



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CONFIGURAÇÕES CENTRAIS E CONJECTURA DE SAARI

CAIO RENAN DAMASCENA SAMPAIO

São Luís - MA
2018

SOLUÇÕES HOMOGRAFICAS E CONJECTURA DE SAARI

CAIO RENAN DAMASCENA SAMPAIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adecarlos Carvalho.

São Luís - MA

2018

CONFIGURAÇÕES CENTRAIS E CONJECTURA DE SAARI

CAIO RENAN DAMASCENA SAMPAIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovado em 27 de fevereiro de 2018.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Adecarlos Carvalho (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof^a. Dr^a. Vanessa Ribeiro Ramos (Examinadora Interno)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Hildeberto Eulálio Cabral (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

*A minha mãe, Pai, irmão,
namorada, amigos e profes-
sores pela paciência e incen-
tivo.*

“Não importa o que fizeram com você. O que importa é o que você faz com aquilo que fizeram com você.”

(Jean Paul Sartre)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo. Ao meu pai Raimundo Nonato Sampaio e minha Mãe, Ana Cláudia Damascena Sampaio, pelo apoio incondicional. Ao meu irmão, Ruan Thales de Jesus Damascena Sampaio, pela amizade. Ao meu orientador, professor Adecarlos Carvalho, pela paciência, disponibilidade, confiança e conselhos. Além do suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

Agradeço a todos os professores do PPGMAT, em especial aos professores Adecarlos Carvalho, Renata Carvalho e Ivaldo Nunes que me acolheram com enorme carinho para estudar na UFMA e dividiram um pouco dos seus conhecimentos que foram fundamentais para o meu crescimento profissional e pessoal.

Aos amigos do PPGMAT, dos quais destaco Alan Kardec, Francisco José (Dedé), Felipe Ferreira, Jadevilson e Jadevaldo Cruz, Leomar Veras, Marlon Cesar, Ronaldo Ferreira e Washington Menezes, João Coelho, pelos momentos de descontrações, incentivos e pelas conversas sobre Matemática.

Finalmente, agradeço a CAPES, pelo auxílio financeiro que permitiu desenvolver este trabalho.

Resumo

Neste trabalho, dissertamos sobre soluções homográficas, configurações centrais e sobre a conjectura de Saari, tendo como foco o artigo “Saari’s conjecture of N-body problem in the colinear case” devido Diacu, Pérez-Chavela e Santoprete [7]. Nesse artigo, consideram o problema colinear de n corpos regido por um potencial que depende apenas das distâncias mútuas. Nessas condições, eles conseguem verificar a veracidade da conjectura de Saari e mostrar que apenas as soluções colineares momento angular não nulo, regido por um potencial de grau de homogeneidade $\alpha \neq -2$, são homográficas e balanceadas.

Palavras-chave: Solução homográfica; Configuração central; Conjectura de Saari.

Abstract

In this work, we discuss homographic solutions, central configurations and the Saari conjecture, focusing on the article “Saari’s conjecture of N-body problem in the colinear case” due to Diacu, Pérez-Chavela and Santoprete [7]. In this paper consider the collinear problem of n bodies governed by a potential that depends only on mutual distances. Under these conditions, they can verify the veracity to Saari’s conjecture by showing that only the non-zero angular momentum colinear solutions governed by a potential homogeneity $\alpha \neq -2$ are homogenous and balanced.

Keywords: Homographic solution; Central configuration; Saari’s conjecture.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 O Problema de n Corpos	4
1.2 Integrais Primeiras para o Problema de n Corpos	7
1.3 Distâncias Mútuas	9
1.4 Sistemas Hamiltonianos	10
2 Soluções Homográficas	24
2.1 Soluções Particulares	30
2.2 Teorema de Lagrange-Pizzetti	34
3 Configurações Centrais	37
3.1 Localização de Partículas numa Configuração Central	41
3.2 Configurações Centrais Colineares	48
3.3 Finitude de Configurações Centrais	48
3.4 Exemplo de Configurações Centrais	50
3.5 Configurações Centrais e Equilíbrios Relativos	51
4 Conjectura de Saari	54
4.1 Resultados sobre o problema de n corpos em \mathbb{R}^{dn}	55
4.2 Caso Colinear da Conjectura de Saari	57
4.3 Conjectura Homográfica de Saari	61
Referências	64

Introdução

Os astros celestes, como planetas, estrelas, cometas e satélites naturais, cativam o ser humano desde os primórdios da história. Apesar de existirem muitos registros antigos descrevendo o movimento dos corpos celestes, as primeiras evidências de uma teoria aceitável sobre esses fenômenos surgiu em 1687, ver [21], quando Newton apresentou o seu tratado sobre a força gravitacional e as leis do movimento, no qual ele conseguiu descrever o movimento de dois corpos influenciados somente pela força gravitacional. Essas descobertas deram início ao que hoje conhecemos como Mecânica Celeste.

Em busca de estender os resultados obtidos por Newton para uma quantidade maior de corpos, Poincaré percebeu que não era possível encontrar uma solução analítica para o problema de 3 corpos utilizando as equações obtidas por Newton. Entretanto, no século XVIII, Euler, estudando o sistema formado por Lua, Sol e Terra, conseguiu mostrar a existência de soluções onde três corpos permanecem alinhados para cada instante e cada um desses corpos descreve trajetórias elípticas, ver [9]. Após cinco anos, Lagrange, obteve as mesmas soluções encontradas por Euler e descobriu a existência de soluções particulares para o problema formado por três corpos, onde esses corpos configuram um triângulo equilátero em cada instante, ver [11].

O questionamento que surge é sobre a existência de soluções para o problema formado por n corpos e, até os dias atuais, a resposta para o caso geral é negativa, mas, tomando restrições sobre o movimento dos corpos, é possível mostrar a existência de solução para esse problema. Uma dessas restrições é parte do objetivo desse trabalho, essas soluções são conhecidas na literatura por “soluções homográficas”, ver [26], essa solução tem por característica reduzir as distâncias mútuas entre os corpos a um valor constante, o que, como veremos, equivale a garantir a preservação das configurações iniciais por meio de rotações e translações. Em particular para $n = 3$, tanto a solução de Lagrange quanto a de Euler são homográficas [26]. Para soluções desse tipo, a aceleração de cada corpo é proporcional à posição, essas configurações passaram a ser muito importantes devido as suas relações com soluções homográficas e passaram a ser chamadas de “configurações centrais”. Esse tipo de configuração também possibilita entender mudanças na topologia dos conjuntos de nível de energia e no momento angular do problema de n corpos.

Mesmo com a importância das configurações centrais para soluções homográficas, pouco se sabe sobre esse problema para n qualquer. Um problema ainda sem solução completa é sobre a finitude de classes de configurações centrais, o qual está presente na lista de Smale sobre problemas matemáticos para o século *XXI*, ver [25], e foi sugerido por Wintner como uma conjectura, enunciada da forma:

Conjectura 0.1. *Para n massas positivas, o número de configurações centrais planares não equivalentes (módulo rotações, translações e dilatações) é finito.*

Para n qualquer ainda não se tem uma resposta completa, exceto para o caso colinear, em que Moulton, ver [19], provou que o número de configurações é finito, e mais precisamente são $\frac{n!}{2}$ classes de configurações, uma para cada ordenação das massas. Para o caso planar, dado n massas iguais, é possível garantir que esses corpos localizados nos vértices de um n -ágono regular formam uma configuração central, permitindo generalizar o que Lagrange obteve para $n = 3$.

Apesar do problema de n corpos possuir mais interpretações físicas quando cada corpo está em um espaço de dimensão 2 ou 3, do ponto de vista matemático, surge a necessidade de generalizar o problema para dimensões maiores, assim o problema de n corpos passa a ser estudado em \mathbb{R}^{dn} , onde d indica a dimensão onde cada corpo pontual está inserido, ou seja, quando $d = 2$ e $d = 3$, estamos no caso planar e espacial, respectivamente, como \mathbb{R}^{dn} é um espaço euclidiano, é natural considerar o problema com as configurações em um espaço euclidiano qualquer E . Albouy, em [1], descreve como o problema pode ser estudado nesse caso.

Voltando às soluções homográficas, um tipo de restrição muito estudada para esse tipo de solução é conhecido como equilíbrio relativo, ocorre quando consideramos que não existe dilatação ou translação na solução homográfica. Passando, assim, a ser influenciada apenas pela rotação. Dentre as aplicações desse tipo de solução, podemos citar sua relação com as configurações centrais e uma conjectura devido a Saari, quem relaciona equilíbrio relativo e o momento de inércia, ver [22]. Saari, estudando o problema de n corpos, provou em [23] que, quando a solução tem potencial constante em um intervalo de tempo finito, tanto o potencial quanto o momento de inércia também são constantes para todo tempo, notando que, quando ha solução de equilíbrio relativo, o momento de inércia é constante. Nesse sentido, Saari levantou um questionamento sobre a recíproca dessa afirmação em forma de conjectura.

Conjectura 0.2. *Toda solução do problema de n corpos com momento de inércia constante é um equilíbrio relativo.*

Em outras palavras, em um sistema com momento de inércia constante, as partículas se comportam como corpos rígidos. Com o passar do tempo, muitos esforços

têm sido feitos para entender essa conjectura, mas muitos trabalhos falharam ao tentar obter o resultado crucial. Mas, recentemente, utilizando métodos variacionais, Alain Chenciner e Richard Montgomery provaram a existência da solução “figura oito”, em [6], que foi descoberta por Christopher Moore, em 1993. Carles Simó [24] fez um estudo numérico sobre essa solução e descobriu que o momento de inércia é aproximadamente constante, mas não é um equilíbrio relativo. Isso tem motivado várias pesquisas na direção de tentar mostrar a veracidade da conjectura em casos particulares.

Nessa dissertação, mostraremos com base no artigo [7] devido a Diacu, Pérez-Chavela e Santopreti, que para o caso colinear de n corpos com momento angular não nulo a conjectura é verdadeira.

No primeiro capítulo desse trabalho, procuramos apresentar as principais definições e resultados que permitem a compreensão dos próximos capítulos, dessa forma, fazendo papel de capítulo preliminar. No capítulo 2 baseados em Livro do Wintner [26], apresentamos os principais resultados sobre soluções homográficas e sobre suas soluções particulares, encerrando o capítulo com o teorema de Lagrange-Pizzetti. No terceiro capítulo, definimos o que são configurações centrais e suas principais relações com as soluções homográficas, em seguida, falamos sobre a conjectura de finitude e localização de partículas, sendo esse capítulo baseado em [26] e [13]. Por fim, no capítulo 4, falamos sobre a conjectura de Saari, mais precisamente o caso colinear presente no artigo [7], mas, antes, definimos alguns itens importantes e citamos alguns resultados presentes em [1], [4] e [5], servindo de preliminar para o artigo. Concluímos o capítulo falando sobre a extensão da conjectura de Saari, e comentamos sobre sua veracidade no caso colinear de n corpos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos definições e noções básicas sobre Mecânica Celeste, bem como alguns teoremas e proposições que auxiliam como pré-requisitos para a compreensão dos capítulos subsequentes. Todos esses resultados podem ser encontrados no livro do Wintner [26].

1.1 O Problema de n Corpos

O problema de n corpos preocupa-se em estudar a dinâmica de n partículas com massa $m_i > 0$, posições $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^d$ com $i = 1, \dots, n$ e $d = 1, 2, 3$, movendo-se de acordo com as leis de Newton:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i \neq j} G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (1.1)$$

durante todo o texto iremos considerar $G = 1$.

Seja $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \in \mathbb{R}^{dn}$, o potencial Newtoniano será dado pela expressão

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|},$$

onde U é de classe \mathcal{C}^∞ . Quando $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$, a equação (1.1) não está bem definida, o que motiva as definições abaixo:

Definição 1.1. O conjunto $\Delta = \cup \Delta_{ij}$ é chamado *conjunto pontos de colisão*, onde

$$\Delta_{ij} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{dn} / \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j\}.$$

Definição 1.2. O conjunto $X = \mathbb{R}^{dn} / \Delta$ é chamado de *espaço das configurações* para a equação (1.1). O conjunto $X = (\mathbb{R}^{dn} / \Delta) \times \mathbb{R}^{dn}$ é chamado de *espaço de fase* para a equação (1.1).

Segue da Segunda Lei de Newton que a força de atração gravitacional entre uma partícula j e uma partícula i é dado por

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}.$$

A força total sobre a partícula i é dada por

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}.$$

de outra forma

$$\mathbf{F}_i = \nabla_i U(\mathbf{r}).$$

Reformulando a equação (1.1), para $d = 3$, temos

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \nabla_i U(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_{i1}}(\mathbf{r}), \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_{i2}}(\mathbf{r}), \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_{i3}}(\mathbf{r}) \right),$$

onde ∇U simboliza o gradiente U em \mathbf{r} . Note que, devido ao grau de suavidade de $\nabla U(\mathbf{r})$, o teorema de existência e unicidade para EDO (Equação diferencial ordinária) garante que, dado uma condição inicial, o problema (1.1) admite uma única solução.

No capítulo 4, a função potencial U será considerada em um contexto mais geral, sendo escrita em função de um número real α da seguinte forma

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{\alpha} \sum_{j < i} m_i m_j |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^\alpha, \quad (1.2)$$

onde o potencial newtoniano é obtido pondo $\alpha = -1$.

Observação 1.3. Quando $\alpha = -2$, a equação modela o movimento de vórtices pontuais no plano. Nesse caso, as massas são interpretadas como vorticidades. Tal problema possui uma formulação similar ao problema de n corpos. Ver [20].

Definição 1.4. Sejam m_i e \mathbf{r}_i , respectivamente, massas e as posições dos corpos com $i = 1, \dots, n$. O vetor escalar

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i,$$

é chamado *centro de massa*, onde $\mu = \sum_{i=1}^n m_i$ é a massa total do sistema.

Lema 1.5. Ao longo de cada solução da equação (1.1), existem vetores constantes A e B dependendo apenas das condições iniciais, tais que

$$C(t) = At + B,$$

ou seja, o centro de massa desloca-se em linha reta com velocidade angular constante.

Demonstração. Ver [26]. □

Lema 1.6. *O centro de massa não depende da escolha da origem do sistema de coordenadas.*

Demonstração. Ver [26]. □

Observação 1.7. Devido aos dois lemas anteriores, vamos considerar, no restante do trabalho o centro de massa fixado na origem do sistema de coordenadas, também conhecido como referencial inercial baricêntrico. Durante esse trabalho, salvo quando houver alguma necessidade, consideraremos $C(t) = 0$ para todo t .

Definição 1.8. O *momento linear* é dado por

$$P = \sum_i m_i v_i,$$

onde $v_i(t) = \dot{\mathbf{r}}_i(t)$ é a velocidade da partícula i .

Definição 1.9. Uma solução para um problema de valor inicial tal que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$, $\forall t \in I$, é chamada *solução de equilíbrio*.

Proposição 1.10. *O problema de n corpos não admite soluções de equilíbrio.*

Demonstração. De fato, se o problema de n corpos admitisse uma solução de equilíbrio, teríamos $\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = 0$, conseqüentemente,

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = 0, i = 1, \dots, n.$$

Como a função potencial é homogênea de grau -1 , mediante o teorema de Euler para grau de homogeneidade (ver [26]), temos

$$\sum_i \mathbf{r}_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = -U.$$

Por outro lado,

$$\sum_i \mathbf{r}_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = 0,$$

então segue

$$\sum_i \mathbf{r}_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = -U = 0,$$

logo $U = 0$, mas isso não é possível pois U é o somatório de termos positivos. Dessa forma, concluímos que o problema de n corpos não admite soluções de equilíbrio. □

Observação 1.11. Apesar de o problema de n corpos não admitir soluções de equilíbrio é possível restringir as soluções a casos particulares de tal forma que algumas soluções possam ser vistas como equilíbrios. Esse tipo de solução será estudada mais adiante e será denominada de *Solução de equilíbrio Relativo*.

1.2 Integrais Primeiras para o Problema de n Corpos

Definição 1.12. Uma função diferenciável $\xi : W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *integral primeira* para o sistema

$$\dot{x} = f(x, t)$$

se ela é constante ao longo das trajetórias, ou seja, se $x(t)$ é uma solução da equação, então

$$\frac{d}{dt}\xi(x(t), t) = 0.$$

O problema de n corpos é regido por um sistema de EDO's $6n$ dimensional, para esse problema existem 10 integrais clássicas, entre as quais estão:

- 1 Energia total;
- 2 As componentes do momento linear total;
- 3 As componentes do centro de massa do sistema;
- 4 As componentes do momento angular total.

Com essas integrais, é possível baixar a dimensão no problema de n corpos para $6n - 10$, mas ainda não é suficiente para a solução por integrais primeiras. O questionamento que surge é se existem outras integrais primeiras para o problema de n corpos. O próximo teorema que será enunciado dá uma resposta negativa para essa questão.

Teorema 1.13. *No problema de n corpos, toda integral primeira que seja algébrica com respeito às posições, momentos e tempo é uma função algébrica das integrais primeiras clássicas.*

Demonstração. Ver ([10]). □

Definição 1.14. (Momento Angular Total) A função vetorial definida por

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$$

chama-se *momento angular*.

Definição 1.15. (Momento de Inércia) A função escalar definida por

$$I = \frac{1}{2} \sum_i^n m_i |\mathbf{r}_i|^2$$

chama-se *momento de inércia*.

Definição 1.16. A função escalar definida por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\dot{\mathbf{r}}|^2$$

chama-se energia cinética. Denotaremos por H a energia total do sistema, definida por $H = T - U$.

Proposição 1.17. (*Identidade de Lagrange-Jacobi*) Para o problema de n corpos, temos a seguinte identidade

$$\ddot{I} = 2T - U = T + H = 2H - 2U, \quad (1.3)$$

onde H é energia total do sistema.

Demonstração. Derivando o momento de inércia I em relação ao tempo, temos

$$\dot{I} = \sum_i^n m_i \mathbf{r}_i \dot{\mathbf{r}}_i,$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \ddot{I} &= \sum_i^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i^n m_i \mathbf{r}_i \ddot{\mathbf{r}}_i \\ &= 2T + \sum_i^n \mathbf{r}_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \\ &= 2T - U, \end{aligned}$$

assim, obtemos

$$\ddot{I} = 2T - U.$$

□

Observação 1.18. Como consequência da identidade de Lagrange-Jacobi, se I é constante, então U e T são constantes e a energia total H é negativa. De fato, sendo I é constante, da relação $\ddot{I} = T + H$, obtemos que

$$T = -H. \quad (1.4)$$

Além disso, substituindo a igualdade (1.4) na expressão $\ddot{I} = 2T - U$ e como I é constante, temos

$$I = -2H. \quad (1.5)$$

Das relações (1.4) e (1.5), concluímos que H é negativo.

1.3 Distâncias Mútuas

Uma variável muito útil que será utilizada durante esse texto é chamada de distâncias mútuas, a qual é dada por $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. Para todos os resultados dessa seção, supomos que o centro de massa está fixado na origem.

Proposição 1.19. *O momento de inércia I pode ser escrito em função das distâncias mútuas, como segue*

$$\frac{1}{4\mu} \sum_i \sum_j m_i m_j r_{ij}^2 = I.$$

Demonstração. De fato, note que

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j m_i m_j r_{ij}^2 &= \sum_i \sum_j m_i m_j |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 \\ &= \sum_i \sum_j m_i m_j |\mathbf{r}_i|^2 - 2 \sum_i \sum_j m_i m_j (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j) + \sum_i \sum_j m_i m_j |\mathbf{r}_j|^2 \\ &= 2\mu I - 2 \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \cdot \sum_j m_j \mathbf{r}_j) + 2\mu I. \end{aligned}$$

Como o centro de massa está localizado na origem, ou seja, $\sum_j m_j \mathbf{r}_j = 0$, concluímos que

$$\sum_i \sum_j m_i m_j r_{ij}^2 = 4\mu I.$$

□

De forma análoga, provam-se as duas proposições a seguir.

Proposição 1.20. *O momento angular \mathbf{K} pode ser escrito em função das distâncias mútuas, como segue*

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j r_{ij} \times \dot{r}_{ij}.$$

Proposição 1.21. *A energia cinética T pode ser escrita em função das distâncias mútuas, como segue*

$$T = \frac{1}{4\mu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \dot{r}_{ij} \cdot \dot{r}_{ij}.$$

Observação 1.22. Note que a energia potencial já está expressa em termos de distâncias mútuas

$$U(r_{ij}) = \sum \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Proposição 1.23. *Se o momento de inércia é constante, então todas as distâncias mútuas r_{ij} são limitadas superior e inferiormente.*

Demonstração. Da observação (1.18), se I constante, então U é constantes. Assim, temos

$$I = \frac{1}{\mu} \sum_{i < j} m_i m_j r_{ij}^2 \geq m_i m_j r_{ij}^2 \quad (1.6)$$

$$U = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \geq \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (1.7)$$

Portanto, temos

$$0 < \frac{m_i m_j}{U} \leq r_{ij} \leq \sqrt{\frac{\mu I}{m_i m_j}}.$$

□

Essa proposição mostra que, se o momento de inércia é constante, então o movimento é limitado e não existe colisão entre as partículas.

1.4 Sistemas Hamiltonianos

Definição 1.24. Um sistema de equações diferenciais ordinárias é dito Hamiltoniano se é dado por um sistema de equações da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (1.8)$$

A função $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *Hamiltoniano do sistema*.

Sistemas Hamiltonianos são de suma importância pois servem de ferramenta para a modelagem de problemas onde a energia é conservada. A teoria de sistemas hamiltonianos ajuda a estudar o problema de n corpos, permitindo estudar singularidades do problema e estabilidade de soluções tanto do ponto de vista linear quanto não linear.

Proposição 1.25. *O hamiltoniano é uma integral primeira do sistema hamiltoniano.*

Demonstração.

$$\dot{H}(x, y) = \nabla H(x, y) \left(-\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{\partial H}{\partial x} \left(-\frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

□

Proposição 1.26. *Em sistemas Hamiltonianos, os volumes nos espaços de fase são preservados.*

Demonstração. De fato, basta notar que o divergente do campo de vetores é nulo.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = \sum_i \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_i}\right) = 0$$

□

Em determinados contextos, também é comum um sistema hamiltoniano ser denotado da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \nabla H,$$

onde

$$\nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

é um vetor de dimensão $2n$ dimensional e \mathbf{J} é a matriz antissimétrica dada por

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

com I_n sendo a matriz identidade de ordem $n \times n$.

Observação 1.27. Note que, da definição de \mathbf{J} , que valem as seguintes propriedades:

$$\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$$

e

$$\mathbf{J}^2 = -I_{2n}$$

Observação 1.28. Note-se, ainda, na última definição, estamos considerando o sistema hamiltoniano no caso autônomo. Para o caso não autônomo, teríamos

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

e

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \nabla_{\mathbf{z}} H,$$

onde $\mathbf{J} \nabla_{\mathbf{z}} H$ é gradiente de H relativo a \mathbf{z} .

No problema de n corpos, podemos utilizar a notação hamiltoniana para o sistema (1.1), substituindo x por \mathbf{r} e y por $p = \sum_i m_i \mathbf{r}_i$, obtendo-se o sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\mu} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \nabla U \end{cases}, \quad (1.9)$$

onde $H(p, \mathbf{r}) = T(p) - V(\mathbf{r})$, isto é,

$$H(p, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_i^n \frac{1}{m_i} |p_i|^2 - U(\mathbf{r}).$$

Utilizando a notação hamiltoniana, podemos descrever o problema de 2 corpos com variáveis $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ e $p = (p_1, p_2)$, assim, temos

$$H(p_1, p_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{(\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2)^{1/2}}$$

com o sistema hamiltoniano assumindo a forma abaixo

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial r_1} \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial r_2} \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Para o problema de n corpos, até os dias de hoje, não existe uma solução geral analítica, mas algumas classes de soluções já foram encontradas. Neste trabalho, faremos um estudo sobre uma classe de soluções que possui uma relação direta com configurações centrais, dita solução homográfica.

Antes de discutir sobre soluções homográficas, serão necessárias algumas propriedades sobre matrizes ortogonais. Daqui em diante, vamos assumir que $\Omega(t)$ uma matriz ortogonal tal que $\Omega(t) \in SO(3)$, com entradas de classe \mathcal{C}^2 . O próximo resultado garante como obter uma matriz antissimétrica a partir de uma matriz ortogonal.

Proposição 1.29. *Se $\Omega(t) \in SO(3)$ é diferenciável, então a matriz dada por*

$$\Gamma(t) = \Omega^{-1} \cdot \dot{\Omega}$$

é antissimétrica.

Demonstração. Se Ω uma matriz ortogonal, então $\Omega^T = \Omega^{-1} \Rightarrow \Omega^T \cdot \Omega = Id$. Assim, obtemos

$$\dot{\Omega}^T \Omega + \Omega^T \dot{\Omega} = 0,$$

portanto

$$(\Omega^T \dot{\Omega})^T + \Omega^T \dot{\Omega} = 0.$$

Logo, $\Omega^{-1} \dot{\Omega}$ é antissimétrica. □

Pela proposição anterior $\Gamma(t)$ é antissimétrica e como existe um isomorfismo entre o espaço das matrizes antissimétricas de dimensão 3 e \mathbb{R}^3 , podemos fazer uma associação

de Γ a um vetor $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ da forma

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Derivando a expressão para $\Gamma(t)$, temos

$$\dot{\Gamma} = \Omega^{-1}\ddot{\Omega} - (\Omega^{-1}\dot{\Omega}\Omega^{-1})\dot{\Omega} = \Omega^{-1}\ddot{\Omega} - \Gamma^2,$$

logo

$$\dot{\Gamma} + \Gamma^2 = \Omega^{-1}\ddot{\Omega}.$$

Usando essas expressões, obtemos

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} -v_2^2 - v_3^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_2v_1 & -v_3^2 - v_1^2 & v_2v_3 \\ v_3v_1 & v_3v_2 & -v_1^2 - v_3^2 \end{pmatrix}.$$

Proposição 1.30. *Dada uma matriz antissimétrica $\Gamma(t)$ contínua com condição inicial $\Omega(t_0)$, então existe uma única matriz de rotação $\Omega(t)$, tal que a expressão (1.11) é satisfeita.*

Demonstração. Dada uma matriz antissimétrica $\Gamma(t)$ e uma condição inicial $\Omega(t_0)$, a equivalência

$$\Gamma(t) = \Omega^{-1}\dot{\Omega} \Leftrightarrow \dot{\Omega}(t) = \Omega(t)\Gamma(t)$$

garante que $\dot{\Omega}(t) = \Omega(t)\Gamma(t)$ é uma equação diferencial linear homogênea com valor inicial $\Omega(t_0)$. Pelo teorema de existência e unicidade de EDOs, $\Omega(t)$ é dada por

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \Gamma(\tau) d\tau}.$$

Por outro lado, a integral de uma matriz antissimétrica é antissimétrica, portanto exponencial de $M = \int_{t_0}^t \Gamma(\tau) d\tau$ também é antissimétrica, ou seja,

$$e^{M^T} = (e^M)^T$$

e

$$e^{-M} = (e^M)^{-1}.$$

Como M é antissimétrica, segue que $(e^M)^{-1} = (e^M)^T$, logo $\Omega(t)$ é ortogonal. Além disso, pela identidade

$$\det(e^M) = e^{\text{tr}(M)},$$

temos $\det(\Omega) = 1$. Portanto Ω é uma matriz de rotação. \square

Proposição 1.31. *Seja a matriz $\Gamma(t)$ antissimétrica, com $\Omega(t_0) = I_d$, então*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Omega = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $\dot{\theta} = v_3$.

Demonstração. Supondo que Γ é da forma

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que $\Gamma = v_3 \cdot W$, onde W é a matriz

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então $\Omega = e^{\theta W}$, onde $\theta = \int_{t_0}^t v_3(\tau) d\tau$. Da definição de matriz exponencial, segue que

$$e^{\theta W} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\theta W)^i}{i!},$$

e, por cálculo direto, obtemos

$$W^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{k+1}$$

e

$$W^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (-1)^{k/2},$$

onde $k = 2n$, portanto

$$\Omega = e^{\theta W} = I_d + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^i}{i!} \cdot (-1)^i \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^{2i-1}}{(2i-1)!} \cdot (-1)^{2i-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

logo

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, se

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então $\dot{\Omega}$ assume a forma

$$\dot{\Omega} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & -\dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\Gamma = \Omega^T \cdot \dot{\Omega}$, temos

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & -\dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde se queria chegar. □

Com um argumento análogo, prova-se que

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -v_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Omega = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

onde $\dot{\theta} = v_3$, e

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v_1 \\ 0 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

onde $\dot{\theta} = v_1$, bastando tomar

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ respectivamente.}$$

Como o momento angular total é uma constante ao longo de soluções, naturalmente surge a necessidade de uma notação para o plano perpendicular a esse vetor.

Definição 1.32. O *plano invariante* para uma solução com momento angular constante, $\mathbf{K} = C = (c_1, c_2, c_3)$, onde C é constante, é definido como o plano que passa pelo centro de massa e é perpendicular ao momento angular. Assim, o plano fica definido como $C \cdot v = 0$ com $v \in \mathbb{R}^3$.

Esse plano invariante não é apenas constante, mas também invariante para todo sistema inercial de coordenadas baricêntricas. De fato, seja $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\Omega$, então o momento angular para $\bar{\mathbf{r}}$ que será denotado por \bar{C} é dado por

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{\mathbf{r}} \times \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \Omega \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \Omega \cdot C.$$

Assim temos $\bar{C} = C \cdot \Omega$, isso implica que

$$\bar{C} \cdot \bar{\mathbf{r}} = \Omega C \cdot \Omega \mathbf{r}.$$

Como o operador Ω é ortogonal temos que $|\Omega|^2 = 1$, portanto

$$\bar{C} \cdot \bar{\mathbf{r}} = C \cdot \mathbf{r},$$

onde se queria chegar.

Definição 1.33. Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução para o problema de n corpos, dizemos que essa solução é *planar*, se existe um plano fixo π_0 tal que $\mathbf{r}_i(t) \in \pi_0, \forall t \in I$ no intervalo maximal de solução.

Definição 1.34. Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução para o problema de n corpos, dizemos que essa solução é *flat*, se existe um plano π não necessariamente fixo, tal que $\forall t \in I, \pi = \pi(t)$ tal que $\mathbf{r}_i \in \pi(t)$.

Proposição 1.35. *Sempre que necessário é possível escolher um sistema de coordenadas baricêntricas tal que*

$$c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = c,$$

com $c = |C| = c_3$

Demonstração. Temos que avaliar dois casos: Se $C = 0$ ou $C \neq 0$. No primeiro caso, como $C = (0, 0, 0)$, o resultado segue trivialmente. Se $C \neq 0$, tomamos um novo sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) tal que o plano invariante π^* seja (ξ, η) com o eixo ξ na direção da reta que faz interseção entre o plano invariante π^* com o plano (x, y) . Além disso, o eixo ζ está na direção do momento angular. Dessa forma, o novo plano (ξ, η, ζ) é obtido do anterior através de uma rotação Ω . Assim, o novo momento angular assume a forma

$$\bar{C} = \Omega C = (0, 0, c).$$

□

Vamos adicionar algumas notações que são muito úteis para soluções flat. Pela definição de solução flat, para cada t existe um plano que contém os corpos. Seja a posição

desses corpos dada por $\bar{\mathbf{r}}_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ no sistema de coordenadas (ξ_i, η_i, ζ_i) centrada origem do sistema (x, y, z) . Uma solução flat pode ter seu movimento no plano definido por uma rotação ao redor da origem do sistema, alterando, assim, a posição dos corpos. Dessa forma, vamos escrever

$$\mathbf{r}_i = \Omega \bar{\mathbf{r}}_i = \Omega \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

com $\zeta = 0, \forall i \in \mathbb{N}$. Além disso, vamos definir algumas relações sobre coordenadas do momento de inércia

$$I^{\xi\xi} = \sum_i m_i \xi_i^2, I^{\eta\eta} = \sum_i m_i \eta_i^2, I^{\xi\eta} = \sum_i m_i \xi_i \eta_i.$$

Note-se que, para a_i e b_j escalares com $i, j = 1, \dots, m$, temos

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m a_i^2 & \sum_{i=1}^m a_i b_i \\ \sum_{i=1}^m a_i b_i & \sum_{i=1}^m b_i^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \begin{vmatrix} a_i & b_j \\ a_i & b_j \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

O fator $\frac{1}{2}$ significa que estamos excluindo repetições na soma. Além disso, vale lembrar que a rotação não muda a distância dos pontos até a origem, assim $r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2$, portanto, utilizando a expressão para momento de inércia, obtemos

$$\begin{vmatrix} I^{\xi\xi} & I^{\xi\eta} \\ I^{\xi\eta} & I^{\eta\eta} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m m_i m_j \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j \\ \eta_i & \eta_j \end{vmatrix}^2,$$

onde $I^{\xi\xi} + I^{\eta\eta} = I$.

Como preparação para a prova da próxima proposição, é importante verificar a seguinte relação:

$$\Omega^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |C| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 I^{\eta\eta} - v_2 I^{\xi\eta} \\ v_2 I^{\xi\xi} - v_1 I^{\xi\eta} \\ \sum_i (\xi_i \eta_i' - \eta_i \xi_i') + v_3 (I^{\xi\xi} + I^{\eta\eta}) \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

onde Ω é tal que, $\Omega C = (0, 0, |C|)$ e v_1, v_2, v_3 são as entradas da $\Gamma(t)$.

De fato, primeiro pela proposição anterior e pela definição do momento angular, segue que

$$\bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{r}}_i' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\xi_i \eta_i' - \eta_i \xi_i') \end{pmatrix} \text{ e } \bar{\mathbf{r}}_i \times \left[\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \bar{\mathbf{r}}_i \right] = \begin{pmatrix} v_1 \eta_i^2 - v_2 \xi_i \eta_i \\ v_2 \xi_i^2 - v_1 \xi_i \eta_i \\ v_3 (\eta_i^2 + \xi_i^2) \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos provar que o lado direito da expressão (1.14) é o vetor

$$\sum_i m_i \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{r}}'_i + \sum_i m_i \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{r}}_i \times \left[\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \bar{\mathbf{r}}_i \right],$$

pela, definição do momento angular, temos que $\Omega^{-1}C = \Omega^{-1} \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}'_i)$. Para provar a expressão (1.14), resta mostrar que

$$\Omega^{-1}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}'_i) = \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{r}}'_i + \bar{\mathbf{r}}_i \times \left[\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \bar{\mathbf{r}}_i \right].$$

De fato, derivando a expressão (1.12) em relação ao tempo e usando $W = \Omega^{-1}\dot{\Omega}$, obtemos que

$$\Omega^{-1}\mathbf{r}'_i = W\bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{r}}'_i = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \bar{\mathbf{r}}_i + \bar{\mathbf{r}}'_i.$$

Com isso, temos que $\Omega^{-1}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}'_i) = \Omega^{-1}\mathbf{r}_i \times \Omega^{-1}\mathbf{r}'_i = \bar{\mathbf{r}}_i \times \Omega^{-1}\mathbf{r}'_i$, e portanto a expressão (1.14) fica verificada.

Proposição 1.36. *Se a solução é flat e não tem plano invariante ($C = 0$), então a solução é planar.*

Demonstração. Note que, pela expressão (1.14) e por $C = 0$, temos o sistema

$$\begin{cases} v_1 I^{\eta\eta} - v_2 I^{\xi\eta} = 0 \\ v_2 I^{\xi\xi} - v_1 I^{\xi\eta} = 0 \end{cases}. \quad (1.15)$$

Como $I > 0$, então $I^{\xi\xi}$ e $I^{\eta\eta}$ não podem ser iguais a zero simultaneamente, supondo que $I^{\eta\eta} \neq 0$, pela primeira equação do sistema (1.15), temos que

$$v_1 = v_2 \frac{I^{\xi\eta}}{I^{\eta\eta}},$$

substituindo essa última igualdade na segunda equação de (1.15), obtemos

$$v_2 \frac{I^{\xi\eta}}{I^{\eta\eta}} I^{\xi\eta} - v_2 I^{\xi\xi} = 0 \Rightarrow v_2 ((I^{\xi\eta})^2 - (I^{\xi\xi})(I^{\eta\eta})) = 0$$

logo, $v_1 = v_2 = 0$ ou $(I^{\xi\eta})^2 - (I^{\xi\xi})(I^{\eta\eta}) = 0$. Assim, temos dois casos para analisar. No primeiro caso, temos a matriz de rotação em torno do eixo z , como $\mathbf{r} = \Omega\bar{\mathbf{r}}$, segue $z_i = \zeta$ durante a rotação em relação ao eixo z , assim $z_i = 0$ para todo tempo, portanto, o movimento é descrito no plano (x, y) . Logo a solução é planar. No segundo, pela expressão (1.13), temos que

$$\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i = 0,$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Assim, temos

$$(\xi_i, \eta_i, 0) \times (\xi_j, \eta_j, 0) = 0.$$

Dessa forma, todos os vetores \mathbf{r}_i são colineares com a origem, e as coordenadas do sistema (ξ, η, ζ) podem ser escolhidas de tal forma que todos os corpos estejam no eixo ξ para todo tempo, dessa forma, segue

$$\eta_i = 0, I^{\eta\eta} = 0, I^{\xi\eta} = 0, \xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i = 0.$$

Como $I^{\xi\xi} = I$ e $C = 0$, da expressão (1.14), temos que $v_3 I = 0$. Além disso, $I > 0$ implica que $v_3 = v_2 = 0$, logo

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v_1 \\ 0 & v_1 & 0 \end{pmatrix},$$

por isso os corpos estão no plano paralelo ao plano (y, z) , portanto a solução é planar. Com isso, concluímos a demonstração. \square

Definição 1.37. Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução para o problema de n corpos, dizemos que essa solução é *retilinear*, se existe uma reta fixa Λ_0 tal que $\mathbf{r}_i(t) \in \Lambda_0, \forall t \in I$, onde I é o intervalo maximal de solução.

Definição 1.38. Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução para o problema de n corpos, dizemos que essa solução é *colinear* se $\exists \Lambda = \Lambda(t), \forall t \in I$ não necessariamente fixo, tal que $\mathbf{r}_i(t) \in \Lambda(t)$.

Proposição 1.39. *Toda solução colinear é planar.*

Demonstração. Da geometria analítica, se \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j são colineares, então $\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = 0, \forall i, j \in \mathbb{N}$. Assim, podemos tomar o produto interno

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = 0.$$

Pelas propriedades do produto vetorial, segue que

$$(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \mathbf{r}_j = 0 \Rightarrow \sum_i (m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \mathbf{r}_j = 0.$$

Portanto, $\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_j = 0$, como a última expressão não depende do tempo, então que todos os corpos se movimentam no mesmo plano cujo vetor normal é \mathbf{K} . \square

Observação 1.40. Note que essa proposição também segue imediatamente da proposição 1.36, pois toda solução colinear é necessariamente flat.

Proposição 1.41. *Seja \mathbf{r} uma solução colinear, mas não retilínea. Então, temos que $\mathbf{K} \neq 0$.*

Demonstração. Como $\mathbf{r}(t)$ é uma solução colinear e o centro de massa está fixado na origem do sistema de coordenadas, as posições dos corpos podem ser dadas da forma

$$\mathbf{r}_i(t) = \beta_i(t)e(t),$$

onde $\beta_i(t) \in \mathbb{R}$ e $e(t)$ é um vetor unitário variável. Note que, ambas são funções contínuas que variam com o tempo, pois a solução não é retilínea. Dessa forma, temos que

$$\dot{\mathbf{r}}_i(t) = \dot{\beta}_i(t)e(t) + \beta_i(t)\dot{e}(t),$$

assim

$$\mathbf{K} = \sum_i (m_i \beta_i e) \times (\dot{\beta}_i e + \beta_i \dot{e}) = \left(\sum_i m_i \beta_i^2(t) \right) e \times \dot{e},$$

como e é unitário, segue que $e \perp \dot{e}$, logo $e \times \dot{e} \neq 0$ para todo t , portanto $\mathbf{K} \neq 0$. \square

Proposição 1.42. *Uma solução colinear não tem plano invariante ($\mathbf{K} = C = 0$) se, e somente se, é retilínea.*

Demonstração. Pela proposição anterior, se a solução é colinear mas não retilinear, então $\mathbf{K} = C \neq 0$, conseqüentemente, possui plano invariante, o que contradiz a hipótese $\mathbf{K} = C = 0$. Reciprocamente, se a solução é retilinear em particular é colinear, além disso, pela definição de solução retilinear, existe uma reta Λ_0 que contém todos $\mathbf{r}_i(t)$ alinhados à origem, para todo tempo, isso implica que sua velocidade $\dot{\mathbf{r}}$ está na mesma reta Λ_0 . Então $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = 0$ e que $\mathbf{K} = C = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}} = 0$, logo a solução não possui plano invariante. \square

Proposição 1.43. *Se \mathbf{r} é uma solução colinear e não retilinear, então a configuração geométrica dos n corpos permanece a mesma quando t varia.*

Demonstração. Pela proposição 1.39, se $\mathbf{r}(t)$ é colinear, então é um solução planar, assim o plano de movimento pode ser escolhido como (x, y) do sistema de coordenadas, considerando outro sistema de coordenadas (não necessariamente inercial) (ξ, η) tal que a reta $\Lambda(t)$ que contém todos os corpos coincide com o eixo ξ , então $\eta_i = 0, \forall i = \{1, \dots, n\} \in \mathbb{N}$. O eixo ξ juntamente com os n corpos irão rodar com uma certa velocidade $\dot{\theta}$ ao redor do eixo z . Assim, é suficiente provar que $\xi_i(t) = \nu(t) \cdot \xi_i(0)$, com o mesmo $\nu = \nu(t)$ que não depende de i , para isso, vamos supor que

$$\mathbf{r}_i = \Omega \bar{\mathbf{r}}_i = \Omega \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{pmatrix}, \zeta_i = 0, \forall i = \{1, \dots, n\} \in \mathbb{N},$$

onde

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

assim, derivando $\mathbf{r}_i(t) = \Omega(t)\bar{\mathbf{r}}_i(t)$, segue que

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \Omega \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i + \dot{\Omega} \cdot \bar{\mathbf{r}}_i \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \Omega \cdot \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_i + 2\dot{\Omega} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i + \ddot{\Omega} \cdot \bar{\mathbf{r}}_i. \quad (1.16)$$

Multiplicando (1.16) por Ω^{-1} e lembrando que $\Gamma(t) = \Omega^{-1} \cdot \dot{\Omega}$ e $\dot{\Gamma}(t) = \Omega^{-1} \cdot \ddot{\Omega} - \Gamma^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}\ddot{\mathbf{r}}_i(t) &= \Omega^{-1}\Omega \cdot \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_i + 2\Omega^{-1}\dot{\Omega} \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i + \Omega^{-1}\ddot{\Omega} \cdot \bar{\mathbf{r}}_i \Rightarrow \\ \Omega^{-1}\ddot{\mathbf{r}}_i(t) &= \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_i + 2\Gamma \cdot \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i + (\dot{\Gamma} + \Gamma^2) \cdot \bar{\mathbf{r}}_i. \end{aligned}$$

Em coordenadas,

$$\Omega^{-1}\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_i \\ \ddot{\eta}_i \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\xi}_i \\ \dot{\eta}_i \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 & -\ddot{\theta} & 0 \\ \ddot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{\theta}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\theta}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Após um cálculo direto, temos que

$$\Omega^{-1}\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_i - 2\dot{\theta}\dot{\eta}_i - \dot{\theta}^2\xi_i - \ddot{\theta}\eta_i \\ \ddot{\eta}_i + 2\dot{\theta}\dot{\xi}_i - \dot{\theta}^2\eta_i + \ddot{\theta}\xi_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como todos os corpos estão no eixo ξ para todo tempo, então $\eta_i = 0$ para todo $i = \{1, \dots, n\} \in \mathbb{N}$, e cada componente de $\bar{\mathbf{r}}_i$ sobre o eixo η é zero, assim $\dot{\eta}_i = \ddot{\eta}_i = 0$, portanto obtemos a igualdade

$$\Omega^{-1}\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \begin{pmatrix} \ddot{\xi}_i - \dot{\theta}^2\xi_i \\ 2\dot{\theta}\dot{\xi}_i + \ddot{\theta}\xi_i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Pelo mesmo argumento usado no ultimo caso, temos que a componente η da força gravitacional de cada um dos i deve ser nula, portanto o valor absoluto de cada uma das projeções da aceleração no eixo η deve ser zero. Assim, o lado direito da expressão (1.17) satisfaz a equação

$$2\dot{\theta}\dot{\xi}_i + \ddot{\theta}\xi_i = 0, \forall i = \{1, \dots, n\} \in \mathbb{N}. \quad (1.18)$$

Note que $\dot{\theta} \neq 0$ para todo t , pois a solução é não retilinear, assim podemos supor que $\dot{\theta} > 0$. Além disso, como o centro de massa está fixado na origem, então $\xi_i \neq 0$ para

pelo menos $n - 1$ dos valores de i (temos no máximo 1 corpo na origem, no instante t). Logo podemos dividir a equação (1.18) por $\dot{\theta}\xi_i$ para os $n - 1$ corpos, segue que

$$2\frac{\dot{\xi}_i}{\xi_i} = -\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}, \quad (1.19)$$

como ξ_i e θ são analíticas, podemos integrar a equação (1.19) de 0 a t , obtendo

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \frac{\dot{\xi}_i(t)}{\xi_i(t)} dt &= - \int_0^t \frac{\ddot{\theta}(t)}{\dot{\theta}(t)} dt \Rightarrow 2 \ln \left| \frac{\xi_i(t)}{\xi_i(0)} \right| = - \ln \left| \frac{\dot{\theta}(t)}{\dot{\theta}(0)} \right| \Rightarrow \\ \left(\frac{\xi_i(t)}{\xi_i(0)} \right)^2 &= \left| \frac{\dot{\theta}(0)}{\dot{\theta}(t)} \right| \Rightarrow \xi_i(t) = \sqrt{\left| \frac{\dot{\theta}(0)}{\dot{\theta}(t)} \right|} \cdot \xi_i(0). \end{aligned}$$

Chamando $\nu(t) = \sqrt{\left| \frac{\dot{\theta}(0)}{\dot{\theta}(t)} \right|}$, temos

$$\xi_i(t) = \nu \cdot \xi_i(0),$$

onde $\xi_i(t)$ depende apenas de $\dot{\theta}(t)$ para todos os $n - 1$ corpos e $\nu(t) \neq 0$. Resta mostrar que o mesmo vale para o n -ésimo corpo. Como esse corpo está situado no centro de massa do sistema, para algum t_0 , pela expressão do centro de massa, temos

$$\xi_n(t_0) = \nu(t_0) \frac{\sum_{i=1}^{n-1} m_i \xi_i(0)}{\sum_{i=1}^{n-1} m_i} = 0,$$

isso mostra que uma das duas coisa acontece,

$$\sum_{i=1}^{n-1} m_i \xi_i(0) = 0$$

ou

$$\nu(t_0) = 0.$$

Mas, em qualquer um desses casos, segue que $\xi_n(t) = \nu(t) \cdot \xi_n(0)$. Portanto

$$\xi_i(t) = \nu(t) \cdot \xi_i(0)$$

para todos os corpos. □

Corolário 1.44. *Sob as condições da proposição anterior, temos que $\nu(t) = \text{const} \Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = \text{const}$.*

Demonstração. Tomando

$$\mathbf{r}_i = \Omega \overline{\mathbf{r}}_i = \Omega \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

e substituindo $\xi_i(t) = \nu(t) \cdot \xi_i(0)$ e $\eta = 0$ obtemos

$$\mathbf{r}_i(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t) \cdot \xi_i(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu(t) \cdot \cos \theta \cdot \xi_i(0) \\ \nu(t) \cdot \sin \theta \cdot \xi_i(0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

então, por um cálculo direto, o momento angular assume a forma

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \cdot \nu^2(t) \cdot \sum_{i=1}^n m_i \xi_i^2(0) \end{pmatrix}.$$

Portanto, o plano de movimento é o plano invariante e

$$|C| = |\dot{\theta}| \cdot \nu^2(t) \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i^2(0) > 0.$$

Como $C = \text{const}$ e $\nu(t) \neq 0$, $\nu(t) = \text{const} \Leftrightarrow \dot{\theta}(t) = \text{const}$. Além disso, a solução pode ser escrita na forma

$$\mathbf{r}_i(t) = \nu \cdot \Omega \cdot \bar{\mathbf{r}}_i(0).$$

□

Observação 1.45. Note que, o resultado anterior mostra também que os corpos giram mais rapidamente ou mais lentamente conforme estejam mais próximos ou mais afastados do centro de massa. Isso ocorre devido à expressão

$$\mathbf{r}_i(t) = \nu \cdot \Omega \cdot \bar{\mathbf{r}}_i(0),$$

que motiva um tipo de solução particular extremamente importante para o problema de n corpos, que será estudada no próximo capítulo.

Capítulo 2

Soluções Homográficas

O objetivo desse capítulo é definir uma classe de soluções para problema de n corpos chamadas de soluções homográficas, em seguida, apresentar alguns resultados presentes na literatura [26] sobre esse tipo de solução. A última parte desse capítulo é dedicada a soluções de equilíbrio e soluções homotéticas, por fim, demonstramos o teorema de Lagrange-Pizzetti, que dá condições necessárias e suficientes para a existência de soluções de equilíbrio relativo e soluções homotéticas.

Definição 2.1. (Solução Homográfica) No problema newtoniano de n corpos, uma solução $\mathbf{r}(t)$ é dita homográfica se existem funções diferenciáveis $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Omega : I \rightarrow SO(3)$ tais que

$$\mathbf{r}(t) = \nu(t) \cdot \Omega(t) \cdot \mathbf{r}(t_0)$$

com $\mathbf{r}(t_0) \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ e para todo t pertencendo ao intervalo maximal da solução.

Intuitivamente, soluções homográficas são soluções que giram, dilatam ou se contraem, mantendo a mesma forma, assim, cada corpo executa um movimento kepleriano (podendo ser elíptico, parabólico ou hiperbólico), com a mesma excentricidade $\mathcal{E} \in [0, 1]$.

Note que dada uma solução homográfica, $\mathbf{r} = \nu(t)\Omega(t)\mathbf{r}(t_0)$, então, a razão entre as distâncias mútuas é constante. De fato, se

$$\mathbf{r}_i(t), \mathbf{r}_j(t), \mathbf{r}_k(t), \mathbf{r}_m(t)$$

são posições dos corpos da solução homográfica, então com $\nu > 0$,

$$\frac{r_{ij}}{r_{km}} = \frac{|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)|}{|\mathbf{r}_k(t_0) - \mathbf{r}_m(t_0)|} = \text{const.}$$

Proposição 2.2. Se $\mathbf{r}(t) = \nu(t) \cdot \Omega(t) \cdot \mathbf{r}(t_0)$ é uma solução homográfica, então podemos admitir a seguinte caracterização:

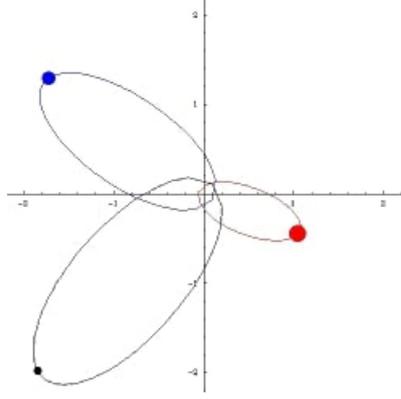


Figura 2.1: Solução Homográfica $\mathcal{E} = 0$, animação ver [17].

$$K \cdot \mathbf{r}_i(t_0) = a_i \quad (2.1)$$

onde K é uma matriz 3×3 que depende de ν , Ω e a_i são as componentes de um vetor a constante que depende de $\mathbf{r}_i(t_0)$.

Demonstração. Derivando $\mathbf{r}_i(t) = \nu(t) \cdot \Omega(t) \cdot \mathbf{r}_i(t_0)$, temos

$$\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \left[\ddot{\nu}(t) \cdot \Omega(t) + 2\dot{\nu}(t) \cdot \dot{\Omega} + \nu(t) \cdot \ddot{\Omega}(t) \right] \cdot \mathbf{r}_i(t_0).$$

Como $\dot{\Omega}(t) = \Omega(t)\Gamma(t)$ e $\ddot{\Omega}(t) = \dot{\Omega}(t) \cdot \Gamma(t) + \Omega(t) \cdot \dot{\Gamma}(t)$, segue que

$$\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \Omega \cdot \left[\ddot{\nu}(t) \cdot I_d + 2\dot{\nu}(t) \cdot \Gamma(t) + \nu(t) \cdot (\Gamma^2(t) + \dot{\Gamma}(t)) \right] \cdot \mathbf{r}_i(t_0).$$

Substituindo essa última expressão na equação (1.1), obtemos

$$\Omega \cdot \left[\ddot{\nu}(t) \cdot I_d + 2\dot{\nu}(t) \cdot \Gamma(t) + \nu(t) \cdot (\Gamma^2(t) + \dot{\Gamma}(t)) \right] \cdot \mathbf{r}_i(t_0) = \frac{\Omega(t)}{\nu^2(t)} \sum_{i \neq j} \frac{m_j(\mathbf{r}_j(t_0) - \mathbf{r}_i(t_0))}{|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)|} \Rightarrow$$

$$\nu^2(t) \cdot \left[\ddot{\nu}(t) \cdot I_d + 2\dot{\nu}(t) \cdot \Gamma(t) + \nu(t) \cdot (\Gamma^2(t) + \dot{\Gamma}(t)) \right] \cdot \mathbf{r}_i(t_0) = \sum_{i \neq j} \frac{m_j(\mathbf{r}_j(t_0) - \mathbf{r}_i(t_0))}{|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)|}.$$

Seja

$$K = \nu(t) \left[\ddot{\nu}(t) \cdot I_d + 2\dot{\nu}(t) \cdot \Gamma(t) + \nu(t) \cdot (\Gamma^2(t) + \dot{\Gamma}(t)) \right], \quad (2.2)$$

de forma mais explícita

$$K = \nu^2 \begin{pmatrix} \ddot{\nu} + (-v_2^2 - v_3^2) & -2\dot{\nu}v_3 + \nu(v_1v_2 - \dot{v}_3) & 2\dot{\nu}v_2 + \nu(v_2v_1 + \dot{v}_3) \\ 2\dot{\nu}v_3 + \nu(v_2v_1 + \dot{v}_3) & \ddot{\nu} + \nu(-v_3^2 - v_1^2) & -2\dot{\nu}v_1 + \nu(v_2v_3 - \dot{v}_1) \\ -2\dot{\nu}v_2 + \nu(v_3v_1 - \dot{v}_2) & 2\dot{\nu}v_1 + \nu(v_3v_2 + \dot{v}_1) & \ddot{\nu} + \nu(-v_1^2 - v_2^2) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

onde v_1, v_2 e v_3 são elementos da matriz anti-simétrica Γ . Logo, se \mathbf{r} é uma solução homográfica para o problema de n corpos com condição inicial $\mathbf{r}(t_0)$, concluímos que

$$K \cdot \mathbf{r}_i(t_0) = a_i,$$

$$\text{onde } a_i = \sum_{i \neq j} \frac{m_j(\mathbf{r}_j(t_0) - \mathbf{r}_i(t_0))}{|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)|}.$$

□

Teorema 2.3. *Toda solução colinear não-retilínea do problema de n corpos é homográfica.*

Demonstração. Note que esse resultado segue imediatamente da Proposição 1.43 e do Corolário 1.44. □

Lema 2.4. *Seja $\Omega(t)$ uma rotação, $\Omega(t)$ tem um eixo fixo se, e somente se, existe uma matriz ortogonal P , tal que todos os elementos da terceira linha e terceira coluna da matriz $P^{-1}\Gamma(t)P$ são iguais a zero para todo tempo, onde $\Gamma(t) = \Omega^{-1}\dot{\Omega}$.*

Demonstração. Ver [26]. □

Corolário 2.5. *Se $\Gamma(t) = \Gamma_0 = \text{const}$, então a rotação ocorre em relação ao eixo fixo.*

Demonstração. O teorema de Wintner e Murnaghan (ver [26]P.340- 341) garante que, para uma matriz Γ_0 constante, existe uma matriz ortogonal P , tal que $P^{-1}\Gamma_0P$ é uma matriz triangular superior. Como Γ_0 ser anti-simétrica, $P^{-1}\Gamma_0P$ também é anti-simétrica e a terceira linha e coluna são nulas. Logo, o corolário segue diretamente do lema anterior. □

O próximo resultado dá uma condição suficiente para a solução ser planar.

Teorema 2.6. *Se a solução homográfica é flat, então é planar.*

Demonstração. Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução homográfica, se $\mathbf{r}(t)$ é colinear, o resultado segue trivialmente nesse caso, pois toda solução colinear é planar. Suponhamos que a solução é não colinear, então existem pelo menos dois corpos não colineares, ou seja, existem índices l, v tais que

$$\mathbf{r}_l(t_0) \times \mathbf{r}_v(t_0) \neq 0.$$

Como a solução é flat, então, para cada instante t , existe um plano que contém todos os corpos e cada um desses planos passa pela origem do sistema de coordenadas baricêntricas. Seja (x, y) o plano quando $t = t_0$, então as posições dos corpos são dadas por

$$\mathbf{r}_i(t) = (\mathbf{r}_{i1}(t_0), \mathbf{r}_{i2}(t_0), 0),$$

com $i = 1, \dots, n$. Da relação (2.1), segue que

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{i1} \\ \mathbf{r}_{i2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Essa expressão matricial é equivalente ao sistema

$$k_{j1}(t)\mathbf{r}_{i1}(t_0) + k_{j2}(t)\mathbf{r}_{i2}(t_0) = a_{ij}, \quad (2.4)$$

com $j = 1, 2, 3$ e $i = 1, \dots, n$. Tomando $i = l$ e $i = v$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} k_{j1}(t)\mathbf{r}_{l1}(t_0) + k_{j2}(t)\mathbf{r}_{l2}(t_0) = a_{lj} \\ k_{j1}(t)\mathbf{r}_{v1}(t_0) + k_{j2}(t)\mathbf{r}_{v2}(t_0) = a_{vj}, \end{cases} \quad (2.5)$$

esse sistema é possível de resolver, já que

$$\mathbf{r}_l(t_0) \times \mathbf{r}_v(t_0) = \begin{vmatrix} i & k & j \\ \mathbf{r}_{l1}(t_0) & \mathbf{r}_{l2}(t_0) & 0 \\ \mathbf{r}_{v1}(t_0) & \mathbf{r}_{v2}(t_0) & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{r}_{l1}(t_0) & \mathbf{r}_{l2}(t_0) \\ \mathbf{r}_{v1}(t_0) & \mathbf{r}_{v2}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim, k_{j1} e k_{j2} são combinações lineares cujos coeficientes são dados em termos das constantes $\mathbf{r}_{ij}(t_0)$, logo também são constantes, onde $i \in \{v, l\}$ e $j = 1, 2$. Note que $k_{31} = k_{32} = 0$, já que, para $j = 3$, o sistema (2.5) passa a ser homogêneo e assume a forma

$$\begin{cases} k_{31}(t)\mathbf{r}_{l1}(t_0) + k_{32}(t)\mathbf{r}_{l2}(t_0) = 0 \\ k_{31}(t)\mathbf{r}_{v1}(t_0) + k_{32}(t)\mathbf{r}_{v2}(t_0) = 0 \end{cases}.$$

Pela igualdade (2.3), temos

$$\begin{aligned} k_{12} &= \nu^2(2\dot{\nu}v_3 + \nu(v_2v_1 + \dot{v}_3)) \\ k_{21} &= \nu^2(-2\dot{\nu}v_3 + \nu(v_1v_2 - \dot{v}_3)) \\ k_{11} &= \nu^2(\ddot{\nu} + \nu(-v_2^2 - v_3^2)) \\ k_{22} &= \nu^2(\ddot{\nu} + \nu(-v_3^2 - v_1^2)) \\ k_{31} &= \nu^2[-2\dot{\nu}v_2 + \nu(v_3v_1 - \dot{v}_2)] \\ k_{32} &= \nu^2[2\dot{\nu}v_1 + \nu(v_3v_2 + \dot{v}_1)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$k_{12} + k_{21} = 2\nu^3v_2v_1$$

e

$$k_{11} - k_{22} = \nu^3(v_1^2 - v_2^2).$$

Portanto, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 2\nu^3v_2v_1 = const \\ \nu^3(v_1^2 - v_2^2) = const \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(\nu^3v_1^2)(\nu^3v_1^2) = const \\ \nu^3(v_1^2 - v_2^2) = const \end{cases} \quad (2.6)$$

e

$$\begin{cases} \nu^2[-2\dot{\nu}v_2 + \nu(v_3v_1 - \dot{v}_2)] = 0 \\ \nu^2[2\dot{\nu}v_1 + \nu(v_3v_2 + \dot{v}_1)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\dot{\nu}v_2 + \nu(v_3v_1 - \dot{v}_2) = 0 \\ 2\dot{\nu}v_1 + \nu(v_3v_2 + \dot{v}_1) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Pelo sistema (2.6) e pela relação, $\nu^3 v_1^2 = \frac{1}{2}[(\nu^3 v_1^2 + \nu^3 v_2^2)] + (\nu^3 v_1^2 - \nu^3 v_2^2)$, temos que $\nu^3 v_1^2$ e $\nu^3 v_2^2$ são constantes. Logo,

$$\nu^3 v_1^2 = \text{const} \Rightarrow v_1 = c_1 \nu^{-3/2} \quad (2.8)$$

$$\nu^3 v_2^2 = \text{const} \Rightarrow v_2 = c_2 \nu^{-3/2} \quad (2.9)$$

Substituindo v_1 e v_2 no sistema (2.7), obtemos

$$\begin{cases} -\dot{\nu} c_2 + 2\nu(v_3 c_1) = 0 \\ 2\nu(v_3 c_2) + \dot{\nu} c_1 = 0. \end{cases}$$

Tomando $A = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2\nu v_3 & -\dot{\nu} \\ \dot{\nu} & 2\nu v_3 \end{bmatrix}$, temos a implicação

$$A = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2\nu v_3 & -\dot{\nu} \\ \dot{\nu} & 2\nu v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow B \cdot A = 0.$$

Como $\det(B) = 4\nu^2 v_3^2 + \dot{\nu}^2$, temos que $\det(B) = 0 \Leftrightarrow v_3 = \dot{\nu} = 0$, para todo t . Por outro lado, se $\det(B) \neq 0$, então $c_1 = c_2 = 0$, pois o sistema é homogêneo. Portanto, uma das condições deve ser satisfeita

- 1) O sistema é possível e determinado, $\det(B) \neq 0 \Leftrightarrow 4\nu^2 v_3^2 + \dot{\nu}^2 \neq 0$, então $c_1 = c_2 = 0$.
- 2) O sistema é possível mas indeterminado, $\det(B) = 0 \Leftrightarrow 4\nu^2 v_3^2 + \dot{\nu}^2 = 0$, então $v_3(t) = 0$ e $\dot{\nu}(t) = 0$.

No caso 1) devido às equações (2.8) e (2.9), segue que $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = 0$. Assim Γ assume a forma

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, a matriz $\Omega(t)$ é uma rotação em relação ao eixo z . Como escolhemos o sistema de coordenadas de modo que $\mathbf{r}_{i3}(t_0) = 0$, então, pela definição de solução homográfica, temos que $\mathbf{r}_{i3}(t) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$ e t no intervalo de solução. Portanto, a solução \mathbf{r} é planar.

Supondo que 2) seja verdadeiro, então, pelas equações (2.8) e (2.9), temos que v_1 e v_2 são constantes, e conseqüentemente v_3 também é constante, portanto $\Gamma(t) = \Gamma_0$ é constante. Por outro lado, pelo lema 2.4, existe uma matriz P tal que $P^{-1}\Gamma_0 P$ possui os elementos da terceira linha e coluna iguais a zero. Portanto, o corolário 2.5 diz que existe um eixo u tal $\Omega u = u$, ou seja, garante que a rotação ocorre em relação a um eixo fixo.

Como u é fixo, então $\dot{\Omega}u = 0$. Usando a relação $\Gamma = \Omega^{-1}\dot{\Omega}$, obtemos que $\Gamma u = 0$. Vamos provar que esse eixo deve ser dado na direção do vetor $v = (v_1, v_2, 0)$. De fato,

$$\Omega(t) = \Omega(t_0)e^{\int_{t_0}^t \Gamma(\tau)ds} \Rightarrow \Omega(t) = \Omega(t_0)e^{\Gamma(t-t_0)}.$$

Tomando $T = \Gamma(t - t_0)$, temos que

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) \sum_{i=1}^n \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Como $\Gamma u = 0$, então $Tu = 0$. Segue que

$$\Omega(t)u = \sum_{i=1}^n \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}u \Rightarrow \Omega(t)u = \Omega(t_0)u,$$

pois os termos da soma acima a partir de $i = 2$ tornam-se todos nulos. Dessa forma, supondo $\Omega(t_0) = I_d$, obtemos

$$\Omega(t)u = u.$$

Logo, a rotação ocorre em relação ao eixo u . Como $v_3 = 0$, temos

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema $\Gamma u = 0$, com $u = (u_1, u_2, u_3)$, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} v_2 u_3 = 0 \\ -v_1 u_3 = 0 \\ -v_2 u_1 + v_1 u_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, o eixo de rotação é a reta $-v_2 u_1 + v_1 u_2 = 0$. Por outro lado, por hipótese $\nu = \text{const}$, então cada corpo move-se em um círculo de raio constante, centrado no eixo fixo, ao longo de uma solução espacial. Isso é fisicamente impossível, pois a força resultante deve ter componentes que obrigam o corpo a sair desse plano. Portanto, 2) não pode ocorrer. Por 1) a solução é planar. Mas, de modo mais preciso, temos que se $\nu = \text{const}$, $\Gamma = \text{const}$ e v_1 e v_2 são não nulos, então, pela expressão (2.2), obtemos

$$K(t) = \nu^3 \Gamma^2.$$

Agora, como v_3 é nulo, então $\det K = \nu^3 \det(\Gamma^2) = 0$. Seja \bar{K} , a restrição de K primeira e segunda linha e colunas, temos $\det \bar{K} = 0$. Por outro lado, por definição de K , temos que

$$\begin{aligned} \bar{K}(\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{r}_2(t_0)) &= (a_l, a_v) \Rightarrow \bar{K} = (a_l, a_v)(\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{r}_2(t_0))^{-1} \Rightarrow \\ \bar{K} &= \det(a_l, a_v) \det((\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{r}_2(t_0)))^{-1}. \end{aligned}$$

Então $\det \bar{K} \neq 0$, que é uma contradição. Assim, concluímos que de fato 2) não deve acontecer. \square

2.1 Soluções Particulares

Definição 2.7. Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução homográfica para o problema de n corpos, dizemos que essa solução é de *equilíbrio relativo*, quando $\nu(t) = 1$, ou seja, a solução pode ser escrita na forma

$$\mathbf{r}(t) = \Omega(t) \cdot \mathbf{r}(t_0).$$

Desse modo, a solução roda sem dilatação ou contração.

Substituindo na equação do movimento (1.1), temos que

$$\ddot{\Omega}(t) \cdot \mathbf{r}(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{m_j (\Omega(t) \cdot \mathbf{r}_j(t_0) - \Omega(t) \cdot \mathbf{r}_i(t_0))}{|\Omega(t) \cdot \mathbf{r}_i(t_0) - \Omega \cdot \mathbf{r}_j(t_0)|} \Rightarrow \Omega^{-1}(t) \cdot \ddot{\Omega}(t) \cdot \mathbf{r}_i(t_0) = \sum_{i \neq j} \frac{m_j (\mathbf{r}_j(t_0) - \mathbf{r}_i(t_0))}{|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)|}.$$

Definição 2.8. Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução homográfica para o problema de n corpos, dizemos que essa solução é *homotética*, se $\Omega(t) = I$, ou seja, a solução pode ser escrita da forma

$$\mathbf{r}(t) = \nu(t) \cdot \mathbf{r}(t_0).$$

Assim, a solução se dilata ou contrai, sem girar.

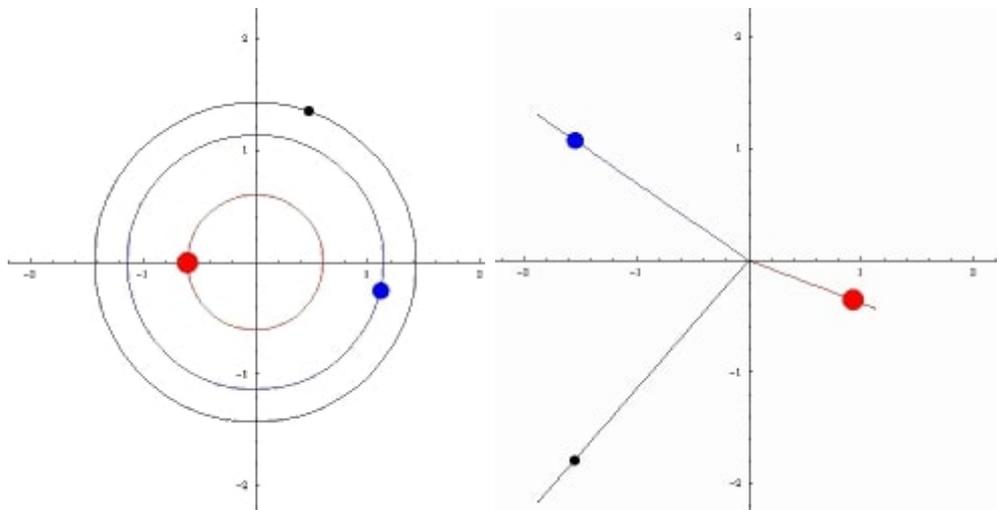


Figura 2.2: À esquerda, uma Solução de Equilíbrio Relativo, à direita, uma Solução Homotética, animação [17].

Proposição 2.9. Se $\mathbf{r}(t)$ é uma solução homográfica, então essa solução não pode ser homotética e equilíbrio relativo simultaneamente.

Demonstração. De fato, suponhamos por absurdo que isso seja verdade. Então \mathbf{r}_i é homotética e equilíbrio relativo, ou seja,

$$\mathbf{r}_i = \nu \mathbf{r}_i(t_0)$$

$$\mathbf{r}_i = \Omega \mathbf{r}_i(t_0).$$

Então, temos

$$\nu \mathbf{r}_i(t_0) = \Omega \mathbf{r}_i(t_0) \Rightarrow (\nu I_d - \Omega) \mathbf{r}_i(t_0) = 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

Assim, $\nu(t) = 1$ e $\Omega(t) = I_d$. Com isso $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t_0)$. Portanto, a solução é de equilíbrio. Mas não existem soluções de equilíbrio para o problema de n corpos. □

Teorema 2.10. *Se a solução homográfica não é flat, então é homotética, isto é, Ω é constante.*

Demonstração. Note que, se $n = 3$, a solução é sempre flat. Desse modo, vamos supor que $n > 3$. Então, como a solução não é flat, deve existir um instante t_0 tal que a configuração não é flat nesse instante. Escolhemos um corpo, com $i = \iota$, não situado no centro de gravidade O (não faz sentido físico ter mais que um corpo no centro de gravidade). A configuração dos corpos não pode ser colinear no instante t_0 , portanto, podemos encontrar um corpo, com $i = \nu$, que não esteja na direção de \mathbf{r}_ι . Consideremos outro corpo, com $i = \rho$, que não esteja no plano formado por \mathbf{r}_ι e \mathbf{r}_ν , então, claramente, obtemos

$$\det(\mathbf{r}_\nu(t_0), \mathbf{r}_\iota(t_0), \mathbf{r}_\rho(t_0)) \neq 0.$$

Para seguir a demonstração, primeiro vamos provar que $K = const$. De fato, como a solução é homográfica, segue que $K\mathbf{r}(t_0) = a$. Então, para $i = \iota, \nu, \rho$, temos

$$K(t)(\mathbf{r}_\iota, \mathbf{r}_\nu, \mathbf{r}_\rho) = (a_\iota, a_\nu, a_\rho) \Rightarrow K(t) = (a_\iota, a_\nu, a_\rho)(\mathbf{r}_\iota, \mathbf{r}_\nu, \mathbf{r}_\rho)^{-1},$$

pois como $\det(\mathbf{r}_\nu(t_0), \mathbf{r}_\iota(t_0), \mathbf{r}_\rho(t_0)) \neq 0$, segue que $(\mathbf{r}_\nu(t_0), \mathbf{r}_\iota(t_0), \mathbf{r}_\rho(t_0)) \neq 0$ é invertível, logo $K(t) = const$. Note que $(\Gamma^2)^T = \Gamma^2$, pois, $\Gamma^T = -\Gamma$, então, pela definição de K dada pela igualdade (2.2), temos que

$$K^T = \nu^2 \left[\ddot{\nu} I_d - 2\dot{\nu} \Gamma + \nu(\Gamma^2 + \dot{\Gamma}) \right].$$

Como $K = const$, temos que

$$\frac{1}{2}(K + K^T) = \nu^2 \ddot{\nu} I_d + \nu^3 \Gamma^2 = const,$$

segue que os elementos da diagonal dessa matriz são dados por

$$\begin{cases} \nu^2 \ddot{\nu} + \nu^3(-v_1^2 - v_2^2) = const \\ \nu^2 \ddot{\nu} + \nu^3(-v_3^2 - v_2^2) = const \\ \nu^2 \ddot{\nu} + \nu^3(-v_3^2 - v_1^2) = const \end{cases}$$

enquanto os elementos que não estão na diagonal são dados por

$$\begin{cases} \nu^3 v_1 v_2 = \text{const} \\ \nu^3 v_3 v_2 = \text{const} \\ \nu^3 v_3 v_1 = \text{const}. \end{cases}$$

Por esses sistemas, somando os termos dois a dois na diagonal da matriz

$$\frac{1}{2}(K + K^T),$$

temos que

$$\begin{cases} \nu^3(v_1^2 - v_2^2) = \text{const} \\ \nu^3(v_2^2 - v_3^2) = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu^3 v_1^2 = \text{const} \\ \nu^3 v_2^2 = \text{const} \\ \nu^3 v_3^2 = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu^{\frac{3}{2}} v_1 = \text{const} \\ \nu^{\frac{3}{2}} v_2 = \text{const} \\ \nu^{\frac{3}{2}} v_3 = \text{const} \end{cases},$$

então existe uma matriz constante Γ_0 e uma função real $f(t)$ tais que $\Gamma = f(t)\Gamma_0$. De fato, dos sistemas anteriores, se

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix},$$

então

$$\Gamma = \nu^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\nu^{\frac{3}{2}} v_3 & \nu^{\frac{3}{2}} v_2 \\ \nu^{\frac{3}{2}} v_3 & 0 & -\nu^{\frac{3}{2}} v_1 \\ -\nu^{\frac{3}{2}} v_2 & \nu^{\frac{3}{2}} v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pelos sistemas anteriores, concluimos que

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\nu^{\frac{3}{2}} v_3 & \nu^{\frac{3}{2}} v_2 \\ \nu^{\frac{3}{2}} v_3 & 0 & -\nu^{\frac{3}{2}} v_1 \\ -\nu^{\frac{3}{2}} v_2 & \nu^{\frac{3}{2}} v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz constante, segue que $\Gamma = \nu^{-\frac{3}{2}}\Gamma_0$. Pelo corolário 2.5, temos que a rotação ocorre em torno de um eixo fixo. Supondo que a rotação ocorre em torno do eixo z , temos que

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

logo $v_1 = v_2 = 0$ e $\dot{\theta} = v_3$.

O próximo passo é mostrar que a solução é homotética, ou seja, $\dot{\theta} = 0$ e $\nu \neq \text{const}$. De fato, seja $\mathbf{r}_i(t) = \nu \Omega \mathbf{r}_i(t_0)$, logo $\dot{\mathbf{r}}_i(t) = [\dot{\nu}(t)\Omega + \nu(t)\dot{\Omega}] \mathbf{r}_i(t_0)$ e que $\Omega \Omega^{-1} = I_d$, como

o momento angular é constante, temos

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\nu \Omega \mathbf{r}_i(t_0)) \times (\dot{\nu} \Omega + \nu \dot{\Omega}) \mathbf{r}_i(t_0) \\ &= \nu^2 \Omega \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{r}_i(t_0)) \times (\Omega^{-1} \dot{\Omega} \mathbf{r}_i(t_0)) = \nu^2 \Omega \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{r}_i(t_0)) \times (\Gamma \mathbf{r}_i(t_0)). \end{aligned}$$

Noque que

$$\Gamma \mathbf{r}_i(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{i1} \\ \mathbf{r}_{i2} \\ \mathbf{r}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_3 \mathbf{r}_{i2} \\ v_3 \mathbf{r}_{i1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$C = \nu^2 v_3 \Omega \sum_{i=1}^n \left(m_i \mathbf{r}_i(t_0) \times \frac{\Gamma \mathbf{r}_i(t_0)}{v_3} \right),$$

como

$$\left(\mathbf{r}_i(t_0) \times \frac{\Gamma \mathbf{r}_i(t_0)}{v_3} \right) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \mathbf{r}_{i1} & \mathbf{r}_{i2} & \mathbf{r}_{i3} \\ -\mathbf{r}_{i2} & \mathbf{r}_{i1} & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{r}_{i1}^2 + \mathbf{r}_{i2}^2) k,$$

segue da última igualdade e pela rotação ser em torno do eixo z , que

$$C = \nu^2 v_3 \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_{i1}^2 + \mathbf{r}_{i2}^2).$$

Se $\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_{i1}^2 + \mathbf{r}_{i2}^2) = 0$, então $\mathbf{r}_{i1} = \mathbf{r}_{i2} = 0$, e pela representação de \mathbf{r}_i , temos que os corpos estão situados no eixo z , mas isso contradiz o fato da solução não ser flat. Portanto, $\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_{i1}^2 + \mathbf{r}_{i2}^2) \neq 0$. Logo,

$$\frac{C}{\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{r}_{i1}^2 + \mathbf{r}_{i2}^2)} = \nu^2 v_3 \Rightarrow \nu^2 v_3 = \text{const},$$

como $\nu^2 v_3^2 = \text{const}$ e $\nu^3 v_3^2$, então

$$\frac{(\nu^2 v_3)^2}{\nu^3 v_3^2} = \text{const} = \nu.$$

Por outro lado, se $\nu = \text{const}$, então $\frac{1}{2}(K + K^T) = \nu^3 \Gamma$. Como $v_1 = v_2 = 0$, obtemos que $\det(K) = 0$. Mas anteriormente vimos que

$$K = (a_l, a_v, a_\rho)(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_\rho)^{-1}.$$

Concluimos que,

$$\det(K) = \det(a_l, a_v, a_\rho) \det(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_\rho)^{-1} \neq 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, $v_3 = \dot{\theta} = 0$, ν é não constante e $\Omega = I_d$. Isso prova o teorema. \square

Pelos Teoremas 2.6 e 2.10, temos que uma solução não planar pode não ser flat. Como corolário, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.11. *Se a solução homográfica do problema de n corpos não é planar, então é homotética.*

2.2 Teorema de Lagrange-Pizzetti

Para provar o Teorema de Lagrange-Pizzetti, primeiro vamos dar uma caracterização para algumas integrais primeiras para soluções homográficas planares. Já vimos que nesse caso podemos tomar $\mathbf{r}_{i1} = 0$ e o plano pode ser (xy) . Dessa forma, podemos escolher a rotação em torno do eixo z . Da proposição 1.31, segue que

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\Omega^{-1}\dot{\mathbf{r}}_i = (\dot{\nu}I_d + \nu\Gamma)\mathbf{r}_i(t_0)$, então $\dot{\mathbf{r}}_i = \Omega(\dot{\nu}I_d + \nu\Gamma)\mathbf{r}_i(t_0)$. Assim, temos que, a energia cinética é dada por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |(\Omega(\dot{\nu}I_d + \nu\Gamma)\mathbf{r}_i(t_0))|^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\Omega|^2 |(\dot{\nu}I_d + \nu\Gamma)|^2 |\mathbf{r}_i(t_0)|^2 \Rightarrow \\ T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{r}_i(t_0)|^2 (\dot{\nu}^2 + \nu^2 \dot{\theta}^2) \Rightarrow T = \frac{1}{2} I(t_0) (\dot{\nu}^2 + \nu^2 \dot{\theta}^2). \end{aligned}$$

Se $\mathbf{r}_i = \nu\Omega\mathbf{r}_i(t_0)$, então, pela expressão do momento de inércia, temos

$$I = \sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{r}_i|^2 \Rightarrow I = \sum_{i=1}^n m_i |\nu\Omega\mathbf{r}_i(t_0)|^2 \Rightarrow I = \nu^2 \sum_{i=1}^n m_i |\mathbf{r}_i(t_0)|^2 \Rightarrow I = \nu^2 I(t_0).$$

Utilizando a expressão do potencial, obtemos as implicações

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i \neq j}^n \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \Rightarrow U = \sum_{i \neq j}^n \frac{m_i m_j}{|\nu\Omega\mathbf{r}_i(t_0) - \nu\Omega\mathbf{r}_j(t_0)|} \Rightarrow U = \frac{1}{|\nu||\Omega|} \sum_{i \neq j}^n \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)|} \\ &\Rightarrow U = \frac{1}{\nu} \sum_{i \neq j}^n \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)|} \Rightarrow U = \nu^{-1} U(t_0). \end{aligned}$$

Agora, utilizando a definição de solução homográfica $\mathbf{r}_i = \nu\Omega\mathbf{r}_i(t_0)$, temos

$$\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} (\nu \cos \theta)\mathbf{r}_{i1}(t_0) - (\nu \sin \theta)\mathbf{r}_{i2}(t_0) \\ (\nu \sin \theta)\mathbf{r}_{i1}(t_0) + (\nu \cos \theta)\mathbf{r}_{i2}(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (\nu \dot{\cos} \theta)\mathbf{r}_{i1}(t_0) - (\nu \dot{\sin} \theta)\mathbf{r}_{i2}(t_0) \\ (\nu \dot{\sin} \theta)\mathbf{r}_{i1}(t_0) + (\nu \dot{\cos} \theta)\mathbf{r}_{i2}(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

depois de simplificações, chegamos à igualdade

$$\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = (0, 0, \dot{\theta}(\nu \mathbf{r}(t_0))^2).$$

Pelas expressões anteriores, o valor absoluto do momento angular total $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}_i$ pode ser expresso da forma

$$|\mathbf{K}| = \left| \sum_{i=1}^n m_i \dot{\theta}(\nu \mathbf{r}(t_0))^2 \right| \Rightarrow |\mathbf{K}| = \dot{\theta} \nu^2 I(t_0). \quad (2.10)$$

Como $\mathbf{K} = C$ é constante, por ser uma integral primeira para o movimento, segue que $\dot{\theta}$ não pode mudar o sinal durante o movimento. Portanto, podemos supor que a orientação do sistema de coordenadas é tal que a configuração gira no sentido anti-horário. Assim, temos $\dot{\theta} > 0$, fazendo sentido a expressão para o módulo do momento angular total. Agora podemos provar o teorema de Lagrange-Pizzetti.

Teorema 2.12. (*Lagrange-Pizzetti*)

- Uma solução homográfica é homotética se, e somente se, o momento angular total é zero.
- Uma solução é um equilíbrio relativo se, e somente se, é planar e gira com uma velocidade angular constante.

Demonstração. Vamos analisar separadamente o caso planar e não planar.

Caso planar: Como a solução é homográfica e planar, temos pela expressão (2.10) que

$$|\mathbf{K}| = \dot{\theta} \nu^2 I(t_0).$$

Como $\nu > 0$, temos que $|\mathbf{K}| = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = 0$. Além disso, $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \Omega(t) = I_d$. Então, por definição, a solução é homotética, o que prova o primeiro item. Por definição, para que a solução seja de equilíbrio relativo, devemos ter $\nu = \text{const} > 0$ e $\dot{\theta} \neq 0$. Segue da expressão (2.10) que $\mathbf{K} = C \neq 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = \text{const} \neq 0$. Reciprocamente, $\dot{\theta} = \text{const} \neq 0$, então, pela expressão (2.10), temos que $\nu = \text{const}$. Logo, a solução é de equilíbrio relativo.

Caso não planar: Como toda solução homográfica não planar é homotética, então, para o primeiro item, resta mostrar que $|\mathbf{K}| = 0$. De fato, como a solução é homotética, $\mathbf{r}_i = \nu \mathbf{r}_i(t_0)$, segue da definição de momento angular que

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}_i \Rightarrow \mathbf{K} = \sum_{i=1}^n m_i \nu \dot{\mathbf{r}}_i(t_0) \times \mathbf{r}_i(t_0) = 0.$$

O segundo item segue diretamente do corolário 2.11, já que não existe solução de equilíbrio relativo não planar.

□

Temos algumas consequências sobre soluções colineares para comentar a partir do Teorema de Lagrange-Pizzetti. Primeiro, para uma solução colinear ser equilíbrio relativo, é necessário não ser retilinear, mas isso não é suficiente. Segundo, se a solução for colinear e não retilinear, então possui plano invariante e portanto $\mathbf{K} = C \neq 0$. Além disso, é uma solução homográfica, mas, do primeiro item do teorema de Lagrange-Pizzetti, não é homotética. Por outro lado, se a solução homotética e colinear, então, pelo primeiro item do Teorema de Lagrange-Pizzetti, temos $\mathbf{K} = C = 0$. E portanto essa solução é homográfica e retilinear.

Capítulo 3

Configurações Centrais

O objetivo deste capítulo é apresentar as configurações centrais. Estabeleceremos relações entre soluções homográficas e configurações centrais, comentaremos o problema da finitude e mostraremos alguns resultados sobre a posição dos corpos numa configuração central.

Definição 3.1. Uma configuração de n corpos, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$, onde $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^d$ com $d = 1, 2$ ou 3 e massas m_i , é dita *configuração central* se existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \lambda m_i \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.1)$$

A equação das configurações centrais também pode ser escrita da seguinte forma

$$M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) + \lambda \mathbf{r} = 0,$$

onde $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$ é a matriz das massas. Para $d = 3$, M possui dimensão $3n \times 3n$. De outra forma, podemos dizer que configurações centrais são posições especiais das partículas, onde o vetor aceleração é proporcional ao vetor posição, e a constante de proporcionalidade λ é a mesma para todos os corpos. Encontrar configurações centrais é um problema algébrico e não da dinâmica, como buscar estabilidade ou periodicidade soluções.

No caso onde o potencial depende apenas das distâncias mútuas, segue que a expressão (3.1) assume a forma

$$\sum_{j \neq i} m_i m_j |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^\alpha (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) + \lambda m_i \mathbf{r}_i = 0.$$

Quando $\alpha = -1$, recaímos no caso newtoniano. Sendo $I = \sum_j m_j |\mathbf{r}_j|^2$, a expressão (3.1) assume a forma

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} + 2\lambda \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}_i} = 0. \quad (3.2)$$

Vamos mostrar que $\lambda > 0$. De fato, como U é homogênea de grau -1 e I é homogênea de grau 2 , temos

$$\sum \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{r}_i = -U \text{ e } \sum \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \mathbf{r}_i = 2I, \quad (3.3)$$

tomando o produto interno da expressão (3.2) por \mathbf{r}_i , obtemos que

$$-U + \lambda I = 0,$$

logo

$$\lambda = \frac{U}{2I} > 0.$$

Portanto, a equação (3.2) pode ser escrita como

$$2IU \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} + U^2 \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}_i} = 0.$$

Concluimos que as massas m_i formam uma configuração central se, e somente se, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ satisfaz as equações $\frac{\partial IU^2}{\partial \mathbf{r}_i} = 0$. Isto é, se, e somente se, \mathbf{r} é um ponto crítico da função IU^2 .

O próximo resultado dá uma caracterização para as soluções homotéticas.

Proposição 3.2. *Se $\mathbf{r}(t_0)$ é uma configuração central com constante λ e ν uma solução para o problema de Kepler unidimensional*

$$\ddot{\nu} = \frac{-\lambda}{\nu^2(t)}, \quad (3.4)$$

então $\mathbf{r}(t)$ é uma solução homotética do problema de n corpos. Além disso, toda solução homotética tem a forma (3.4).

Demonstração. Substituindo $\mathbf{r} = \nu \cdot \mathbf{r}(t_0)$ na equação (1.1), temos

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\nu}(t) \cdot \mathbf{r}_i(t_0) &= \sum \frac{m_i m_j (\nu(t) \cdot \mathbf{r}(t_0)_i - \nu(t) \cdot \mathbf{r}_j(t_0))}{|\nu(t) \cdot \mathbf{r}_i(t_0) - \nu(t) \cdot \mathbf{r}_j(t_0)|^3} \\ \ddot{\nu}(t) \cdot \mathbf{r}(t_0) &= \frac{1}{\nu^2(t)} \sum \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0))}{|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)|^3} \\ \ddot{\nu}(t) \cdot \nu^2(t) &= \frac{1}{\mathbf{r}(t_0)} \sum \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0))}{|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)|^3}, \end{aligned}$$

como o segundo membro da ultima igualdade é não nulo para todo $\mathbf{r}(t_0)$, então a equação é satisfeita se, e somente se, existe uma constante $-\lambda$ tal que

$$\ddot{\nu}(t) \cdot \nu^2(t) = -\lambda$$

e

$$\lambda \mathbf{r}_i(t) = \sum \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0))}{|\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0)|^3}.$$

□

O próximo resultado mostra que as configurações centrais possuem uma relação muito forte com as soluções homográficas

Teorema 3.3. (*Teorema de Laplace*). *Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução homográfica, então, para cada instante t_0 , os corpos formam uma configuração central.*

Demonstração. Vamos analisar o caso planar e não planar separadamente.

Caso planar: Identificando \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 , a solução homográfica pode ser expressa da seguinte forma

$$\mathbf{r}_i(t) = \varphi(t) a_i, \quad (3.5)$$

onde $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $a_i \in \mathbb{C}$ são constantes. Como o produto de números complexos para cada t , então geometricamente temos em cada instante uma rotação seguida de uma homotetia, logo a solução definida dessa forma é homográfica. Então, substituindo (3.5) em (1.1), segue que

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\varphi}(t) a_i &= \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\varphi(t) a_i - \varphi(t) a_j|^3} (\varphi(t) a_i - \varphi(t) a_j) \Rightarrow \\ m_i (\varphi(t) \ddot{a}_i) &= \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|^3} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|a_i - a_j|^3} (a_i - a_j). \end{aligned}$$

Assim, temos

$$|\varphi(t)|^3 \varphi^{-1}(t) \ddot{\varphi}(t) = \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{|a_i - a_j|^3} (a_i - a_j) a_i^{-1}, \quad (3.6)$$

como o lado esquerdo da expressão (3.6) não depende do tempo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\varphi(t)|^3 \varphi^{-1}(t) \ddot{\varphi}(t) = -\lambda$, portanto

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{\lambda \varphi(t)}{|\varphi(t)|^3}. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.7) em (3.6), temos

$$-\lambda a_i = \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{|a_i - a_j|^3} (a_i - a_j) \Rightarrow \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{|a_i - a_j|^3} (a_i - a_j) + \lambda a_i = 0$$

como essas relações não dependem do tempo, para cada t_0 fixado, $\mathbf{r}(t_0)$ é uma configuração central.

Caso não-planar: Uma solução homográfica não planar é necessariamente homotética, assim $\mathbf{r}_i(t) = \nu(t)\mathbf{r}_i(t_0)$, para algum t_0 . Substituindo essa expressão na relação do problema de n corpos (1.1), o resultado segue análogo à proposição 3.2, já que $\ddot{\nu}$ pode ser escrito em função de t_0 na equação do problema de n corpos, assim $\mathbf{r}(t_0)$ é uma configuração central para cada t_0 fixado. Isso conclui a prova.

□

O próximo resultado serve como recíproca para o teorema anterior.

Teorema 3.4. *Seja $\mathbf{r}(t_0)$ uma configuração central para os n corpos. Então existem funções $\nu(t)$ e $\Omega(t)$, tal que a solução homográfica $\mathbf{r}(t)$ é da forma $\mathbf{r}(t) = \nu(t)\Omega(t)\mathbf{r}(t_0)$, ou seja, $\mathbf{r}(t_0)$ serve de condição inicial para essa solução.*

Demonstração. Vamos analisar dois casos.

Caso Planar :

Da observação (3.20), toda configuração central planar da origem a um equilíbrio relativo que consequentemente é uma solução homográfica.

Caso não Planar :

Seja $\mathbf{r}(t_0)$ uma configuração central não planar com $\lambda > 0$, se existe uma solução homográfica não planar, então essa solução deve ser homotética. Por outro lado, pela proposição 3.2, temos que uma solução com condição inicial formando uma configuração central é homotética para o problema de n corpos se, e somente se, satisfaz o problema de Kepler, ou seja,

$$\mathbf{r}(t) = \nu(t)\mathbf{r}(t_0) \Leftrightarrow \ddot{\nu}(t)\nu^2(t) = -\lambda$$

então $\mathbf{r}(t)$ é uma solução homotética para o problema de n corpos.

□

O próximo resultado mostra que uma configuração central é invariante por dilatações e por rotações relativas ao centro de massa.

Teorema 3.5. *Seja $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ uma configuração central, então*

a) $\bar{\mathbf{r}}_i = \alpha\mathbf{r}_i$, $\alpha > 0$, $i = 1, \dots, n$ é uma configuração central .

b) $\hat{\mathbf{r}}_i = \Omega\mathbf{r}_i$, $\Omega \in O(3)$, $i = 1, \dots, n$ é uma configuração central.

Demonstração. Vamos provar primeiro o item a). De fato,

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}_j} U(\bar{\mathbf{r}}_i) &= \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j|^3} (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j) = \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\alpha \mathbf{r}_i - \alpha \mathbf{r}_j|^3} (\alpha \mathbf{r}_i - \alpha \mathbf{r}_j) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \nabla_{\mathbf{r}_j} U(\mathbf{r}_j).\end{aligned}$$

Como \mathbf{r} é uma configuração central, temos $\nabla_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}_i) = \lambda m_i \mathbf{r}_i$. Portanto,

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}_i} U(\bar{\mathbf{r}}_i) &= \frac{1}{\alpha^2} U(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{\alpha^2} m_i \mathbf{r}_i \\ &= \frac{\alpha}{\alpha} \frac{\lambda}{\alpha^2} m_i \mathbf{r}_i = \frac{\lambda}{\alpha^3} m_i \alpha \mathbf{r}_i = \frac{\lambda}{\alpha^3} m_i \bar{\mathbf{r}}_i\end{aligned}$$

denotando $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\alpha^3}$, temos $\nabla_{\mathbf{r}_i} U(\bar{\mathbf{r}}_i) = \bar{\lambda} m_i \bar{\mathbf{r}}_i$. Logo $\bar{\mathbf{r}}$ é uma configuração central. Podemos provar o item b) de maneira análoga, basta notar que

$$\nabla_{\mathbf{r}_i} U(\mathbf{r}_i) = \lambda m_i \mathbf{r}_i,$$

multiplicando ambos os membros por $\Omega \in SO(3)$, temos

$$\Omega \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \Omega \lambda m_i \mathbf{r}_i \Rightarrow \frac{\Omega}{|\Omega|} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \Omega \lambda m_i \mathbf{r}_i,$$

pois $|\Omega| = 1$, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\Omega \mathbf{r}_i - \Omega \mathbf{r}_j|^3} (\Omega \mathbf{r}_i - \Omega \mathbf{r}_j) &= \lambda m_i \Omega \mathbf{r}_i \Rightarrow \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\Omega \mathbf{r}_i - \Omega \mathbf{r}_j|^3} (\Omega \mathbf{r}_i - \Omega \mathbf{r}_j) = \lambda m_i \Omega \mathbf{r}_i \Rightarrow \\ &\sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j|^3} (\hat{\mathbf{r}}_i - \hat{\mathbf{r}}_j) = U(\hat{\mathbf{r}}_i) = \lambda m_i \hat{\mathbf{r}}_i.\end{aligned}$$

Concluimos que $\hat{\mathbf{r}}_i$ é uma configuração central. \square

Devido a esse resultado, podemos definir uma relação de equivalência sobre configurações centrais da seguinte forma: dizemos que duas configurações centrais estão relacionadas quando podemos passar de uma para outra por meio de uma rotação e dilatação.

3.1 Localização de Partículas numa Configuração Central

Os próximos dois resultados são devidos a C. Conley. O objetivo é mostrar como eles nos dão boas ideias de como localizar uma partícula numa configuração central. Mas,

antes, é necessário fazer alguns comentários sobre fluxo de soluções e campo de vetores para o problema de n corpos. Mais detalhes sobre a localização de partículas podem ser encontrados em [13].

Do ponto de vista dinâmico, as configurações centrais podem ser vistas como ponto de equilíbrio de determinados fluxos gradientes. Tomando a métrica

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \mapsto \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{r}^T M \mathbf{r}$$

Seja $S = \{\mathbf{r} : \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = 1, \sum m_i \mathbf{r}_i = 0\}$, o elipsoide unitário das massas, com referencial baricêntrico. Note que, se S está contido em um subespaço de \mathbb{R}^{3n} de dimensão $3n - 3$, temos que S possui dimensão $3n - 4$. Como sabemos que uma configuração central é invariante por rotação e translação, então não existe perda de generalidade em tomar \mathbf{r} restrito à esfera S .

Proposição 3.6. *O campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \mathbf{r}$ é gradiente para o potencial restrito à esfera S , com respeito à métrica \langle, \rangle . Além disso, os pontos de equilíbrio do campo são exatamente as configurações centrais em S .*

Demonstração. Vamos provar que \mathbf{F} é tangente a S e para todo $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{r}} S$, espaço tangente a S em \mathbf{r} , a derivada de U em \mathbf{r} na direção do vetor \mathbf{u} é dada por

$$DU(\mathbf{r})(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{u} \rangle.$$

De fato, como \mathbf{r} é normal a S em relação à métrica definida \langle, \rangle , temos

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{r} \rangle = \langle M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \langle M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle + U(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle.$$

Utilizando a homogeneidade do potencial, obtemos

$$\langle M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle + U(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = \mathbf{r}^T M M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) = -U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) = 0$$

logo $\langle \mathbf{F}, \mathbf{r} \rangle = 0$, assim \mathbf{F} é tangente a S . Tomando $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{r}} S$, temos $\langle \mathbf{u}, \mathbf{r} \rangle = 0$ e portanto

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{u} \rangle = \langle M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \mathbf{r}, \mathbf{u} \rangle = \langle M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}), \mathbf{u} \rangle + U(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r}, \mathbf{u} \rangle = \langle M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}), \mathbf{u} \rangle.$$

Da definição da métrica \langle, \rangle , segue que

$$\langle M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}), \mathbf{u} \rangle = (M^{-1} \nabla U(\mathbf{r}))^T M \mathbf{u} = \nabla U(\mathbf{r})^T (M^{-1})^T M \mathbf{u} = DU(\mathbf{r}) \mathbf{u}.$$

Assim, se $\bar{\nabla}$ for o gradiente de U , temos $\bar{\nabla}|_S = 0$, desde que a configuração central esteja na esfera. Concluimos que as configurações centrais são pontos de equilíbrio para o problema. □

Definição 3.7. Seja $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ uma configuração central planar do problema de n corpos e L uma reta fixa no plano, vamos denotar por

$$\angle(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, L)$$

o ângulo formado por L e a reta que liga as partículas \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j . Além disso, seja $\Theta(\mathbf{r}, L) = \max\{\angle(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, L) | i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}$. Note que $\Theta(\mathbf{r}, L)$ é nulo se, e somente se, \mathbf{r} é paralelo a L . E por fim, seja $\Theta(\mathbf{r}) = \min_L \Theta(\mathbf{r}, L)$, o qual é nulo se, e somente se, \mathbf{r} é colinear ao longo de alguma reta.

Observação 3.8. A função $\Theta(\mathbf{r})$ mede o quanto uma configuração deixa de ser colinear. Como exemplifica a figura 3.1:

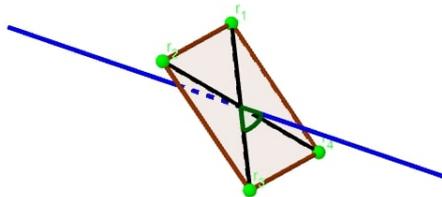


Figura 3.1: Os pontos em verde representam os corpos. Em azul temos a reta L e, em vermelho, temos uma configuração em forma de quadrado com o ângulo $\Theta(\mathbf{r}) = 67,5^\circ$, ver [13].

Proposição 3.9. Θ é uma função contínua em $S \setminus \Delta$

Demonstração. Note que a função $\angle(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, L)$ é contínua em $S \setminus \Delta$, se fixarmos índices i, j e fixarmos L . Dessa forma, $\Theta_L(\mathbf{r})$ também é contínua para L fixado, pois o máximo $\angle(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, L)$ é atingido para um conjunto finito de pares de índices i, j . Por outro lado, como $\Theta(\mathbf{r})$ é apenas a minimização de $\Theta_L(\mathbf{r})$ sobre L e somente os ângulos estão envolvidos, podemos restringir a L , a reta passando pela origem. Como o conjunto de retas passando pela origem é compacto, temos que $\Theta(\mathbf{r})$ é contínua. \square

O próximo resultado é conhecido como Teorema Bissetor, ou Teorema da Mediatriz, o qual possui aplicações no problema de 3 corpos, como veremos adiante. Esse teorema possui como base uma construção feita usando o plano bissetor. Para essa construção, consideremos: O segmento de reta $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$ que liga a posição de dois corpos; β , o plano bissetor desse segmento; um vetor $\mathbf{u} \in \beta$ perpendicular ao segmento $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$; e um plano γ , que contém o segmento e é normal ao vetor \mathbf{u} . Dessa forma, β e γ dividem o espaço em 4 quadrantes, como mostra a figura 3.2.

Teorema 3.10. (*Teorema Bissetor de Conley*) Dada uma configuração central planar de n corpos e escolhidas arbitrariamente duas massas m_i e m_j com posições \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j , se um dos cones abertos formados pelo bissetor, definido a partir de \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j , possuir algum elemento de \mathbf{r} , o outro cone também possui pontos de \mathbf{r} , em outras palavras, se os $(n - 2)$ corpos restantes pertencerem a apenas um dos cones, então a configuração não é central.

Demonstração. Ver [13] □

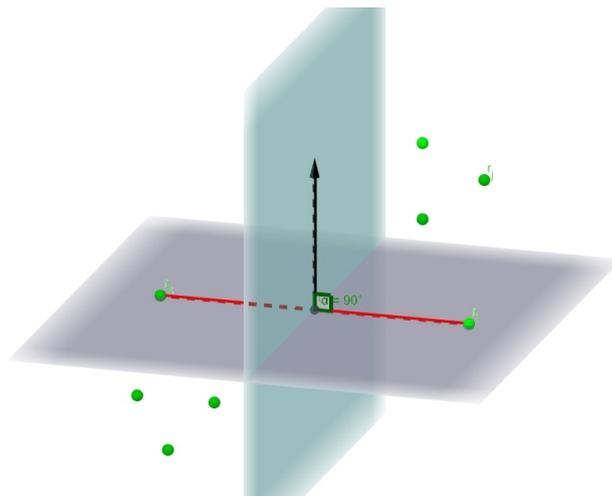


Figura 3.2: Essa figura representa um caso no qual, pelo Teorema Bissetor, os corpos não formam uma configuração central, onde o plano horizontal corresponde a λ , o plano vertical corresponde ao plano bissetor β , vetor \mathbf{u} em preto, o segmento $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$ em vermelho e os corpos estão representados por verde.

O lema a seguir nos diz intuitivamente que, se \mathbf{r} está próximo de L , então o fluxo gradiente também está próximo de L .

Lema 3.11. $\Theta(\mathbf{r})$ é estritamente decrescente em $\chi = \{\mathbf{r} \in S \mid 0 < \Theta(\mathbf{r}) \leq \frac{\pi}{4}\}$ ao longo do fluxo gradiente dado por

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla U(\mathbf{r})|_S,$$

onde S é o elipsoide unitário das massas.

Demonstração. Para provar que $\Theta(\mathbf{r}(t)) < \Theta(\mathbf{r}(t_0))$ para todo $t > t_0$, com L arbitrário, vamos escolher L adequado tal que $\Theta(\mathbf{r}(t_0)) = \Theta(\mathbf{r}(t_0), L)$. Por definição $\Theta(\mathbf{r}(t)) \leq \Theta(\mathbf{r}(t), L)$, então é suficiente ver que

$$\Theta(\mathbf{r}(t), L) < \Theta(\mathbf{r}(t_0), L).$$

Dessa forma, tomando índices i, j tal que

$$\Theta(\mathbf{r}(t_0), L) = \angle(\mathbf{r}_i(t_0) - \mathbf{r}_j(t_0), L) = \alpha,$$

é suficiente mostrar que o ângulo decresce para cada ponto escolhido, então a distância máxima entre $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ também decresce ao longo do fluxo gradiente. Note que $\dot{\alpha} < 0$, de fato, pela proposição 3.6, o fluxo gradiente para esse problema assume a forma

$$\dot{\mathbf{r}}_i = m_i^{-1} \nabla_i U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \mathbf{r}_i$$

e, portanto,

$$\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j = m_i^{-1} \nabla_i U(\mathbf{r}) - m_j^{-1} \nabla_j U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})[\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j].$$

Vale recordar da Álgebra Linear que o ângulo α entre dois vetores genéricos \mathbf{u}, \mathbf{w} é dado pela relação, $\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{w}|}$, sendo assim, seja \mathbf{v} um vetor unitário ao longo de L , tal que $\cos(\alpha(t)) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j}{|\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j|} \cdot \mathbf{v}$ é não negativo, derivando essa expressão, segue que

$$-\sin \alpha(t) \dot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j}{|\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j|} \cdot \left(\mathbf{v} - \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{v}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} [\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j] \right).$$

Note que $\mathbf{u} = \left(\mathbf{v} - \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \mathbf{v}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right)$ é a componente de \mathbf{v} projetada no plano bissetor e ortogonal ao plano determinado por \mathbf{v} e $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, então a derivada ao longo do fluxo assume a forma

$$-\sin \alpha(t) \dot{\alpha}(t) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j|} (m_i^{-1} \nabla_i U(\mathbf{r}) - m_j^{-1} \nabla_j U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})[\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j]) \cdot \mathbf{u},$$

como $\mathbf{u} \perp (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, temos que $(U(\mathbf{r})[\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j]) \cdot \mathbf{u} = 0$, logo

$$\begin{aligned} -\sin \alpha(t) \dot{\alpha}(t) &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j|} (m_i^{-1} \nabla_i U(\mathbf{r}) - m_j^{-1} \nabla_j U(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \sum_{k \neq i, j} m_k \left[\frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^3} \cdot \mathbf{u} - \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|^3} \cdot \mathbf{u} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Note que, sobre $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$, podemos construir cones de ângulo $\Theta(\mathbf{r})$, com os eixos centrados sobre a reta que contém $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, assim as massas das partículas \mathbf{r}_k com $k \neq i, j$ estão na direção de L , sobre os cones ou sobre a reta que contém o segmento $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. A interação desses cones é dada pelo segmento $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ e a metade exterior dos cones, como

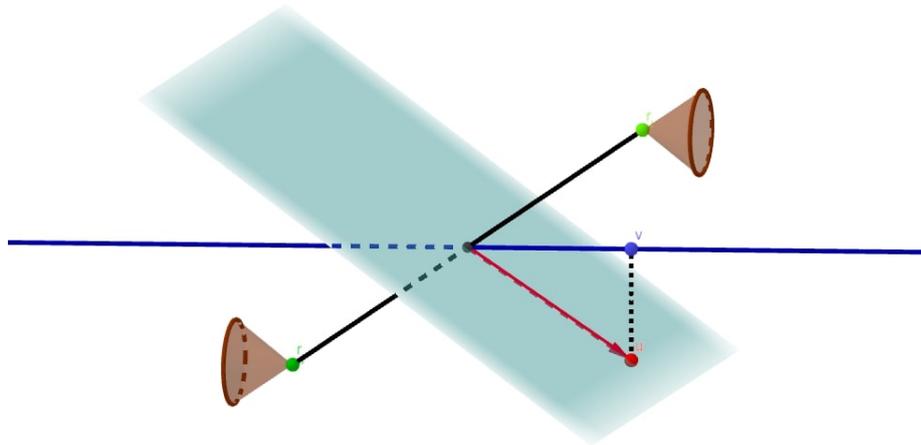


Figura 3.3: Os pontos em verde representam os corpos \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j . Em azul, temos o vetor \mathbf{v} sobre a reta L e, em vermelho, temos o vetor \mathbf{u} .

está representado na figura 3.3. Mais precisamente, como $\Theta(\mathbf{r}(t_0)) \leq 45^\circ$, pelo teorema bissetor, a metade desses cones se encontram em lados opostos da reta que contém o segmento $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. Resta mostrar que todos os termos da soma (3.8) são não-negativos. De fato, analisando cada possível posição para as massas de \mathbf{r}_k , temos:

- Se $i \leq k \leq j$, temos \mathbf{r}_k sobre a reta determinada por \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j , nesse caso

$$(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)\mathbf{u} = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)\mathbf{u} = 0,$$

dessa forma, na expressão (3.8), temos

$$\sum_{j < k < i} m_k \left[\frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)\mathbf{u}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j)\mathbf{u}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|^3} \right] = 0.$$

- Se $k > i$, então \mathbf{r}_k está na metade direita do cone centrado em \mathbf{r}_i . Nesse caso, $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{u} > 0$, assim, na expressão (3.8), temos

$$\sum_{k > i, j} m_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|^3} \right] \cdot \mathbf{u} > 0, \quad (3.9)$$

pois, como \mathbf{r}_k está na metade direita do cone, obtemos

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3} > \frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3}.$$

Logo, a expressão (3.9) é necessariamente não-negativa.

- Se $k < j$, então \mathbf{r}_k está na metade esquerda do cone centrado em \mathbf{r}_j . Nesse caso, $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{u} < 0$, assim, na expressão (3.8), temos

$$\sum_{k < i, j} m_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|^3} \right] \cdot \mathbf{u} > 0, \quad (3.10)$$

pois, como \mathbf{r}_k está na metade esquerda do cone, temos

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3} < \frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3}.$$

Logo, a expressão (3.10) é necessariamente não-negativa.

Dessa forma, a expressão (3.8) é não-negativa, como $0 < \Theta(\mathbf{r}(t_0)) < 45^\circ$ e $-\sin(\alpha(t)) < 0$, temos $\dot{\alpha}(t) < 0$. Portanto $\Theta(\mathbf{r})$ é estritamente decrescente. \square

Teorema 3.12. *Não existe configuração central planar, com $0 < \Theta(\mathbf{r}) \leq \frac{\pi}{4}$.*

Demonstração. Por definição, $\Theta(\mathbf{r})$ é positiva definida, pelo lema anterior, $\dot{\Theta}(\mathbf{r})$ é negativa definida em χ , então $\Theta(\mathbf{r})$ é uma função de Lyapunov em χ , ao longo do fluxo dado por $\dot{\mathbf{r}} = \nabla U(\mathbf{r})|_S$, portanto a configuração tende a ser cada vez mais colinear, ou seja, a configuração está arbitrariamente próxima de uma configuração colinear, que por sua vez não é central. \square

Observação 3.13. O teorema acima também prova que o conjunto χ é positivamente invariante, e portanto seu complemento contém todas as configurações centrais não colineares, ou seja, qualquer configuração central é colinear ou está distante de ser uma configuração colinear.

Voltando para o Teorema Bissetor, valem as seguintes observações:

Observação 3.14. Uma demonstração do teorema Bissetor, pode ser dada da forma : Considere $\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j$ para o fluxo gradiente. Se \mathbf{r} é uma configuração central, então $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_j = 0$. Mas, a fórmula para $(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) \cdot \mathbf{u}$ é a mesma que aparece na demonstração do Lema 3.11. Dessa forma, pelos mesmos argumentos do lema 3.11, temos que esta é estritamente positiva, o que é uma contradição.

Observação 3.15. Como foi visto, o Teorema Bissetor é muito importante visto que, dentre suas aplicações, permite garantir que a única configuração central não colinear para o problema de 3 corpos é aquela em que as 3 massas encontram-se nos vértices de um triângulo equilátero, que correspondem à solução de Lagrange. De fato, entre 3 massas, dado um par de massas m_i e m_j com $i \neq j$, a massa restante deve estar no plano bissetor relativo a reta definida por \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j , caso contrário deveria estar em um dos quatro quadrantes abertos e isso violaria o Teorema Bissetor. Como as massas m_i e

m_j são arbitrárias, devem estar nos vértices de um triângulo equilátero. Um argumento similar mostra que as configurações centrais não planares possíveis para o problema de 4 corpos, de massas arbitrárias, é tal que os corpos devem estar nos vértices de um tetraedro regular.

3.2 Configurações Centrais Colineares

Uma direção natural para estudar configurações centrais é analisar o caso colinear. Vamos assumir que $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^n$, com $i = 1, \dots, n$ e o conjunto C dado por

$$C = \{\mathbf{r} \in \mathbf{R}^n \setminus \Delta : \sum m_i \mathbf{r}_i = 0, \sum m_i r_i^2 = 1\},$$

então C é um subconjunto aberto $n - 2$ dimensional do elipsoide (topologicamente uma esfera S^{n-2}).

Para $n = 2$, toda configuração é colinear ao longo de alguma reta e toda configuração é central. Para $n = 3$, C é topologicamente um círculo com 6 pontos excluídos (interseções com o plano $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3$). Uma interpretação mais visual pode ser encontrada em [13]. Com isso, temos que, no todo, existem $3! = 6$ componentes conexas para C , correspondendo a 6 ordenações das partículas ao longo da reta. Fixada uma ordenação tal como $\mathbf{r}_1 < \mathbf{r}_2 < \mathbf{r}_3$, temos que $U|_C \rightarrow \infty$, quando $\mathbf{r} \rightarrow \Delta$, então $U|_C$ tem um mínimo em cada componente conexa, claramente temos um ponto crítico em cada componente para $U|_C$. Além disso, como C é um conjunto invariante para o fluxo gradiente, o gradiente de $U|_S$ é tangente a C , então o ponto crítico de $U|_C$ é também ponto crítico para $U|_S$. A unicidade dos pontos críticos em cada componente vem do que foi obtido sobre configurações centrais de Euler, ver [13]. Devido à simetria do problema, obtemos que, para $n = 3$, existem $\frac{3!}{2} = 3$ configurações centrais colineares.

3.3 Finitude de Configurações Centrais

Um questionamento que surgiu durante os estudos sobre configurações centrais diz respeito à existência de um número finito, $n \in \mathbb{N}$, para o qual pode-se escolher ao menos um conjunto de massas positivas, de modo que forme uma configuração central. Essa foi uma questão proposta por Wintner. Posteriormente, Winter e Smale propuseram o que se tornaria um dos principais problemas em aberto sobre configurações centrais, o qual está presente na lista de Smale, ver [25], conhecido como 6º problema de Smale, sendo enunciado da forma

Conjectura 3.16. *Para um dado conjunto de n corpos com massas positivas m_1, \dots, m_n , o número de classes de equivalência de configurações centrais planares é finito?*

No caso onde $n = 2$, existe somente uma solução, a qual é dada por uma cônica que depende do valor da energia com o centro de massa em um de seus focos. Assim, existe apenas uma classe de configurações centrais para $n = 2$. Quando $n = 3$, Euler mostrou, em 1767, que existem exatamente 3 soluções colineares, as quais correspondem a 3 classes de configurações centrais. Até hoje, a conjectura não foi completamente respondida para o caso geral de n corpos, entretanto, devido a esforços de muitos pesquisadores, alguns casos particulares foram respondidos. Abaixo, listamos alguns dos resultados mais conhecidos :

- Se $n = 3$, existem ao todo 5 classes de configurações centrais, três classes devido a Euler e duas devido Lagrange, ver [9] e [11], respectivamente.
- Moulton provou que, para n corpos colineares, existem $\frac{n!}{2}$ classes configurações centrais. Ver [19].
- Albouy provou que, para 4 corpos com massas iguais, existem 50 classes de configurações centrais, Ver [2].
- Hampton e Mockel, provaram que, para $n = 4$, o número de classes é finito e está entre 32 a 8472 classes, usando Teoria BBK. Ver [18].
- Albouy e Kaloshin provaram a finitude para o problema de 5 corpos, ver [3].
- Para $n > 5$, o problema encontra-se em aberto.

Moulton generalizou o resultado obtido por Euler sobre configurações centrais no problema de 3 corpos, para o caso colinear de n corpos, na forma do teorema abaixo.

Teorema 3.17. *O número de configurações colineares de um problema de n corpos é igual a $\frac{n!}{2}$.*

Demonstração. Ver [13] e [19]. □

O questionamento que pode surgir é o que acontece quando algum dos corpos possui massa negativa. Em [13], é apresentado um exemplo interessante em que, quando $n = 5$ e um dos corpos tem massa negativa, o número de configurações centrais não é finito.

3.4 Exemplo de Configurações Centrais

O próximo teorema, devido a Euler, ver [9], mostra quantas configurações centrais existem para o problema colinear de três corpos.

Teorema 3.18. (Euler) *Para o problema de três corpos colinear, com 3 partículas de massa m_1, m_2, m_3 localizadas sobre uma linha reta, existem exatamente 3 configurações centrais colineares, uma para cada ordenação das partículas módulo rotação por π .*

Demonstração. Primeiro, note que as equações das configurações centrais podem ser escritas da forma

$$\begin{aligned}\lambda \mathbf{r}_1 &= \frac{m_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} + \frac{m_3}{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)^2} \\ \lambda \mathbf{r}_2 &= \frac{-m_1}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2} + \frac{m_3}{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)^2} \\ \lambda \mathbf{r}_3 &= \frac{-m_1}{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)^2} - \frac{m_2}{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)^2},\end{aligned}$$

utilizando-se a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned}x &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ y &= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \\ z &= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = x + y,\end{aligned}$$

as equações podem ser escritas em termos das variáveis x, y , da forma

$$\begin{aligned}\lambda x &= -\frac{m_1 + m_2}{x^2} + \frac{m_3}{y^2} - \frac{m_3}{(x + y)^2} \\ \lambda y &= -\frac{1}{(x + y)^2} + \frac{m_1}{x^2} - \frac{m_2 + m_3}{y^2}.\end{aligned}$$

Como estamos analisando a classe de configurações centrais, podemos normalizar fazendo $x = 1$. Dessa maneira, a primeira equação assume a forma

$$\lambda = (m_1 + m_2) + \frac{m_3}{y^2} - \frac{m_3}{(1 + y)^2},$$

substituindo essa expressão na segunda expressão, obtemos

$$-(m_1 + m_2) + \frac{m_3}{y} - \frac{m_3 y}{(1 + y)^2} + \frac{m_1}{(1 + y)^2} - m_1 + m_2 + m_3 = 0.$$

Por cálculo direto, obtemos o polinômio de Euler

$$\begin{aligned}P(y) &= -(m_1 + m_2)y^5 - (3m_1 + 2m_2)y^4 - (3m_1 + m_2)y^3 + \\ &+ (2m_3 + m_2)y^2 + (3m_3 + 2m_2)y + (m_2 + m_3) = 0.\end{aligned}$$

Pela regra de sinais de Descartes, o polinômio de Euler tem exatamente uma raiz positiva. Fixando a posição de duas partículas, existe uma terceira partícula, tal que esses três corpos formam uma configuração central. \square

Outro exemplo de configuração central pode ser dado pela solução encontrada por Lagrange para o problema de três corpos, a qual pode ver vista em [13], onde mostra que essa solução forma uma configuração central para um instante de tempo fixado.

3.5 Configurações Centrais e Equilíbrios Relativos

Essa seção tem como objetivo mostrar a relação entre configurações centrais e equilíbrios relativos. E, por fim, concluir que toda configuração central planar dá origem a um equilíbrio relativo, argumento este que foi usado na demonstração do teorema 3.4.

Considere $\mathbf{r}(t)$ uma solução planar para o problema de n corpos, tomando o sistema de coordenadas (ξ, η) não inerciais com o velocidade angular ω constante. Se $\mathbf{r}_i(t) = (x_i, y_i)$ no sistema inercial, então $\mathbf{r}_i(t) = \Omega(t)\zeta_i$ onde $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$. De maneira mais explícita, temos

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i(t) \\ \eta_i(t) \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, derivando $\mathbf{r}(t) = \Omega(t)\zeta_i$, em relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i(t) &= \dot{\Omega}(t)\zeta_i(t) + \Omega(t)\dot{\zeta}_i(t) \\ \ddot{\mathbf{r}}_i(t) &= \ddot{\Omega}(t)\zeta_i(t) + 2\dot{\Omega}(t)\dot{\zeta}_i(t) + \Omega(t)\ddot{\zeta}_i(t), \end{aligned}$$

substituindo essas expressões na equação (1.1), temos

$$m_i(\ddot{\Omega}\zeta_i + 2\dot{\Omega}\dot{\zeta}_i + \Omega\ddot{\zeta}_i) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (3.11)$$

Note que

$$\dot{\Omega} = \begin{pmatrix} -\omega \sin \omega t & -\omega \cos \omega t \\ \omega \cos \omega t & -\omega \sin \omega t \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

e

$$\ddot{\Omega} = - \begin{pmatrix} \omega^2 \cos \omega t & -\omega^2 \sin \omega t \\ \omega^2 \sin \omega t & \omega^2 \cos \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \Omega, \quad (3.13)$$

substituindo as expressões (3.12) e (3.13) na equação (3.11), obtemos

$$m_i(-\omega^2\Omega\zeta_i + 2\Omega \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \dot{\zeta}_i + \Omega\ddot{\zeta}_i) = \Omega \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \Rightarrow$$

$$m_i(-\omega^2\zeta_i + 2\omega \begin{pmatrix} -\dot{\eta}_i \\ \dot{\xi}_i \end{pmatrix} + \ddot{\zeta}_i) = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i},$$

analisando cada coordenada de ζ , chegamos ao sistema

$$\begin{cases} m_i(-\omega^2\xi_i - 2\omega\dot{\eta}_i + \ddot{\xi}_i) = \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \\ m_i(-\omega^2\eta_i + 2\omega\dot{\xi}_i + \ddot{\eta}_i) = \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \end{cases} \quad (3.14)$$

A próxima proposição nos diz que, a partir do sistema (3.14), conseguimos uma condição necessária e suficiente para uma solução ser equilíbrio relativo.

Proposição 3.19. $\mathbf{r}(t)$ é uma solução de equilíbrio relativo para o problema (1.1) se, e somente se, $\mathbf{r}_i(t_0) = (\xi_i(t_0), \eta_i(t_0))$ é uma solução para o sistema

$$\begin{cases} -\omega^2\xi_i(t) = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \\ -\omega^2\eta_i(t) = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \end{cases} \quad (3.15)$$

onde ω é uma velocidade angular constante.

Demonstração. Como $\mathbf{r}_i(t)$ é uma solução de equilíbrio relativo, então existe ω tal que para esse valor, o sistema (3.15) possui uma solução de equilíbrio, ou seja,

$$\begin{cases} \xi_i(t) = \xi_i(t_0), \sum_i m_i \xi_i(t_0) = 0 \\ \eta_i(t) = \eta_i(t_0), \sum_i m_i \eta_i(t_0) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Dessa forma, $\ddot{\xi}_i(t) = \dot{\xi}_i(t) = 0$, $\ddot{\eta}_i(t) = \dot{\eta}_i(t) = 0$. Logo, o sistema (3.14) assume a forma (3.15), além disso, como $\xi_i(t) = \xi_i(t_0)$ e $\eta_i(t) = \eta_i(t_0)$, temos

$$\begin{cases} -\omega^2\xi_i(t_0) = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \\ -\omega^2\eta_i(t_0) = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \end{cases}$$

Reciprocamente, seja $(\xi_i(t), \eta_i(t)) = \zeta_i(t)$ uma solução do sistema, (3.15) então podemos tomar $\mathbf{r}(t) = \Omega(t)\zeta_i(t)$, logo

$$\mathbf{r}_i(t) = (\xi_i(t) \cos \omega t - \eta_i(t) \sin \omega t, \xi_i(t) \sin \omega t + \eta_i(t) \cos \omega t) \quad (3.17)$$

pelo sistema (3.15), obtemos que $\xi_i(t) = \frac{-1}{\omega^2 m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i}$, cujo lado direito é constante, para todo t , então $\ddot{\xi}_i(t) = \dot{\xi}_i(t) = 0$. Com o mesmo argumento, obtemos que $\ddot{\eta}_i(t) = \dot{\eta}_i(t) = 0$, derivando duas vezes a expressão (3.17) e substituindo $\ddot{\xi}_i = \dot{\xi}_i = \ddot{\eta}_i = \dot{\eta}_i = 0$. Obtemos que $\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \dot{\mathbf{r}}_i(t) = 0$ e, portanto, $\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i(t_0)$. Dessa forma, a solução é um equilíbrio relativo.

□

Observação 3.20. Como consequência desse resultado, temos que toda configuração central planar dá origem a uma solução de equilíbrio relativo. De fato, fazendo $\zeta_i(t_0) = a_i$ e $\lambda = \omega^2$, temos, na expressão (3.15), que

$$-\lambda m_i a_i = \sum_{i \neq j}^n \frac{m_i m_j (a_i - a_j)}{|a_i - a_j|^3}, i = 1, \dots, n.$$

Capítulo 4

Conjectura de Saari

Dentro da Mecânica Celeste, existem muitos problemas em aberto, um deles é a conjectura de Saari, que relaciona equilíbrios relativos e o momento de inércia. Entre 1960 a 1980, Saari publicou uma série de artigos e, em um deles, estabeleceu o que é conhecido como Conjectura de Saari:

Conjectura 4.1. *(Saari - 1970) Toda solução do problema de n corpos que tem o momento de inércia constante é um equilíbrio relativo.*

Segundo Saari [22], assumir que a conjectura é verdade poderia implicar em algumas consequências na astronomia, como por exemplo, se uma galáxia está contida em um plano, então nessa galáxia os corpos movimentam-se como corpos rígidos. Nesse capítulo, faremos um breve estudo sobre a conjectura de Saari, além de apresentarmos alguns resultados obtidos e analisarmos o caso colinear para o potencial que depende apenas das distâncias mútuas. Por último, faremos uma generalização para a conjectura de Saari, conhecida como Conjectura Homográfica de Saari, apresentando e comentando alguns resultados. Abaixo, citamos alguns resultados importantes obtidos sobre a conjectura nos últimos anos.

- 1 McCord, em [12], mostrou que as únicas soluções para o problema planar de 3 corpos com massas iguais que possui momento de inércia constante são equilíbrios relativos, reduzindo o problema à localização de raízes de várias funções de variável-singular e investigando essas raízes para o caso de massas iguais.
- 2 Diacu, Pérez-Chavela e Santoprete, em [7], mostraram a veracidade da conjectura para o problema colinear de n corpos com o potencial, dependendo apenas das distâncias mútuas entre os corpos. Nas seções seguintes discutiremos mais detalhes sobre artigo.
- 3 Moeckel, em [16], mostrou que uma solução do problema de três corpos planar tem momento de inércia constante se, e somente se, essa solução é um equilíbrio relativo,

em particular, concluindo que a conjectura de Saari é verdadeira nesse caso, para isso, a ideia da prova passa por derivar a expressão momento de inércia para obter três equações algébricas para as três distâncias mútuas do problema de 3 corpos planar, utilizando o programa Mathematica para analisar as raízes das equações .

4.1 Resultados sobre o problema de n corpos em \mathbb{R}^{dn}

Nessa seção, vamos apresentar alguns resultados sobre o problema de n corpos para \mathbb{R}^{dn} que terão muita importância para a próxima seção nesse capítulo. As principais referências são [1], [4], [5], [15] e [14].

De [11] o potencial do problema de n -corpos pode ser escrito como

$$U = \sum_{i < j} m_i m_j \Phi(r_{ij}^2)$$

onde $\Phi(s) = Gs^\kappa$, com $\kappa = -\frac{1}{2}$ e $s = r_{ij}^2$, no caso newtoniano.

Definição 4.2. Uma configuração do problema de n corpos tal que

$$A^T B - B A = 0$$

é dita *balanceada* ou *equilibrada*, onde

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \frac{m_1}{r_{12}^2} & \cdots & \frac{m_1}{r_{1n}^2} \\ \frac{m_2}{r_{12}^2} & A_{22} & \cdots & \frac{m_2}{r_{2n}^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{m_n}{r_{1n}^2} & \frac{m_1}{r_{2n}^2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

com

$$A_i i = - \sum_{i \neq j} A_{ij} = - \sum_{i \neq j} \frac{m_i}{r_{ij}^3}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_1}{r_{12}^2} & \cdots & \frac{m_1}{r_{1n}^2} \\ r_{12}^2 & 0 & \cdots & r_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{1n}^2 & r_{2n}^2 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

O termo “equilibrado” surge do fato de que essas configurações são exatamente aquelas que admitem um equilíbrio relativo no espaço de dimensão grande. Toda configuração central é equilibrada, mas, por outro lado, existem configurações balanceadas que não são configurações centrais. Ver [1] e [15]. Uma abordagem para configurações balanceadas é dada por Albouy, em [1], nesse artigo, é apresentado um tratamento algébrico,

utilizando endomorfismo. Outra abordagem, utilizando matriz de Gram, é feita em [15], por Moeckel, onde é mostrado que ambas as abordagens são equivalentes.

Daqui em diante, nos referiremos às soluções homográficas cuja razão das distâncias mútuas é dada por um valor que também depende das massas dos corpos por *soluções homográficas com configurações centrais*, isto está relacionado à configuração ser equilibrada, pois, como foi visto da definição, esse tipo de configuração depende de duas matrizes, entre elas a matriz A , que depende não apenas das distâncias mútuas como também das massas dos corpos envolvidos. Vale lembrar que uma solução homográfica possui a razão das distâncias mutuas constante, mas Euler, ao pesquisar as soluções do problema de 3 corpos colineares para cada instante de tempo, notou que, para cada escolha de massas arbitrária, a razão entre as distâncias mútuas dependia das massas, então podemos dizer que a solução de Euler é homográfica com configuração central.

O próximo resultado diz que uma solução homográfica pode deixar de ser equilibrada em dimensão maior que 2. Esse resultado será importante para o desenvolvimento da seção seguinte.

Proposição 4.3. *Se $\mathbf{r}(t)$ é uma solução homográfica, então essa solução é equilibrada, ou seja, central. Em dimensão maior que dois, se o grau de homogeneidade 2κ é -2 ($\kappa = -1$, isso é o mesmo que $\alpha = -2$), podem existir exceções.*

Demonstração. Ver [1]. □

Em [1], a desigualdade de Sundman é tratada de maneira mais ampla, pois está relacionada ao momento angular que, por sua vez, depende da dimensão do problema. Para isso, são utilizadas as reduções por translações e rotações para comparar o problema com o caso planar de dois corpos e, para a prova do resultado, é necessária a utilização de um estrutura hermitiana no espaço euclidiano, ver [1].

Teorema 4.4. *(Desigualdade de Sundman) Se $z = (x, y) \in 2\mathcal{D}$, então*

$$2IT - J^2 \geq C^2,$$

onde \mathcal{D} é o espaço das disposições e C é valor do momento angular.

Demonstração. Ver [1],[5] e [4]. □

Corolário 4.5. *Quando a igualdade*

$$2IT - J^2 = C^2$$

é satisfeita, a solução é homográfica.

Demonstração. Ver[1] e [4] □

4.2 Caso Colinear da Conjectura de Saari

O objetivo dessa seção é apresentar os resultados estudados no artigo *Saari's Conjecture for the Collinear n -Body Problem*, escrito por Diacu, Chavela e Santoprete [7]. Esse artigo procura estudar a conjectura de Saari para o caso colinear de n corpos com o potencial dependendo apenas das distâncias mútuas. O artigo possui três resultados principais: O primeiro resultado mostra que, se a solução é colinear, com potencial que depende apenas das distâncias mútuas, e momento angular é não nulo, então a solução deve ser homográfica. Esse resultado generaliza aquele obtido no teorema 2.3, pois naquela ocasião o potencial é newtoniano. O segundo resultado do artigo mostra que, se a solução for colinear com momento angular não nulo e o potencial depende apenas das distâncias mútuas, então, nesse caso, a conjectura de Saari é verdadeira. O último teorema mostra que, se a solução colinear do problema de n corpos dada por um potencial de grau $\alpha = -2$ (ou $\kappa = -\frac{1}{2}$) tem o momento angular não nulo, então a solução é homográfica com configuração central, isto é, a solução é equilibrada. Vamos recordar as equações do movimento, fixando o centro de massa na origem do sistema de coordenadas, se todos os corpos estão contidos inicialmente uma uma reta e projetados no mesmo plano, então, devem permanecer nesse plano. Consequentemente, se existem soluções em que as n massas estão sempre em linha reta, as órbitas são curvas planas. Além disso, como os n corpos são colineares, podemos tomar o problema em \mathbb{R}^{2n} .

Para o restante dessa seção, vamos supor que $\xi\eta$ é o plano que contém os n corpos e denotar por $\mathbf{r} = (\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_n, \eta_n)$ as respectivas coordenadas desses corpos e, m_1, \dots, m_n suas massas. Dessa forma, temos a seguinte equação do movimento:

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, & (i = 1, \dots, n) \\ \frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, & (i = 1, \dots, n) \\ U = \sum_{i \neq j}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^\alpha} \\ r_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2} \end{cases} \quad (4.1)$$

Teorema 4.6. (Teorema A) *Se \mathbf{r} é uma solução colinear do problema de n corpos com um potencial que depende apenas das distâncias mútuas e o momento angular é não nulo, então essa solução é homográfica.*

Demonstração. Como \mathbf{r}_i e \mathbf{F}_{ij} são colineares, temos

$$\mathbf{K}_i = \sum_{j \neq i}^n m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = 0,$$

segue, da equações do movimento (4.1), que

$$K = \sum_{i=1}^n m_i \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \frac{d\theta_i(t)}{dt} = c, \quad (4.2)$$

onde $r_i = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}$, e K é a componente do momento angular total ortogonal ao movimento.

Note que \mathbf{K}_i é um vetor constante. De fato, se K_i é a componente do vetor \mathbf{K}_i , ortogonal ao plano do movimento, então $K_i = c_i$, onde c_i é uma constante. Assim, podemos escrever cada componente do momento angular da forma

$$K_i = c_i = m_i r_i^2(t) \omega_i(t), \quad (4.3)$$

onde $\omega_i = \frac{d\theta_i}{dt}$ é a velocidade angular. Como os corpos estão na mesma reta, temos que ω é o mesmo para todos os corpos, ou seja,

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \dots = \frac{d\theta_n}{dt}$$

Considerando a razão entre as componentes do momento angular de dois corpos quaisquer, usando a equação 4.3 e o fato de $\omega(t)_i$ ser constante para todos os corpos, obtemos

$$\frac{c_i}{c_j} = \frac{m_i r_i^2}{m_j r_j^2},$$

isso implica que

$$\frac{r_i(t)}{r_j(t)} = \sqrt{\frac{m_j c_i}{m_i c_j}} = a_{ij},$$

onde a_{ij} são constantes. Isto é, se uma solução colinear existe, a razão entre as distâncias dos corpos à origem é constante, e conseqüentemente as distâncias mútuas são constantes. Dessa forma, se n corpos são colineares, a razão entre suas coordenadas também é constante e igual à razão das suas distâncias à origem. Conseqüentemente, a configuração geométrica dos corpos permanece similar para todos os corpos quando o tempo variar. Portanto o movimento é rígido e, concluímos que, a solução é homográfica. □

Corolário 4.7. *(Conjectura de Saari no caso colinear) Considerando o problema de n corpos dado por um potencial que depende apenas das distâncias mútuas, então as únicas soluções que são colineares têm momento angular não-nulo e possuem momento de inércia constante são os equilíbrios relativos.*

Demonstração. Pelo teorema 4.6, temos que a componente do momento angular total que é ortogonal ao plano do movimento pode ser escrita como

$$K = \sum_{i=0}^n K_i = \sum_{i=0}^n \omega(t) m_i r_i^2.$$

Pelo teorema 4.6, segue que, se a solução é colinear, então ω é constante, dessa forma a equação (4.2) pode ser escrita como

$$K = \omega \sum_{i=0}^n m_i r_i^2. \quad (4.4)$$

Utilizando a definição de momento inércia em (4.4), temos

$$K = \omega I = C, \quad (4.5)$$

onde C é constante, logo ω é constante para todo t , pois K e I são constantes. Para concluir a demonstração, resta provar que as distâncias mútuas são constantes, mas isso segue da equação (4.3). Então mostramos que, se o momento de inércia é constante, as correspondentes soluções possuem movimento rígido e giram com velocidade angular constante, ou seja, são equilíbrios relativos. Isso completa a demonstração da conjectura de Saari para esse caso. □

Observação 4.8. Vale ressaltar que acabamos de mostrar que, se I é constante, então ω é o mesmo para todo t . Também vale observar que o corolário 4.7 poderia ser obtido de outra forma, notando que, se o momento angular é não nulo, a solução é colinear não retilinear e por isso, para cada instante t , existe uma reta tal que os n corpos estão localizados, permitindo que a solução seja colinear para cada instante. Assim, podemos olhar para a solução colinear $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ com apenas um corpo movendo em relação a um eixo fixo passando pela origem do sistema, com isso, podemos calcular o momento angular em função do momento de inércia e sua velocidade angular ω pela expressão $K = I\omega$.

O próximo teorema apresenta uma resposta à seguinte questão: “existe alguma solução colinear que seja homográfica com configurações centrais?”. A resposta para essa pergunta é positiva se o potencial é homogêneo de grau $\alpha \neq -2$, de maneira mais precisa temos :

Teorema 4.9. *(Teorema B) Apenas as soluções colineares do problema de n corpos com momento angular não nulo, dado por um potencial com grau de homogeneidade $\alpha \neq -2$, são movimentos homográficos com configuração central. Em particular, se o momento de inércia é constante, a solução é equilíbrio relativo.*

Demonstração. Da equação (4.3), temos $K_i = c_i = m_i r_i^2(t)\omega(t)$, olhando para a derivada de K_i , temos

$$\dot{K}_i = 2m_i r_i \dot{r}_i \omega(t) + m_i r_i^2 \dot{\omega}(t) = 0,$$

assim, obtemos

$$\dot{r}_i = -\frac{r_i \dot{\omega}}{2\omega}. \quad (4.6)$$

Com essa preparação, podemos reescrever a energia cinética como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i \dot{r}_i^2 + m_i r_i^2 \omega^2), \quad (4.7)$$

substituindo a equação (4.6) na equação (4.7), temos

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(m_i \frac{r_i^2 \dot{\omega}^2}{4\omega^2} + m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{r_i^2 \dot{\omega}^2}{4\omega^2} + \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega^2 \right). \quad (4.8)$$

Lembrando que o momento de inércia pode ser escrito da forma $I = \frac{C}{\omega}$, substituindo em (4.8), temos que

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{C \dot{\omega}^2}{4\omega^3} + C\omega \right) \quad (4.9)$$

$$= \frac{C}{2} \left(\frac{\dot{\omega}^2}{4\omega^3} + \omega \right). \quad (4.10)$$

Agora, considerando a desigualdade de Sundman

$$2TI - J^2 \geq |C|^2,$$

onde

$$J = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i \dot{r}_i.$$

Usando (4.6), podemos escrever

$$J = - \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \frac{\dot{\omega}}{2\omega} = -I \frac{\dot{\omega}}{2\omega},$$

como $C = I\omega$, obtemos

$$J = - \frac{\dot{\omega}}{2\omega^2} C. \quad (4.11)$$

Através das equações (4.10) e (4.11), podemos escrever o lado esquerdo da desigualdade de Sundman, da forma

$$2TI - J^2 = \frac{C^2}{\omega} \left(\frac{\dot{\omega}^2}{4\omega^3} + \omega \right) - \left(-\frac{\dot{\omega}C}{2\omega^2} \right)^2 = C^2,$$

a qual torna-se uma igualdade nesse caso. Portanto as soluções são homográficas e, como U é homogênea de grau $\alpha \neq -2$, pela proposição 4.3 a solução é homográfica e equilibrada, ou seja, homográfica com configuração central, portanto apenas as soluções colineares não retilineares com o potencial possuindo grau de homogeneidade $\alpha \neq -2$ podem ser homográficas com configuração central. Para concluir o teorema, vale notar que, se a solução é homográfica com configuração central, então por ser colinear não retilinear, $\mathbf{K} \neq 0$, e como toda solução colinear é planar, o Teorema de Lagrange-Pizzetti garante que a solução é de equilíbrio relativo. Caso a solução seja um movimento rígido, a hipótese do momento de inércia ser constante nos permite utilizar os mesmos argumentos do corolário 4.7, concluindo que a solução é de equilíbrio relativo. \square

Observação 4.10. Uma demonstração alternativa e também presente no artigo [7] para o Teorema B pode ser feita notando que teorema 4.6 garante que a solução é homográfica para qualquer α . Pela proposição 4.3, se o potencial tem grau de homogeneidade $\alpha \neq -2$, então a solução homográfica é equilibrada, em particular homográfica com configuração central. Se o momento de inércia é constante, pelo corolário 4.7, a solução é de equilíbrio relativo para o potencial com qualquer grau de homogeneidade α , em particular se $\alpha \neq -2$, como se queria provar.

4.3 Conjectura Homográfica de Saari

Essa seção é baseada no artigo [8], onde F. Diacu, T. Fujiwara e M. Santoprete estenderam a conjectura de Saari. Para enunciar essa conjectura, vamos precisar da seguinte definição:

Definição 4.11. Seja $\mathbf{r}(t)$ uma solução do problema de n corpos, chamamos a *medida de configuração*, a função é dada por

$$UI^{1/2}.$$

A função $UI^{1/2}$ é homogênea de grau zero, invariante por contração, expansão e por rotação de configurações, pois U e I dependem apenas das distâncias mútuas. Portanto, essa função determina a forma como as configurações estão mudando, por isso $UI^{1/2}$ é chamada *medida de configuração*, a qual é muito útil para analisar movimentos homográficos. Com isso, podemos enunciar a conjectura homográfica de Saari da forma

Conjectura 4.12. *No problema de n corpos, toda solução com medida de configuração constante é uma solução homográfica.*

A conjectura homográfica de Saari é uma extensão da conjectura de Saari, pois, se o momento de inércia é constante, então, usando a identidade de Lagrange-Jacobi (1.3), $UI^{1/2}$ é constante. Nesse caso, uma solução homográfica corresponde a um equilíbrio relativo. Mas, poderíamos ter $UI^{1/2}$ constante, com U e I não constantes, por isso a conjectura homográfica de Saari cobre uma grande quantidade de órbitas. Daqui para frente, vamos assumir que a medida de configuração será sempre constante

$$\psi = UI^{1/2}.$$

A identidade de Lagrange-Jacobi (1.3) dá uma boa relação entre a segunda derivada do momento de inércia e ψ , lembrando que a energia cinética e a energia total são

dadas respetivamente por $T = \frac{1}{2} \sum_i \frac{|\dot{\mathbf{r}}_i|^2}{m_i}$ e $H = T - U$. Além disso,

$$\ddot{I} = 2 \sum_i \frac{|\mathbf{r}_i|^2}{m_i} - 2U \quad (4.12)$$

$$= 4H + 2U \quad (4.13)$$

$$= 4H + 4\psi I^{-1/2} \quad (4.14)$$

integrando a relação (4.14), obtemos

$$\frac{1}{2} \dot{I}^2 + (-4HI - 4\psi I^{-1/2}) = -2B, \quad (4.15)$$

onde B é uma constante de integração. Vamos escrever

$$\Phi(I) = -4HI - 4\psi I^{-1/2}$$

dessa forma, a equação (4.15), assume a forma

$$\frac{1}{2} \dot{I}^2 + \Phi(I) = -2B. \quad (4.16)$$

Note que $\Phi(I) \leq 0$. De fato,

$$\Phi(I) = -4HI - 4UI = -4I(H + U) = -4IT.$$

Além disso, a constante $B \geq 0$. De fato, combinando as relações (4.16) e (4.14), obtemos

$$4IT - 2B = \frac{1}{2} \dot{I}^2 = 2 \left(\sum \sqrt{m_i} \mathbf{r}_i \frac{\dot{\mathbf{r}}_i}{\sqrt{m_i}} \right)^2. \quad (4.17)$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$2 \left(\sum \sqrt{m_i} \mathbf{r}_i \frac{\dot{\mathbf{r}}_i}{\sqrt{m_i}} \right)^2 \leq 2 \left(\sum m_i |\mathbf{r}_i|^2 \right) \left(\sum \frac{|\dot{\mathbf{r}}_i|^2}{m_i} \right) = 4IT, \quad (4.18)$$

segue que

$$4IT - 2B \leq 4IT,$$

portanto $B \geq 0$. Note que, da igualdade em (4.18), temos que $B = 0$ se, e somente se, existe ν , que pode depender do tempo, tal que $\frac{\dot{\mathbf{r}}_i}{\sqrt{m_i}} = \nu \sqrt{m_i} \mathbf{r}_i$, isso é equivalente a

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \nu m_i \mathbf{r}_i,$$

ou seja, $B = 0$ se, e somente se, o movimento é homotético. Usando a equação (4.16), podemos estudar o comportamento do momento de inércia e as distâncias mútuas entre as partículas com ψ constante. Em particular, pode-se obter um resultado sobre colisão total.

Teorema 4.13. *Toda solução de colisão do problema de n corpos, com medida de configuração ψ constante, é homotética. Em outras palavras, a conjectura homográfica de Saari é verdade para o problema de n corpos com órbitas de colisão.*

Para o problema colinear de n corpos, é possível obter uma prova completa para a conjectura homográfica de Saari.

Teorema 4.14. *A conjectura homográfica de Saari é verdade para o problema de n corpos colinear.*

A ideia da prova passa por analisar dois casos:

- Se o momento angular $\mathbf{K} = 0$, o movimento necessariamente é uma colisão e, portanto, é uma colisão total, então, aplicando o teorema 4.13, obtemos o resultado.
- Se $\mathbf{K} \neq 0$, todas as partículas rodam com velocidade angular constante e o movimento corresponde a um equilíbrio relativo, então U e I são constantes e o resultado segue.

Observação 4.15. Note que a análise considerada no teorema 4.14 é a mesma feita para o Teorema de Lagrange-Pizzetti. Um estudo mais detalhado desse resultado pode ser encontrado no artigo [8], sobre Conjectura Homográfica de Saari para o problema de três corpos. Nesse artigo esse resultado é provado para o potencial que depende apenas das distâncias mútuas, ou seja, a medida de configuração é constante e assume a forma

$$\psi = UI^{-\alpha/2}.$$

Além desse resultado, nesse mesmo artigo, mostra-se a veracidade da conjectura para o problema de três corpos com massas iguais utilizando coordenadas de Fujiwara.

Referências

- [1] ALBOUY, A. **Le problème des n corps et les distances mutuelles**. Inventiones Mathematicae, New York, v.131, p. 151-184, 1998.
- [2] ALBOUY, A. **The symmetric central configurations of four equal masses**, In Hamiltonian Dynamics and Celestial Mechanics. Contemp. Math, v.198, 1996
- [3] ALBOUY, A.; KALOSHIN, V. **Finiteness of central configurations of five bodies in the plane**, Ann. of Math, v.176, p. 535-588, 2012.
- [4] CHENCINER, A. **The Lagrange of the N-body problem, a survey** arXiv:1111.1334 , 2011.
- [5] CHENCINER, A. **Introduction to the N Body problem** Disponivel em: <https://perso.imcce.fr/alain-chenciner/Ravello.1997.pdf>, 30 de janeiro de 2018.
- [6] CHENCINER, A.; MONTGOMERY, R. **A remarkable periodic solutions of the three body problem in the case of equal masses**. Annals of Mathematics, v. 152, p. 881-901, 2000.
- [7] DIACU, F.; PÉREZ-CHAVELA, E.; SANTOPRETE, M. **Saari's conjecture of N-body problem in the colinear case**. Trans.Amer.Math. Soc. v. 357, p. 4215-4223, 2005.
- [8] DIACU, F.; FUJIWARA, T.; PÉREZ-CHAVELA, E.; SANTOPRETE, M. **Saari's homographic conjecture of the three-body problem**. Trans.Amer.Math. Soc v. 360, No 12, p. 6447-6473, 2008.
- [9] EULER, L. **De moto rectilineo trium corporum se mutuo attahentium**, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., v. 11 , p. 144-151, 1767.
- [10] JULLIARD-TOSEL, E. **Bruns theorem: the proof and some generalization**, Celestial Mech. Dyn. Astr.,v. 76, p. 241-281, 2009 .
- [11] LAGRANGE, L.J. **Essai sur le problème des trois corps**, em Oeuvres, v. 6, p. 229-324, 1772.

- [12] McCORD, C. **Saari's conjecture for the three-body problem with equal masses**, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* v. 89, p. 99-118, 2004.
- [13] MOECKEL, R. **Celestial Mechanics-especially central configurations** Disponível em: <http://www-users.math.umn.edu/~rmoeckel/notes/CMNotes.pdf>, Acesso em 30 de janeiro de 2018.
- [14] MOECKEL, R. **On central configurations**, *Math. Zeit.*, v. 205, p. 499-517, 1990.
- [15] MOECKEL, R. **Lectures on central configurations** Disponível em: <http://www-users.math.umn.edu/~rmoeckel/notes/CentralConfigurations> Acesso em 30 de janeiro de 2018.
- [16] MOECKEL, R. **A computer-assisted proof of Saari's conjecture for the planar three body problem**, *Trans.Amer.Math. Soc.*, v. 367, p. 3105-3117, 2005.
- [17] MOECKEL, R. **Some Qualitative Features of the Three-Body Problem** *Contemporary Mathematics*, v. 81, p. 1-22 1988.
- [18] MOECKEL, R.; HAMPTON, M. **initeness of relative equilibria of the four-body problem** *Invent. Math.*, v. 163 , p. 289-312, 2006
- [19] MOULTON, F. R. **The Straight line solutions of the problem of n bodies.** *Ann of Math*, v. 12, 1910.
- [20] NEWTON, P. K. **The N-Vortex Problem**, *Analytical Techniques*. Springer, New York, 2001.
- [21] NEWTONO, I. **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**, Dawson Sons, London, 1st ed., 1687.
- [22] SAARI, D. **Colilisions, rings, and other Newtonian N-body problem**, *Regional conference series in mathematics, CBMS*; no. 104, 2002.
- [23] SAARI, D. **On bounded solutions of the n-body problem**, *Periodic Orbits, Stability and resonances*, Dordrecht, p. 76-81 , 1970.
- [24] SIMÓ, C. R. **New families of Solutions in N-Body Problems** *Congress of Mathematics*, v. 1, p. 101-115, Basel, 2000.
- [25] SMALE, S. **Mathematical problems for the next century**, *Math. Intel.* v. 20. 1998.
- [26] WINTNER, A. **The Analytical Foundations of Celestial Mechanics**. Princeton University Press. p. 1-423. 1941.