial.

Teorema 2.1.13. *Seja $T(t) = e^{At}$ um C_0-semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert H. Então, $T(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, as condições se verificam*

$$i\mathbb{R} := \{i\beta;\ \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(A) \tag{2.3}$$

e

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}}||\beta(i\beta I_d - A)^{-1}|| < \infty. \tag{2.4}$$

Estamos interessados em aplicar esses resultados gerais em problemas de evolução dissipativos, enxergando a solução do sistema por meio de um semigrupo. Contudo, tal semigrupo nem sempre é exponencialmente estável. Neste caso, devemos procurar outra forma de estabilizar o sistema, como por exemplo, determinar decaimento polinomial de soluções.

Teorema 2.1.14. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado em um espaço de Hilbert H com gerador infinitesimal A tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então, para alguma constante fixada $\alpha > 0$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$||(i\beta I_d - A)^{-1}|| = O(|\beta|^{\alpha}), \quad \beta \to \infty.$$

$$||T(t)(-A)^{-\alpha}|| = O(t^{-1}), \quad t \to \infty.$$

$$||T(t)(-A)^{-\alpha}u||_H = o(t^{-1}), \quad t \to \infty, \ u \in H.$$

$$||T(t)A^{-1}|| = O(t^{\frac{-1}{\alpha}}), \quad t \to \infty.$$

$$||T(t)A^{-1}u||_H = o(t^{\frac{-1}{\alpha}}), \quad t \to \infty, \ u \in H.$$

Na cadeia de sentenças acima, relembramos que a notação $||\cdot||$ menciona norma no espaço $\mathcal{L}(H, H)$.

2.1.3 Problema de Cauchy abstrato

Com é bem conhecido, a teoria geral de semigrupos nos permite estudar problemas de valor inicial para equações de evoluções abstratas do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) &= AU(t) \quad , \quad t > 0, \\ U(0) &= U_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

onde A é um operador linear com domínio $D(A) \subset X$, sendo X um espaço de Banach ou de Hilbert.

Definição 2.1.15. *Uma solução do problema de Cauchy (2.5) é uma função $U : [0, +\infty) \to X$ tal que $U(t)$ é contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável com $U(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e satisfaz (2.5) em $[0, +\infty)$ quase sempre.*

Teorema 2.1.16. *Seja A um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $T(t) := e^{At}$ em X. Se $U_0 \in D(A)$, então o problema de Cauchy abstrato (2.5) possui uma única solução U em $D(A)$ dada por*

$$U(t) = T(t)U_0 := e^{At}U_0, \quad \forall \ t \geq 0,$$

tal que

$$U \in C([0, +\infty), D(A) \cap C^1([0, +\infty), X))$$

Para obter soluções mais regulares introduzimos o seguinte espaço de Banach, ou de Hilbert

$$D(A^k) = \left\{ U \in D(A^{k-1}) \mid AU \in D(A^{k-1}) \right\}, \ k \in \mathbb{N},$$

munido da norma $||U||^2_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} ||U||^2_{D(A^j)}$. Com isto, temos o

Teorema 2.1.17. *Sob as hipoteses do anterior, se $U_0 \in D(A^k)$ com $k \in \mathbb{N}$, então a solução U do problema (2.5) satisfaz a seguinte condição*

$$U \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}([0, +\infty), D(A^j)).$$

2.2 Uma noção sobre atratores globais

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos e resultados básicos da teoria de atratores globais para semigrupos de operadores não lineares definidos sobre espaços métricos completos em geral. Em particular, tais conceitos também são válidos para espaços de Banach e Hilbert, os quais constituem objetos de nosso interesse.

Denotaremos o par (X, d) um espaço métrico completo e por $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das aplicações contínuas de X em X. Porém, cabe ressaltar que os conceitos iniciais apresentados a seguir são cabíbeis apenas para espaços métricos.

Definição 2.2.1. *Uma família de operadores não necessariamente lineares $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{C}(X)$ é chamada de C_0-semigrupo não linear, se as seguintes condições forem satisfeitas:*
(i) $S(0) = I : X \to X$ é o operador identidade.
(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$ para cada $t, s \geq 0$.
(iii) A aplicação $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto S(t)(x) \in X$ é contínua para cada $x \in X$ fixado.
As vezes o par $(X, S(t))$ é também chamado de **sistema dinâmico** *e $S(t)$ um* **semigrupo de evolução**.

Definição 2.2.2. *Seja $S(t) : X \to X, \ t \geq 0$, com C_0-semigrupo. Diremos que um conjunto $\mathcal{A} \subset X$ é* **invariante** *ou (***positivamente invariante***) pelo semigrupo $S(t)$, quando $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$ (ou $S(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$)*

Definição 2.2.3. *Seja $S(t) : X \to X, \ t \geq 0$, com C_0-semigrupo. Um conjunto fechado e limitado $\mathcal{A} \subset X$ é chamado* **atrator global** *para $S(t)$, quando as seguintes propriedades forem satisfeitas:*
(i) $\mathcal{A}$ é um conjunto invariante por $S(t)$
(ii)$\mathcal{A}$ **atrai uniformemente** *qualquer subconjunto limitado de X sob a ação de $S(t)$, ou seja, para qualquer limitado $B \subset X$,*

$$dist_H(S(t)B, \mathcal{A}) := \sup_{x\in S(t)B} \inf_{y\in \mathcal{A}} d(x, y) \to 0, \quad quando \quad t \to \infty.$$

onde $dist_H(A, B)$ *é chamada de* **semi-distância de Hausdorff** *entre os subconjuntos* $A, B \subset X$.

Para determinar a existência de atratores globais as seguintes noções constituem fundamental importância.

Definição 2.2.4. *Seja* $S(t) : X \to X,\ t \geq 0$, *com* C_0*-semigrupo. Um conjunto* $\mathcal{B} \subset X$ *é chamado de* **conjunto absorvente** *para* $S(t)$ *se para qualquer subconjunto limitado* $\mathcal{B} \subset X$, *existe* $T_0 = T_0(B) \geq 0$ *tal que*

$$S(t)B \subset \mathcal{B}, \quad \forall\, t \geq T_0$$

Quando $S(t)$ *possui um conjunto absorvente limitado, diremos também que o par* $(X, S(t))$ *constitui um* **sistema dinâmico dissipativo.**

Definição 2.2.5. *Seja* $S(t) : X \to X,\ t \geq 0$, *com* C_0*-semigrupo, é chamado* **assintoticamente suave** *se para qualquer conjunto limitado e positivamente invariante* $B \subset X$, *existe um conjunto compacto* $K \subset \overline{B}^X$ *tal que*

$$dist_H(S(t)B, K) \to 0, \quad quando \quad t \to \infty.$$

Proposição 2.2.6. *Seja* $(X, S(t))$ *um sistema dinâmico dissipativo definido sobre um espaço de Banach* X. *Então,* $S(t)$ *possui um atrator global compacto* $\mathcal{A} \subset X$ *se, e somente se,* $S(t)$ *é assintoticamente suave.*

Com este resultado, que fornece uma condição necessária e suficiente para existência de atratores globais compactos, vemos que é indispensável buscar critérios para C_0-semigrupo seja assintoticamente suave.

Definição 2.2.7. *Uma pseudométrica* $m : X \times X \to \mathbb{R}$ *definida sobre um espaço de Banach* X *é chamada de* **pré-compacta**, *com respeito a norma de* X, *se toda sequência limitada em* X *possui uma subsequência que é de Cauchy com respeito a* m.

Proposição 2.2.8. *Seja* $S(t) : X \to X,\ t \geq 0$, *um* C_0*-semigrupo definido sobre um espaço de Banach* X. *Suponhamos que para qualquer conjunto limitado e positivamente invariante* $B \subset X$, *existam funções* $K_B(t) \geq 0$ *e* $Q_B(t) \geq 0$, *tais que* $\lim_{t\to\infty} Q_B(t) = 0$, *um tempo* $T_B \geq 0$ *e uma pseudométrica pré-compacta* $m : X \times X \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$||S(t)x - S(t)y||_X \leq Q_B(t)||x - y||_X + K_B(t)m(x, y); \quad \forall\, t \geq T_B,\ \forall\, x, y \in B.$$

Então, $S(t)$ *é assintoticamente suave.*

2.2.1 Condições suficientes para existência de atratores globais

Enfatizaremos mais alguns resultados que nos dão condições suficientes para determinar a existência de atratores globais. No que segue segue denotaremos por $(X, ||\cdot||_X)$ um espaço de Banach e $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0- semigrupo definido o espaço X.

Definição 2.2.9. *Um semigrupo* $S(t) : X \to X,\ t \geq 0$, *é chamado* **assintoticamente compacto** *se para qualquer sequência limitada* $\{x_n\} \subset X$ *e uma sequência numérica* $t_n \to \infty$, *existe uma subsequência* $\{S(t_{n_k})(x_{n_k})\}$ *de* $\{S(t_n)(x_n)\}$ *convergente em* X.

Teorema 2.2.10. *Seja* $S(t) : X \to X,\ t \geq 0$, *um* C_0*-semigrupo. Suponhamos que*
(i) $S(t)$ *possui um conjunto absorvente limitado* $\mathcal{B} \subset X$.
(ii) $S(t)$ *é assintoticamente compacto.*
Então, $S(t)$ *possui uma atrator global* $\mathcal{A} \subset X$, *que é dado por*

$$\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}) := \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq 0} S(t)\mathcal{B}}^{X},$$

onde $\omega(B)$ *é chamado de conjunto* ω*-limite de um subconjunto* B *de* X.

Definição 2.2.11. *Seja* B *um subconjunto limitado de* X. *Uma função* $\phi(\cdot,\cdot)$ *definida sobre* $X \times X$ *é chamada de* **função contrativa** *sobre* $B \times B$, *se para qualquer sequência* $\{x_n\} \subset B$, *existe uma subsequência* $\{x_{n_k}\}$ *de* $\{x_n\}$ *tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{l\to\infty} \phi(x_{n_k}, x_{n_l}) = 0$$

O conjunto das funções contrativas sobre $B \times B$ *será denotado por* $\mathcal{C}_t(B)$.

Teorema 2.2.12. *Seja* $S(t) : X \to X,\ t \geq 0$, *um* C_0*-semigrupo que possui um conjunto absorvente limitado* $\mathcal{B}$. *Se para qualquer* $\epsilon \geq 0$ *existem um número* $T_0 = T_0(\mathcal{B}, \epsilon) \geq 0$ *e uma função* $\phi_T(\cdot,\cdot) \in \mathcal{C}_t(\mathcal{B}_0)$ *tais que*

$$||S(T)x - S(T)y||_X \leq \epsilon + \phi_T(x,y), \quad \forall\ x, y \in \mathcal{B},$$

então $S(t)$ *é assintoticamente compacta. Consequentemente,* $S(t)$ *possui um atrator global* $\mathcal{A} \subset X$.

Teorema 2.2.13. *Seja* $S(t) : X \to X,\ t \geq 0$, *um* C_0*-semigrupo que possui um conjunto absorvente limitado* $\mathcal{B}$. *Suponhamos que* $S(t)$ *pode ser decomposto com uma soma* $S(t) = P(t) + T(t)$, *com* $P(t)$ *e* $T(t)$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*
(i) Para cada conjunto limitado $B \subset X$, *temos*

$$\sup_{x\in B} ||P(t)x||_X \to 0 \quad \textit{quando} \quad t \to +\infty.$$

(ii) Para cada conjunto limitado $B \subset X$, *existe* $T_0 = T_0 B \geq 0$ *tal que* $T(t)B$ *é relativamente compacto para todo* $t \geq T_0$.
Então, $S(t)$ *é assintoticamente compacto. Em particular, o conjunto* $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ *é uma atrator global para* $S(t)$ *em* X.

2.2.2 Dimensão Fractal

Buscar uma forma de avaliar a dimensionalidade de atratores dentro do contexto de sistêmas dinâmicos com dimensão infinita constitui propriedades dos mesmos. Abordaremos uma medida comum para atratores globais, a saber, **dimensão fractal**.

Definição 2.2.14. *Seja $\mathcal{A}$ um subconjunto compacto de um espaço métrico X. A* **dimensão fractal** *de $\mathcal{A}$, denotada por $dim_f\mathcal{A}$, definida por*

$$dim_f\mathcal{A} := \lim_{\epsilon\to 0}\sup\frac{\ln(n_{\mathcal{A}}(\epsilon))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}$$

onde $n_{\mathcal{A}}(\epsilon)$ é o número mínimo de bolas fechadas de raio ϵ que é necessário para cobrir $\mathcal{A}$.

Definição 2.2.15. *Uma seminorma $n : X \to [0,\infty)$ definida sobre um espaço de Banach X é chamada de* **compacta** *se para qualquer limitado $B \subset X$, existe uma sequência $\{x_n\} \subset B$ tal que $n(x_m - x_n) \to 0$ quando $m, n \to \infty$*

Proposição 2.2.16. *Sejam $(X, ||\cdot||_X)$ um espaço de Banach e $\mathcal{A} \subset X$ um subconjunto fechado e limitado. Suponhamos que existe uma aplicação $\mathcal{T} : \mathcal{A} \to X$ satisfazendo as seguintes propriedades:*
(i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$
(ii) $\mathcal{T}$ é Lipschitz sobre $\mathcal{A}$, isto é, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$||\mathcal{T}y_1 - \mathcal{T}y_2||_X \leq L||y_1 - y_2||_X,\ \forall\ y_1, y_2 \in \mathcal{A}.$$

(iii) Existem seminormas compactas $n_1,\ n_2 : X \to [0,\infty)$ tais que

$$||\mathcal{T}y_1 - \mathcal{T}y_2||_X \leq q||y_1 - y_2||_X + K[n_1(y_1 - y_2) + n_2(\mathcal{T}y_1 - \mathcal{T}y_2)],$$

para todos $y_1, y_2 \in \mathcal{A}$., onde $0 < q < 1$ e $K > 0$ são constantes.
Então, $\mathcal{A}$ é compacto em X e possui dimensão fractal finita. Além disso, vale a seguinte estimativa

$$dim_f\mathcal{A} \leq \left[\ln\frac{2}{1+q}\right]^{-1}\ln m_0\left(\frac{4K(1+L^2)^{\frac{1}{2}}}{1-q}\right), \tag{2.6}$$

onde $m_0(R)$ é o número máximo de pares $(x_i, y_i) \in X \times X$ com propriedade

$$||x_i||_X^2 + ||y_i||_X^2 \leq R^2, \quad n_1(x_i - y_j) + n_2(y_i - y_j) > 1, \quad i \neq j$$

Lema 2.2.17. *Sejam X e Y espaços métricos e $\mathcal{K} \subset X$ um subconjunto compacto. Se $\mathcal{F} : X \to Y$ é uma função α- Holder contínua, então*

$$dim_f^Y\mathcal{F}(\mathcal{K}) \leq \frac{1}{\alpha}dim_f^X\mathcal{K}.$$

Em particular, a dimensão fractal não aumenta sob ação de uma aplicação Lipschitz contínua.

Capítulo 3

Um modelo de placas com p-Laplaciano e memória

3.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos o problema da equação de placa com p-Laplaciano e com o termo de memória. Estudarenos existência, decaimento esponencial das soluções e obtenção de estimativas que envolva o termo de memória e o operador p-Laplaciano.

Seja $N \geq 1$ natural e considere Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteiras sua $\Gamma = \partial\Omega$ e $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Neste capítulo estudaremos a existência e o comportamento assintótico (decaimento exponencial de energia) de soluções globais para a seguinte equação de placas não linear com memória

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \Delta u_t + f(u) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{3.1}$$

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(x,0) = u_1(x) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.3}$$

onde $\Delta_p u$ denota o operador não linear p-Laplaciano introduzido na seção 1.3 do Capítulo 1, g é usualmente chamada de núcleo da memória e $f(u)$ é uma não linearidade do tipo Lipschitz local. As hipóteses sobre tais termos serão atribuidads na seção seguinte. O termo de memória de segunda ordem que aparece na equação (3.1) representa complicações no decaimento de soluções.

O presente capítulo está organizado da seguinte maneira. Na seção 3.2 fixaremos as notações preliminares e as hipóteses sobre os devidos termos do problema (3.1)-(3.3). Na seção 3.3 apresentaremos o resultado de existência via método de Faedo-Galerkin, separando a demonstração em subseções para uma melhor leitura do texto. Por fim, na seção 3.4 determinaremos um resultado de estabilidade exponencial para o sistema (3.1)-(3.3), ou melhor, que a energia associada a este problema possui decaimento exponencial ao longo do tempo.

3.2 Hipóteses e notações iniciais

Iniciaremos com as hipóteses precisas sobre o parâmentro p do operador p-Laplaciano e sobre as funções g e f presentes em (3.1)-(3.3)).

Para $N \in \mathbb{N}$ assumiremos que

$$2 \leq p \leq \frac{2N-2}{N-2} \quad \text{se} \quad N \geq 3 \quad \text{e} \quad p \geq 3 \quad \text{se} \quad N = 1, 2. \tag{3.4}$$

Assumiremos também que o núcleo da memória $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ é uma função limitada de classe C^1 satisfazendo as propriedades:

$$g(0) > 0 \quad \text{e} \quad l := 1 - \mu_1 \int_0^\infty g(s)ds > 0 \tag{3.5}$$

onde $\mu_1 > 0$ é a constante de imersão para $||\nabla u||_2^2 \leq \mu_1 ||\Delta u||_2^2$, e existe uma constante $k_1 > 0$ tal que

$$g'(t) \leq -k_1 g(t), \quad \forall\, t \geq 0. \tag{3.6}$$

Consideremos ainda que o termo forçante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz:

$$f(0) = 0, \quad |f(u) - f(v)| \leq k_2(1 + |u|^\rho + |v|^\rho)|u - v|, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

onde $k_2 > 0$ é uma constante e

$$0 < \rho \leq \frac{4}{N-4} \quad \text{se} \quad N \geq 5 \quad \text{e} \quad \rho > 0 \quad \text{se} \quad 1 \leq N \leq 4. \tag{3.8}$$

Além disso, suponhamos que

$$0 \leq \hat{f}(u) \leq f(u)u, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

onde $\hat{f}(z) = \int_0^z f(s)ds$.
Com a condição (3.4) segue do Teorema de Imersões de Sobolev, que vale a seguinte cadeia de imersões

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2(p-1)}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Mais ainda, a condição (3.8) garante que

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega).$$

Já as condições (3.7) e (3.9) incluem funções da forma

$$f(u) \approx |u|^\rho u + |u|^\alpha u, \quad 0 < \alpha < \rho.$$

Como de padrão, denotaremos por $(\cdot, \cdot)$ o produto interno em $L^2(\Omega)$ e por $||\cdot||_p$ a norma em $L^p(\Omega)$. Além disso, introduzimos os seguintes espaços de Hilbert

$$\mathcal{H} = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1 = H_\Gamma^3(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

equipado com as normas

$$||(u, v)||_{\mathcal{H}}^2 = ||\Delta u||_2^2 + ||v||_2^2 \quad \text{e} \quad ||(u, v)||_{\mathcal{H}_1}^2 = ||\nabla \Delta u||_2^2 + ||\Delta v||_2^2,$$

que são provenientes dos respectivos produto internos em $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_1$, onde

$$H_\Gamma^3(\Omega) = \{u \in H^3(\Omega) \mid u = \Delta u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma\}.$$

3.2.1 Uma identidade para a memória

Agora vamos estabelecer uma identidade relativa ao termo de memória dada pela convolução

$$(g * u)(t) := \int_0^t g(t-s)u(s)ds.$$

Para facilitar a notação em considerações futuras, definamos:

$$(g\Box u)(t) = \int_0^t g(t-s)||u(t)-u(s)||_2^2 ds$$

Com isto em mente, temos o

Lema 3.2.1. *Sejam $g \in C^1(\mathbb{R}^+)$ e $u \in C^1([0,T], H^2(\Omega))$. Então, as seguintes identidades se verificam*

$$\begin{aligned}\int_0^t g(t-s)(\nabla u(s), \nabla u_t(t))ds &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g\Box\nabla u)(t) - \left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla u(t)||_2^2\right\}\\ &= +\frac{1}{2}(g'\Box\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)||\nabla u(t)||,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \Delta u_t(t))ds &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g\Box\Delta u)(t) - \left(\int_0^t g(s)ds\right)||\Delta u(t)||_2^2\right\}\\ &= +\frac{1}{2}(g'\Box\Delta u)(t) - \frac{1}{2}g(t)||\Delta u(t)||,\end{aligned}$$

3.3 Existência e unicidade

Iniciaremos esta seção exibindo o conceito de solução fraca para o problema (3.1)-(3.3) que abordaremos neste capítulo.

Definição 3.3.1. *Seja $I=[0,T]$ com $T>0$, Diremos que uma função $z := (u, u_t) \in C(I, \mathcal{H})$ é uma* **solução fraca** *para o problema (3.1)-(3.3) no intervalo I, se $z(0) := (u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ e*

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(u_t, \omega) + (\Delta u, \Delta\omega) + \langle|\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla\omega\rangle \ +\\ &+\int_0^t g(t-s)(\Delta u(s), \omega)ds + (\nabla u_t, \nabla\omega) + (f(u), \omega) = 0, \qquad (3.10)\end{aligned}$$

quase sempre em I, para todo $\omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Pelas hipoteses (3.7)-(3.8) é simples verificar que, para $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, temos $f(u) \in L^2(\Omega)$. Assim, na definição acima faz sentido escrever $(f(u), \omega)$ como um produto interno em $L^2(\Omega)$, sendo o problema (3.1)-(3.3) bem posto.

Teorema 3.3.2. *Sob as condições (3.4)-(3.9), temos:*
(i) Se $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$, então o problema (3.1)-(3.3) possui uma única solução fraca

$$(u, u_t) \in C([0,T]; \mathcal{H}), \quad \forall\, T > 0,$$

satisfazendo

$$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \quad e \quad u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_1^0(\Omega)). \tag{3.11}$$

(ii) Se $(u_0,u_1)\in\mathcal{H}_1$*, então a solução fraca do problema (3.1)-(3.3) possui regularidade*

$$u \in L^\infty(0,T;H_\Gamma^3(\Omega)) \quad e \quad u_t \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \tag{3.12}$$

3.3.1 Problema aproximado

Denotaremos por $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a base ortonormal bem regular de $L^2(\Omega)$, que também é ortogonal em $H_0^1(\Omega)$ e $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, constituida por autofunções do operador biharmônico Δ^2 com condições de fronteira $u=\Delta u=0$ sobre Γ. Para $m\in\mathbb{N}$ considremos também o subespaço de dimensão finita dado por

$$V_m := \text{Span}\{\omega_1,...,\omega_m\} = [\omega_1,...,\omega_m].$$

Dado $(u_0,u_1)\in\mathcal{H}$, queremos determinar soluções da forma

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^m y_{mj}(t)\omega_j, \tag{3.13}$$

para o seguinte problema aproximado

$$\begin{aligned} &(u_{tt}^m(t),\omega_j) + (\Delta u^m(t),\Delta\omega_j) + \left\langle |\nabla u^m(t)|^{p-2}\nabla u^m(t),\nabla\omega_j \right\rangle \; + \\ &+ \int_0^l g(t-s)(\Delta u^m(s),\omega_j)ds + (\nabla u_t^m(t),\nabla\omega_j) + (f(u^m(t)),\omega_j) = 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

com condições inciais

$$u^m(0)=u_0^m, \quad u_t^m(0)=u_1^m, \tag{3.15}$$

onde u_0^m e u_1^m são escolhidos de forma que

$$u_0^m \to u_0 \;\; \text{em} \;\; H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \;\; \text{e} \;\; u_1^m \to u_1 \;\; \text{em} \;\; L^2(\Omega). \tag{3.16}$$

Contudo, observe que o problema aproximado (3.14)-(3.15) é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias, cuja a existência de soluçõa local é assegurado pelo Teorema de Carathéodory. Logo, o problema aproximado (3.14)-(3.15) possui uma solução local $u^m(t)$ da forma (3.13) em algum intervalo $[0,T_m)$ com $0<T_m\le T$.

A seguir apresentaremos estimativas a priori que nos permitirão estender as soluções locais $u^m(t)$ ao intervalo $[0,T]$, para qualquer $T>0$ dado, bem como extrair subsequências de soluções convenientemente convergentes para a solução fraca procurada.

3.3.2 Estimativa a priori 1

Multiplicando a equação aproximada (3.14) por $u_t^m(t)$ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}||u_t^m(t)||_2^2+\frac{1}{2}||\Delta u^m(t)||_2^2+\frac{1}{p}||\nabla u^m(t)||_p^p+\int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx\right\}+||\nabla u_t^m(t)||_2^2 \quad =$$

$$=\int_0^t g(t-s)(\nabla u^m(s),\nabla u_t^m(t))ds.$$

Da identidade para a memória fornecida pelo Lema 2.2.1 vem que

$$\int_0^t g(t-s)(\nabla u^m(s),\nabla u_t^m(t))ds=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(g\Box\nabla u^m)(t)-\left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla u^m(t)||_2^2\right\}$$

$$+\frac{1}{2}(g'\Box\nabla u^m)(t)-\frac{1}{2}g(t)||\nabla u^m(t)||_2^2.$$

Logo, substituindo esta última expressão na anterior, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E^m(t)+||\nabla u_t^m(t)||_2^2=\frac{1}{2}(g'\Box\nabla u^m)(t)-\frac{1}{2}g(t)||\nabla u^m(t)||_2^2. \tag{3.17}$$

onde

$$E^m(t)=||u_t^m(t)||_2^2+||\Delta u^m(t)||_2^2-\left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla u^m(t)||_2^2+\frac{2}{p}||\nabla u^m(t)||_p^p+$$

$$+2\int_\Omega \widehat{f}(u^m(t))dx+(g\Box\nabla u^m)(t)$$

Das condições (3.5)-(3.9) e como $(g\Box\nabla u^m)(t)\geq 0$, vem que

$$||u_t^m(t)||_2^2+l||\Delta u^m(t)||_2^2\leq E^m(t). \tag{3.18}$$

Além disso, da hipótese (3.6)

$$(g'\Box\nabla u^m)(t)\leq -k_1(g\Box\nabla u^m)(t)\leq 0.$$

Com isto, o lado direito da igualdade em (3.17) é não positivo. Assim, integrando (3.17) de 0 a t e usando (3.18) chegamos a seguinte estimativa

$$||u_t^m(t)||_2^2+l||\Delta u^m(t)||_2^2+2\int_0^t ||\nabla u_t^m(s)||_2^2ds\leq E^m(0).$$

Usando agora as hipoteses (3.7) e (3.9) em conjunto com as convergências em (3.16), concluimos

$$||u_t^m(t)||_2^2+||\Delta u_m(t)||_2^2+2\int_0^t ||\nabla u_t^m(s)||_2^2ds\leq M_1, \tag{3.19}$$

para todos $t\in[0,T_m)\subset[0,T]$ e $m\in\mathbb{N}$, onde $M_1=M_1(||u_1||_2,||\Delta u_0||_2)>0$ é independente de t e m. Isto nos permite estender as soluções $u^m(t)$ ao intervalo $[0,T]$ e, em particular, notamos que

$$(u^m) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \tag{3.20}$$

$$(u_t^m) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.21}$$

3.3.3 Passagem ao limite e solução fraca

Das limitações em (3.20)-(3.21) e aplicando os Teoremas 1.2.18 (Compacidade fraca) e 1.2.19 (Compacidade fraca estrela), existe uma subsequência de (u^m), que ainda denotaremos por (u^m), tal que

$$\begin{aligned} u^m &\overset{*}{\rightharpoonup} u \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \\ u_t^m &\overset{*}{\rightharpoonup} u_t \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ u_t^m &\rightharpoonup u_t \ \text{ em } \ L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \end{aligned} \tag{3.22}$$

Além disso, afirmamos que

$$u^m \to u \ \text{ em } \ C([0,T],H_0^1(\Omega)). \tag{3.23}$$

De fato, da estimativa (3.19) segue que (u^m) também é limitada no espaço

$$W := \{u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)); u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\},$$

munido da norma $||u||_W = ||u||_{L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))} + ||u_t||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$. Logo, existe uma subsequência de (u^m), que ainda denotaremos por (u^m), tal que

$$u^m \rightharpoonup u \ \text{ em } \ W.$$

Como $(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow\hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então pelo Teorema de Aubin-Lions, segue que $W \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Logo,

$$u^m \to u \ \text{ em } \ L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.24}$$

de onde segue que

$$||\nabla u^m(t) - \nabla u(t)||_2 \to 0 \ \text{ q.s. em } \ [0,T] \tag{3.25}$$

Agora observe que de (3.22) vem que $u^m,\ u,\ u_t^m,\ u_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e pelo Lema 1.2.14 resulta que $u^m,\ u \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$. Disto e de (3.25) concluimos que (3.23) vale. Com estas convergências podemos passar limite no problema aproximado (3.14) e obter a solução fraca para o problema (3.1)-(3.3). De fato, em primeiro lugar consideremos uma função teste $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $m, j \in \mathbb{N}$ com $m \geq j$. Multiplicando (3.14) por θ e integrando sobre $(0,T)$ resulta que

$$\int_0^T \left\{(u_{tt}^m(t),\omega_j) + (\Delta u^m(t),\Delta\omega_j) + \left\langle |\nabla u^m(t)|^{p-2}\nabla u^m(t),\nabla\omega_j)\right\rangle\right\}\theta(t)dt +$$

$$+ \int_0^T \left\{\int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s),\omega_j)ds + (\nabla u_t^m(t),\nabla\omega_j) + (f(u^m(t)),\omega_j)\right\}\theta(t)dt = 0.$$

Integrando por partes,

$$-\int_0^T (u_t^m(t),\omega_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \left\{(\Delta u^m(t),\Delta\omega_j) + \left\langle |\nabla u^m(t)|^{p-2}\nabla u^m(t),\nabla\omega_j\right\rangle\right\}\theta(t)dt + \tag{3.26}$$

$$+\int_0^T \left\{ \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \omega_j)ds + (\nabla u_t^m(t), \nabla \omega_j) + (f(u^m(t)), \omega_j) \right\} \theta(t)dt = 0$$

No presente capítulo, enfatizaremos às convergências dos termos que envolvem o operador p-Laplaciano e termo não linear f. Os limites dos outros termos em (3.26) segue imediatamente de (3.22).

Com respeito ao termo que envolve p-Laplaciano, devemos mostrar que

$$\int_0^T \left\langle |\nabla u^m(t)|^{p-2}\nabla u^m(t), \nabla \omega_j \right\rangle \theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\to} \int_0^T \left\langle |\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t), \nabla \omega_j \right\rangle \theta(t)dt.$$

ou seja,

$$-\int_0^T \langle \Delta_p(u^m(t)), \omega_j \rangle \theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\to} -\int_0^T \langle \Delta_p(u(t)), \omega_j \rangle \theta(t)dt. \tag{3.27}$$

De fato, em primeiro lugar, observamos que pelo Lema 1.3.1, existe uma constante $M = M(p,N) > 0$ tal que

$$\left||x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y\right| \leq M(|x|^{p-2} + |y|^{p-2})|x-y|, \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^N$$

Em particular, para $x = \nabla u^m$ e $y = \nabla u$, segue que

$$\left||\nabla u^m|^{p-2}\nabla u^m - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right| \leq M(|\nabla u^m|^{p-2} + |\nabla u|^{p-2})|\nabla u^m - \nabla u|.$$

Disto e usando a Desigualdade generalizada de Holder com $\dfrac{p-2}{2(p-1)} + \dfrac{1}{2(p-1)} + \dfrac{1}{2} = 1$, a hipótese (3.4), a estimativa (3.19) e a convergência (3.22), então

$$\left| \int_0^T \langle -\Delta_p(u^m(t)) + \Delta_p(u(t)), \omega_j \rangle \theta(t)dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^T \langle |\nabla u^m(t)|^{p-2}\nabla u^m(t) - |\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t), \nabla \omega_j \rangle \theta(t)dt \right| \\
&\leq \int_0^T \left| \langle |\nabla u^m(t)|^{p-2}\nabla u^m(t) - |\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t), \nabla \omega_j \rangle \right| |\theta(t)|dt \\
&\leq ||\theta||_\infty \int_0^T \int_\Omega \left| |\nabla u^m(t)|^{p-2}\nabla u^m(t) - |\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t) \right| |\nabla \omega_j| dxdt \\
&\leq C_p \int_0^T \int_\Omega \left(|\nabla u^m(t)|^{p-2} + |\nabla u(t)|^{p-2} \right) |\nabla u^m(t) - \nabla u(t)||\nabla \omega_j| dxdt \\
&\leq C_p \int_0^T \left(||\nabla u^m(t)||_{2(p-1)}^{p-2} + ||\nabla u(t)||_{2(p-1)}^{p-2} \right) ||\nabla u^m(t) - \nabla u(t)||_2 ||\nabla \omega_j||_{2(p-1)} dt \\
&\leq C_p \int_0^T \left(||\Delta u^m(t)||_2^{p-2} + ||\Delta u(t)||_2^{p-2} \right) ||\nabla u^m(t) - \nabla u(t)||_2 ||\Delta \omega_j||_2 dt \\
&\leq C_p \int_0^T ||\nabla u^m(t) - \nabla u(t)||_2 dt,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C_p > 0$, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_0^T \langle -\Delta_p(u^m(t)) + \Delta_p(u(t)), \omega_j \rangle \theta(t)dt \right| \leq C \int_0^T ||\nabla u^m(t) - \nabla u(t)||_2 dt \tag{3.28}$$

Agora utilizando a convergência (3.23) em (3.28), então o limite (3.27) segue.

Por outro lado, com respeito ao termo não linear f, devemos mostrar

$$\int_0^T (f(u^m(t)), \omega_j)\theta(t)dt \overset{m\to\infty}{\to} \int_0^T (f(u(t)), \omega_j)\theta(t)dt. \tag{3.29}$$

Primeiramente, usando a desigualdade de Holder generalizada com $\frac{\rho}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2} = 1$, as condições (3.7)-(3.8), a estimativa (3.19) e a convergência (3.22), então para qualquer $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$, obtemos

$$|(f(u^m(t)) - f(u(t)), \phi)|$$

$$\begin{aligned}
&\le \int_\Omega |f(u^m(t)) - f(u(t))||\phi|dx \\
&\le k_2 \int_\Omega (1 + |u^m(t)|^\rho + |u(t)|^\rho)|u^m(t) - u(t)||\phi|dx \\
&\le k_2 \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+1)}} + ||u^m(t)||^\rho_{2(\rho+1)} + ||u(t)||^\rho_{2(\rho+1)}\right) ||u^m(t) - u(t)||_2 ||\phi||_{2(\rho+1)} \\
&\le C_p \left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+1)}} + ||\nabla u^m(t)||^\rho_2 + ||\Delta u(t)||^\rho_2\right) ||u^m(t) - u(t)||_2 ||\Delta\phi||_2 \\
&\le C_p ||u^m(t) - u(t)||_2 ||\Delta\phi||_2,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C_p > 0$. Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||f(u^m(t)) - f(u(t))||_{[H^2(\Omega)\cap H_0^1]'} \le C||u^m(t) - u(t)||_2.$$

Disto e aplicando a convergência (3.23) vem que

$$\left|\int_0^T (f(u^m(t)) - f(u(t)), \omega_j)\, \theta(t)dt\right|$$

$$\begin{aligned}
&\le \int_0^T |(f(u^m(t)) - f(u(t), \omega_j)|\, |\theta(t)|dt \\
&\le C \int_0^T ||f(u^m(t)) - f(u(t))||_{[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)]'} ||\Delta\omega_j||_2 dt \\
&\le C \int_0^T ||u^m(t) - u(t)||_2 dt \\
&\le C \int_0^T ||\nabla u^m(t) - \nabla u(t)||_2 dt \overset{m\to\infty}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Isto prova o limite (3.29). Como já comentamos, os outros termos em (3.26) convergem de modo padrão usando os limites obtidos em (3.22). Assim sendo, passando o limite quando $m \to \infty$ em (3.26) resulta que

$$-\int_0^T (u_t(t), \omega_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \left\{(\Delta u(t), \Delta\omega_j) + \left\langle |\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t), \nabla\omega_j\right\rangle\right\} \theta(t)dt +$$

$$+\int_0^T \left\{\int_0^l g(t-s)(\Delta u(s),\omega_j)ds + (\nabla u_t(t),\nabla\omega_j) + (f(u(t)),\omega_j)\right\}\theta(t)dt = 0$$

ou seja

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_t(t),\omega_j)\theta(t)dt + \int_0^T \left\{(\Delta u(t),\Delta\omega_j) + \left\langle|\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t),\nabla\omega_j\right\rangle\right\}\theta(t)dt +$$

$$+\int_0^T \left\{\int_0^l g(t-s)(\Delta u(s),\omega_j)ds + (\nabla u_t(t),\nabla\omega_j) + (f(u(t)),\omega_j)\right\}\theta(t)dt = 0$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Como $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ constitui uma base para $H^2(\Omega)\cap H_0^1$, então

$$\int_0^T \left\{\frac{d}{dt}(u_t(t),\omega) + (\Delta u(t),\Delta\omega) - \langle\Delta_p u(t),\omega\rangle\right\}\theta(t)dt+ \tag{3.30}$$

$$+\int_0^T \left\{\int_l^0 g(t-s)(\Delta u(s),\omega)ds + (\nabla u_t(t),\nabla\omega) + (f(u(t)),\omega)\right\}\theta(t)dt = 0,$$

para todo $\omega \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Logo, de (3.30) deduzimos que

$$\frac{d}{dt}(u_t,\omega) + (\Delta u,\Delta\omega) - \langle\Delta_p u,\omega\rangle +$$

$$\int_0^l g(t-s)(\Delta u(s),\omega)ds + (\nabla u_t,\nabla\omega) + (f(u),\omega) = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,T),$$

para todo $\omega \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Isto mostra a função u satisfaz (3.10) com

$$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \tag{3.31}$$

$$u_t \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.32}$$

de onde segue também a condição (3.11). Resta verifica que $(u,u_t)\in C([0,T],\mathcal{H})$ e que vale as condições inciais $u(0)=u_0$ e $u_t(0)=u_1$. Concluindo que a função $z=(u,u_t)$ é uma solução fraca para o problema (3.1)-(3.3)

Por outro lado, identificamos $L^2(\Omega) := [L^2(\Omega)]'$ com seu dual, por meio do Teorema de Representação de Riesz-Fréchet, temos a seguinte cadeia de inclusões contínuas

$$H^2(\Omega)\cap H^1(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \approx [L^2(\Omega)]' \hookrightarrow \tag{3.33}$$

$$\hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow [H^2(\Omega)\cap H_0^1]'.$$

Com isto, podemos reescrever a expressão em (3.30), depois de integrar por partes, como

$$-\left\langle\int_0^T u_t(t)\theta'(t)dt,\omega\right\rangle + \left\langle\int_0^T \Delta^2 u(t)\theta(t)dt,\omega\right\rangle - \left\langle\int_0^T \Delta_p u(t)\theta(t)dt,\omega\right\rangle +$$

$$+\left\langle\int_0^T (g*\Delta u)(t)\theta(t)dt,\omega\right\rangle - \left\langle\int_0^T \Delta^2 u_t(t)\theta(t)dt,\omega\right\rangle + \left\langle\int_0^T f(u(t))\theta(t)dt,\omega\right\rangle = 0,$$

onde relebramos que $(g * \Delta u)(t) = \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)$. Novamente usando integração por partes,

$$\left\langle \int_0^T u_{tt}(t)\theta(t)dt, \omega \right\rangle + \left\langle \int_0^T \Delta^2 u(t)\theta(t)dt, \omega \right\rangle - \left\langle \int_0^T \Delta_p u(t)\theta(t)dt, \omega \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \int_0^T (g * \Delta u)(t)\theta(t)dt, \omega \right\rangle - \left\langle \int_0^T \Delta^2 u_t(t)\theta(t)dt, \omega \right\rangle + \left\langle \int_0^T f(u(t))\theta(t)dt, \omega \right\rangle = 0,$$

para todo $\omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, onde nesta última igualdade a notação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \ \text{ significa a dualidade } \ \langle \cdot, \cdot \rangle_{[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]', H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)}.$$

Portanto, concluimos que

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + (g * \Delta u) - \Delta u_t + f(u) = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]') \tag{3.34}$$

Mais ainda, usando (3.31)-(3.32) e as inclusões em (3.33) deduzimos facilmente que

$$\begin{gathered} \Delta^2 u \in L^\infty(0,T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]') \\ \Delta u_t \in L^2(0,T; [H^1(\Omega)]') \hookrightarrow L^2(0,T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]') \\ (g * \Delta u), \ f(u) \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'). \end{gathered} \tag{3.35}$$

Resta verificar que

$$\Delta_p u \in L^\infty(0,T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]') \tag{3.36}$$

De fato, para $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2(p-1)}$, temos

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_p u(t), \phi \rangle| &= \left| \langle |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t), \nabla \phi \rangle \right| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u(t)|^{p-1} |\nabla \phi| dx \\ &\leq \left[\int_\Omega |\nabla u(t)^{2(p-1)}| dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= ||\nabla u(t)||_{2(p-1)}^{p-1} ||\nabla \phi||_2 \\ &\leq C_p ||\Delta u(t)||_2^{p-1} ||\Delta \phi||_2, \end{aligned}$$

para alguma constante $C_p > 0$. Assim, de (3.31) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||\Delta u(t)||_{[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]'} \leq C \ \text{ q.s em } \ [0,T]$$

Finalmente, combinando (3.34) com (3.35)-(3.36) concluimos

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + (g * \Delta u) - \Delta u_t + f(u) = 0 \ \text{ em } \ L^2(0,T; [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]').$$

o que encerra a prova do item (i) do Teorema 3.3.2

3.3.4 Estimativa a priori 2

Agora consideramos $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_1$ e seja $u^m(t)$ da forma (3.13) uma solução do problema aproximado (3.14)-(3.15), onde agora

$$u_0^m \to u_0 \text{ em } H^3_\Gamma(\Omega) \text{ e } u_1^m \to u_1 \text{ em } H^1_0(\Omega). \tag{3.37}$$

Pela escolha da base (ω_j), podemos multiplicar o problema aproximado (3.14) por $-\Delta u_t^m$ e integrando por partes, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{||\nabla u_t^m(t)||_2^2 + ||\nabla\Delta u^m(t)||_2^2\right\} + \langle \Delta_p u^m(t), \Delta u_t^m(t)\rangle + ||\Delta u_t^m(t)||_2^2 =$$

$$= (f(u^m(t)), \Delta u_t^m(t)) + \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta u_t^m(t))ds.$$

Notando que

$$\langle \Delta_p u^m, \Delta u_p^m\rangle = \frac{d}{dt}\langle \Delta_p u^m, \Delta u^m\rangle - J_1,$$

onde

$$J_1 = -\int_\Omega \{(p-2)|\nabla u^m|^{p-4}(\nabla u^m \cdot \nabla u_t^m)\nabla u^m + |\nabla u^m|^{p-2}\nabla u_t^m\} \cdot \nabla\Delta u^m dx,$$

derivamos a seguintes igualdade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{||\nabla u_t^m(t)||_2^2 + ||\nabla\Delta u^m(t)||_2^2 + 2\langle \Delta_p u^m(t), \Delta u^m(t)\rangle\right\} +$$

$$+ \quad ||\Delta u_t^m(t)||_2^2 = J_1 + J_2 + J_3, \tag{3.38}$$

onde

$$\begin{aligned} J_2 &= (f(u^m(t)), \Delta u_t^m(t)) = \int_\Omega f(u^m(t))\Delta u_t^m(t)dx, \\ J_3 &= \int_0^t g(t-s)(\Delta u^m(s), \Delta u_t^m(t))ds. \end{aligned}$$

No que segue vamos estimar o lado direito de (3.38). Para facilitar a notação o mesmo símbolo C denotará diferentes constantes que aparecerão no texto.

Da estimativa (3.19) e usando a desigualdade de Holder generalizada com $\frac{p-2}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2} = 1$, temos

$$\begin{aligned} J_1 &\leq (p-1)\int_\Omega |\nabla u^m(t)|^{p-2}|\nabla u_m^t(t)||\nabla\Delta u^m(t)|dx \\ &\leq (p-1)||\nabla u^m(t)||_{2(p-1)}^{p-2}||\nabla u_t^m(t)||_{2(p-1)}||\nabla\Delta u^m(t)||_2 \\ &= C_p||\nabla u_t^m(t)||_{2(p-1)}||\nabla\Delta u^m(t)||_2, \end{aligned}$$

para alguma constante $C_p > 0$. Como $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2(p-1)}(\Omega)$ e u_t^m é bem regular,

$$||\nabla u_t^m(t)||_{2(p-1)}^2 \leq \mu_2||\Delta u_t^m(t)||_2^2,$$

onde $\mu_2 > 0$ é constante de imersão correspondente. Usando a desigualdade de Young, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|J_1| \leq \frac{1}{4}||\Delta u_t^m(t)||_2^2 + \frac{C}{2}||\nabla\Delta u^m(t)||_2^2. \tag{3.39}$$

Além disso, das hipóteses (3.7)-(3.8), da estimativa (3.19) e como $H_\Gamma^3(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned}
||f(u^m(t))||_2^2 &= \int_\Omega |f(u^m(t))|^2 dx \\
&\leq 2k_2 \int_\Omega \left(|u^m(t)|^2 + |u^m(t)|^{2(\rho+1)}\right) dx \\
&= 2k_2 \left(||u^m(t)||_2^2 + ||u^m(t)||_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)}\right) \\
&\leq C_\rho \left(||\Delta u^m(t)||_2^2 + ||\Delta u^m(t)||_2^{2(\rho+1)}\right) \\
&= C_\rho \left(1 + ||\Delta u^m(t)||_2^{2\rho}\right) ||\Delta u^m(t)||_2^2 \\
&\leq \frac{C}{2}||\nabla\Delta u^m(t)||_2^2,
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Assim, novamente aplicando a Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq ||f(u^m(t))||_2 ||\Delta u_t^m(t)||_2 \\
&\leq ||f(u^m(t))||_2^2 + \frac{1}{4}||\Delta u_t^m(t)||_2^2 \\
&\leq \frac{C}{2}||\nabla\Delta u^m(t)||_2^2 + \frac{1}{4}||\Delta u_t^m(t)||_2^2.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Usando mais uma vez a estimativa (3.19) e a desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
|J_3| &\leq \left(\int_0^t g(t-s)||\Delta u^m(s)||_2 ds\right) ||\Delta u_t^m(t)||_2 \\
&\leq M_1 ||g||_{L^1(\mathbb{R}^+)} ||\Delta u_t^m(t)||_2 \\
&\leq C\frac{1}{4}||\Delta u_t^m(t)||_2^2.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Substituindo (3.39)-(3.41) em (3.38) e pondo

$$F^m(t) = ||\nabla u_t^m(t)||_2^2 + ||\nabla\Delta u^m(t)||_2^2 + 2\langle \Delta_p u^m(t), \Delta u^m(t)\rangle + 2C,$$

então

$$\frac{d}{dt}F^m(t) + \frac{1}{2}||\Delta u_t^m(t)||_2^2 \leq 2C + 2C||\nabla\Delta u^m(t)||_2^2 \tag{3.42}$$

Agora notamos que

$$\begin{aligned}
|\langle \Delta_p u^m(t), \Delta u^m(t)\rangle| &= \left|\langle |\nabla u^m(t)|^{p-2}\nabla u^m(t), \nabla\Delta u^m(t)\rangle\right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u^m(t)|^{p-1}|\nabla\Delta u^m(t)| dx \\
&\leq ||\nabla u^m(t)||_{2(p-1)}^{p-1} ||\nabla\Delta u^m(t)||_2 \\
&\leq ||\nabla u^m(t)||_{2(p-1)}^{2(p-1)} + \frac{1}{4}||\nabla\Delta u^m(t)||_2^2 \\
&\leq C_p ||\Delta u^m(t)||_2^{2(p-1)} + \frac{1}{4}||\nabla\Delta u^m(t)||_2^2.
\end{aligned}$$

Pela estimativa (3.19), existe uma constante C tal que

$$|\langle \Delta_p u^m(t), \Delta u^m(t) \rangle| \leq C + \frac{1}{4}||\nabla \Delta u^m(t)||_2^2,$$

de onde segue que

$$\frac{1}{4}||\nabla \Delta u(t)||_2^2 + 2C + 2\langle \Delta_p u^m(t), \Delta u^m(t) \rangle \geq 0. \tag{3.43}$$

Combinando (3.42)-(3.43), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt} F^m(t) + \frac{1}{2}||\Delta u_t^m(t)||_2^2 \leq C F^m(t). \tag{3.44}$$

Agora, integrando (3.44) sobre $(0,t) \subset [0,T]$ e explorando os limites (3.37), resulta

$$F^m(t) + \frac{1}{2}\int_0^t ||\Delta u_t^m(\tau)||_2^2 d\tau \leq C + C\int_0^t F^m(\tau) d\tau.$$

Portanto, usando a desigualdade de Growall e novamente (3.43) concluimos

$$||\nabla u_t^m(t)||_2^2 + ||\nabla \Delta u^m(t)||_2^2 + \int_0^t ||\Delta u_t^m(\tau)||_2^2 d\tau \leq M_2, \tag{3.45}$$

para todo $t \in [0,T]$ e $m \in \mathbb{N}$, onde $M_2 = M_2(||\nabla u_1||_2, ||\nabla \Delta u_0||_2, T) > 0$. Em particular,

$$(u^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0,T; H_\Gamma^3(\Omega)), \tag{3.46}$$

$$(u_t^m) \text{ é limitado em } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \tag{3.47}$$

3.3.5 Passagem ao limite e solução fraca mais regular

As limitações em (3.46)-(3.47) são suficientes para passar limite no problema aproximado e garantir que, quando os dados iniciais $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}_1$, a solução fraca de (3.1)-(3.3) possuem mais regularidade

$$u \in L^\infty(0,T; H_\Gamma^3(\Omega)), \tag{3.48}$$

$$u_t \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)). \tag{3.49}$$

A conclusão do item (ii) do Teorema 3.3.2 segue, então, de maneira similar ao caso fraco. Além disso, como também veremos mais adiante, podemos concluir que neste caso $u_{tt} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$, ou seja, que u satisfaz a equação

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + (g * \Delta u) - \Delta u_t + f(u) = 0 \text{ em } L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

3.3.6 Unicidade

Sejam u e v duas soluções mais regulares do problema (3.1)-(3.3) e considere $w = u - v$. Então w satisfaz a equação

$$w_{tt} + \Delta^2 w - \Delta w_t = \Delta_p u - \Delta_p v - f(u) + f(v) - \int_0^t g(t-s)\Delta w(s) ds$$

em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, com condições de fronteira $w = \Delta w = 0$ sobre Γ e dados iniciais nulos. Como $w_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, podemos multiplicar a equação acima por $w_t(t)$ e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}||w_t(t)||_2^2 + \frac{1}{2}||\Delta w_t(t)||_2^2\right\} + ||\nabla w_t(t)||_2^2 &= \\ = \langle \Delta_p u(t) - \Delta_p v(t), w_t(t)\rangle - (f(u(t))p - f(v(t)), w_t(t)) &+ \\ + \int_0^t g(t-s)(\nabla w(s), \nabla w_t(t))ds. \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.2.1, deduzimos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{||w_t(t)||_2^2 + ||\Delta w(t)||_2^2 - \left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla w(t)||_2^2 + (g\Box\nabla w)(t)\right\} + ||\nabla w_t(t)||_2^2$$

$$\leq |\langle \Delta_p u(t) - \Delta_p v(t), w_t(t)\rangle| + \int_\Omega |f(u(t)) - f(v(t))||w_t|dx. \tag{3.50}$$

Como anteriormente segue do Lema 1.3.1 que

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_p u(t) - \Delta_p v(t), w_t(t)\rangle| &\leq C\left(||\nabla u(t)||_{2(p-1)}^{p-2} + ||\nabla v(t)||_{2(p-1)}^{p-2}\right)||\nabla w(t)||_{2(p-1)}||\nabla w_t(t)||_2 \\ &\leq C||\Delta w(t)||_2^2 + \frac{1}{2}||\nabla w_t(t)||_2^2, \end{aligned} \tag{3.51}$$

para alguma constante $C > 0$

Além disso, das condições (3.7)-(3.8) e como $\frac{\rho}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2} = 1$, então usando as desigualdades de Holder e Young, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &|(f(u(t)) - f(v(t)), w_t(t))| \\ &\leq \int_\Omega |f(u(t)) - f(v(t))||w_t(t)|dx \\ &\leq k_2\int_\Omega (1 + |u(t)|^\rho + |v(t)|^\rho)|w(t)||w_t(t)|dx \\ &\leq k_2\left(|\Omega|^{\frac{\rho}{2(\rho+1)}} + ||u(t)||_{2(\rho+1)}^\rho + ||v(t)||_{2(\rho+1)}^\rho\right)||w(t)||_{2(\rho+1)}||w_t(t)||_2 \\ &\leq C||\Delta w(t)||_2^2 + \frac{1}{2}||w_t(t)||_2^2. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Combinando (3.50) com (3.51)-(3.52), resulta em

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{||w_t(t)||_2^2 + ||\Delta w(t)||_2^2 - \left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla w(t)||_2^2 + (g\Box\nabla w)(t)\right\} &+ \\ + ||\nabla w_t(t)||_2^2 \leq C||\Delta w(t)||_2^2 + ||w_t(t)||_2^2. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Pondo

$$\Phi(t) = ||w_t(t)||_2^2 + ||\Delta w(t)||_2^2 - \left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla w(t)||_2^2 + (g\Box\nabla w)(t)$$

e usando a hipótese (3.5), então

$$||\Delta w(t)||_2^2 - \left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla w(t)||_2^2 \geq l||\Delta w(t)||_2^2 \geq 0.$$

Como já é sabido

$$(g\Box\nabla w)(t) \geq 0.$$

Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que (3.53) fica sob a forma

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq C\Phi(t).$$

Como $\Phi(0) = 0$, obtemos

$$||w_t(t)||_2^2 + l||\Delta w(t)||_2^2 \leq 0,$$

provando que $w = 0$ em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (também em $\text{Ł}^2(\Omega)$). Isto prova a unicidade. Portanto, a prova do Teorema (3.3.2) está completa.

3.4 Decaimento exponencial de Energia

Afim de determinar estabilidade exponencial para o sistema (3.1)-(3.3), vamos definir o funcional energia correspondente como

$$E(t) = \frac{1}{2}||u_t(t)||_2^2 + \frac{1}{2}||\Delta u(t)||_2^2 + \frac{1}{p}||\nabla u(t)||_p^p + \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx. \tag{3.54}$$

Tendo como principal resultado o

Teorema 3.4.1. *Sob as hipóteses do Teorema 3.3.2, a energia $E(t)$ satisfaz, em ambos os casos, o seguinte decaimento exponencial*

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0,$$

para constantes $C > 0$ e $\gamma > 0$.

Demonstração. Inicialmente provaremos o decaimento exponencial de energia considerando soluções mais regulares u do problema (3.1)-(3.3). Usaremos o método de energia pertubado. Em primeiro lugar, definamos a energia modificada

$$F(t) = \frac{1}{2}||u_t(t)||_2^2 + \frac{1}{2}||\Delta u(t)||_2^2 + \frac{1}{p}||\nabla u(t)||_p^p + \int_\Omega \hat{f}(u(t))dx$$
$$-\frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla u(t)||_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\nabla u)(t).$$

Usando as hipóteses (3.5) e (3.9), segue que

$$F(t) = E(t) - \frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla u(t)||_2^2 + \frac{1}{2}(g\Box\nabla u)(t) \geq lE(t).$$

Assim,

$$E(t) \leq \frac{1}{l}F(t).$$

Além disso, da condição (3.6) segue que F é decrescente, pois

$$F'(t) = -||\nabla u_t(t)||_2^2 + \frac{1}{2}(g'\Box\nabla u)(t) - \frac{1}{2}g(t)||\nabla u(t)||_2^2$$

$$\leq -||\nabla u_t(t)||_2^2 - \frac{k_1}{2}(g\Box\nabla u)(t).$$

Agora definamos a energia pertubada

$$F_\epsilon(t) = F(t) + \varepsilon\Psi(t), \quad \varepsilon > 0,$$

onde

$$\Psi(t) = \int_\Omega u_t(t)u(t)dx$$

com isto, demonstraremos dois lemas auxiliares que serão cruciais para a conclusão do decaimento exponencial.

Lema 3.4.2. *Existe uma constante* $C_1 > 0$ *tal que*

$$|F_\varepsilon(t) - F(t)| \leq \varepsilon C_1 F(t), \quad \forall\ t \leq 0, \quad \forall\ \varepsilon > 0.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} |\Psi(t)| &\leq \frac{1}{2}||u_t(t)||_2^2 + \frac{1}{2\lambda_1}||\Delta u(t)||_2^2 \\ &\leq \frac{1}{l}\max\left\{1, \frac{1}{\lambda_1}\right\}F(t), \end{aligned}$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 w = \lambda w \quad \text{em} \quad \Omega \\ w = \Delta w = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Então tomando $C_1 = \frac{1}{l}\max\left\{1, \frac{1}{\lambda_1}\right\}$, obtemos

$$|F_\varepsilon(t) - F(t)| = \varepsilon|\Psi(t)| \leq \varepsilon C_1 F(t),$$

como desejado. □

Lema 3.4.3. *Existe uma constante* $\varepsilon_1 > 0$ *tal que*

$$F'_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon F(t), \quad \forall\ t \geq 0, \quad \forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_1).$$

Demonstração. É suficiente mostrar que existem constantes C_2, $\mathbb{C}_3 > 0$ tais que

$$\Psi'(t) \leq -F(t) + C_2||\nabla u_t(t)||_2^2 + C_3(g\Box\nabla u)(t). \tag{3.55}$$

De fato, para $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente temos

$$\begin{aligned} F'_\varepsilon(t) &= F'(t) + \varepsilon\Psi'(t) \\ &\leq -||\nabla u_t(t)||_2^2 - \frac{k_1}{2}(g\Box\nabla u)(t) - \varepsilon F(t) + \varepsilon C_2||\nabla u_t(t)||_2^2 + \varepsilon C_3(g\Box\nabla)(t) \\ &= -\varepsilon F(t) - (1 - \varepsilon C_2)||\nabla u_t(t)||_2^2 - (\frac{k_1}{2} - \varepsilon C_3)(g\Box\nabla u)(t) \\ &\leq \varepsilon F(t), \end{aligned}$$

o que concluiria a prova do Lema 3.4.3

Resta verificar a veracidade da identidade (3.55). Com efeito, usando a equação (3.1) no sentido fraco, obtemos

$$\Psi'(t) = ||u_t(t)||_2^2 - ||\Delta u(t)||_2^2 - ||\nabla u(t)||_p^p + \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t))ds \; -$$
$$- \int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla u_t(t)dx - \int_\Omega f(u(t))u(t)dx.$$

Adicioando e subtraindo o termo $F(t)$ na expressão acima, segue que

$$\begin{aligned} \Psi'(t) = & - F(t) + \frac{2}{3}||u_t(t)||_2^2 - \frac{1}{2}||\Delta u(t)|| - \left(1 - \frac{1}{p}\right)||\nabla u(t)||_p^p \\ & - \frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla u(t)||_2^2 + \frac{1}{2}(g\square\nabla u)(t) + I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

onde denotamos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\Omega \hat{f}(u(t)) - f(u(t))u(t)dx, \\ I_2 &= \int_0^t g(t-s)(\nabla u(s), \nabla u(t))ds, \\ I_3 &= -\int_\Omega \nabla u(t) \cdot \nabla u_t(t)dx. \end{aligned}$$

Da hipótese (3.9) temos $I_1 \leq 0$ diretamente. Vanmos estimar a seguir os termos I_2 e I_3.

Usando a dessigualdade de Young, observe que

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_0^t g(t-s)||\nabla u(t)||_2(||\nabla u(t) - \nabla u(s)||_2 + \nabla u(t)_2)ds \\ &\leq \left(\int_0^t g(t-s)ds\right)||\nabla u(t)||_2^2 + ||\nabla u(t)||_2 \int_0^t g(t-s)||\nabla u(t) - \nabla u(s)||_2 ds \\ &\leq \left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla u(t)||_2^2 + \eta||\nabla u(t)||_2^2 + \frac{1}{4\eta}||g||_1(g\square\nabla u)(t) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla u(t)||_2^2 + \frac{\mu_1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)||\Delta u(t)||_2^2 + \\ &+ \eta\mu_1||\Delta u(t)||_2^2 + \frac{1}{4\eta}||g||_1(g\square\nabla u)(t). \end{aligned}$$

onde $\eta > 0$ será escolhido de modo conveniente mais adiante. Também pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \eta||\nabla u(t)||_2^2 + \frac{1}{4\eta}||\nabla u_t(t)||_2^2 \\ &\leq \eta\mu_1||\Delta u(t)||_2^2 + \frac{1}{4\eta}||\nabla u_t(t)||_2^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} F'(t) \leq & -F(t) + \left(\frac{3}{2}\mu_2 + \frac{1}{4\eta}\right)||\nabla u_t(t)||_2^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\eta}||g||_1\right)(g\square\nabla u)(t) \\ & -\frac{1}{2}\left(1 - \mu_1\int_0^t g(s)ds\right)||\nabla u(t)||_2^2 + 2\eta\mu_1||\Delta u(t)||_2^2. \end{aligned}$$

Agora note que de (3.5), obtemos

$$\Psi'(t) \leq -F(t) + C_2||\nabla u_t(t)||_2^2 + C_3(g\Box\nabla u)(t) + \left(2\eta\mu_1 - \frac{1}{2}\right)||\Delta u(t)||_2^2.$$

Logo, tomando $\eta > 0$ pequeno o suficiente temos que a desigualdade (3.55) é verdadeira. Isto encerra a prova do Lema 3.4.3 $\Box$

Agora, usaremos os lemas anteriores para concluir a propriedade de decaimento. Seja

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{2C_1}, \varepsilon_1\right\}.$$

Com isto, tomando $\varepsilon < \varepsilon_0$ segue do Lema 3.4.2 que

$$\frac{1}{2}F(t) \leq F_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}F(t), \quad t \geq 0. \tag{3.56}$$

A segunda desigualdade em (3.56) em conjunto com Lema 3.4.3 implica que

$$\frac{d}{dt}F_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon F(t) \leq -\frac{2}{3}\varepsilon F_\varepsilon(t).$$

Logo,

$$F_\varepsilon(t) \leq F_\varepsilon(0)e^{-\frac{2}{3}\varepsilon t}.$$

Usando novamente (3.56) obtemos

$$F(t) \leq 3F(0)e^{-\frac{2}{3}\varepsilon t}.$$

Finalmente, comparando as funções F e E, e notando que $F(0) = E(0)$, concluimos

$$E(t) \leq \frac{3}{l}E(0)e^{-\frac{3}{2}\varepsilon t}, \quad t \geq 0.$$

Isto prova o decaimento exponencial de soluções mais regulares $u \in H_\Gamma^3(\Omega)$, como era desejado. O mesmo resultado pode ser estendido para soluções fracas $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ usando argumentos de densidade.

Isto conclui a prova do Teorema 3.4.1 $\Box$

Conclusão

Neste trabalho, consideramos um modelo de equação de placas com p-Laplaciano e memória, a equação (3.1)-(3.3), a saber

$$\left|\begin{array}{l} u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_p u + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds - \Delta u_t + f(u) = 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = \Delta u = 0 \;\; \text{sobre} \;\; \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) = 0 \;\; \text{e} \;\; u_t(x,0) = u_1(x) = 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega \end{array}\right.$$

O presente trabalho procurou fornecer resultados relacionados a existência global de soluções para a equação (3.1)-(3.3) sob o efeito de um termo de memória, que posteriormente buscamos as propriedades qualitativas das soluções com respeito a estabilidade assintótica ao longo do tempo (evolução). Em nosso trabalho é interessante salientar, a importância de se ter tomado cuidado com as ferramentas ao se trabalhar, com termo de memória e, com os operadores p-Laplaciano e biharmônico.

Referências

[1] ARAUJO, M. A. 2015, *Equação Evolução.* UFMA.

[2] BARTLE, Robert G. 1995, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*

[3] BARROS, L. R. 2011. *Decaimento geral de soluções para um sistema acoplado de equações de onde com memória.*

[4] BRÉZIS, H. 2010, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equation*, Springer.

[5] CUNHA, Carlos A.R da. 2007, *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP* - Florianópolis, SC : SBMAC - (Notas em Matemática Aplicada;v.32)

[6] D. ANDRANDE, M.A. JOREG SILVA e T.F.MA, *Exponencial stability for a plate equation with p - Laplaciano and mempry terms* Math. Meth. Sci.

[7] EVANS, L.C. *Partial Diferenttial Equations.* Berkeley, 1997.

[8] G. B. folland, *Real analysis - Modern Techniques and their applications* Second e edition, Pure and Applied Matematics, Jhon Willey e Sons, Inc. New York, 1999.

[9] E. KREYSZIG. 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley e Sons.

[10] GÓMEZ, Félix P. Q. 2009, *Tópicos em Termoelásticidade Linear*, Paraná .

[11] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E.A. 1989. *A Integral de Lebesgue.* Textos de Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM - UFRJ.

[12] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA,M. M. 2000. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Eliticos Não Homogênos.* Editora IM - UFRJ, Rio de Janeiro.

[13] MEDEIROS, L. A. *Introduction exact control theory.* Campina Grande: EDUEPB, 2013

[14] MEDEIROS, L. A., LOURÊDO, A. T., MIRANDO, M. M. *Introduction exact control theory.* Campina Grande: EDUEPB, 2013

[15] M.M, Cavalcanti e V. N.Domingos Cavalcanti,*Introdução à teoria das distribuição e aos espaços de Sobolev*, EDUEM, Maringá, 2009.

[16] PAZY, A. 1983. *Semigrups of Linear Operators and Appplications to Partial Diferential Equations*, Springer - Verlag, New York.

[17] RIVERA, Jaime E. M. 2008, *Estabilização de Semigrupos e Aplicações.* Academia das contas, Petrópolis - RJ, IM - UFRJ.

[18] RIVERA, Jaime E. M. 2007, *Semigrupos e equações diferenciais parciais.* Instituto de Matemática, Petrópolis - RJ, IM - UFRJ.

[19] RIVERA, J. E. M, BARRETO; R. K,. 1998, *Existence and exponential decay in nonlinear thermoelasticity. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications*, vol.31

[20] Z. LIU, S. ZENG. 1999, *Semigroups associated with dissipative systems.* Chapman & Hall/CRC, London.