



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

## TÓPICOS DE DINÂMICA HIPERBÓLICA

DIEGO ARAÚJO DINIZ

São Luís - MA

Maio de 2017

# TÓPICOS DE DINÂMICA HIPERBÓLICA

DIEGO ARAÚJO DINIZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof<sup>fa</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Ribeiro Ramos.

São Luís-MA

Maio de 2017

## FICHA CATALOGRÁFICA

Diniz, Diego Araújo.

Tópicos de Dinâmica Hiperbólica / Diego Araújo Diniz. – 2017.

63 f.

Orientador (a): Vanessa Ribeiro Ramos.

Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, UFMA, 2017.

1. Hiperbolicidade. 2. Lema de Sombreamento. 3. Omega-estabilidade. I. Ramos, Vanessa Ribeiro. II. Título.

# TÓPICOS DE DINÂMICA HIPERBÓLICA

DIEGO ARAÚJO DINIZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 2 de Maio de 2017.

## Banca examinadora:

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Vanessa Ribeiro Ramos (Orientador)  
UFMA

---

Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva  
UFMA

---

Prof. Dr. Paulo Cesar Rodrigues Pinto Varandas  
UFBA

*A minha família e namorada  
pela paciência e incentivo.*

*“Não vejo sentido em uma equação a menos que expresse  
um pensamento de Deus”*

*(Srinivasa Ramanujan)*

# Agradecimentos

A Deus por sua imensurável misericórdia, certamente é por ela que estou concluindo este trabalho, ele renovou as minhas forças e reviveu o meu espírito. Obrigado meu Deus!

A Minha mãe e meu pai, Lucilene Araújo Diniz e Valber Evérton Diniz, por todo empenho e dedicação com que sustentam nos ombros a honra, carinho, responsabilidade e amor de uma família. Se estou aqui devo isso a vocês!

A meu irmão Sharlison Araújo Diniz e minha irmã Kelcyllene Araújo Diniz por todos os dias compartilhados como muito amor, sempre incentivando na minha caminhada como estudante.

Aos meus sobrinhos Kecya Mayara Diniz Lopes e Kauê Diniz Teixeira por fazerem parte da minha vida com grande dedicação e amor.

A Mariana Cavalcante por todos os momentos que passou ao meu lado nos dias difíceis e nos dias felizes, certamente devo muita a ela, pois sempre esteve como principal incentivadora da conclusão deste trabalho, além disso, foi responsável por grande parte da digitação deste trabalho em vista da minha impossibilidade. Muito obrigado!

A minha orientadora professora doutora Vanessa Ribeiro Ramos, primeiro que sem ela não teria concluído este trabalho, segundo agradeço imensamente sua paciência, dedicação, disposição e incentivo. Paciência para explicar das dúvidas mais simples às mais complexas, dedicação pelo empenho com que desenvolveu as atividades de orientação, disposição por está sempre disponível a ajudar este orientando a entender a matemática aqui descrita e incentivo por todas as conversas motivacionais que proporcionaram a conclusão deste trabalho.

Não poderia deixar de agradecer aos membros da banca examinadora: professor Geovane Silva e professor Paulo Varandas, por todas as valorosas correções e sugestões.

Quero agradecer especialmente aos professores, Nivaldo Costa Muniz, Maxwell Mariano Barros e José Cloves Verde Saraiva, estes professores são, sem dúvida, a causa primeira que possibilitou este trabalho, pois foram eles que no início da minha carreira como estudante de matemática incentivaram a busca de conhecimento neste campo e mais

que isso, ensinaram toda minha base matemática que possibilitou alcançar este mestrado.

Agradeço também ao professor Ivaldo Paes Nunes por todos os valorosos ensinamentos durante o curso de mestrado.

Ao meu amigo José Santana por todo incentivo e ensinamento na confecção deste trabalho.

Ao meu amigo Rondinelle por todo apoio no confeccionamento das figuras.

A todos os integrantes do Comando Garra, turma do CFO-PMMA da qual eu faço parte com muito orgulho, muito obrigado a todos pelo incentivo.

A vigésima segunda turma de Nutrição da UFMA pelo companherismo de cada um dos seus integrantes.

A todos os alunos e funcionários que fazem o mestrado de matemática da UFMA acontecer.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é dissertar sobre alguns tópicos dos sistemas dinâmicos hiperbólicos. Nós coletamos resultados e definições que em sua maioria encontram-se dispersos, ou ainda, em obras de contexto generalizado. Assim, nos propomos a fazer uma caminhada que começa com a definição de órbita, passa por resultados clássicos como o Teorema de Hartman-Grobman e o Lema de Sombreamento, e termina com o teorema da Omega estabilidade.

**Palavras-chave:** Hiperbolicidade, Lema de Sombreamento,  $\Omega$ -estabilidade.

# Abstract

The main goal of this work is to discuss some topics about hyperbolic dynamical systems. We collect results and definitions that are dispersed, or even in works of generalized context. Thus, we propose a tour that begins with the definition of orbit, passes through classical results like Hartman-Grobman Theorem and shadowing lemma, and ends with the Omega stability theorem.

**Keywords:** Hyperbolicity, Shadowing Lemma,  $\Omega$ -stability.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
<b>2 Conjunto Hiperbólico</b>	<b>8</b>
<b>3 Teorema de Hartman-Grobman</b>	<b>15</b>
<b>4 Teorema da Variedade Estável (versão Lipschitz)</b>	<b>22</b>
4.1 Teorema da variedade estável para ponto fixo hiperbólico . . . . .	24
<b>5 Lema de Sombreamento</b>	<b>34</b>
5.1 Consequências do Lema de Sombreamento . . . . .	39
<b>6 Teorema da <math>\Omega</math>-Estabilidade</b>	<b>42</b>
6.1 Decomposição Espectral . . . . .	42
6.2 $\Omega$ -Estabilidade . . . . .	45
<b>Referência Bibliográfica</b>	<b>51</b>

# Introdução

A noção geral de um sistema dinâmico consiste em um espaço de fase  $X$  e uma regra  $f : X \rightarrow X$ , a tempo discreto ou contínuo, que relaciona seu estado presente com seu estado passado e futuro. A teoria dos Sistemas Dinâmicos busca descrever a evolução temporal das órbitas do sistema através da identificação de padrões e do seu comportamento assintótico.

A estrutura do espaço de fase é um ingrediente fundamental para o entendimento da dinâmica. De acordo com o tipo de propriedade a ser obtida pode-se considerar como espaço de fase uma variedade diferenciável, um espaço topológico, um espaço de probabilidade, entre outros.

Um sistema dinâmico tempo-discreto é um mapa  $f : X \rightarrow X$ , em que a observação da órbita de um ponto  $x \in X$  é feita através dos iterados naturais da dinâmica: o  $n$ -ésimo iterado do ponto  $x$  pelo sistema  $f$  é dado por  $f^n(x) = f \circ \dots \circ f(x)$  ( $n$  composições de  $f$ ). Quando o mapa é inversível podemos ainda considerar a evolução no passado  $f^{-n}(x) = f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}(x)$  ( $n$  composições de  $f^{-1}$ ). Um sistema dinâmico tempo-contínuo é uma família de mapas  $\{f^t : X \rightarrow X\}_t$  em que a evolução temporal é considerada para  $t \in \mathbb{R}$  ou  $t \in \mathbb{R}^+$  e satisfaz  $f^{s+t} = f^s \circ f^t$  e  $f^0 = I$ , em que  $I$  é a aplicação identidade. Neste trabalho consideraremos sistemas dinâmicos  $f : M \rightarrow M$  a tempo-discreto e com espaço de fase  $M$  uma variedade diferenciável.

Desde Poincaré, Liapunov e Birkhoff, o comportamento de um sistema dinâmico é um tema que desperta interesse de grandes matemáticos. Muitas contribuições foram dadas para o fortalecimento desta teoria, como exemplo citamos os trabalhos de Franks [3], Grobman [4], Hartman [5], Kupka [7], Palis e Smale [11], Peixoto [12].

Na busca por propriedades genéricas e estáveis para um sistema dinâmico, muitos trabalhos mostraram que estas propriedades estavam diretamente relacionadas com o comportamento hiperbólico do sistema. O conceito de hiperbolicidade produziu o desenvolvimento de uma teoria rica em definições e resultados extremamente interessantes. A importância dos seus problemas culminou na formação de um tema de pesquisa na teoria dos sistemas dinâmicos conhecida como *Dinâmica Hiperbólica*.

O objetivo deste trabalho é dissertar sobre alguns resultados clássicos da teoria dos sistemas dinâmicos hiperbólicos. No primeiro capítulo apresentamos algumas definições básicas que são essenciais para a compreensão do texto. No Capítulo 2 definimos conjunto hiperbólico e apresentamos alguns exemplos. O capítulo seguinte é dedicado ao teorema de Hartman-Grobman, o qual estabelece o comportamento da dinâmica próximo a um ponto fixo hiperbólico. No Capítulo 4 apresentamos o teorema da variedade estável para conjunto hiperbólico, este por sua vez fornece o entendimento da dinâmica ao longo de conjuntos estável e instável qualquer que seja o ponto de um conjunto hiperbólico. Demonstraremos neste capítulo uma versão Lipschitz deste teorema para ponto fixo hiperbólico. No Capítulo 5 abordamos o Lema de Sombreamento e algumas de suas várias aplicações. Por fim, no último capítulo, explanamos um pouco a decomposição espectral e mostramos como resultado principal o teorema  $\Omega$ -estabilidade.

# Capítulo 1

## Preliminares

Com o objetivo de deixar este trabalho auto contido, apresentamos neste capítulo alguns conceitos e resultados clássicos da teoria dos sistemas dinâmicos que serão utilizados ao longo do texto. Como referência bibliográfica, utilizamos [8], [10] e [17].

Consideremos  $M$  um espaço métrico compacto e  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação contínua. Dado  $x \in M$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , definimos a órbita positiva de  $x$  por:  $O_f^+(x) = \bigcup_{n \geq 0} \{f^n(x)\}$ . Quando  $f$  é invertível, definimos a órbita negativa por  $O_f^-(x) = \bigcup_{n \leq 0} \{f^n(x)\}$ . Finalmente, a órbita de  $x$  é definida por

$$O_f(x) = O_f^+(x) \cup O_f^-(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{f^n(x)\}.$$

Um ponto  $x \in M$  é chamado fixo pela dinâmica  $f : M \rightarrow M$ , se  $f(x) = x$ . Dizemos que  $x$  é periódico de período  $k \in \mathbb{N}$  se  $x$  é um ponto fixo para  $f^k$ , ou seja  $f^k(x) = x$ . Denotaremos o conjunto dos pontos fixos de  $f$  por  $Fix(f)$  e o conjunto dos pontos periódicos por  $Per(f)$ .

Dizemos que  $f : M \rightarrow M$  é aplicação transitiva se para quaisquer dois abertos  $U, V \subset M$  existe  $n \geq 0$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

A definição de transitividade é equivalente a existir  $x \in M$  tal que  $O(x)$  é densa em  $M$ . Quando  $\overline{O(x)} = X$  para todo  $x \in X$  dizemos então que  $f$  é minimal. A seguir, apresentamos um exemplo de transformação minimal.

**Exemplo 1.0.1** (Rotações no círculo). Considere o círculo  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Defina uma métrica em  $S^1$  da seguinte forma:

$$d(x, y) = \min(|x - y|, 1 - |x - y|)$$

Uma rotação de  $S^1$  é uma aplicação  $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ . Temos dois casos distintos:  $\alpha$  é um número racional e  $\alpha$  é um número irracional.

O primeiro caso é bastante simples, pois se  $\alpha = \frac{p}{q}$  com  $p$  e  $q$  primos entre si então:

$$R_\alpha^q(x) = x$$

Portanto, neste caso, todos os pontos de  $S^1$  são periódicos de período  $q$ .

O segundo caso,  $\alpha$  irracional, é de maior relevância, pois as rotações irracionais do círculo são minimais, ou seja todos os pontos de  $S^1$  tem órbita densa, consequentemente são também transitivas. De fato, o princípio da casa dos pombos garante que para todo  $\epsilon > 0$  existem  $m, n < \frac{1}{\epsilon}$  tal que  $m < n$  e  $d(R_\alpha^m, R_\alpha^n) < \epsilon$ . Dessa forma  $R_\alpha^{m-n}$  é a rotação por um ângulo menor que  $\epsilon$  e assim cada órbita positiva é  $\epsilon$ -densa em  $S^1$ . Sendo  $\epsilon$  arbitrário, conclui-se que toda órbita positiva é densa e portanto  $R_\alpha$  é minimal.

A seguir apresentamos conjuntos que guardam o comportamento relevante de um sistema dinâmico.

**Definição 1.0.2.** Dado  $x \in M$ , seu conjunto  $\omega$ -limite é definido por:

$$\omega(x) = \{y \in M; \exists n_i \rightarrow \infty \text{ tal que } f^{n_i}(x) \rightarrow y\}$$

e o seu conjunto  $\alpha$ -limite por:

$$\alpha(x) = \{y \in M; \exists n_i \rightarrow \infty \text{ tal que } f^{-n_i}(x) \rightarrow y\}$$

O conjunto limite de  $f$  é a união:

$$L(f) = L_+(f) \cup L_-(f)$$

em que  $L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \omega(x)}$  e  $L_-(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \alpha(x)}$ .

Note que o conjunto  $\omega(x)$  é dado pela interseção

$$\omega(x) = \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{f^n(x) : n \geq k\}}$$

e portanto é fechado. Além disso, dado  $y \in \omega(x)$  existe uma sequência de pontos  $(f^{n_i}(x))$  tal que  $f^{n_i}(x) \rightarrow y$  quando  $n_i \rightarrow \infty$  logo, fixado  $m \in \mathbb{Z}$ , temos que  $f^{n_i+m}(x) \rightarrow f^m(y)$ . Deste modo  $f^m(y) \in \omega(x)$  prova que  $\omega(x)$  é um conjunto  $f$ -invariante. De maneira análoga prova-se que  $\alpha(x)$  é fechado e  $f$ -invariante.

Observe que se  $p \in M$  é ponto periódico de  $f$  então  $\omega(p) = \alpha(p) = O(p)$ . Vale também que se  $f$  é homeomorfismo crescente definido em um intervalo compacto então para todo  $x$  tem-se  $\omega(x) = \emptyset$  ou  $\omega(x)$  um único ponto fixo.

**Exemplo 1.0.3.** Considere  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f(x) = x^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  fixo. Note que  $f$  é uma bijeção cuja inversa é  $f^{-1}(y) = \sqrt[k]{y}$ . Tomando um ponto  $q$  qualquer temos:

1.  $O(q) = \{\dots, \sqrt[k^{2^n}]{q}, \dots, \sqrt[k^4]{q}, \sqrt[k^2]{q}, \sqrt[k]{q}, q, q^k, q^{k^2}, q^{k^4}, \dots, q^{2^n}, \dots\}$ ;
2. Para que  $p \in [0, 1]$  seja ponto fixo de  $f$  devemos ter  $f(p) = p \Leftrightarrow p^k = p \Leftrightarrow p(p^{k-1} - 1) = p \Leftrightarrow p = 0$  ou  $p = 1$ , dessa forma  $Fix(f) = \{0, 1\}$ . O gráfico de  $f$  nos mostra que ela não possui ponto periódico que não sejam seus pontos fixos
3. Para os pontos 0 e 1 tomamos os limites laterais e vemos que os resultados são 0 e 1 respectivamente. Para  $x \in (0, 1)$  temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x^k)^n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[k]{y})^n = 1$$

assim,  $\omega(x) = \{0, 1\} = \alpha(x)$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

**Exemplo 1.0.4.** Considere o mapa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $f(x) = x^2 - 1$ . Os pontos fixos de  $f$  são:  $x^2 - 1 = x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , observe ainda que a órbita do ponto  $-1$  é periódica de período 2, pois  $f(-1) = 0$  e  $f^2(-1) = f(0) = -1$ , dessa forma sua órbita é a sequência  $(0, -1, 0, -1, 0, \dots)$ .

Um ponto  $x \in M$  é dito não errante, se para qualquer vizinhança  $U$  de  $x$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Caso contrário dizemos que  $x$  é errante. Denotamos por  $\Omega(f)$  o conjunto dos pontos não errantes da dinâmica. A próxima proposição estabelece que o conjunto dos pontos não errantes é fechado e invariante pela ação do sistema dinâmico.

**Proposição 1.0.5.** *O conjunto não errante  $\Omega(f)$  é fechado e positivamente invariante isto é  $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$ . Se  $f$  é homeomorfismo então  $\Omega(f) = \Omega(f^{-1})$  e  $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$ .*

*Demonstração.* Seja  $x$  um ponto errante. Então existe uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  tal que  $f^k(U_x) \cap U_x = \emptyset$ . Em particular,  $U_x \subset M \setminus \Omega(f)$ . Logo,  $M \setminus \Omega(f)$  é aberto e portanto  $\Omega(f)$  é fechado.

Dados  $x \in \Omega(f)$  e  $U$  uma vizinhança de  $f(x)$ , pela continuidade de  $f$  temos que  $f^{-1}(U)$  é vizinhança de  $x$ . Logo existe  $k$  tal que  $f^k(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ . Assim,

$$f(f^k(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U)) = f^k(U) \cap U \neq \emptyset$$

e portanto  $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$ .

Suponha agora  $f$  homeomorfismo. Se  $x \in \Omega(f)$  então para cada vizinhança  $U$  de  $x$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$ . Logo,  $f^{-k}(f^k(U) \cap U) \neq \emptyset$ , isto é  $U \cap f^{-k}(U) \neq \emptyset$ , assim  $x \in \Omega(f^{-1})$ . O mesmo raciocínio mostra que se  $x \in \Omega(f^{-1})$  então  $x \in \Omega(f)$ . Logo,  $\Omega(f) = \Omega(f^{-1})$ .

Finalmente, note que

$$\Omega(f) = f \circ f^{-1}(\Omega(f)) = f \circ f^{-1}(\Omega(f^{-1}) \subset f(\Omega(f^{-1}))) = f(\Omega(f))$$

e portanto  $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$ . □

Como consequência da proposição anterior temos que  $\overline{Per(f)} \subset \Omega(f)$ . De fato, se  $f^k(x) = x$  então  $x \in f^k(U) \cap U$  para qualquer  $U$  vizinhança de  $x$ . Logo,  $Per(f) \subset \Omega(f)$ . Sendo  $\Omega(f)$  um conjunto fechado, concluímos a afirmação.

O conjunto não errante ainda contém o conjunto limite, de acordo com a próxima proposição.

**Proposição 1.0.6.**  $L(f) \subset \Omega(f)$

*Demonstração.* Dado  $x \in M$ , considere  $y \in \omega(x)$  e  $U$  uma vizinhança de  $y$ . Por definição existem inteiros  $m > n > 0$  tais que  $f^m(x)$  e  $f^n(x)$  estão em  $U$ . Logo  $f^{m-n}(U) \cap U \neq \emptyset$ . O caso para o conjunto  $\alpha(f)$  é análogo. Como  $\Omega(f)$  é um conjunto fechado, concluímos a proposição.  $\square$

Pelo que já vimos até aqui, temos as inclusões

$$\overline{Per(f)} \subset L(f) \subset \Omega(f) \quad (1.1)$$

Um exemplo em que  $L(f)$  é hiperbólico mas  $L(f) \neq \Omega(f)$  está representado na seguinte dinâmica:

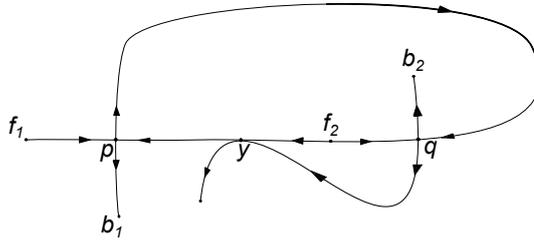


Figura 1.1: Dinâmica onde  $L(f) \neq \Omega(f)$

Note que  $L(f) = Per(f) = \{f_1, f_2, b_1, b_2, p, q\}$ , onde  $f_1, f_2$  são fontes e  $b_1, b_2$  são poços. Por outro lado, aplicando o  $\lambda$ -lema em  $y$  concluímos que  $y \in \Omega(f)$ , ou seja,  $y \in \Omega(f)$  mas  $y \notin L(f)$ .

É natural então questionarmos se as inclusões acima são estritas para a maioria dos mapas. Para responder tal questionamento precisamos saber, antes de tudo, o significado de maioria:

**Definição 1.0.7.** Dizemos que  $\mathcal{R}$  é um conjunto residual se  $\mathcal{R} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , em que cada  $A_n$  é um conjunto aberto e denso. Uma propriedade é genérica em um espaço topológico  $M$ , quando existe um residual em  $M$  com todos os pontos do residual satisfazendo essa propriedade.

Vale lembrar que, para um espaço métrico completo temos a propriedade Baire: a interseção enumerável de abertos densos é densa. Logo, em um espaço métrico completo, um conjunto residual é em particular, um conjunto denso.

Em nosso contexto, o espaço topológico a ser tratado é o espaço dos difeomorfismos. Vamos inserir uma topologia apropriada neste espaço e, assim poderemos falar de conjuntos residuais e genéricos, sendo este último o significado para a palavra 'maioria' aqui estabelecida.

Considere  $M$  uma variedade diferenciável compacta sem bordo, denotaremos por  $Diff^r(M)$  o conjunto dos difeomorfismos  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^r$ , com  $r \geq 1$ . A topologia que procuramos é gerada pela seguinte métrica:

$$d_r(f, g) = \max \left\{ \sup_{x \in M} \{ \| f(x) - g(x) \| \}, \sup_{x \in M} \{ \| Df_x - Dg_x \| \}, \dots, \sup_{x \in M} \{ \| D^r f_x - D^r g_x \| \} \right\}$$

para quaisquer  $f, g \in Diff^r(M)$ .

Em palavras, dois difeomorfismos de classe  $C^r$  estão  $C^r$ -próximos se eles e suas derivadas, até ordem  $r$ , estão uniformemente próximas.

Agora que está clara a noção de maioria em sistemas dinâmicos, enunciaremos o surpreendente resultado de Pugh [13] o qual estabelece que para a maioria dos sistemas dinâmicos a inclusão em (1.1) não é estrita: o conjunto recorrente de um difeomorfismo é o fecho dos seus pontos periódicos.

**Teorema 1.0.8.** *Existe um conjunto residual em  $Diff^1(M)$  para o qual*

$$\overline{Per(f)} = \Omega(f)$$

Dessa forma, genericamente, temos:

$$\overline{Per(f)} = L(f) = \Omega(f).$$

# Capítulo 2

## Conjunto Hiperbólico

Conjunto hiperbólico é a ideia central da dinâmica hiperbólica, sua definição é tradicionalmente dada em termos das iteradas da diferencial em cada ponto desse conjunto, assim, ela nos diz, grosso modo, que o espaço tangente dos pontos de um conjunto hiperbólico se decompõe como soma direta de dois subespaços, um dos quais contrae vetores desse conjunto e o outro expande. Em verdade a situação é mais geral, de modo que, pode-se usar a parte linear de um mapa para tirar conclusões sobre o comportamento local do próprio mapa, essa é a ferramenta central dos sistemas dinâmicos hiperbólicos.

**Definição 2.0.9.** *Considere  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo definido em variedade  $M$ . Seja  $\Lambda \subset M$  um conjunto compacto e  $f$ -invariante. Dizemos  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico se existe uma decomposição  $Df$ -invariante do fibrado tangente  $T_\Lambda M = E^s \oplus E^u$  de  $\Lambda$ , e constantes  $C > 0$ ,  $0 < \lambda < 1$  tais que para todo  $x \in \Lambda$  vale:*

$$\|Df_x^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|, \forall v \in E_x^s, \quad e \quad \|Df_x^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|, \forall v \in E_x^u.$$

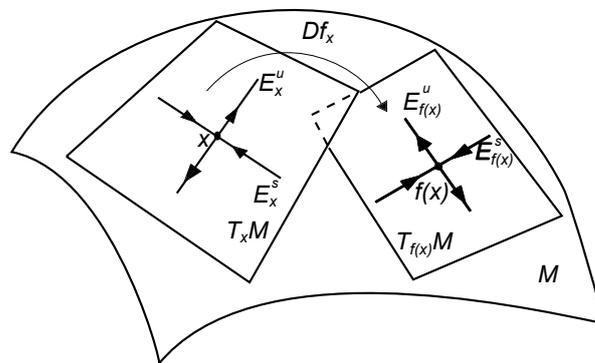


Figura 2.1: Conjunto hiperbólico

É usual considerar a norma em  $M$  de maneira que  $C = 1$ . Tal norma é chamada de *adaptada*. Note que a diferencial contrai os vetores do subespaço  $E_x^s$  e expande os vetores

do subespaço  $E_x^u$ , deste modo esses subespaços são denominados, *estável* e *instável*, respectivamente. A seguinte proposição mostra a continuidade de  $E^s$  e  $E^u$  com respeito aos pontos do conjunto hiperbólico, isto é, olhando  $E^s$  e  $E^u$  como funções de  $x \in \Lambda$ , provaremos que elas são contínuas.

**Proposição 2.0.10.**  $E_x^s$  e  $E_x^u$  variam continuamente com relação a  $x \in \Lambda$ .

*Demonstração.* Uma maneira de provar que uma função  $f$  é contínua consiste em mostrar que, dado uma sequência qualquer  $(x_n)_n$  no domínio de  $f$  tal que  $\lim x_n = a$  então  $\lim f(x_n) = f(a)$ . Iremos provar a continuidade de  $E_x^s$  e  $E_x^u$  dessa maneira. Assim, devemos mostrar que se  $(x_n)_n$  é uma sequência em  $\Lambda$  tal que  $x_n \rightarrow x$  quando  $n \rightarrow +\infty$  então  $E_{x_n}^s \rightarrow E_x^s$  e  $E_{x_n}^u \rightarrow E_x^u$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Seja  $(x_{n_k})_{n_k}$  uma subsequência de  $(x_n)_n$  tal que  $\dim(E^s(x_{n_k})) = j$ . Considere  $\{v_k^1, \dots, v_k^j\}$  uma base ortonormal para  $E_{x_{n_k}}^s$  e  $\{v_k^{j+1}, \dots, v_k^n\}$  uma base ortonormal para  $E_{x_{n_k}}^u$ . Como os vetores dessas bases estão na esfera unitária que é compacta e portanto tem subsequência convergente, podemos supor, tomando subsequência se necessário, que  $v_k^i \rightarrow v^i$ , para cada  $i = \{1, \dots, j\}$ . Dessa forma  $\{v^1, \dots, v^j\}$  e  $\{v^{j+1}, \dots, v^n\}$  são conjuntos ortogonais de  $T_x M$ .

Considere agora o subespaço  $E$  gerado pelos vetores  $v^1, \dots, v^j$  e  $F$  o subespaço gerado pelos vetores  $v^{j+1}, \dots, v^n$ . Tome  $v \in E$  com  $\|v\| = 1$ , tomando subsequência se necessário, podemos escolher  $v_k \in E_{x_{n_k}}^s$  com  $\|v_k\| = 1$  tal que  $v_k \rightarrow v$ . Logo, fixando  $m$  temos,

$$\|Df_x^m v\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|Df_{x_{n_k}}^m v_k\| \leq C\lambda^m$$

isso mostra que  $E \subset E_x^s$ , analogamente mostra-se que  $F \subset E_x^u$ , em particular  $E \cap F = \{0\}$ , como  $E_x^s \oplus E_x^u = T_x M$ , conclui-se que  $E = E_x^s$  e  $F = E_x^u$ .  $\square$

A seguir apresentamos alguns exemplos de conjuntos hiperbólicos. No primeiro deles tratamos de transformações lineares. Neste caso, o conjunto hiperbólico é um único ponto.

**Exemplo 2.0.11 (Isomorfismo hiperbólico).** Seja  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  um isomorfismo linear, isto é, uma transformação linear invertível. Se todos os autovalores de  $T$  têm módulo diferente de 1 então seu único ponto fixo, o vetor nulo, é um conjunto hiperbólico. De fato, denotando por  $E_\lambda$  o espaço de todos os vetores  $v \in \mathbb{R}^m$  tais que  $(T - \lambda I)v = 0$  defina os seguintes espaços:

$$E^s = E^s(T) = \bigoplus_{|\lambda| < 1} E_\lambda \quad \text{e} \quad E^u = E^u(T) = \bigoplus_{|\lambda| > 1} E_\lambda.$$

Deste modo,  $DT_0 = T$  e  $E^s, E^u$  são  $DT$ -invariantes. Além disso:

$$\|T^n v\| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty, \forall v \in E^s \text{ e } \|T^{-n} v\| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty, \forall v \in E^u.$$

Neste caso podemos tomar  $C = 1$  e  $\tilde{\lambda} = 1/2$  e teremos

$$\|DT_0^n(v)\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \|v\|, \forall v \in E^s \quad \text{e} \quad \|DT_0^{-n}(v)\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \|v\|, \forall v \in E^u$$

e portanto 0 é um ponto fixo hiperbólico. A transformação  $T$  é chamada de isomorfismo hiperbólico.

Com as ideias acima podemos exibir exemplos de ponto fixo hiperbólico para uma aplicação qualquer.

**Exemplo 2.0.12 (Ponto fixo hiperbólico).** Sejam  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $p \in M$  um ponto fixo. Considere o isomorfismo linear  $D_p f : T_p M \rightarrow T_p M$ . O conjunto  $\Lambda = \{p\}$  é hiperbólico se e somente se, o módulo da parte real dos autovalores de  $D_p f$  são diferentes de 1. Neste caso, o espaço estável  $E_p^s$  é o autoespaço associado aos autovalores de módulo menor do que 1 e o espaço instável  $E_p^u$  é o autoespaço associado aos autovalores de módulo maior que 1.

No exemplo anterior poderíamos ter considerado uma órbita periódica (de período  $k$ , por exemplo) ao invés de um ponto fixo. Neste contexto, o conjunto  $\Lambda$  cujo os elementos são os pontos da órbita de  $p$ , isto é,  $\Lambda = \{p, f(p), \dots, f^{k-1}(p)\}$  é hiperbólico se e somente se  $f^j(p)$  é um ponto fixo hiperbólico para  $f^k$ , para cada  $j = 0, \dots, k-1$ .

Daremos agora um exemplo em que o conjunto hiperbólico é o espaço ambiente. Quando este fenômeno acontece a dinâmica é denominada um *Difeomorfismo de Anosov*.

**Exemplo 2.0.13 (Difeomorfismo de Anosov).** Seja  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o isomorfismo linear dado pela matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como os coeficientes de  $A$  são inteiros e o seu determinante é igual a 1 então  $A$  induz um automorfismo linear  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  no toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  com  $Df(x) = A$ , para todo  $x \in \mathbb{T}^2$ . Note que os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$  e  $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$  logo, os autoespaços  $E_{\lambda_1}$  e  $E_{\lambda_2}$  associados a estes autovalores formam uma decomposição do fibrado tangente de  $\mathbb{T}^2$  em subfibrados estável e instável, respectivamente. Deste modo, o espaço ambiente  $\mathbb{T}^2$  é um conjunto hiperbólico para o difeomorfismo  $f$ .

Mais geralmente, uma matriz em  $SL(n, \mathbb{Z})$  induz um difeomorfismo de Anosov  $f$  no toro  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  se e somente se, a parte real dos autovalores da matriz tem módulo diferente de 1.

Descreveremos agora um exemplo não-trivial de conjunto hiperbólico. Este exemplo devido a Steven Smale [19] mostra, em particular, a existência de conjuntos hiperbólicos em variedades compactas tipo esfera.

**Exemplo 2.0.14 (Ferradura de Smale).** Para melhor compreender, primeiramente pensemos na sua construção geométrica: dado um quadrado  $Q$ , vamos esticá-lo verticalmente formando um retângulo, em seguida o dobramos na forma de uma ferradura e o reposicionamos sobre o quadrado  $Q$ . Com a figura obtida repetimos os mesmos passos, ou seja, esticamos na vertical e dobramos em forma de ferradura e assim continuamos o processo. O conjunto cujo os pontos nunca saem do quadrado será um conjunto hiperbólico.

De fato, de maneira mais analítica, considere  $Q$  o quadrado  $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  e o divida em três regiões delimitadas pelas retas de equação  $y = \frac{1}{3}$  e  $y = \frac{2}{3}$ . Seja  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação de modo que

1.  $f$  contrai uniformemente a direção horizontal em uma taxa  $\frac{1}{3}$  e expande uniformemente a direção vertical em uma taxa 3;
2.  $f(H_0)$  e  $f(H_1)$  estão contidos em  $Q$  como na figura abaixo.

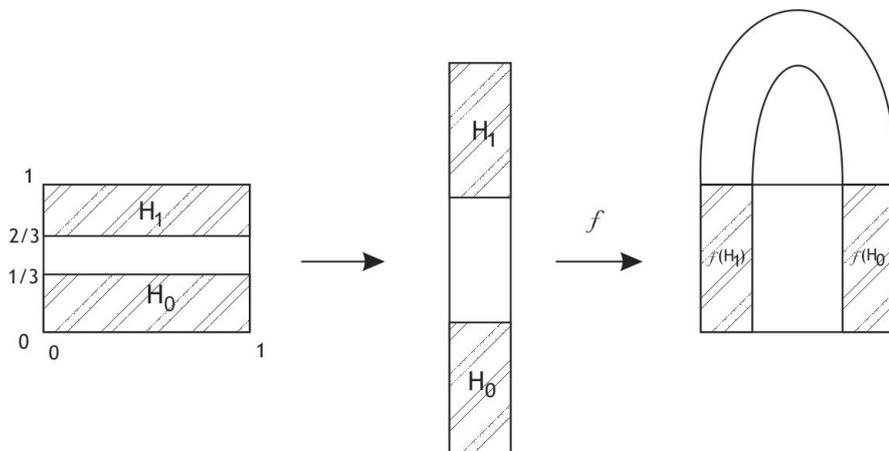


Figura 2.2: Construção da ferradura de Smale para o futuro

Podemos ainda definir  $f^{-1}$  que atua em faixas verticais, ou seja, se  $f(H_0) = V_0$  e  $f(H_1) = V_1$ , então  $f^{-1}(V_0) = H_0$  e  $f^{-1}(V_1) = H_1$  como na figura abaixo.

Considere o conjunto dos pontos que permanecem em  $Q$  por todos os iterados. Isto é, os pontos para os quais é possível iterar infinitas vezes para o futuro e para o passado

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q).$$

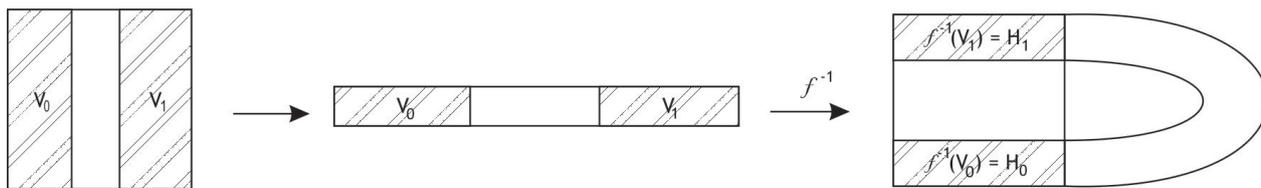


Figura 2.3: Construção da ferradura de Smale para o passado

Pela construção,  $\Lambda$  é um compacto  $f$ -invariante. Além disso, como as retas horizontais são uniformemente contraídas enquanto que as retas verticais são uniformemente expandidas, segue que  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico. O sistema dinâmico  $f|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \Lambda$  é chamado Ferradura de Smale.

Encerramos o capítulo com as definições de conjugação topológica e estabilidade estrutural. Estas noções são essenciais na classificação de sistemas dinâmicos uma vez que, aplicações que são conjugadas a outras suficientemente próximas não se alteram por pequenas perturbações. E portanto, o entendimento do comportamento de uma delas implica no entendimento de todas conjugadas a esta.

**Definição 2.0.15.** *Sejam  $M$  e  $N$  espaços topológicos. Dizemos que dois sistemas dinâmicos  $f: M \rightarrow M$  e  $g: N \rightarrow N$  são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo  $h: M \rightarrow N$  que satisfaz:  $g \circ h = h \circ f$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & M \\
 h \downarrow & & \downarrow h \\
 N & \xrightarrow{g} & N.
 \end{array}$$

Figura 2.4: Diagrama de conjugação topológica

Quando a aplicação  $h$  não é injetiva, isto é, apenas contínua e sobrejetiva, dizemos que  $h$  é uma semi-conjugação.

**Exemplo 2.0.16.** Considere duas contrações lineares em  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = c_1x$  e  $g(x) = c_2x$ ,  $c_1, c_2 \in ]0, 1[$ . Vamos mostrar que elas são conjugadas.

Tomemos os pontos  $a > 0$  e  $b < 0$  e os intervalos  $[f(a), a]$ ,  $[b, f(b)]$ ,  $[g(a), a]$  e  $[b, g(b)]$ . Definimos um homeomorfismo da seguinte forma:  $h: [f(a), a] \cup [b, f(b)] \rightarrow [g(a), a] \cup [b, g(b)]$  tal que  $h(a) = a$ ,  $h(b) = b$ ,  $h(f(a)) = g(a)$  e  $h(f(b)) = g(b)$ . Para os demais pontos observe que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ , existe um inteiro  $n$  de maneira que

$f^n(x) \in [f(a), a] \cup [b, f(b)]$ . Agora colocamos  $h(x) = (g^{-n}hf^n)(x)$  e  $h(0) = 0$ . É fácil ver que  $h$  está bem definida e é um homeomorfismo, logo, uma conjugação entre  $f$  e  $g$ .

Observe que, no exemplo acima se tivéssemos tomado  $f(x) = c_1x$  e  $g(x) = c_2x$ , com  $c_1 \in ]0, 1[$  e  $c_2 \in ]-1, 0[$ , isto é, contrações com orientações contrárias, então elas não seriam conjugadas. Dessa forma, usando o argumento acima, temos que duas contrações lineares em  $\mathbb{R}$  são conjugadas se somente se ambas preservam ou invertem a orientação de  $\mathbb{R}$ .

Vamos exibir agora um exemplo de um semi-conjugação.

**Exemplo 2.0.17.** Sejam  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  dada por  $f(x) = 2x^2 - 1$  e  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por:

$$g(y) = \begin{cases} 2y, & \text{se } 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \\ 2y - 1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Defina  $h : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$  por  $h(y) = \cos(\pi y)$ . Para todo  $y \in [0, 1]$ , observe que:

$$f \circ h(y) = f(\cos(\pi y)) = 2\cos^2(\pi y) - 1 = \cos^2(\pi y) - \sin^2(\pi y) = \cos(2\pi y) = h \circ g(y)$$

Note que  $h$  não é homeomorfismo, sendo apenas contínua e sobrejetiva, logo,  $f$  e  $g$  são semi-conjugadas.

Consideremos  $M$  uma variedade diferenciável e  $Diff^r(M)$  o espaço dos difeomorfismos munido da topologia  $C^r$ .

**Definição 2.0.18.** Um difeomorfismo  $f \in Diff^r(M)$  é estruturalmente estável se existe uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $f$  tal que toda  $g \in \mathcal{U}$  é topologicamente conjugada a  $f$ .

A estabilidade estrutural guarda estreita relação com a dinâmica hiperbólica, e é um dos temas centrais desta teoria. A seguir apresentamos dois conceitos que nos permitirão enxergar esse fato.

Quando o conjunto não-errante  $\Omega(f)$  de  $f$  é hiperbólico e coincide com o fecho do conjunto dos pontos periódicos  $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$ , dizemos que  $f$  é Axioma A.

Considere uma variedade diferenciável  $M$  e um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ , dado  $x \in M$  defina:

$$E_x^s = \{v \in T_x M : \|Df_x^n(v)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$$

e

$$E_x^u = \{v \in T_x M : \|Df_x^n(v)\| \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0\}$$

Dizemos que  $f$  satisfaz a condição de transversalidade forte se, somente se,  $T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$  para todo  $x \in M$ .

Pales e Smale [11] conjecturaram que um sistema dinâmico é estruturalmente estável se, somente se, satisfaz o Axioma A e a condição de transversalidade forte. Que um sistema dinâmico satisfazendo estas condições é estruturalmente estável foi provado nos trabalhos de Robbin [14] e Robinson [15]. A questão da necessidade foi reduzida a provar que estabilidade estrutural implica Axioma A (Robinson [16]). Este último caso foi provado por Mãné [9].

Em resumo, podemos enunciar o seguinte teorema sobre estabilidade estrutural, dadas as contribuições acima citadas:

**Teorema 2.0.19.**  *$f : M \rightarrow M$  é Axioma A e satisfaz a condição forte de transversalidade se, somente se,  $f$  é  $C^1$ -estruturalmente estável*

# Capítulo 3

## Teorema de Hartman-Grobman

Como dissemos na introdução deste trabalho, as aplicações lineares hiperbólicas são uma boa ferramenta para o estudo dos sistemas dinâmicos hiperbólicos. Nestes casos, a estratégia é abordar o problema entendendo primeiramente a dinâmica de sua aproximação linear e depois, estender os resultados para o sistema inicial. O teorema que trataremos neste capítulo, denominado *Teorema de Hartman-Grobman*, estabelece que na vizinhança de um ponto fixo hiperbólico a dinâmica na variedade é indistinguível, do ponto de vista topológico, da dinâmica de sua aproximação linear no seu espaço tangente. Como o espaço tangente de um ponto fixo hiperbólico decompõe-se em subespaços que contraem/expandem uniformemente pela ação da derivada, temos que este é o comportamento das órbitas em torno de um ponto fixo hiperbólico. A prova que apresentamos pode ser encontrada em Palis e De Melo [10].

**Teorema 3.0.20** (Hartman-Grobman). *Sejam  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  e  $p \in M$  um ponto fixo hiperbólico. Considere  $A = Df_p : T_pM \rightarrow T_pM$  a diferencial de  $f$  em  $p$ . Então existem vizinhanças  $U \subset M$  de  $p$  em  $M$ ,  $V \subset T_pM$  de  $0$  em  $T_pM$  e um homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  tais que*

$$h \circ f|_U = A|_V \circ h$$

Como o problema é local, podemos inserir coordenadas por meio de uma carta local e supor, sem perda de generalidade, que  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é difeomorfismo tendo  $0$  como ponto fixo hiperbólico.

Note que sendo  $A = Df_p$  um isomorfismo hiperbólico então existe uma decomposição  $A$ -invariante  $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$  e uma norma em  $\mathbb{R}^m$ , equivalente à já existente em  $\mathbb{R}^m$ , segundo a qual

$$\|A^s\| \leq a < 1 \quad \text{e} \quad \|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$$

onde  $A^s = A|_{E^s}$  e  $A^u = A|_{E^u}$ .

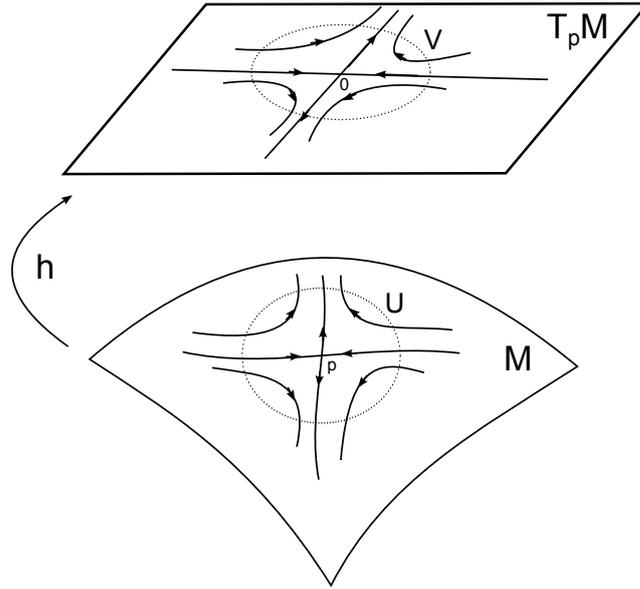


Figura 3.1: Representação geométrica do teorema de Hartman-Grobman

Nesse contexto, denotando por  $C_b^0(\mathbb{R}^m)$  o espaço de Banach das aplicações contínuas e limitadas de  $\mathbb{R}^m$  nele mesmo com a norma uniforme, temos a decomposição

$$C_b^0(\mathbb{R}^m) = C_b^0(\mathbb{R}^m : E^s) \oplus C_b^0(\mathbb{R}^m : E^u)$$

uma vez que  $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$  e portanto podemos escrever toda aplicação  $B \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$  como

$$B = B^s \oplus B^u$$

onde  $B^s$  é um elemento de  $C_b^0(\mathbb{R}^m : E^s)$  e  $B^u$  é um elemento de  $C_b^0(\mathbb{R}^m : E^u)$ .

A prova do teorema de Hartman-Grobman é consequência dos seguintes lemas.

**Lema 3.0.21.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $I$  a aplicação identidade e  $L, G \in \mathcal{L}(E, E)$  isomorfismos lineares tais que  $\|L\| \leq a < 1$  e  $\|G^{-1}\| \leq a < 1$ . Então:*

- (i)  $I + L$  é isomorfismo e  $\|(I + L)^{-1}\| \leq (1 - a)^{-1}$ ;
- (ii)  $I + G$  é isomorfismo e  $\|(I + G)^{-1}\| \leq a(1 - a)^{-1}$ .

*Demonstração.* (i) Precisamos provar que  $I + L$  é uma bijeção. Nesse sentido, dado  $y \in E$  considere a aplicação  $U : E \rightarrow E$ , dada por  $U(x) = y - L(x)$ , vamos provar que  $U$  é uma contração e portanto tem um único ponto fixo. De fato, note que

$$\|U(x_1) - U(x_2)\| = \|-Lx_1 + Lx_2\| = \|L(x_1 - x_2)\| \leq \|L\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leq a\|x_1 - x_2\|$$

logo,  $I + L$  é bijeção e portanto isomorfismo. Agora vamos calcular a norma de  $(I + L)^{-1}$ . Tomando  $y \in E$  unitário e  $x \in E$ , temos que

$$x = (I + L)^{-1}(y) \Leftrightarrow y = (I + L)(x) \Leftrightarrow y = x + L(x).$$

Aplicando a norma segue que

$$(1 - a)\|x\| \leq \|x\| - \|L\| \cdot \|x\| \leq \|x\| - \|L(x)\| \leq \|x + L(x)\| = \|y\| = 1$$

e portanto  $\|(I + L)^{-1}\| \leq (1 - a)^{-1}$ .

(ii) Observe que  $(I + G) = G(I + G^{-1})$ , aplicando o item anterior temos que  $I + G^{-1}$  é isomorfismo, como  $G$  é isomorfismo e a composição de isomorfismo é isomorfismo, a primeira parte do resultado segue. Para o cálculo da norma  $\|(I + G)^{-1}\|$  basta notar que  $(I + G)^{-1} = (I + G^{-1})^{-1}G^{-1}$  e aplicar o item anterior para  $(I + G^{-1})^{-1}$  juntamente com a hipótese  $\|G^{-1}\| \leq a$ :

$$(I + G)^{-1} = (I + G^{-1})^{-1} \cdot G^{-1} \leq \frac{1}{1 - a} \cdot a$$

□

**Lema 3.0.22.** *Seja  $A$  um isomorfismo linear hiperbólico no espaço de Banach  $\mathbb{R}^m$ , isto é, existe uma decomposição  $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$  e um escalar  $\lambda \in (0, 1)$  tais que*

$$\|A|_{E^s}\| \leq \lambda \quad e \quad \|A^{-1}|_{E^u}\| \leq \lambda.$$

Existe  $\epsilon > 0$  tal que se  $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  são  $\epsilon$ -Lipschitz e limitadas, então a equação  $(I + v) \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ (I + v)$  possui uma única solução  $v \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ .

*Demonstração.* Queremos encontrar uma aplicação  $v \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$  de modo que  $(A + \phi_1)$  e  $(A + \phi_2)$  sejam conjugadas por um homeomorfismo da forma  $h = I + v$ . Como

$$\begin{aligned} (I + v) \circ (A + \phi_1) &= (A + \phi_2) \circ (I + v) \\ \Leftrightarrow (A + \phi_1) + v \circ (A + \phi_1) &= A + Av + \phi_2 \circ (I + v) \\ \Leftrightarrow Av - v \circ (A + \phi_1) &= A + \phi_1 - A - \phi_1 \circ (I + v) \\ \Leftrightarrow Av - v \circ (A + \phi_1) &= \phi_1 - \phi_2 \circ (I + v). \end{aligned}$$

então mostraremos que a última equação acima possui única solução  $v \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ . Definindo o operador  $L : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$  por  $L(v) = Av - v \circ (A + \phi_1)$  comecemos por mostrar que  $L$  é invertível e que  $\|L^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot (1 - a)^{-1}$ .

Observe que  $Av - v \circ (A + \phi_1) = A[v - A^{-1}v \circ (A + \phi_1)]$ , logo podemos escrever  $L = \bar{A}\bar{L}$  sendo  $\bar{A}, \bar{L} : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$  dadas por

$$\bar{A}(v) = A \circ v \quad e \quad \bar{L} = v - A^{-1} \circ v \circ (A + \phi_1).$$

Sendo  $\bar{A}(v) = A \circ v$  inversível, para mostrar que  $L$  é inversível basta provar que  $\bar{L}$  o é. Dado  $v_s \in C_b^0(E : E^s)$  temos

$$\bar{L}(v_s) = v_s - A^{-1} \circ v_s(A + \phi_1).$$

Como  $E^s$  é invariante por  $A^{-1}$  segue que  $v_s - A^{-1} \circ v_s(A + \phi_1)$  é uma aplicação como imagem em  $E^s$ , logo,  $\bar{L} \in C_b^0(\mathbb{R}^m : E^s)$  e portanto  $C_b^0(\mathbb{R}^m : E^s)$  é  $\bar{L}$ -invariante. De maneira análoga,  $C_b^0(\mathbb{R}^m : E^u)$  é  $\bar{L}$ -invariante e daí podemos escrever

$$\bar{L} = \bar{L}^s \oplus \bar{L}^u \quad \text{onde} \quad \bar{L}^s = \bar{L} \big|_{C_b^0(E; E^s)} \quad \text{e} \quad \bar{L}^u = \bar{L} \big|_{C_b^0(E; E^u)}.$$

Por outro lado, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno a aplicação  $A + \phi_1$  é homeomorfismo, logo o operador

$$v_s \rightarrow A^{-1} \circ v_s \circ (A + \phi_1)$$

é inversível com inversa  $A^s \circ v_s(A + \phi_1)^{-1}$ , e como observamos no início do capítulo, é contração com norma limitada por  $a < 1$ . Isto é,  $\|A^s \circ v_s(A + \phi_1)^{-1}\| \leq a < 1$ .

Como  $(\bar{L}^s) = I - A^{-1} \circ v_s(A + \phi_1)$ , podemos aplicar a segunda parte do lema anterior e concluir que  $\bar{L}^s$  é isomorfismo e vale  $\|(\bar{L}^s)^{-1}\| \leq a(1 - a)^{-1}$ .

Aplicando a primeira parte do mesmo lema concluímos que  $\bar{L}^u$  é inversível e  $\|(\bar{L}^u)^{-1}\| \leq (1 - a)^{-1}$ . Tomando  $\max\{a(1 - a)^{-1}; (1 - a)^{-1}\}$  concluímos que

$$\|L^{-1}\| = \|\bar{A}^{-1}\bar{L}^{-1}\| = \|A^{-1}\| \cdot \|\bar{L}^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|(1 - a)^{-1}.$$

Sendo  $L$  inversível, a equação  $L(v) = \phi_1 - \phi_2 \circ (I + v)$  é equivalente a  $v = L^{-1}(\phi_1 - \phi_2 \circ (I + v))$ , que admite solução se, só se,  $v$  for ponto fixo do operador  $T : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$  definido por  $T(v) = L^{-1}(\phi_1 - \phi_2 \circ (I + v))$ .

Mostremos então que  $T$  é contração.

De fato, dados  $v_1, v_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$  temos,

$$\begin{aligned} \|T(v_1) - T(v_2)\| &= \|L^{-1}(\phi_1 - \phi_2 \circ (I + v_1)) - L^{-1}(\phi_1 - \phi_2 \circ (I + v_2))\| \\ &= \|L^{-1}(\phi_1) - L^{-1}(\phi_2 \circ (I + v_1) - L^{-1}(\phi_1) + L^{-1}(\phi_2 \circ (I + v_2)))\| \\ &= \|L^{-1}(\phi_2 \circ (I + v_2)) - L^{-1}(\phi_2 \circ (I + v_1))\| \\ &\leq \|L^{-1}\| \cdot \|(\phi_2 \circ (I + v_2)) - (\phi_2 \circ (I + v_1))\| \\ &\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - a} \cdot \epsilon \|v_2 - v_1\| \end{aligned}$$

Dessa forma, para  $\epsilon > 0$  tal que  $\|A^{-1}\|(1 - a)^{-1}\epsilon < 1$  temos que  $T$  é contração e portanto possui um único ponto fixo que satisfaz

$$Av - v \circ (A + \phi_1) = \phi_1 - \phi_2 \circ (I + v)$$

e daí encontramos o único  $v \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$  solução da equação

$$(I + v) \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ (I + v).$$

Para terminarmos o lema resta provar que  $I + v$  é homeomorfismo. Note que utilizando a mesma construção acima obtemos um único  $w \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$  que também é solução da equação

$$(A + \phi_1) \circ (I + w) = (I + w) \circ (A + \phi_2).$$

Se provarmos que  $(I + v) \circ (I + w) = (I + w) \circ (I + v) = I$  o resultado estará provado.

Observe que

$$\begin{aligned} (I + v) \circ (I + w) \circ (A + \phi_2) &= (I + v) \circ (A + \phi_1) \circ (I + w) \\ &= (A + \phi_2) \circ (I + v) \circ (I + w) \end{aligned}$$

Por outro lado  $(I + v) \circ (I + w)$  esta a uma distância finita de  $I$ , pois  $(I + v) \circ (I + w) = I + w + v \circ (I + w)$ , logo  $w + v \circ (I + w) \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$  e como  $I \circ (A + \phi_2) = (A + \phi_2) \circ I$ . pela unicidade da solução da equação

$$(I + u) \circ (A + \phi_2) = (A + \phi_2) \circ (I + u)$$

conclui-se que  $(I + v) \circ (I + w) = I$ . De igual forma prova-se que  $(I + w) \circ (I + v) = I$ , completando a prova do lema.  $\square$

**Lema 3.0.23.** *Dado  $\epsilon > 0$  existe uma vizinhança  $U = U(0)$  de  $0 \in \mathbb{R}^m$  e uma extensão de  $f|_U$  da forma  $A + \phi$ , em que  $\phi \in C_b^0(E)$  é Lipschitz com constante limitada por  $\epsilon$ .*

*Demonstração.* Considere  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^\infty$  satisfazendo:

1.  $\alpha(t) = 0$  se  $t \geq 1$ ;
2.  $\alpha(t) = 1$  se  $t \leq \frac{1}{2}$ ;
3.  $|\alpha'(t)| < K, \forall t \in \mathbb{R}$  e  $K > 2$ .

Escreva  $f = A + \rho$  com  $\rho(0) = 0$  e  $D\rho_0 = 0$ . Considere  $B_r$  uma bola de raio  $r > 0$  e centro na origem tal que  $\|D\rho_x\| < \frac{\epsilon}{2K}$  para todo  $x \in B_r$ . Tomemos

$$\phi(x) = \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) \cdot \rho(x).$$

Observe que  $\phi(x) = 0$ , se  $\|x\| > r$  e que  $\phi(x) = \rho(x), \forall \|x\| \leq \frac{r}{2}$ , logo  $A + \phi$  é extensão de  $f$  restrita a bola  $B_{r/2}$ . Mostraremos que  $\phi$  é Lipschitz com constante limitada por  $\epsilon$ . De

fato, dados  $x_1, x_2 \in B_r$  temos

$$\begin{aligned}
\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &= \left\| \alpha\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right)\rho(x_1) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\rho(x_2) \right\| \\
&= \left\| \left[\alpha\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\right]\rho(x_1) + \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)[\rho(x_1) - \rho(x_2)] \right\| \\
&\leq K \frac{\|x_1 - x_2\|}{r} \frac{\epsilon}{2K} \|x_1\| + \frac{\epsilon}{2K} \|x_1 - x_2\| \\
&\leq \epsilon \|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Se  $x_1 \in B_r$  e  $x_2 \notin B_r$  temos que  $\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \|x_1 - x_2\| \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|$ . E para  $x_1, x_2 \notin B_r$  temos  $\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| = 0 < \epsilon \|x_1 - x_2\|$ . Isso conclui a prova do lema.  $\square$

Agora estamos prontos para demonstrar o teorema.

*Prova do teorema de Hartman-Grobman*. Seja  $\epsilon > 0$  como no Lema 3.0.22. Aplicando o Lema 3.0.23 considere  $A + \phi$  uma extensão de  $f|_{U(0)}$ , sendo  $U(0)$  vizinhança de 0 e  $\phi$  com constante de Lipschitz limitada por  $\epsilon$ . Utilizando mais uma vez o Lema 3.0.22 existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $h \circ A = (A + \phi) \circ h$ , e isso que nos dá  $h \circ A = f|_{U(0)} \circ h$ .

$\square$

Uma consequência imediata do teorema de Hartman-Grobman consiste no fato de que todo ponto fixo hiperbólico é isolado.

**Proposição 3.0.24.** *Seja  $f : E \rightarrow E$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  definido em um espaço de Banach  $E$ . Se  $p_f \in E$  é um ponto fixo hiperbólico para  $f$  então existem vizinhanças  $U \subset E$  de  $p_f$  e  $\mathcal{U}$  de  $f$  tais que toda  $g \in \mathcal{U}$  possui um único ponto fixo  $p_g \in U$ .*

Ainda sobre o teorema, observe que sendo a conjugação  $h : U \rightarrow V$  um homeomorfismo com  $h(0) = p$ , então dado o aberto  $\bar{U} \subset \{U \cap E^s\}$ , podemos considerar a variedade topológica  $h(\bar{U}) = \bar{V}$ . Para todo  $y \in \bar{V}$  tal que  $h(x) = y$  tem-se

$$f^n(y) = f^n(h(x)) = h(Df_p^n(x)) \rightarrow h(0) = p, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Logo se  $z \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}(\bar{V})$  teremos  $f^n(z) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Por outro lado se  $f^n(z) \rightarrow p$ , para  $n$  suficientemente grande vale  $h^{-1}(f^n(z)) \rightarrow 0$  logo  $h^{-1}(f^n(z)) \in \bar{U}$ . Deste modo, temos a seguinte relação:

$$f^n(z) \rightarrow p \iff z \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}(\bar{V}).$$

Em outras palavras, sendo  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}(\bar{V})$  também uma variedade topológica, o teorema de Hartman-Grobman garante que o conjunto dos pontos que tem como  $\omega$ -limite um ponto fixo hiperbólico é uma variedade topológica. Esta variedade é chamada de *Variedade Estável*. Quando  $f$  é inversível de forma análoga podemos ver que o conjunto dos pontos que tem como  $\alpha$ -limite um ponto fixo hiperbólico é também uma variedade topológica, chamada de *Variedade Instável*.

No próximo capítulo daremos uma prova da existência dessas variedades que independe do teorema de Hartman-Grobman. Mostraremos que estas variedades são gráficos de uma aplicação Lipschitz e têm como espaços tangentes os seus respectivos espaços estável e instável. Esse é basicamente o conteúdo do Teorema da Variedade Estável.

# Capítulo 4

## Teorema da Variedade Estável (versão Lipschitz)

O Teorema da Variedade Estável é um dos resultados mais importantes na teoria dos sistemas dinâmicos hiperbólicos. Ele estabelece que o conjunto estável de um ponto em um conjunto hiperbólico é uma variedade diferenciável. Esta variedade é tangente neste ponto ao seu espaço estável e é tão regular quanto o sistema dinâmico.

O objetivo deste capítulo é demonstrar uma versão Lipschitz deste teorema para ponto fixo hiperbólico, neste sentido começaremos com algumas definições.

**Definição 4.0.25.** *Considere  $f : M \rightarrow M$  um sistema dinâmico definido em um espaço métrico  $(M, d)$ . Dado  $x \in M$ , o conjunto estável do ponto  $x$  é definido por:*

$$W^s(x) = \{y \in M; d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

*Se  $f$  é invertível, o conjunto instável de  $x$  é:*

$$W^u(x) = \{y \in M; d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}$$

Os conjuntos estável e instável geralmente apresentam uma estrutura topológica bastante complicada. O propósito do teorema da variedade estável é mostrar que localmente esses conjuntos são bem comportados.

**Definição 4.0.26.** *Fixado  $\epsilon > 0$  seja  $B(x, \epsilon) \subset M$  a bola centrada em  $x$  e raio  $\epsilon$ . O conjunto estável local  $W_\epsilon^s(x)$  de  $x$  é definido por:*

$$W_\epsilon^s(x) = \{y \in B(x, \epsilon); f^n(y) \in B(x, \epsilon) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow^{n \rightarrow +\infty} 0\};$$

*Quando  $f$  é invertível, o conjunto instável local  $W_\epsilon^u(x)$  de  $x$  é:*

$$W_\epsilon^u(x) = \{y \in B(x, \epsilon); f^{-n}(y) \in B(x, \epsilon) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow^{n \rightarrow +\infty} 0\}.$$

De acordo com a definição acima,  $W^u(x) = W^s(x, f^{-1})$  e  $W_\epsilon^u(x) = W_\epsilon^s(x, f^{-1})$ , por isso nos restringiremos a falar do conjunto estável no que se segue. Utilizaremos também a notação  $W_{loc}^s(x)$  para a variedade estável local.

**Definição 4.0.27.** *Sejam duas variedades diferenciáveis  $M, N$ . Uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , é uma imersão se  $Df_p$  é biunívoca para todo  $p \in M$ . Um mergulho é uma imersão biunívoca em que  $f: M \rightarrow f(M) \subset N$  é um homeomorfismo,  $f(M)$  com a topologia induzida de  $N$ .*

Nos exemplos abaixo  $f_1$  é uma imersão que não é mergulho enquanto  $f_2$  é um mergulho.

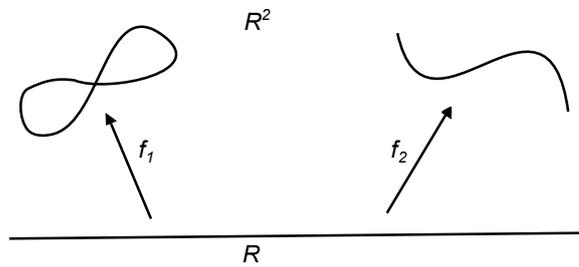


Figura 4.1: Imersões de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$

Se  $f$  é  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $\dim E^s = n$ , o mergulho da variedade estável local será denotado pelo mapa  $\Theta^s: \Lambda \rightarrow \text{Emb}^k(D^n, M)$  tal que  $\Theta^s(x)(0) = x$  e  $\Theta^s(x)(D^n) = W_\epsilon^s(x, f)$ , para todo  $x \in \Lambda$ , isto é,  $\Theta^s$  associa a cada  $x \in \Lambda$  a variedade local de  $x$ ,  $C^k$  mergulhada,  $k \geq 0$ .

Apresentamos agora o enunciado geral do Teorema da Variedade Estável.

**Teorema 4.0.28.** *Considere  $f: M \rightarrow M$  um difeomorfismo de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , definido em variedade diferenciável compacta  $M$ . Seja  $\Lambda \subset M$  um conjunto fechado hiperbólico com constante de hiperbolicidade  $\lambda$ . Então existe  $\epsilon > 0$  tal que para cada  $x \in \Lambda$  seu conjunto estável  $W_\epsilon^s(x)$  é uma variedade  $C^k$  mergulhada, neste caso chamada de variedade estável local, a qual satisfaz:*

1.  $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y)$ ,  $\forall y \in W_\epsilon^s(x)$ ,  $\forall n \geq 1$ ;
2.  $f(W_\epsilon^s(x)) \subset W_\epsilon^s(x)$ ;
3.  $T_x W_\epsilon^s(x) = E^s(x)$ ;
4. A aplicação  $\Theta^s: \Lambda \rightarrow \text{Emb}^k(D^n, M)$ , que associa a cada  $x$  a variedade estável  $W_\epsilon^s(x)$  é contínua.

A estratégia da prova deste teorema é considerar  $\Lambda$  como um ponto fixo hiperbólico de uma aplicação definida em um espaço de Banach apropriado. Apesar da prova ser basicamente uma aplicação da sua versão para ponto fixo hiperbólico nós não iremos demonstrá-lo aqui pois algumas definições e resultados fogem o objetivo da dissertação, sua demonstração pode ser encontrada em [18]; Demonstraremos uma versão Lipschitz do teorema para ponto fixo hiperbólico.

Os resultados da seguinte proposição serão utilizados neste capítulo. A prova da proposição pode ser encontrada em [6].

**Proposição 4.0.29.** *Considere  $E$  e  $F$  espaços de Banach.*

1. *(Perturbação do isomorfismo) Sejam  $T : E \rightarrow F$  um isomorfismo e  $g : E \rightarrow F$  Lipschitz com constante satisfazendo  $Lip(g) < \|T^{-1}\|^{-1}$ . Então  $g + T$  é um homeomorfismo sobrejetivo.*
2. *(Perturbação de uma aplicação bilipschitz) Seja  $\Psi : E \rightarrow F$  uma aplicação bilipschitziana sobrejetiva. Se  $\Phi : E \rightarrow F$  Lipschitz com  $Lip(\Phi) < Lip(\Psi^{-1})^{-1}$  então  $\Psi + \Phi$  é um homeomorfismo sobrejetivo.*

## 4.1 Teorema da variedade estável para ponto fixo hiperbólico

Para deixar clara a versão do teorema que iremos demonstrar, iniciamos a seção enunciando o resultado.

**Teorema 4.1.1** (Variedade Estável para Ponto Fixo Hiperbólico - Versão Lipschitz). *Considere  $E = E^s \times E^u$  um espaço de Banach e  $T : E \rightarrow E$  um isomorfismo hiperbólico com raios espectrais  $T|_{E^s}$  e  $(T|_{E^u})^{-1}$  menores que  $\lambda < 1$ . Então todo homeomorfismo Lipschitz  $f : E \rightarrow E$  tal que  $Lip(f - T) < \min\{(1 - \lambda)/2, (1 - \lambda)/(2 \max\{Lip(T^{-1})^2, Lip(T^{-1})\})\}$  possui as seguintes propriedades:*

1. *Existe um único ponto fixo  $p \in E$  para  $f$ .*
2. *Existe uma única aplicação Lipschitz  $g : E^s \rightarrow E^u$  cujo gráfico é  $W^s(p)$ . Em particular, o conjunto estável  $W^s(p)$  é uma variedade topológica, neste caso Lipschitz.*
3. *Escrevendo  $p = p_s + p_u$ , se  $B(p, r) = B^s(p_s, r) \times B^u(p_u, r)$  é uma bola qualquer vale:*

$$graf(g_r = g|_{B(p,r)}) = \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(E^s(r) \times E^u(r)).$$

4. A restrição de  $f$  ao graf( $g$ ) é contração:  $d(f^n(p), f^n(x)) \leq \lambda^n d(p, x)$ ,  $\forall x \in W^s(p)$ .

Em virtude da Proposição 4.0.29, não é difícil verificar o item 1 do teorema. De fato, basta provar que  $f - I$  é homeomorfismo. Como  $T$  hiperbólica ( $1 \notin \text{Spec}(T)$ ), segue que  $T - I$  é isomorfismo. Sendo  $(1 - \lambda) \leq \|(T - I)(v)\|$  então  $(1 - \lambda) \leq \inf_{\|v\|} \|(T - I)(v)\| = \|[T - I]^{-1}\|^{-1}$ . Deste modo

$$\text{Lip}(f - T) < (1 - \lambda) \leq \|[T - I]^{-1}\|^{-1}$$

Aplicando a Proposição 4.0.29 a  $T - I$ , temos que  $f - I$  é homeomorfismo, pois  $f - I = (f - T) + (T - I)$  e portanto existe um único ponto  $p \in E$  tal que  $(f - I)(p) = f(p) - p = 0$ , que é o único ponto fixo de  $f$ .

A prova dos outros itens do teorema requer uma construção mais sofisticada. Existem duas formas de demonstrá-los: o método da transformada de gráfico, devido a Hadamard (1901) e o método da variação dos parâmetros, devido a Perron (1924). A prova que apresentamos aqui segue o método de Hadamard e pode ser encontrada com detalhes em Castro [2], Hirsch, Pugh e Shub [6], ou Shub [18].

O que iremos fazer é tomar uma variedade mergulhada  $\xi$ , próxima de  $E^s$ , devido  $\text{Lip}(f - T)$  ser pequeno, essa variedade expande na direção estável e contrai na direção instável por  $f^{-1}$ , dessa forma, as iteradas  $\xi$  por  $f^{-1}$  devem convergir para a variedade estável de  $f$ .

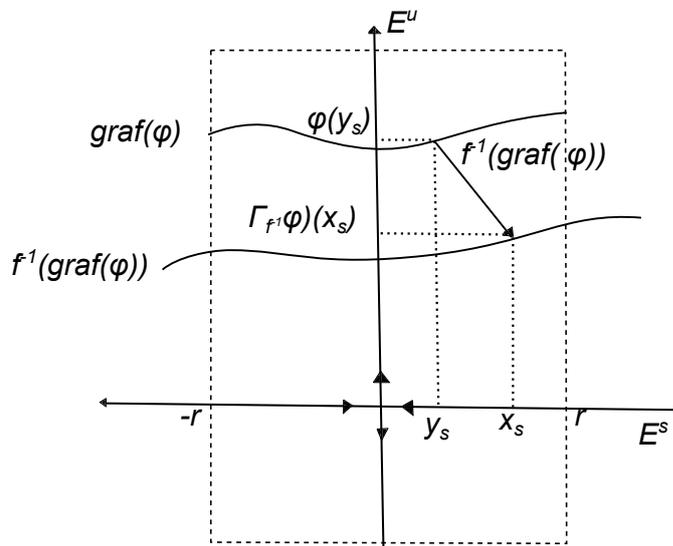


Figura 4.2: Construção da transformada de gráfico

Sabemos que toda variedade mergulhada é localmente o gráfico de uma aplicação. Fixando a decomposição  $E = E^s \oplus E^u$  a representação de  $\xi$  e suas pré-imagens é localmente única como gráfico de uma aplicação com domínio contido em  $E^s$  e contradomínio em  $E^u$ .

Seja  $r > 0$  fixo, considere  $E^s(r) = \overline{B^s(p_s, r)} = \overline{B(p, r)} \cap E^s \subset E^s$  e também  $E^u(r) = \overline{B^u(p_u, r)} = B(p, r) \cap E^u \subset E^u$  com  $p = p_s + p_u \in E$ ,  $p_s \in E^s$  e  $p_u \in E^u$ .

Dada uma aplicação Lipschitz  $\varphi : E^s(r) \rightarrow E^u(r)$  com  $\text{Lip}(\varphi) \leq 1$ , seja  $\xi = \text{graf}(\varphi)$ . Note que para aplicarmos  $f^{-1}$  a  $\xi$  devemos definir um operador  $\Gamma_{f^{-1}}$  de modo que o gráfico de  $\Gamma_{f^{-1}}\varphi : E^s(r) \rightarrow E^u(r)$  parametrize  $f^{-1}(\xi) \cap (E^s(r) \oplus E^u(r))$ . Nos próximos passos construiremos esse operador.

Suponha que seja possível escrever  $f^{-1}(\xi) \cap E^s(r)$  como gráfico de uma aplicação Lipschitz  $\Gamma_{f^{-1}}\varphi : E^s(r) \rightarrow E^u(r)$ . Então dado um ponto  $(x_s, x_u) \in f^{-1}(\xi)$  teremos  $(x_s, x_u) = (x_s, (\Gamma_{f^{-1}}\varphi)(x_s))$  e  $(x_s, x_u) = f^{-1}(y_s, \varphi(y_s))$ . E portanto  $x_s = \pi_s \circ f^{-1}(y_s, \varphi(y_s))$  e  $x_u = \pi_u \circ f^{-1}(y_s, \varphi(y_s))$ , donde  $y_s = \pi_s \circ (f^{-1}(Id, \varphi))^{-1}(x_s)$ . Com estas informações segue que

$$\begin{aligned} \Gamma_{f^{-1}}\varphi(x_s) = x_u &= \pi_u \circ f^{-1}(y_s, \varphi(y_s)) \\ &= \pi_u \circ f^{-1}(Id, \varphi)(y_s) \\ &= [\pi_u \circ f^{-1}(Id, \varphi)] \circ [\pi_s \circ (f^{-1}(Id, \varphi))^{-1}](x_s) \end{aligned}$$

ou seja

$$\Gamma_{f^{-1}}\varphi(x_s) = [\pi_u \circ f^{-1}(Id, \varphi)] \circ [\pi_s \circ (f^{-1}(Id, \varphi))^{-1}](x_s)$$

Esta é a aplicação que procurávamos, chamada de Transformada de Gráfico. O próximo passo é mostrar que  $\Gamma_{f^{-1}}$  esta bem definida.

Observe que a variedade estável da transformação  $T$  é  $E^s$ , a qual é parametrizada por  $\varphi_T : E^s \rightarrow E^u$  com  $\varphi_T(x_s) = 0$  para todo  $x \in E^s$ .

Como se espera que  $f$  seja uma contração na variedade estável de é admissível supor que, ao menos localmente, a variedade estável de  $f$  seja dado como Lipschitz pequeno. Provaremos portanto que  $\Gamma_{f^{-1}} : \text{Lip}_1(E^s(r), E^u(r)) \rightarrow \text{Lip}_1(E^s(r), E^u(r))$ .

Consideraremos  $E$  com a norma do máximo

$$\|v\| = \max\{\|v_s\|, \|v_u\|\} \text{ onde } v = v_s + v_u, v_s \in E^s \text{ e } v_u \in E^u.$$

Como  $\text{Lip}_1(E^s(r), E^u(r))$  é subconjunto fechado do espaço de Banach das aplicações limitadas de  $E^s(r)$  em  $E^u$  com a norma do sup, tem-se que  $\text{Lip}_1(E^s(r), E^u(r))$  é um espaço métrico completo.

Os dois lemas que seguem mostram que para  $\text{Lip}(f - T)$  pequena a transformada de gráfico está bem definida.

**Lema 4.1.2.** *Seja  $T : E \rightarrow E$  um isomorfismo hiperbólico em um espaço de Banach com  $\|T|_{E^s}\| < \lambda$  e  $\|T^{-1}|_{E^u}\| < \lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Então dado  $0 < \epsilon < \lambda^{-1}$  existe  $\delta(T, \epsilon) > 0$*

tal que, para  $\text{Lip}(f - T) < \delta$  existe  $f^{-1} : E \rightarrow E$  com  $\text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) < \epsilon$ . Além disso,  $\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi) : E^s \rightarrow E^u$  é homeomorfismo bilipschitz cuja inversa possui constante

$$\text{Lip}([\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi)]^{-1}) \leq \frac{1}{\lambda^{-1} - \epsilon}.$$

Em particular, para  $\epsilon < \lambda^{-1} - 1$ , dado  $r > 0$  se  $\text{Lip}(f - T) < \min\{\delta, 1 - \lambda\}$  então para toda  $\varphi \in \text{Lip}(\overline{B^s(p_s, r)}, \overline{B^u(p_u, r)})$  vale que

$$\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi)(\overline{B^s(p_s, r)}) \supset \overline{B^s(p_s, r)}.$$

*Demonstração.* Suponhamos, sem ter fixado  $\delta$ , que  $\delta \leq \|T^{-1}\|^{-1}$ . Usando a Proposição 4.0.29 em  $T$  temos que  $\text{Lip}(\|f - T\|) < \delta < \|T^{-1}\|^{-1}$ , logo  $f = T + (f - T)$  é homeomorfismo, assim essa hipótese já garante a existência de  $f^{-1}$ .

Como  $E^s$  é  $T$ -invariante, podemos considerar  $T^s = T|_{E^s}$ ,  $T^s$  é invertível por que  $T$  o é. Pela Proposição 4.0.29 da perturbação da aplicação bilipschitz se

$$\text{Lip}(\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi) - (T^s)^{-1}) < \text{Lip}(T^s)^{-1}$$

então  $\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi)$  será invertível. Sabendo que  $\lambda^{-1} \leq \text{Lip}(T^s)^{-1}$  basta mostrar que

$$\text{Lip}(\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi) - (T^s)^{-1}) < \lambda^{-1}.$$

Como  $T$  deixa  $E^s$  invariante e sabendo que  $\pi|_{\text{gr}f(\varphi)}$  é a inversa da aplicação  $x_s \rightarrow (x_s, \varphi(x_s))$  temos:

$$\begin{aligned} (\pi_s \circ f^{-1}(x_s, \varphi(x_s))) - (T^s)^{-1}(x_s) &= (\pi_s \circ f^{-1}(x_s, \varphi(x_s))) - T^{-1}|_{E^s}(x_s) \\ &= \pi_s \circ (f^{-1} - T^{-1}) \circ (x_s, \varphi(x_s)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Lip}(\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi) - T^{-1}|_{E^s}) &\leq \text{Lip}(\pi_s) \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) \text{Lip}(I, \varphi) \\ &= \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}). \end{aligned}$$

Dado  $0 < \epsilon < \lambda^{-1}$  temos que obter uma cota para  $\text{Lip}(f - T)$  de maneira que  $\text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) < \lambda^{-1}$ .

Note que,

$$\begin{aligned} f^{-1} - T^{-1} &= (T + (f - T))^{-1} - T^{-1} \\ &= (T(I + T^{-1}(f - T)))^{-1} - T^{-1} \\ &= [I + T^{-1}(f - T)]^{-1} \circ T^{-1} - T^{-1} \\ &= ([I + T^{-1}(f - T)]^{-1} - I) \circ T^{-1} \\ &= (I - [I + T^{-1}(f - T)]) \circ [I + T^{-1}(f - T)]^{-1} \circ T^{-1} \\ &= (-T^{-1}(f - T)) \circ [I + T^{-1}(f - T)]^{-1} \circ T^{-1} \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) &\leq \text{Lip}(-T^{-1})\text{Lip}(f - T)\text{Lip}([I + T^{-1}(f - T)]^{-1})\text{Lip}(T^{-1}) \\ &= \text{Lip}(T^{-1})^2\text{Lip}(f - T)\text{Lip}([I + T^{-1}(f - T)]^{-1}) \\ &\leq \text{Lip}(T^{-1})^2\text{Lip}(f - T)\frac{1}{1 - \text{Lip}(T^{-1})\text{Lip}(f - T)}. \end{aligned}$$

Tomando  $\delta = \epsilon/2\max\{\text{Lip}(T^{-1})^2, \text{Lip}(T^{-1})\}$  e  $\text{Lip}(f - T) < \delta$  temos que

$$2\text{Lip}(f - T)\max\{\text{Lip}(T^{-1})^2, \text{Lip}(T^{-1})\} < \epsilon.$$

Como

$$\text{Lip}(f^{-1} - T^{-1})(1 - \text{Lip}(T^{-1})\text{Lip}(f - T)) \leq \text{Lip}(f - T)2\max\{\text{Lip}(T^{-1})^2, \text{Lip}(T^{-1})\},$$

segue que  $\text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) < \epsilon$  e portanto  $\text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) < \epsilon$ .

Se  $\epsilon < \lambda^{-1} - 1$  então  $\frac{1}{\lambda^{-1} - \epsilon} < 1$ , donde

$$\text{Lip}([\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi)]^{-1}) \leq \frac{1}{\lambda^{-1} - \epsilon} < 1$$

Assim  $\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi)$  é a inversa de uma contração, logo expande em todas as direções e como  $p$  é fixo, segue-se que

$$\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi)(\overline{B^s(p_s, r)}) \supset \overline{B^s(p_s, r)}$$

□

**Lema 4.1.3.** *Seja  $T : E \rightarrow E$  um isomorfismo hiperbólico em um espaço de Banach tal que  $\|T|_{E^s}\| \leq \lambda < 1$  e  $\|T|_{E^u}\|^{-1} \leq \lambda < 1$ . Suponha  $\epsilon < 1 - \lambda$  e tome  $\delta$  dado no lema anterior. Nessas condições, se  $\text{Lip}(f - T) < \min\{\delta, 1 - \lambda\}$  então para todo  $r > 0$  a transformada de gráfico  $\Gamma_{f^{-1}} : \text{Lip}_1(\overline{E^s(r)}, \overline{E^u(r)}) \rightarrow \text{Lip}_1(\overline{E^s(r)}, \overline{E^u(r)})$  está bem definida.*

*Demonstração.* Como  $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda(1 - \lambda) < 1 - \lambda \Rightarrow 1 - \lambda < \lambda^{-1} - 1$  e portanto estamos nas hipóteses do lema anterior. Assim, já sabemos que

$$\Gamma_{f^{-1}}(\varphi)(x_s) = [(\pi_u \circ f^{-1}) \circ (I, \varphi)] \circ [(\pi_s \circ f^{-1}) \circ (I, \varphi)]^{-1}(x_s)$$

faz sentido para  $x_s \in \overline{B^s(p, r)}$  e  $\varphi \in \text{Lip}_1(\overline{B^s(p, r)}, \overline{B^u(p, r)})$ .

Para concluir a prova do presente lema resta verificar que

1.  $\Gamma_{f^{-1}}(\varphi) \in \text{Lip}_1(\overline{B^s(p, r)}, E^u)$  se  $\varphi \in \text{Lip}_1(\overline{B^s(p, r)}, \overline{B^u(p, r)})$ ;

2.  $\Gamma_{f^{-1}}(\varphi)(x_s) \in \overline{B^u(p_u, r)}$  se  $x_s \in \overline{B^s(p_s, r)}$  e  $\varphi \in \text{Lip}_1(\overline{B^s(p_s, r)}, \overline{B^u(p_u, r)})$

No primeiro caso temos

$$\begin{aligned}
\text{Lip}(\Gamma_{f^{-1}}(\varphi)) &\leq \text{Lip}((\pi_u \circ f^{-1}) \circ (I, \varphi)) \text{Lip}((\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi))^{-1}) \\
&\leq \text{Lip}((\pi_u \circ f^{-1}) \circ (I, \varphi)) \frac{1}{\lambda^{-1} - \epsilon} \\
&\leq \text{Lip}((\pi_u \circ f^{-1}) \circ (I, \varphi)) \\
&\leq \text{Lip}(\pi_u \circ f^{-1}) \text{Lip}((I, \varphi)) \\
&\leq \text{Lip}(\pi_u \circ f^{-1}) \\
&\leq \text{Lip}(\pi_u T^{-1} + (\pi_u f^{-1} - \pi_u T^{-1})) \\
&\leq \text{Lip}(T^{-1}) + \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) \leq \lambda + \epsilon \leq 1
\end{aligned}$$

Para o segundo caso, vale lembrar que no lema anterior vimos que

$$[\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi)]^{-1} : \overline{B^s(p_s, r)} \rightarrow \overline{B^s(p_s, r)}$$

dessa forma, para mostrar o segundo item basta verificar que se  $x_s \in B^s(p_s, r)$  então  $(\pi_u \circ f^{-1}) \circ (x_s, \varphi(x_s)) \in \overline{B^u(p_u, r)}$  com  $p_s \in E^s$  e  $p_u \in E^u$ . Como no final do item anterior concluímos que  $\text{Lip}(\pi_u \circ f^{-1}) < \lambda + \epsilon$  e  $f^{-1}(p_s, p_u) = (p_s, p_u)$  temos

$$\begin{aligned}
\|\pi_u f^{-1}(x_s, \varphi(x_s)) - p_u\| &= \|\pi_u f^{-1}(x_s, \varphi(x_s)) - \pi_u f^{-1}(p_s, p_u)\| \\
&\leq \text{Lip}(\pi_u \circ f^{-1}) \|(x_s, \varphi(x_s)) - (p_s, p_u)\| \\
&\leq (\lambda - \epsilon) \max\{\|x_s - p_s\|, \|\varphi(x_s) - \varphi(p_s)\|\} \leq (\lambda + \epsilon)r
\end{aligned}$$

uma vez que assumimos  $(x_s, \varphi(x_s)) \in \overline{B^s(p_s, r)}$ .  $\square$

No que se segue admitiremos  $\Gamma_{f^{-1}}$  sob as hipóteses que a tornam bem definida, fixamos  $0 < \epsilon < 1 - \lambda$  e  $\delta > 0$  tal que  $\text{Lip}(f - T) \leq \delta$ , assim as teses aqui elencadas estão todas satisfeitas. Mostraremos agora que  $\Gamma_{f^{-1}}$  é uma contração e portanto tem um único ponto fixo.

**Lema 4.1.4.** *Dado  $(x_s, x_u) \in \overline{B(p, r)}$  tal que  $\pi_s f^{-1}(x_s, x_u) \in \overline{B(p_s, r)}$ . Então para toda  $\varphi \in \text{Lip}(\overline{B(p_s, r)}, \overline{B(p_u, r)})$  tem-se*

$$\|\pi_u f^{-1}(x_s, x_u) - (\Gamma_{f^{-1}} \varphi)(\pi_s(f^{-1}(x_s, x_u)))\| \leq (\lambda + 2\epsilon) \|x_u - \varphi(x_s)\|$$

*Demonstração.* Somando e subtraindo  $(\Gamma_{f^{-1}} \varphi)(\pi_s(f^{-1}(x_s, \varphi(x_s))))$  e aplicando a desigual-

dade triangular na norma  $\|\pi_u f^{-1}(x_s, x_u) - (\Gamma_{f^{-1}}\varphi)(\pi_s(f^{-1}(x_s, x_u)))\|$  segue que

$$\begin{aligned}
& \|\pi_u f^{-1}(x_s, x_u) - (\Gamma_{f^{-1}}\varphi)(\pi_s(f^{-1}(x_s, x_u)))\| \\
& \leq \|\pi_u f^{-1}(x_s, x_u) - [(\pi_u \circ f^{-1}) \circ (I, \varphi)] \circ (\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi))^{-1}(\pi_s(f^{-1}(x_s, x_u)))\| \\
& + \|(\Gamma_{f^{-1}}\varphi)(\pi_s(f^{-1}(x_s, \varphi(x_s))) - (\Gamma_{f^{-1}}\varphi)(\pi_s(f^{-1}(x_s, x_u)))\| \\
& = \|\pi_u f^{-1}(x_s, x_u) - [(\pi_u \circ f^{-1}) \circ (I, \varphi)](x_s)\| \\
& + \|(\Gamma_{f^{-1}}\varphi)(\pi_s(f^{-1}(x_s, \varphi(x_s))) - (\Gamma_{f^{-1}}\varphi)(\pi_s(f^{-1}(x_s, x_u)))\| \\
& \leq \text{Lip}(\pi_u \circ f^{-1})\|(x_s, x_u) - (x_s, \varphi(x_s))\| \\
& + \text{Lip}(\Gamma_{f^{-1}}\varphi)\|\pi_s(f^{-1}(x_s, \varphi(x_s))) - \pi_s(f^{-1}(x_s, x_u))\| \\
& \leq (\lambda + \epsilon)\|(x_s, x_u) - (x_s, \varphi(x_s))\| + \|\pi_s(f^{-1}(x_s, \varphi(x_s))) - \pi_s(f^{-1}(x_s, x_u))\|
\end{aligned}$$

Na última desigualdade foram usados os fatos que  $\text{Lip}(\pi_u \circ f^{-1}) \leq (\lambda + \epsilon)$  e que  $\text{Lip}(\Gamma_{f^{-1}}\varphi) \leq 1$ . Sendo  $\pi_s T^{-1}(x_s, x_u) = \pi_s T^{-1}(x_s, \varphi(x_s))$ , para concluir basta observar que

$$\begin{aligned}
& \|\pi_s(f^{-1}(x_s, \varphi(x_s))) - \pi_s(f^{-1}(x_s, x_u))\| \\
& = \|\pi_s(f^{-1}(x_s, \varphi(x_s))) - \pi_s T^{-1}(x_s, \varphi(x_s)) - \pi_s(f^{-1}(x_s, x_u)) + \pi_s T^{-1}(x_s, x_u)\| \\
& \leq \text{Lip}(\pi_s f^{-1} - \pi_s T^{-1})\|x_u - \varphi(x_s)\| \leq \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1})\|x_u - \varphi(x_s)\| \\
& \leq \epsilon \|x_u - \varphi(x_s)\|.
\end{aligned}$$

□

**Lema 4.1.5.** *Dado  $r > 0$  sejam  $\epsilon < (1 - \lambda)/2$  e o correspondente  $\delta$  dado nos lemas anteriores de modo que para  $\text{Lip}(f - T) < \delta$  tem-se a transformada de gráfico  $\Gamma_{f^{-1}}$  bem definida e  $\text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) < \epsilon$ . Então  $\Gamma_{f^{-1}}$  é uma  $(\lambda + 2\epsilon)$ -contração.*

*Demonstração.* Sejam  $\varphi, \bar{\varphi} \in \text{Lip}_1(\overline{B^s(p_s, r)}, \overline{B^u(p_u, r)})$ . Dado  $x_s \in \overline{B(p_s, r)}$  pela segunda parte do Lema 4.1.2, existe  $y_s \in \overline{B(p_s, r)}$  tal que  $x_s = \pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi)(y_s)$ . Assim, aplicando o lema anterior

$$\begin{aligned}
& \|\Gamma_{f^{-1}}\varphi(x_s) - \Gamma_{f^{-1}}\bar{\varphi}(x_s)\| \\
& = \|\{\pi_u \circ f^{-1} \circ (I, \varphi) \circ (\pi_s \circ f^{-1}(I, \varphi))^{-1} - \Gamma_{f^{-1}}\bar{\varphi}\}(\pi_s(f^{-1}(y_s, \varphi(y_s))))\| \\
& = \|(\pi_u \circ f^{-1})(y_s, \varphi(y_s)) - (\Gamma_{f^{-1}}\bar{\varphi})(\pi_s(f^{-1}(y_s, \varphi(y_s))))\| \\
& \leq (\lambda + 2\epsilon)\|\varphi(y_s) - \bar{\varphi}(y_s)\|.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo em  $x_s$  na expressão acima obtemos

$$\|\Gamma_{f^{-1}}\varphi - \Gamma_{f^{-1}}\bar{\varphi}\| \leq (\lambda + 2\epsilon)\|\varphi - \bar{\varphi}\|.$$

□

Com esses resultados podemos finalizar a prova do teorema da variedade estável em sua versão Lipschitz:

*Demonstração.* (Prova do Teorema da variedade estável - versão Lipschitz) Pelo lema anterior  $\Gamma_{f^{-1}}$  é uma  $(\lambda + 2\epsilon)$ -contração em  $\text{Lip}_1(\overline{B^s(p_s, r)}, \overline{B^u(p_u, r)})$  na métrica uniforme. Sendo  $\text{Lip}_1(\overline{B^s(p_s, r)}, \overline{B^u(p_u, r)})$  fechado no espaço de Banach das aplicações contínuas e limitadas  $C_b^0(\overline{B^s(p_s, r)}, \overline{B^u(p_u, r)})$ , segue que este espaço é também de Banach. Deste modo o teorema do ponto fixo para contrações garante que  $\Gamma_{f^{-1}}$  possui um único ponto fixo  $g_r \in \text{Lip}_1(\overline{B^s(p_s, r)}, \overline{B^u(p_u, r)})$ .

Fixemos  $0 < \epsilon < 1 - \lambda$ . Para cada  $r > 0$  seja  $g_r$  o único ponto fixo de  $\Gamma_{f^{-1}}$  em  $\text{Lip}_1(\overline{B^s(p_s, r)}, \overline{B^u(p_u, r)})$ . Defina  $g : E^s \rightarrow E^u$  da seguinte forma: dado  $x_s \in E^s$  existe  $r > 0$  tal que  $x_s \in B^s(p_s, r)$ , colocamos

$$g(x_s) = g_r(x_s)$$

A unicidade local de cada  $g_r$  garante que  $g$  está bem definida e pertence a  $\text{Lip}_1(E^s, E^u)$ . De fato, dados  $x_s, y_s \in E^s$ , existe  $\bar{r} > 0$  tal que  $x_s, y_s \in B^s(p_s, \bar{r})$ . Assim

$$d(g(x_s), g(y_s)) = d(g_{\bar{r}}(x_s), g_{\bar{r}}(y_s)) \leq \text{Lip}(g_{\bar{r}})d(x_s, y_s) = d(x_s, y_s).$$

Além disso note que, por construção, dado  $r > 0$  e  $\varphi \in \text{Lip}_1(\overline{B^s(p_s, r)}, \overline{B^u(p_u, r)})$  temos

$$\text{graf}(\Gamma_{f^{-1}}(\varphi)) \subset f^{-1}(\text{graf}(\varphi))$$

Como  $g_r$  é ponto fixo de  $\Gamma_{f^{-1}}$  então  $\text{graf}(g_r) \subset f^{-1}(\text{graf}(g_r))$  logo,  $f(\text{graf}(g_r)) \subset \text{graf}(g_r)$  nos dá a invariância do gráfico de  $g$  por  $f$  e também que, fixado  $r > 0$ ,  $\text{graf}(g_r) \subset f^{-1}(\text{graf}(g_r)) \subset f^{-2}(\text{graf}(g_r)) \subset \dots \subset f^{-n}(\text{graf}(g_r)) \dots$  donde obtemos

$$\text{graf}(g) \cap \overline{E(p, r)} = \text{graf}(g_r) \subset \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(E^s(r) \times E^u(r))$$

A inclusão contrária será provada usando indução. Note que se  $x = (x_s, x_u) \in \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(E^s(r) \times E^u(r))$  existe  $y = (y_s, y_u) \in E(p, r)$  tal que  $x = (x_s, x_u) = f^{-1}(y), x = (x_s, x_u) = f^{-2}(y), \dots, x = (x_s, x_u) = f^{-n}(y), \dots$ . Vamos provar que se  $x = (x_s, x_u)$  é dessa forma, então pertence ao gráfico de  $g_r$ .

Tomemos a semi-órbita positiva de  $x$ :  $f^{-1}(y), \dots, f^{-n}(y) = x = (x_s, x_u), \dots$

No caso em que  $n = 1$ , tem-se  $x = (x_s, x_u) = f^{-1}(y)$  com  $y = (y_s, y_u) \in E(p, r)$ , pelo Lema 4.1.4 temos

$$\|x_s - g_r(x_s)\| \leq \|\pi_u f^{-1}(y_s, y_u) - g_r(\pi_s(f^{-1}(y_s, y_u)))\| \leq (\lambda + 2\epsilon)\|y_u - g_r(y_s)\|.$$

Supondo válido para  $n - 1$  temos que se  $y = (y_s, y_u)$  é tal que  $y, f^{-1}(y), \dots, f^{-n}(y) = x = (x_s, x_u)$  pertencem a  $E(p, r)$  então

$$\begin{aligned} \|x_s - g_r(x_s)\| &\leq \|(\pi_u f^{-n} - g_r(\pi_s(f^{-n})(y_s, y_u)))\| \\ &\leq (\lambda + 2\epsilon) \|\pi_u f^{-n+1}(y_s, y_u) - g_r(\pi_s f^{-n+1}(y_s, y_u))\| \\ &\leq (\lambda + 2\epsilon)(\lambda + 2\epsilon)^{n-1} \|y_u - g_r(y_s)\| \end{aligned}$$

Portanto  $\|x_u - g_r(x_s)\| \leq (\lambda + 2\epsilon)^n r$ . Deste modo, como  $0 < (\lambda + 2\epsilon) < 1$  quando  $n \rightarrow +\infty$  teremos  $x_u = g_r(x_s)$ , isto é,  $x \in \text{graf}(g_r)$ , o que equivale a

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(E^s(r) \times E^u(r)) \subset \text{graf}(g_r),$$

demonstrando o item 3 do teorema.

Provemos agora o item 4, isto é, que  $f|_{\text{graf}(g)}$  é contração. Basta provar que  $f|_{\text{graf}(g_r)}$  é contração qualquer que seja  $r > 0$ . Primeiro note que, em vista da norma fixada (norma do máximo), tomando-se dois pontos quaisquer  $u = (x_s, g_r(x_s))$  e  $v = (y_s, g_r(y_s))$  no gráfico de  $g_r$  e lembrando que  $\text{Lip}(g) \leq 1$  temos

$$\begin{aligned} d(u, v) = \|(x_s, g_r(x_s)) - (y_s, g_r(y_s))\| &= \max\{\|x_s - y_s\|, \|g_r(x_s) - g_r(y_s)\|\} \\ &= \|x_s - y_s\| = d(\pi_s(u), \pi_s(v)). \end{aligned}$$

Como  $f(\text{graf}(g_r)) \subset \text{graf}(g_r)$  a igualdade acima mostra que a projeção

$$\pi_s|_{\text{graf}(g_r)}: \text{graf}(g_r) \rightarrow B^s(p_s, r)$$

é uma isometria, a qual é a inversa da aplicação  $x_s \mapsto (x_s, g_r(x_s))$ . Deste modo  $f$  e a composição  $\pi_s|_{\text{graf}(g_r)} \circ f \circ (I, g_r): E^s(p_s, r) \rightarrow E^s(p_s, r)$  possuem a mesma constante de Lipschitz. Além disso, sendo gráfico de  $g_r$  invariante vale a igualdade

$$\pi_s|_{\text{graf}(g_r)} \circ f \circ (I, g_r) = (I, g_r)^{-1} \circ [f^{-1}]^{-1} \circ [\pi_s|_{\text{graf}(g_r)}]^{-1} = [\pi_s \circ f^{-1}(I, g_r)]^{-1}$$

Istro mostra que,  $\text{Lip}(f|_{\text{graf}(g_r)}) = \text{Lip}(\pi_s|_{\text{graf}(g_r)} \circ f \circ (I, g_r)) = \text{Lip}([\pi_s \circ f^{-1}(I, g_r)]^{-1})$  e pelo Lema 4.1.2 obtemos

$$\text{Lip}(f|_{\text{graf}(g_r)}) = \text{Lip}([\pi_s \circ f^{-1}(I, g_r)]^{-1}) \leq \frac{1}{\lambda^{-1} - \epsilon} < 1$$

Como a constante de Lipschitz não depende de  $r$  concluímos que  $f|_{\text{graf}(g)}$  é uma contração.

Por fim provaremos que  $\text{graf}(g|_{B(p,r)}) = W^s(p)$  (item 2).

Pelo item anterior  $f|_{\text{graf}(g)}$  é contração, sendo  $p \in E(p, r)$  ponto fixo de  $f$ , segue-se que as iteradas positivas dos pontos pertencentes ao  $\text{graf}(g)$  por  $f$  convergem para  $p$ , ou seja,  $\text{graf}(g_r) \subset W_{loc}^s(p)$ .

Reciprocamente, dado  $r > 0$ , se  $x \in W^s(p)$ , existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f^j(x) \in E(p, r)$  para todo  $j \geq j_0$ , ou seja,  $f^{j_0}(x) \in \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(E^s(r) \times E^u(r)) = \text{graf}(g_r)$ , isso nos diz que  $x \in f^{j_0}(\text{graf}(g_r))$ . Pela invariância  $f(\text{graf}(g)) = \text{graf}(g)$  segue que  $x \in \text{graf}(g)$ . Portanto  $\text{graf}(g) = W^s(p)$ , isso conclui a prova da versão Lipschitz.  $\square$

# Capítulo 5

## Lema de Sombreamento

Nesta capítulo veremos uma propriedade extremamente forte dos conjuntos hiperbólicos cuja ideia inicial é devido a Bowen, em resumo mostraremos que: toda pseudo-órbita é sombreada por um órbita.

**Definição 5.0.6.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação contínua invertível definida em um espaço métrico  $(M, d)$ . Fixado  $\alpha > 0$ , uma sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  em  $M$  é dita uma  $\alpha$ -pseudo órbita se vale*

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \alpha \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

*Se existe  $N > 0$  tal que  $x_{N+r} = x_r$ , para todo  $r \in \mathbb{N}$  então a sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é dita uma  $\alpha$ -pseudo órbita periódica.*

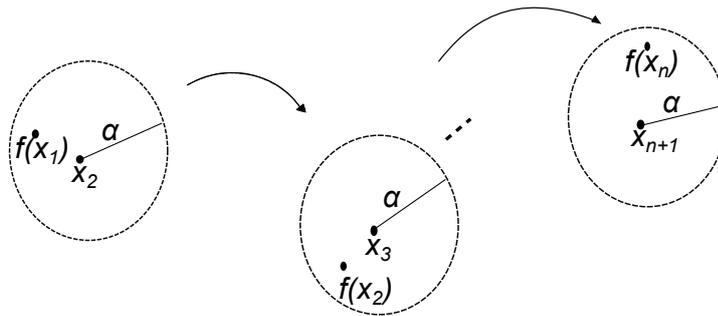


Figura 5.1: Uma  $\alpha$ -pseudo órbita

Fixado  $\beta > 0$ , dada uma  $\alpha$ -pseudo órbita  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  diremos que um ponto  $y \in M$ ,  $\beta$ -sombreia a pseudo órbita  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  se

$$d(f^n(y), x_n) \leq \beta, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Fixado  $\epsilon > 0$ , dados dois pontos  $x$  e  $y$  dizemos que um conjunto finito  $\{x_0, \dots, x_n\}$  é uma  $\epsilon$ -cadeia de  $x$  a  $y$  se  $x_0 = x$ ,  $x_n = y$  e  $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$  para todo  $i = 0, \dots, n$ .

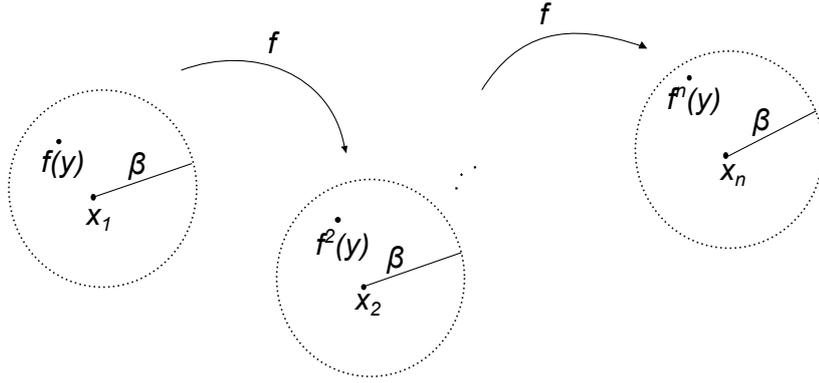


Figura 5.2: Sequência  $\beta$ -sombreada

Um ponto  $x$  é chamado *recorrente por cadeia* se para todo  $\epsilon$  existir uma  $\epsilon$ -cadeia de  $x$  a  $x$ . Denotaremos o conjunto dos pontos recorrentes por cadeia ou cadeia recorrente por  $CR(f)$ .

Observe que  $CR(f)$  é fechado, pois dado  $y \in \overline{CR(f)}$  existe  $x_{k_n} \in CR(f)$  tal que  $x_{k_n} \rightarrow y$ . Dado  $\epsilon > 0$ , pela continuidade de  $f$ , podemos tomar um vizinhança  $U$  de raio  $\delta > 0$ , com  $\delta < \epsilon/2$ , e  $x_{k_0} \in U$  tal que  $d(f(y), f(x_{k_0})) < \delta$ . Como  $x_{k_0} \in CR(f)$ , existe uma  $\delta$ -cadeia recorrente de  $x_{k_0}$  para  $x_{k_0}$ , seja  $\{x_{k_0}, x_1, \dots, x_{k_0}\}$  essa cadeia.

Perceba que,

$$d(f(y), x_1) \leq d(f(y), f(x_{k_0})) + d(f(x_{k_0}), x_1) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

e

$$d(f(x_{n-1}), y) \leq d(f(x_{n-1}), x_{k_0}) + d(x_{k_0}, y) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Logo,  $\{y, x_1, \dots, x_{n-1}, y\}$  é uma  $\epsilon$ -cadeia recorrente para  $y$ , como  $\epsilon$  foi tomado arbitrário segue-se que  $y \in CR(f)$ .

**Proposição 5.0.7.**  $\Omega(f) \subset CR(f)$ .

*Demonstração.* Considere  $x \in \Omega$  e  $\epsilon > 0$ . Escolha  $\delta > 0$  com  $\delta < \frac{\epsilon}{2}$  tal que:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja  $U$  uma vizinhança de  $x$  contida na bola de centro  $x$  e raio  $\delta$ . Como  $x$  é não errante, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Observe que se  $n = 1$  então  $f(U) \cap U \neq \emptyset$  e portanto  $\{x, x\}$  é uma  $\epsilon$ -cadeia de  $x$  a  $x$ . Se  $n > 1$  podemos encontrar  $y \in U$  tal que  $f^n(y) \in U$ . Assim  $\{x, f(y), \dots, f^{n-1}(y), x\}$  é parte de uma pseudo órbita periódica e em particular, é uma  $\epsilon$ -cadeia de  $x$  a  $x$ .  $\square$

Uma consequência deste último resultado é a sequência de inclusões:

$$\text{Per}(f) \subset L(f) \subset \Omega(f) \subset CR(f)$$

**Definição 5.0.8.** *Sejam  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $\Lambda \subset M$  um conjunto hiperbólico. Dizemos que  $\Lambda$  tem estrutura de produto local (EPL), se existe  $\delta > 0$  tal que dados  $x, y \in \Lambda$  com  $d(x, y) < \delta$  tem-se  $[x, y] := W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y) \in \Lambda$  e é um único ponto.*

Para garantir a unicidade do ponto que sombreia a pseudo órbita no lema de sombreamento usaremos a definição de transformações expansivas.

Uma transformação contínua  $f : M \rightarrow M$  num espaço métrico  $M$  é dita expansiva se existe  $\delta > 0$  (chamado de constante de expansividade) tal que, dados  $x, y \in M$  com  $x \neq y$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ . Em outras palavras, quaisquer duas órbitas distintas podem ser distinguidas por um tamanho  $\delta$  em algum momento de suas iteradas.

Quando  $f$  é invertível pode-se estender a definição de transformação expansiva do seguinte modo:  $f$  será expansiva se existe  $\delta > 0$  tal que, dados  $x, y \in M$  com  $x \neq y$  existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ . Esta propriedade é válida em todo caso, uma vez que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

Equivalentemente: uma transformação contínua  $f : M \rightarrow M$  num espaço métrico compacto é expansiva se existe  $\delta > 0$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  implica que  $x = y$ . Quando  $f : M \rightarrow M$  invertível, dizemos que ela é expansiva, se existe  $\delta > 0$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  implica que  $x = y$ .

**Proposição 5.0.9.** *Seja  $\Lambda \in M$  um conjunto hiperbólico para um  $C^k$  difeomorfismo  $f$ ,  $k \geq 1$ , sobre um variedade diferenciável  $M$ . Então  $f|_\Lambda$  é expansiva.*

*Demonstração.* Tome  $\epsilon$  como no Teorema 4.0.28 e sejam  $x \in M$  e  $y \in \Lambda$ . Se tivermos  $d(f^j(x), f^j(y)) \leq \epsilon$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$  então, olhando as iteradas para o futuro concluímos que  $x \in W_\epsilon^s(y)$  e olhando as iteradas para o passado concluímos que  $x \in W_\epsilon^u(y)$ , ou seja,  $x \in W_\epsilon^s(y) \cap W_\epsilon^u(y)$ , assim  $x = y$  e portanto  $f|_\Lambda$  é expansiva.  $\square$

Agora estamos prontos para enunciar e demonstrar o tema deste capítulo. Assumiremos que a métrica usada seja do tipo adaptada.

**Teorema 5.0.10 (Lema de Sombreamento).** *Sejam  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $\Lambda \subset M$  um conjunto hiperbólico. Dado  $\beta > 0$  existe  $\alpha > 0$  tal que toda  $\alpha$ -pseudo órbita em  $\Lambda$  é  $\beta$ -sombreada por um ponto de  $M$ . Além disso:*

1. *Se  $\Lambda$  tem EPL então a pseudo órbita é sombreada por um ponto de  $\Lambda$ ;*
2. *Se  $\Lambda$  tem EPL e  $\beta \leq \frac{\delta}{2}$ , onde  $\delta > 0$  é a constante de expansividade de  $f$ , e a sequência for infinita para o passado e para o futuro, então o ponto que  $\beta$ -sombreia é único.*

3. Se o ponto  $z \in M$  que  $\beta$ -sombreia é único e a  $\alpha$ -pseudo órbita é periódica, então  $z$  será periódico<sup>1</sup>

*Demonstração.* Seja  $\beta > 0$ . Considere  $U$  uma vizinhança compacta de  $\Lambda$  tal que

$$\bar{\Lambda} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$$

ainda seja um conjunto hiperbólico<sup>2</sup>. Podemos supor que  $\beta$  é suficientemente pequeno de maneira que o conjunto  $\{y : d(y, \Lambda) \leq \beta\} \subset U$ .

Tomemos  $\epsilon > 0$  e  $\lambda > 0$  como no Teorema 4.0.28 aplicado a  $\bar{\Lambda}$ , tais que  $\epsilon + \beta\lambda < \beta$ , ou melhor,  $\frac{\epsilon}{1-\lambda} < \beta$ . Perceba que

$$f(W_\epsilon^s(x)) \subset W_{\lambda\epsilon}^s(f(x)) \quad (5.1)$$

e que

$$f^{-1}(W_\epsilon^u(x)) \subset W_{\lambda\epsilon}^u(f^{-1}(x)). \quad (5.2)$$

Escolha  $\alpha < \epsilon$  de modo que se  $x, y, z \in \bar{\Lambda}$ ,  $d(x, y) < \alpha$  e  $z \in W_{\lambda\epsilon}^s(y)$  então  $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(z) \neq \emptyset$  e é um único ponto. Seja  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma  $\alpha$ -pseudo órbita positiva em  $\Lambda$ . Para cada  $n \geq 0$  considere pontos  $z_n \in M$  por recorrência, da seguinte forma:

1.  $z_0 = x_0$
2. para  $n \geq 1$ ,  $z_n = W_\epsilon^s(x_n) \cap W_\epsilon^u(f(z_{n-1}))$ .

Suponhamos que temos definido  $z_{n-}$ , provemos que  $z_n$  está bem definida. De fato, como  $z_{n-1} \in W_\epsilon^s(x_{n-1})$  e  $z_{n-1} \in \bar{\Lambda}$  por (5.1) vale que  $f(z_{n-1}) \in W_{\lambda\epsilon}^s(f(x_{n-1}))$ . Como  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é  $\alpha$ -pseudo órbita temos que  $d(f(x_{n-1}), x_n) < \alpha$ , logo pela maneira como  $\alpha$  foi escolhido concluímos que  $W_\epsilon^s(x_n) \cap W_\epsilon^u(f(z_{n-1}))$  tem interseção não vazia constituída por um único ponto, que chamaremos de  $z_n$ . Temos que provar agora que  $z_n \in \bar{\Lambda}$ . Observe primeiro que  $d(f^j(z_n), f^j(x_n)) \leq \lambda^j \epsilon < \beta$ ,  $\forall j \geq 0$ . Por outro lado, para qualquer  $0 \leq i \leq n$  e  $j \geq 1$  temos

$$d(f^{-j}(z_i), f^{-(j-1)}(z_{i-1})) = d(f^{-j}(z_i), f^{-j}(f(z_{i-1}))) \leq \lambda^j \epsilon$$

Então, se  $1 \leq j \leq n$  segue que

---

<sup>1</sup>A unicidade pode ocorrer sem que  $\Lambda$  tenha EPL, como exposto em [18]

<sup>2</sup>Sempre podemos fazer isso em tais condições: corolário 2.2.1 de [17]

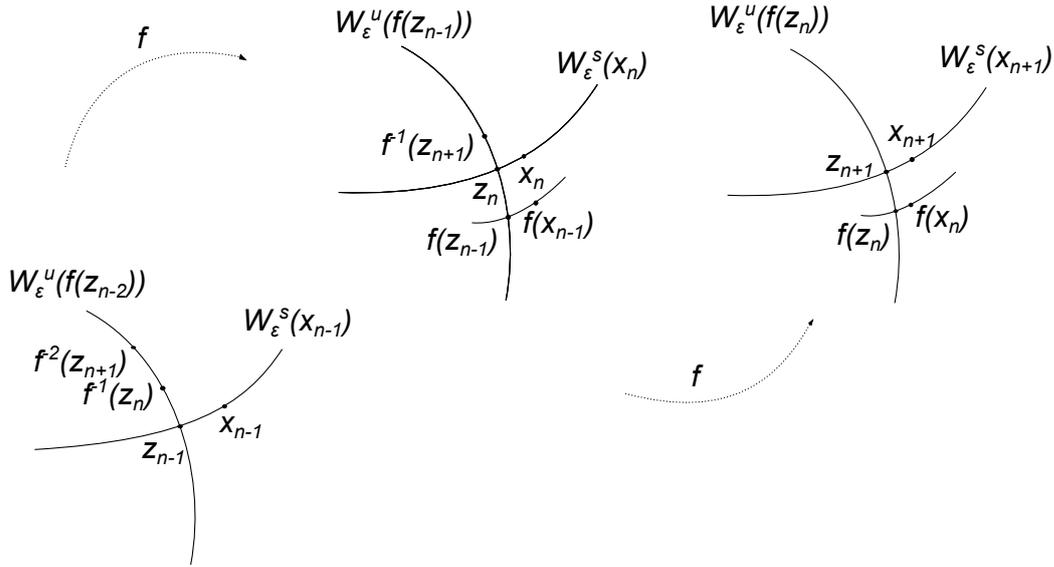


Figura 5.3: Construção de  $z_n$

$$d(f^{-j}(z_n), z_{n-j}) \leq \sum_{i=0}^{j-1} d(f^{-(j-i)}(z_{n-i}), f^{-(j-i-1)}(z_{n-i-1})) \quad (5.3)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{j-1} \lambda^{j-i} \epsilon = \sum_{i=1}^j \lambda^i \epsilon \quad (5.4)$$

e portanto

$$d(f^{-j}(z_n), x_{n-j}) \leq \underbrace{d(f^{-j}(z_n), z_{n-j})}_{\leq \sum_{i=1}^j \lambda^i \epsilon} + \underbrace{d(z_{n-j}, x_{n-j})}_{\epsilon} \leq \sum_{i=0}^j \lambda^i \epsilon < \frac{\epsilon}{1-\lambda} < \beta. \quad (5.5)$$

Além disso, se  $j \geq n$  analogamente a (5.3) concluímos que

$$\begin{aligned} d(f^{-j}(z_n), f^{-(j-n)}(x_0)) &= d(f^{-j}(z_n), f^{-(j-n)}(z_0)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} d(f^{-(j-i)}(z_{n-i}), f^{-(j-i-1)}(z_{n-i-1})) \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{j-i} \epsilon < \beta \end{aligned}$$

Logo, temos que  $d(f^j(z_n), \Lambda) < \beta$  e portanto  $z_n \in \bar{\Lambda}$ . Além disso, se definirmos  $y_n = f^{-n}(z_n)$  temos por (5.5) que

$$d(f^j(y_n), x_j) \leq \beta \quad \text{para } 0 \leq j \leq n.$$

Agora se  $y$  é um ponto de acumulação de  $y_n$ , temos que  $d(f^j(y), x_j) \leq \beta$ , para todo  $j \geq 0$ . Ou seja, dado uma  $\alpha$ -pseudo-órbita arbitrária positiva, encontramos um órbita positiva que a  $\beta$ -sombreia.

Finalmente se  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma  $\alpha$ -pseudo-órbita, para cada  $m \geq 0$  consideramos  $w_m$  que sombreia  $\{x_n\}_{n \geq -m}$ , ou seja,  $d(f^j(f^m(w_m)), x_j) \leq \beta$  para todo  $-m \leq j \leq +\infty$ . Logo, se  $z$  é um ponto de acumulação de  $f^m(w_m)$  temos que  $d(f^n(z), x_n) \leq \beta$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Concluimos a afirmação principal do teorema, agora vamos provar os itens (1) e (2).

Item (1): se  $\Lambda$  tem E.P.L. vemos, por construção, que os pontos  $z_n \in \Lambda$ , como  $\Lambda$  é fechado, também  $z \in \Lambda$ , finalizando a prova do item.

Item (2): Como  $\Lambda$  tem EPL, pelo item anterior, se  $y_1, y_2$   $\beta$ -sombreiam  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  então  $y_1, y_2 \in \Lambda$ , donde decorre que  $f$  será expansiva para iteradas positivas ou negativas, com constante de expansividade  $\delta \geq 2\beta$  (por hipótese), como

$$d(f^n(y_1), f^n(y_2)) \leq d(f^n(y_1), x_n) + d(x_n, f^n(y_2)) \leq \beta + \beta \leq \delta, \forall n \in \mathbb{Z}$$

por expansividade concluímos que  $y_1 = y_2$

Item (3): se  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  for uma  $\alpha$ -pseudo órbita periódica de período  $k$ , teremos que  $\{f^n(z)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  e  $\{f^n(f^k(z))\}_{n \in \mathbb{Z}}$   $\beta$ -sombreiam  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , por unicidade  $f^k(z) = z$  e isso conclui a prova do teorema.  $\square$

## 5.1 Consequências do Lema de Sombreamento

Nesta seção vamos demonstrar alguns resultados bem interessantes em Dinâmica Hiperbólica que são consequências do Lema de Sombreamento.

Recordemos que o conjunto limite de  $f$ ,  $L(f)$ , é a união:  $L(f) = L_+(f) \cup L_-(f)$  em que  $L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \omega(x)}$  e  $L_-(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \alpha(x)}$ .

**Corolário 5.1.1.** *Se o conjunto  $L(f)$  é hiperbólico então*

$$L(f) = \overline{Per(f)}.$$

*Demonstração.* Já sabemos que  $\overline{Per(f)} \subset L(f)$ , para concluir o resultado provemos que  $L(f) \subset \overline{Per(f)}$ .

Seja  $x \in L(f)$ , por definição,  $x$  é acumulado por alguma sequência, digamos  $x_n \in \omega(y_n)$ , dessa forma, basta provar que se  $z \in \omega(y)$  então pode-se aproximar  $z$  por um ponto periódico arbitrariamente próximo de  $z$ . Tome  $\beta$  e  $\alpha$  como no lema de sombreamento e sejam  $\epsilon = 2\beta$  e  $\eta > 0$ . Considere a vizinhança

$$\mathcal{V} = \{x \in M : d(x, L(f)) < \eta\}$$

Note que, existe  $n_0$  tal que, para  $n \geq n_0$   $f^n(y) \in \mathcal{V}$ . Considere agora  $n_2 > n_1 > n_0$  tais que  $d(f^{n_1}(y), z) < \min\{\delta/2, \epsilon_0/2\}$  e  $d(f^{n_2}(y), z) < \min\{\delta/2, \epsilon_0/2\}$ . Assim podemos construir a  $\delta$ -pseudo órbita periódica

$$\{\dots, f^{n_2}(y), f^{n_1}(y), f^{n_1+1}(y), \dots, f^{n_2-1}(y), f^{n_2}(y), f^{n_1}(y), \dots\}$$

Portanto existe um único ponto<sup>3</sup>  $y_0$  que está  $\beta$  próximo de  $f^{n_1}(y)$ , pelas desigualdades vistas acima, isso implica que  $y_0$  está  $\epsilon$  próximo de  $z$ , como  $y_0$  é único, pelo item 3 do lema de sombreamento  $y_0$  é periódico, o como que conclui a prova.  $\square$

Um conjunto compacto  $\Lambda$ ,  $f$ -invariante, é chamado de maximal se existe uma vizinhança  $U$  de  $\Lambda$  tal que

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$$

**Corolário 5.1.2.** *Um conjunto hiperbólico  $\Lambda$  é maximal se e somente se  $\Lambda$  tem E.P.L.*

*Demonstração.* Primeiro suponhamos que  $\Lambda$  é maximal, ou seja, existe uma vizinhança  $U$  de  $\Lambda$  satisfazendo

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$$

Seja  $\epsilon > 0$  tal que  $d(\Lambda, x) < \epsilon$  para todo  $x \in U$ . Tome  $\delta > 0$  pequeno de maneira que  $d(x, y) < \delta$  implica que  $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y) = [x, y]$  é um ponto, seja  $z$  este ponto.

Note que se  $x, y \in \Lambda$  temos, para  $j \geq 0$ ,

$$d(f^j(z), \Lambda) \leq d(f^j(z), f^j(x)) \leq \lambda^j \epsilon < \epsilon$$

e

$$d(f^{-j}(z), \Lambda) \leq d(f^{-j}(z), f^{-j}(x)) \lambda^j \epsilon < \epsilon$$

portanto  $f^n(z) \in U$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , ou seja,  $z \in \Lambda$ .

Por outro lado, suponha que  $\Lambda$  tem E.P.L., usando o lema de sombreamento para  $\Lambda$ , tome  $\alpha, \beta, \eta > 0$ , tais que toda  $\alpha$ -pseudo órbita em  $U = \mathcal{B}(\Lambda, \eta)$  é unicamente  $\beta$ -sombreada.

Seja  $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$ , então  $f^n(z) \in U, \forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $\{f^n(z)\}$  é uma  $\alpha$ -pseudo órbita e logo é sombreada por  $y \in \Lambda$ . Por unicidade,  $z = y \in \Lambda$ .  $\square$

**Corolário 5.1.3.** *Se  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico maximal então*

$$\overline{Per(f|_\Lambda)} = \Omega(f|_\Lambda)$$

---

<sup>3</sup>Nota de rodapé do item 3 do lema de sombreamento

*Demonstração.* Já vimos que  $\overline{Per(f|_\Lambda)} \subset \Omega(f|_\Lambda)$ . Para a recíproca usaremos o lema de sombreamento para conjuntos maximais. Seja  $x \in \Omega(f|_\Lambda)$  e considere a bola de raio  $\epsilon > 0$  e centro  $x$ ,  $U_\epsilon = B(x, \epsilon)$ , como  $x$  é não errante existe algum  $z \in U_\epsilon \cap f^n$  para alguma iterada  $n \in \mathbb{N}$ , logo  $\{\dots, x, z, f(z), \dots, f^n(z), x, \dots\}$  é uma  $\epsilon$ -pseudo órbita periódica. Se ela é  $\delta$ -sombreada por um  $w$ , temos que  $w \in \Lambda \cap B(x, \delta)$ , logo  $x \in \overline{Per(f|_\Lambda)}$   $\square$

Uma outra consequência importante do lema de sombreamento consiste no fato de que toda transversalidade homoclínica é acumulada por pontos periódicos.

**Definição 5.1.4.** *Sejam  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $p$  um ponto fixo (ou periódico) hiperbólico. Um ponto  $q \neq p$  é chamado homoclínico em relação a  $p$  se  $q = W^s(p) \cap W^u(p)$ . O ponto  $q$  será dito homoclínico transversal se em  $q$  a interseção for transversal.*

**Corolário 5.1.5.** *Se  $q$  é um ponto homoclínico transversal então  $q \in \overline{Per(f)}$ .*

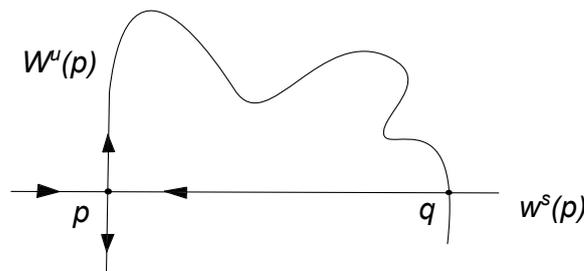


Figura 5.4: Ponto homoclínico transversal

*Demonstração.* Seja  $q \in W^s(p) \pitchfork W^u(p)$  ponto de interseção transversal, podemos supor  $p$  fixo, então  $\hat{\Lambda} = \{p\} \cup O(q)$  é hiperbólico. Para  $k$  suficientemente grande, podemos tomar uma  $\epsilon$ -pseudo órbita  $\{p, f^{-k}(q), \dots, q, \dots, f^k(q), p\}$  para todo  $\epsilon > 0$ , logo o ponto que sombreia é periódico e pode ser tomado arbitrariamente próximo de  $q$ , além disso, por expansividade, é único.  $\square$

Encerraremos o capítulo com um resultado sobre estabilidade, sua demonstração é consequência do lema de sombreamento e pode ser encontrada em [18].

**Corolário 5.1.6 (Estabilidade do conjunto hiperbólico maximal).** *Seja  $\Lambda_f$  hiperbólico maximal para  $f : M \rightarrow M$ . Então existe uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\Lambda_f$  e  $\mathcal{V}_f$  de  $f$  na topologia  $C^1$  tal que  $\Lambda_g = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(\bar{U})$  é conjugada a  $\Lambda_f$  para toda  $g \in \mathcal{V}_f$ .*

# Capítulo 6

## Teorema da $\Omega$ -Estabilidade

Neste último capítulo apresentamos uma análise mais descritiva do comportamento das órbitas de um sistema dinâmico hiperbólico. Iniciamos com o teorema da decomposição espectral e como resultado principal, demonstramos o teorema da  $\Omega$ -estabilidade.

### 6.1 Decomposição Espectral

O teorema da decomposição espectral estabelece que se o conjunto limite  $L(f)$  de um difeomorfismo é hiperbólico então este conjunto se decompõe em peças invariantes com estrutura de produto local e a dinâmica nestas peças é transitiva. A demonstração deste resultado é consequência do teorema que segue.

**Teorema 6.1.1.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  definido em uma variedade compacta  $M$ . Se o fecho do conjunto dos pontos periódicos  $\overline{Per(f)}$  é hiperbólico então existe uma decomposição*

$$\overline{Per(f)} = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_m$$

*em conjuntos  $\Lambda_i$  hiperbólicos, com estrutura de produto local, dois a dois disjuntos e a restrição de  $f$  a cada  $\Lambda_i$  é transitiva.*

Observe que a questão central da prova consiste em construir uma partição adequada do conjunto  $\overline{Per(f)}$ . Como classes de equivalência geram uma partição do conjunto, esse problema é resolvido se construirmos uma boa relação de equivalência em  $Per(f)$ , isto é, precisamos de uma relação de equivalência cujas classes sejam fechadas, hiperbólicas, com EPL e transitivas.

Construiremos uma tal classe da seguinte forma: denotando por  $\pitchfork$  uma interseção transversal, dados  $p, q \in \text{Per}(f)$  dizemos que  $p$  e  $q$  estão relacionados ( $p \sim q$ ) quando

$$W^s(O(p)) \pitchfork W^u(O(q)) \text{ e } W^s(O(q)) \pitchfork W^u(O(p)).$$

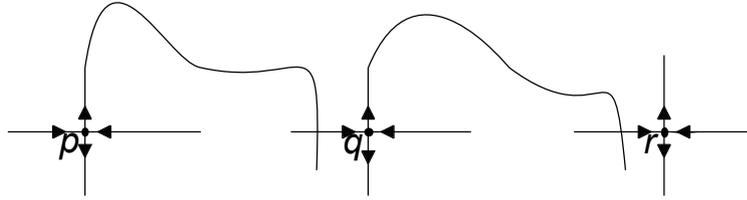


Figura 6.1: Construção da relação de equivalência

Devido ao  $\lambda$ -Lema, não é difícil ver que temos uma relação de equivalência. Denote por  $H(p)$  o fecho da classe de equivalência de  $p$ . Vamos a prova do teorema.

*Demonstração.* Considere  $H(p)$  definido acima. Provaremos que  $H(p)$  satisfaz todas as propriedades listadas aos  $\Lambda_i$ , daí tomaremos os  $\Lambda_i$  como sendo os  $H(p)$ .

Como estamos considerando  $H(p)$  como sendo o fecho da classe de equivalência de  $p \in \text{Per}(f)$ , precisamos provar que são duas a duas disjuntas.

Considere então  $p, q \in \text{Per}(f)$ , como  $H(p) \neq H(q)$  se existe  $x \in H(p) \cap H(q)$  então tomando-se pontos periódicos  $p_1 \in H(p)$  e  $q_1 \in H(q)$  suficientemente próximos de  $x$ , pela continuidade da variedade estável, as variedades estáveis e instáveis de  $p_1, q_1$  se intersectam transversalmente, logo  $p_1 \sim q_1$  e portanto  $H(p) = H(q)$ . Absurdo!

Como estamos querendo tomar os  $\Lambda_i$  como sendo conjuntos da forma  $H(p)$ , devemos provar que existem finitos  $H(p)$ . Sabemos que  $\overline{\text{Per}(f)}$  é compacto hiperbólico, assim, existe  $\epsilon > 0$ , tal que se dois pontos de  $\overline{\text{Per}(f)}$  estão  $\epsilon$ -distantes, suas variedades estáveis e instáveis têm pontos de interseção transversal. Definimos

$$V_p = \{x \in M : d(x, H(p)) < \epsilon/3\}$$

Note que, se  $H(p) \neq H(q)$  e  $x \in V_p \cap V_q$ , então existem  $P_1 \in H(p)$  e  $q_1 \in H(q)$  periódicos com  $d(p_1, x) + d(x, q_1) < \epsilon/3 + \epsilon/3 \Rightarrow d(p_1, q_1) < \epsilon$  e portanto  $p_1 \sim q_1$ , ou seja  $H(p) = H(q)$ , contrariando a hipótese, logo  $V_p \cap V_q = \emptyset$ .

Como  $\overline{\text{Per}(f)} \subset \bigcup_{p \in \text{Per}(f)} V_p$ , por compacidade, existem finitos  $H(p)$ .

Provaremos agora que  $H(p)$  tem E.P.L.

Na verdade provaremos um resultado mais geral, a saber: se  $z \in W^s(x) \pitchfork W^u(y)$  e  $w \in W^s(y) \pitchfork W^u(x)$ , com  $x, y \in H(p)$ , então  $z, w \in H(p)$ . Como  $H(p)$  é fechado e as variedades estáveis e instáveis são contínuas, podemos nos restringir ao caso em que  $x, y$  são periódicos.

Para esse fato precisamos mostrar que  $z, w$  são aproximados por pontos periódicos em  $H(p)$ .

Usando o mesmo argumento do colorário 5.1.5. definido o conjunto hiperbólico

$$\Lambda = \{p, q\} \cup O(z) \cup O(w)$$

Teremos, pelo lema de sombreamento, uma órbita periódica perto e como podemos tomar tão próximo quanto queremos, por continuidade da variedade estável e instável, essa órbita deve estar na mesma classe de  $x$  e  $y$ , assim podemos aproximar  $z, w$  como queríamos.

Por fim, provaremos que os  $H(p)$  são transitivos.

Para isso considere dois abertos  $U, V \subset H(p)$  e sejam  $p \in U$  e  $q \in V$  periódicos em  $H(p)$ . Usando o mesmo argumento acima e o lema de sombreamento concluimos que a interseção transversal das variedades estáveis e instáveis de um ponto periódico em relação a outro está em  $H(p)$ . Assim, se  $z$  é um tal ponto, então  $z \in H(p)$ , tomando se  $n$  suficientemente grande teremos  $f^n(z) \in U$  e  $f^{-n}(z) \in V$ , donde concluimos que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  e portanto os  $H(p)$  são transitivos. Isso completa a prova do teorema.  $\square$

Observe que pelo Teorema 5.1.1 o conjunto limite  $L(f)$  coincide com o fecho do conjunto dos pontos periódicos  $\overline{Per(f)}$ , quando  $L(f)$  é hiperbólico. Logo, como consequência do teorema que acabamos de provar, temos que o conjunto limite  $L(f)$  se decompõe em conjuntos hiperbólicos transitivos com E.P.L.; esta propriedade é conhecida como decomposição espectral de um conjunto hiperbólico.

**Teorema 6.1.2 (Decomposição Espectral).** *Se o conjunto  $L(f)$  é hiperbólico então existe uma decomposição*

$$L(f) = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_m$$

*em conjuntos  $\Lambda_i$  hiperbólicos, com estrutura de produto local, dois a dois disjuntos e a restrição de  $f$  a cada  $\Lambda_i$  é transitiva.*

Os conjuntos  $\Lambda_i$  da decomposição espectral são chamados de peças básicas do conjunto hiperbólico.

**Definição 6.1.3.** *Sejam  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo tal que seu conjunto limite  $L(f)$  é hiperbólico e  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$  as peças básicas da sua decomposição espectral. Definimos a relação de ordem parcial*

$$\Lambda_i \ll \Lambda_j \Leftrightarrow W^u(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_j) \neq \emptyset$$

*Dizemos que  $f$  tem um  $r$ -ciclo se*

$$\Lambda_{i_1} \ll \dots \ll \Lambda_{i_r} = \Lambda_{i_1}$$

O teorema da próxima seção mostra que quando não existem ciclos entre as peças básicas da decomposição espectral do conjunto limite então, em um certo sentido, o difeomorfismo é estável por pequenas perturbações.

## 6.2 $\Omega$ -Estabilidade

No capítulo sobre conjuntos hiperbólicos vimos a definição de estabilidade, em termos geral vimos que um difeomorfismo é estruturalmente estável na topologia  $C^r$  (ou  $C^r$ -estável), para  $r \geq 1$ , se existe uma vizinhança na topologia  $C^r$  desse difeomorfismo em que todo difeomorfismo nessa vizinhança é conjugado a ele. Veremos agora uma noção mais fraca de estabilidade: a  $\Omega$ -estabilidade.

**Definição 6.2.1.** *Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  é  $\Omega$ -estável na topologia  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , se existe uma vizinhança  $U_f$  de  $f$  nesta topologia tal que para todo elemento  $g \in U_f$  existe uma conjugação topológica entre os conjuntos não-errantes de  $f$  e  $g$ : existe homeomorfismo  $h : \Omega(f) \rightarrow \Omega(g)$  tal que  $h \circ f|_{\Omega(f)} = g|_{\Omega(g)} \circ h$ .*

O teorema que vamos provar agora estabelece a  $\Omega$ -estabilidade para difeomorfismos Axioma A e sem ciclo.

**Teorema 6.2.2 ( $\Omega$ -estabilidade).** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo Axioma A e sem ciclo. Então  $f$  é  $\Omega$ -estável*

*Demonstração.* Sejam  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  as peças básicas da decomposição espectral do conjunto limite. Provaremos a  $\Omega$ -estabilidade a partir da estabilidade local das peças básicas.

Para cada  $i = 1, \dots, k$  consideremos as vizinhanças  $U_i$  de  $\Lambda_i$ , disjuntas duas a duas, satisfazendo  $f(U_i) \cap U_j = \emptyset$  quando  $i \neq j$ .

Afirmamos que existe vizinhança  $\mathcal{V}_f$  de  $f$  tal que se  $g \in \mathcal{V}_f$  então

$$\Omega(g) \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$$

e além disso

$$\Omega(g) \cap U_i \subset \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(U_i).$$

A ideia é que se isso não acontecer então existem difeomorfismos  $g_n$  próximos a  $f$  que sombreiam a dinâmica de  $f$  e por isso fazem  $f$  possuir um ciclo.

Por absurdo, suponha que uma tal vizinhança  $\mathcal{V}_f$  não exista, logo podemos exibir uma sequência  $g_n \rightarrow f$  e uma sequência  $x_n \in \Omega(g_n)$  com  $x_n \notin \cup_i U_i$ . Como cada  $x_n \in \Omega(g_n)$  então existem  $y_m^n \xrightarrow{m} x_n$  e  $l_m^n \xrightarrow{m} \infty$  tais que  $g_n^{l_m^n}(y_m^n) \rightarrow x_n$  quando  $m \rightarrow \infty$ .

Considere  $z_1$  um ponto de acumulação da sequência  $(x_n)$ . Para não carregar ainda mais a notação, vamos continuar indexando por  $n$ , isto é,  $z_1$  é tal que  $x_n \rightarrow z_1$ . Note que  $z_1 \notin \cup_i U_i$  pois  $x_n \notin \cup_i U_i$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Considere agora  $i_1, i_2$  tais que  $\alpha(z_1, f) \subset \Lambda_{i_1}$  e  $\omega(z_1, f) \subset \Lambda_{i_2}$ . Em particular  $z_1 \in W^u(\Lambda_{i_1})$  e  $z_1 \in W^s(\Lambda_{i_2})$  e portanto temos que  $W^u(\Lambda_{i_1}) \cap W^s(\Lambda_{i_2}) \neq \emptyset$ , isto é,

$$\Lambda_{i_1} \ll \Lambda_{i_2}.$$

Sendo  $z_1$  um ponto da variedade estável  $W^s(\Lambda_{i_2})$  da peça básica  $\Lambda_{i_2}$  podemos tomar  $k_1$  tal que  $f^k(z_1) \in U_{i_2}, \forall k \geq k_1$ . Como

$$g_n \rightarrow f, x_n \rightarrow z_1 \text{ e } y_m^n \xrightarrow{m} x_n$$

concluimos que, para  $n$  e  $m$  suficientemente grandes  $g_n^{k_1}(y_m^n) \in U_{i_2}$ . Fixemos

$$l_1^n(m) = \min\{j \geq k_1 : g_n^j(y_m^n) \notin U_{i_2}\}.$$

Observe que tal  $l_1^n(m)$  existe porque  $g_n^{l_1^n(m)}(y_m^n) \rightarrow x_n$  e  $x_n \notin U_{i_2}$ . Observe também que  $l_1^n(m) \leq l_m^n$ .

Por outro lado  $l_1^n(m) - k_1 \rightarrow \infty$ , caso contrário não seria verdade que  $f^k(z_1) \in U_{i_2}$  para  $k \geq k_1$ . Seja  $x_n^2$  ponto de acumulação da sequência  $(g_n^{l_1^n(m)}(y_m^n))$  e  $z_2$  ponto de acumulação de  $(x_n^2)$ . Temos que  $f^{-j}(z_2) \in U_{i_2}$  para todo  $j \geq 0$ , pois  $l_1^n(m) - k_1 \rightarrow \infty$ . Daí,  $\alpha(z_2, f) \in \Lambda_{i_2}$  e portanto  $z_2 \in W^u(\Lambda_{i_2})$ . Note que  $z_1 \notin O^+(z_2)$  caso contrário teríamos  $\Lambda_{i_2} \ll \Lambda_{i_2}$  o que é absurdo uma vez que, por hipótese, não existe ciclo. Assim existe  $i_3$  tal que  $\omega(z_2) \subset \Lambda_{i_3}$  e portanto

$$\Lambda_{i_1} \ll \Lambda_{i_2} \ll \Lambda_{i_3}.$$

Deste modo, existe  $k_2$  tal que  $f^k(z_2) \in U_{i_3}$  para  $k \geq k_2$ . Como  $z_1 \notin O^+(z_2)$  temos para  $n$  e  $m$  suficientemente grandes  $l_1^n(m) + k_2 < l_m^n$ .

Procedendo da mesma forma que antes, fixemos  $l_2^n(m)$  e  $x_n^3$  ponto de acumulação de  $(g_n^{l_1^n(m)+l_2^n(m)}(y_m^n))$  e  $z_n^3$  ponto de acumulação de  $(x_n^3)$ . Dessa forma, indutivamente, construiremos uma sequência  $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$  tal que

$$\Lambda_{i_1} \ll \dots \ll \Lambda_{i_n} \ll \dots$$

Como existe uma quantidade finita de peças básicas, este processo acabará formando um ciclo, absurdo! Isto demonstra que existe uma vizinhança  $\mathcal{V}_f$  de  $f$  tal que se  $g \in \mathcal{V}_f$  então

$$\Omega(g) \subset U_1 \cup \dots \cup U_k.$$

Uma vez que podemos diminuir  $\mathcal{V}_f$  de modo que  $g(U_i) \cap U_j = \emptyset$  para todo  $g \in \mathcal{V}_f$ , concluimos que se  $x \in \Omega(g) \cap U_i$  então  $g^n(x) \in U_i$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Vamos agora a prova da estabilidade local. Provaremos que se definirmos

$$\Lambda_i(g) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n(U_i)$$

então existe  $h_i : \Lambda_i(g) \rightarrow \Lambda_i(f)$  tal que  $f \circ h_i = h_i \circ g$ .

Para tanto, assumiremos que para cada  $i = 1, \dots, k$  as vizinhanças  $U_i$  e também  $\mathcal{V}_f$  são pequenas o suficiente para satisfazerem:

1. Existe uma constante  $\gamma > 0$  tal que a restrição  $g|_{\Lambda_i(g)}$  tem constante de expansividade  $\gamma$  para toda  $g \in \mathcal{V}_f$ ;
2. Considerando  $\alpha > 0$  tal que toda  $\alpha$ -pseudo órbita em  $\Lambda_i(f)$  para  $f$  é  $\gamma/4$  sombreada por uma órbita em  $\Lambda_i$ , exigimos então:
  - (a) Existe  $\delta < \min\{\alpha/3, \gamma/4\}$  tal que se  $x, y$  são tais que  $d(x, y) < \delta$  então  $d(g(x), g(y)) < \alpha/3$  para toda  $g \in \mathcal{V}_f$ ;
  - (b)  $\Lambda_i(g) \subset \{y \in M : d(y, \Lambda_i(f)) < \delta\}$ ;
  - (c)  $d(g(x), f(x)) < \alpha/3$  para todo  $x \in M$  e toda  $g \in \mathcal{V}_f$ .

Dados  $x \in \Lambda_i(g)$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , considere  $x_n \in \Lambda_i(f)$  tal que  $d(x_n, g^n(x)) < \delta$ . Deste modo,  $(x_n)$  é uma  $\alpha$ -pseudo órbita para  $f$  pois

$$\begin{aligned} d(f(x_n), x_{n+1}) &\leq d(f(x_n), g(x_n)) + d(g(x_n), g(g^n(x))) + d(g^{n+1}(x), x_{n+1}) \\ &< \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3}. \end{aligned}$$

Pelo lema de sombreamento, existe  $y \in \Lambda_i(f)$  tal que  $d(f^n(y), x_n) < \gamma/4$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Concluimos então que dado  $x \in \Lambda_i(g)$  é possível encontrar  $y \in \Lambda_i(f)$  tal que

$$d(f^n(y), g^n(x)) \leq d(f^n(y), x_n) + d(x_n, g^n(x)) \leq \frac{\gamma}{4} + \delta \leq \frac{\gamma}{2}.$$

Observe que  $y$  é único, pois  $\gamma$  é constante de expansividade em  $\Lambda_i$ . Portanto, para cada  $i = 1, \dots, k$  está bem definida a aplicação  $h_i : \Lambda_i(g) \rightarrow \Lambda_i(f)$  por  $h(x) = y$ , ou seja,  $h(x)$  é o único ponto que satisfaz

$$d(f^n(h_i(x)), g^n(x)) \leq \frac{\gamma}{2} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Segue da definição de  $h_i$  que  $f \circ h_i = h_i \circ g$ . Além disso cada  $h_i$  é contínua e injetiva, pois  $\gamma$  também é constante de expansividade de  $g$  em  $\Lambda_i(g)$ .

Verificaremos agora que  $h_i$  é sobrejetiva. A estratégia será mostrar que  $h_i$  é sobrejetiva no conjunto dos pontos periódicos de  $f|_{\Lambda_i(f)}$ , isto é, mostraremos a inclusão

$$Per(f|_{\Lambda_i(f)}) \subset h_i(\Lambda_i(g))$$

daí, sendo  $Per(f |_{\Lambda_i(f)})$  denso em  $\Lambda_i(f)$  e  $\Lambda_i(g)$  um conjunto compacto, concluiremos a sobrejetividade de cada  $h_i$ .

Podemos supor que a vizinhança  $\mathcal{V}_f$  é conexa. Dada  $g \in \mathcal{V}_f$  considere um arco contínuo  $g_t \in \mathcal{V}_f$  com  $t \in [0, 1]$  satisfazendo  $g_0 = f$  e  $g_1 = g$ . Seja  $p_0$  um ponto periódico de período  $k$  de  $f$ . Como  $p_0$  é hiperbólico, existe  $s > 0$  e uma única função contínua  $p : [0, s] \rightarrow M$  tal que  $p(t)$  é um ponto periódico de  $g_t$  para todo  $t \in [0, s]$  e  $p(0) = p_0$ . Afirmamos que é possível estender  $p_t$  de maneira única a todo intervalo  $[0, 1]$ . De fato, considere

$$s_0 = \sup_{s \in [0, 1]} \{ \exists p : [0, s] \rightarrow M \text{ contínua, } g_t(p(t)) = p(t) \text{ e } p(0) = p_0 \}.$$

Suponha que  $s_0 < 1$ . Denote por  $p(s_0)$  o ponto limite de  $p(t)$  quando  $t \rightarrow s_0$ . Note que  $p(s_0)$  é um ponto periódico de  $g_{s_0}$  de período menor ou igual a  $k$ . Além disso, como  $O(p(s_0)) \subset U_i$  concluímos que  $p(s_0)$  é hiperbólico. Assim, para todo  $t$  perto de  $s_0$  existe um único ponto periódico  $p(t)$  de período igual ao de  $p(s_0)$  em uma vizinhança de  $p(s_0)$ . Então o período é  $k$  e podemos estender  $p$  a uma vizinhança de  $s_0$ . Isso contradiz o fato de  $s_0$  ser o supremo, e portanto a afirmação é verdadeira.

Considere agora  $p_0$  e  $q_0$  pontos periódicos distintos de  $f$ . Utilizando o mesmo argumento temos que  $p(t) \neq q(t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Deste modo, concluímos que o número de pontos periódicos de período  $k$  de  $g$  em  $\Lambda_i(g)$  é igual ao de  $f$  em  $\Lambda_i(f)$ . Como  $h_i$  é injetiva e manda pontos periódicos de período  $k$  em pontos periódicos de período  $k$ , temos a inclusão

$$Per(f |_{\Lambda_i(f)}) \subset h_i(\Lambda_i(g)).$$

Como comentamos anteriormente, esta inclusão é suficiente para concluir a sobrejetividade de cada  $h_i$ . Uma vez que já provamos a injetividade e a continuidade concluímos então que  $h_i$  é um homeomorfismo.

Para concluir a prova do teorema, basta definir  $h : \Omega(g) \rightarrow \Omega(f)$  por  $h(x) = h_i(x)$  se  $x \in \Lambda_i(g)$ . A aplicação  $h$  nos dá a  $\Omega$ -estabilidade.  $\square$

No teorema acima é essencial que a dinâmica não tenha ciclos, caso contrário não teremos a  $\Omega$ -estabilidade, como podemos ver no exemplo abaixo.

**Exemplo 6.2.3 (Axioma A com ciclo não é  $\Omega$ -estável).** *Considere a dinâmica  $f$  abaixo conhecida como coração de Palis, onde  $p$  e  $q$  são selas hiperbólicas.*

*Note que  $p \ll q \ll p$ , ou seja,  $f$  tem um 2-ciclo. Tomemos uma perturbação  $g$  de  $f$  em uma vizinhança de  $x \in W^u(q) \cap W^s(p)$  criando uma tangência homoclínica.*

*Aplicando o  $\lambda$ -lema a uma vizinhança de  $x$  contendo a seção transversal criada pela perturbação  $g$ , vemos que todos os pontos dessa seção pertencem a  $\Omega(g)$ , ou seja*

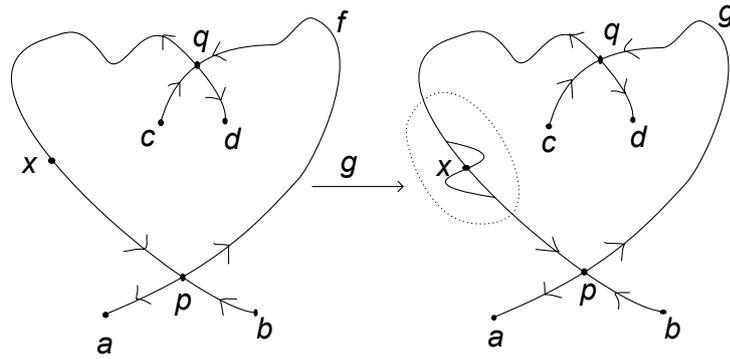


Figura 6.2: Coração de Palis

$\Omega(g)$  é infinito, como  $\Omega(f)$  é finito, concluímos que  $f$  não é  $\Omega$ -estável. Mas ainda,  $g$  não é Axioma A, pois em  $x$  não temos a decomposição em  $E^s, E^u$ .

No início desta seção dissemos que a  $\Omega$ -estabilidade é uma noção mais fraca de estabilidade do que a estabilidade estrutural, vamos finalizar este trabalho exibindo um exemplo que deixa claro essa afirmativa.

**Exemplo 6.2.4** ( $\Omega$ -estável não estruturalmente estável). Tome a dinâmica a seguinte dinâmica no toro:

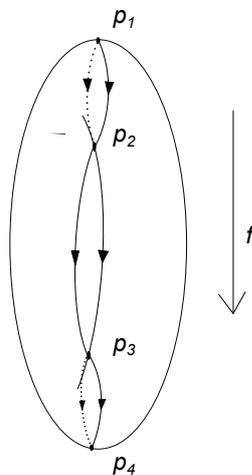


Figura 6.3: Dinâmica  $\Omega$ -estável não estruturalmente estável

Onde  $p_1$  é repulsor,  $p_3$  e  $p_4$  são selas e  $p_2$  é atrator, todos hiperbólicos. Então  $\overline{Per(f)} = \Omega(f) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  é um conjunto hiperbólico e, portanto, Axioma A. Note que a dinâmica não tem ciclos, logo é  $\Omega$ -estável.

Por outro lado, como  $W^s(p_2) = W^u(p_3) = I$ ,  $I$  intervalo, não temos a condição de transversalidade forte, o que implica que a dinâmica não é estruturalmente estável.

Poderíamos ainda tomar uma perturbação  $g$  de  $f$  com tangência entre  $W_g^u(p_2)$  e

$W_g^s(p_3)$ , donde segue que  $W_g^u(p_2) \cap W_g^s(p_3)$  é um conjunto enumerável e  $W_f^u(p_2) \cap W_f^s(p_3)$  é um intervalo, logo  $f$  e  $g$  não são conjugadas.

# Referência Bibliográfica

- [1] BRIN, M.; STUCK, G. *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, (2002).
- [2] CASTRO, A.; *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*. Notas, (2009).
- [3] FRANKS, J.; *Necessary conditions for stability of a diffeomorphisms*. Transaction of the American Mathematical Society, 158 (1971)
- [4] GROBMAN, D.; *Homeomorphisms of systems of differential equations*. Doklady Akademii Nauk SSSR, 128 (1959).
- [5] HARTMAN, P.; *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*. Proc. A.M.S. 11 (1960).
- [6] HIRSCH, M.; PUGH, C.; SHUB, M. *Invariant Manifolds*. Springer Lecture Notes in Math, 583 (1977).
- [7] KUPKA, I.; *Contribution à la theorie des champs generiques*. Contributions to Differential Equations, 2 (1963).
- [8] LANG, S. *Analysis I*. Addison-Wesley Publ Co., New York Reading, MA, (1968).
- [9] MÃNÉ, R. ;A proof of the  $C^1$  stability conjecture. *Publications mathématiques de L'I.H.É.S.*, tome 66(1987), 161-210.
- [10] PALIS, J.; DE MELO, W. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An introduction*. Springer, Berlin, (1982).
- [11] PALIS, J. e SMALE, S.; *Structural stability theorems*. Proc. A.M. S. Symp Pure Math, 14 (1970).
- [12] PEIXOTO, M., *Structural stability on two-dimensional manifolds*. Topology, 1 (1962).

- [13] PUGH, C.; An improved closing lemma and a general density theorem. *Amer. J. Math*, 89 (1967).
- [14] ROBBIN, J. ; A structural stability theorem. *Annals of Math*, 94(1971), 447-493.
- [15] ROBINSON, C. ; Structural stability of  $C^1$  diffeomorphisms. *Journal of Diff., Eq.* 22(1976), 28-73.
- [16] ROBINSON, C. ;  $C^r$  structural stability implies Kupka-Smale. *Dynamical Systems.*, Salvador, 1971, Academic Press 1973, 443-449
- [17] SAMBARINO, M. *Hiperbolicidad y estabilidad*. XXII Escuela Venezolana de Matemáticas, (2009).
- [18] SHUB, M. *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer, Berlin, (1987).
- [19] SMALE, S. Diffeomorphisms with many periodic points. *Differential and Combinatorial Topology, a Symposium in Honor of M. Morse*. Princeton, N. J., (1965), 63-80.
- [20] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, (1995).