



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FELIPE FERREIRA OLIVEIRA

UNICIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES CAPILARES ESTÁVEIS
EM UMA BOLA

São Luís - MA
2018

FELIPE FERREIRA OLIVEIRA

UNICIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES CAPILARES ESTÁVEIS
EM UMA BOLA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes.

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Oliveira, Felipe Ferreira.

Unicidade de Hipersuperfícies Capilares Estáveis em uma Bola / Felipe Ferreira Oliveira. - 2018.
70 p.

Orientador(a): Ivaldo Paz Nunes.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018.

1. Estabilidade. 2. Fórmula do Tipo Minkowski. 3. Hipersuperfície Capilar. I. Nunes, Ivaldo Paz. II. Título.

FELIPE FERREIRA OLIVEIRA

UNICIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES CAPILARES ESTÁVEIS
EM UMA BOLA

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática
da Universidade Federal da Maranhão como
requisito parcial para obtenção do título de
Mestre em Matemática, aprovado em:

_____ / _____ / _____.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes (Orientador)

UFMA

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo

UFMA

Prof. Dr. Flausino Lucas Neves Spindola

UFMA

*A minha mãe, noiva, amigos
e professores pela paciência
e incentivo.*

Agradecimentos

À Deus que está presente em mim e em tudo que faço e que me sustentou em todas as dificuldades que atravessei durante essa longa jornada na UFMA, renovando minhas forças, minhas esperanças e minha fé.

Aos meus pais Biatriz e Valdeci, em especial a minha mãe, que com muito amor, além de me alfabetizar, plantou em mim o gosto pelos estudos e nunca me deixou desistir.

À minha irmã por todo o companheirismo e ajuda até aqui.

À minha noiva Andrezza Lizardi pelo incentivo, apoio nos momentos delicados e pelo amor. Um obrigado não bastaria.

Ao meu orientador professor Ivaldo Paz Nunes, pela paciência, disponibilidade, respeito, confiança e conselhos.

À Geilson e Gessearia Reis pelo apoio e incentivo a ingressar no mestrado em matemática.

Aos professores Arlane Manoel e Marcos Azevedo do curso de Ciência e Tecnologia da UFMA que sempre me incentivaram a prosseguir na matemática. Em especial agradeço ao professor Marcos por todas as conversas, conselhos e orações.

Agradeço à todos os professores do PPGMAT, em especial aos professores Adecarlos Carvalho, Ivaldo Paz, José Marão, Marcos Araújo, Maxwell Mariano e Sandra Imaculada que dividiram um pouco dos seus conhecimentos que foram fundamentais para o meu crescimento profissional e pessoal.

Aos amigos do PPGMAT, dos quais destaco Alan Kardec, Caio Renan, Carla Santos, Daylanne Ferreira, João Coelho, Márcio Eduardo, Marlon César, Ronaldo Ferreira e William Luís pelos momentos de descontrações, incentivos e pelas conversas sobre Matemática.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro que permitiu desenvolver este trabalho.

“Eu sou o A e o Ω, o princípio e o fim, o primeiro e o derradeiro.”

(Apocalipse 22:13 - Bíblia Sagrada)

Resumo

Neste trabalho estudaremos o resultado obtido por Guofang Wang e Chao Xia [14] que afirma que qualquer hipersuperfície capilar estável imersa em uma bola de uma forma espacial é totalmente umbílica. A construção de uma nova fórmula do tipo Minkowski foi uma das principais ferramentas usadas na solução do problema. A abordagem da prova também funciona para hipersuperfícies fechadas, ou seja, o trabalho fornece uma nova prova dos resultados de unicidade de Barbosa-do Carmo [4] e Barbosa-do Carmo-Eschenburg [5].

Palavras-chave: Hipersuperfície Capilar, Estabilidade, Fórmula do Tipo Minkowski.

Abstract

In this work, we will study the result obtained by Guofang Wang and Chao Xia [14], which states that any immersed stable capillary hypersurface in a ball in spaces forms are totally umbilical. One of the main tools in solving the problem is the construction of a new Minkowski type formula. The approach of the test also works for closed hypersurfaces, that is, the work offers a new proof of the results of the uniqueness of Barbosa-do Carmo [4] and Barbosa-do Carmo-Eschenburg [5].

Keywords: Capillary Hypersurfaces, Stability, Minkowski Type Formula.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	14
1.1 Variedades Diferenciáveis	14
1.1.1 Estrutura Diferenciável e Exemplos	14
1.1.2 Campos de Vetores e Colchete de Lie	16
1.2 Conceitos de Geometria Riemanniana	17
1.2.1 Métricas Riemannianas	17
1.2.2 Conexão de Levi-Civita	18
1.2.3 Curvatura	21
1.2.4 Derivada de Lie de Campos Tensoriais Covariantes	24
1.2.5 Imersão Isométrica	24
1.3 Operadores Diferenciais	27
1.4 Campos de Killing	29
2 Hipersuperfícies Capilares: definições e estabilidade	30
2.1 Variação admissível e funcional energia	30
2.2 Primeira e segunda variações da energia	32
3 Hipersuperfícies Capilares em uma Bola Euclidiana	42
3.1 Uma nova fórmula do tipo Minkowski em \mathbb{R}^{n+1}	42
3.2 Unicidade de hipersuperfícies capilares estáveis em uma bola Euclidiana . .	47
4 Hipersuperfícies Capilares em uma Bola de \mathbb{H}^{n+1} e \mathbb{S}^{n+1}	56
4.1 A nova fórmula do tipo Minkowski em \mathbb{H}^{n+1}	56
4.2 Unicidade de hipersuperfícies capilares estáveis em uma bola hiperbólica .	65
4.3 O caso \mathbb{S}^{n+1}	67
4.4 O problema exterior	68
4.5 Considerações finais	68
Referências	69

Introdução

Capilaridade é um fenômeno físico que ocorre quando dois materiais diferentes entram em contato mas não se misturam. Por exemplo, dado um recipiente B com uma gota de líquido incompressível T nele, a interface do líquido e do ar é uma superfície capilar M . Na ausência de gravidade, a superfície M é de curvatura média constante e o ângulo de contato de M com o bordo ∂B é constante. Um exemplo da ocorrência deste fenômeno pode ser observado na gota d'água (Figura 1) onde temos dois meios: a água e o ar. A interface entre esses meios é uma película denominada de superfície capilar.



Figura 1: Gota d'água: exemplo do fenômeno da capilaridade.

Matematicamente, superfícies (hipersuperfícies no contexto mais geral) capilares são pontos críticos de um funcional variacional energia geométrico relativo à variações que fixam o “volume” delimitado pela hipersuperfície. Exemplos de hipersuperfícies capilares são hipersuperfícies mínimas e hipersuperfícies com curvatura média constante (CMC) em B com bordo livre em ∂B e intersectando ∂B em um ângulo constante $\theta \in (0, \pi)$.

Uma hipersuperfície capilar é dita estável quando a segunda derivada do funcional energia é sempre maior ou igual a zero para variações que fixam o volume. A estabilidade de hipersuperfícies mínimas ou CMC desempenha um papel importante na geometria diferencial. Neste trabalho estamos interessados em investigar a estabilidade de hipersuperfícies capilares estáveis imersas em uma bola de uma forma espacial, a saber \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n e \mathbb{S}^n .

Para hipersuperfícies fechadas (i.e. compacta sem bordo) existe um resultado clássico de unicidade provado por Barbosa-do Carmo [4] (1984) e Barbosa-do Carmo-Eschenburg [5] (1988): *quaisquer hipersuperfícies fechadas de curvatura média constante estável imersa em uma forma espacial são esferas geodésicas*. Munida das propriedades da película de sabão, esse teorema possui a seguinte equivalência: *uma bolha de sabão não pode ter outra forma se não a esfera redonda*.

Em uma bola de uma forma espacial, sabe-se que as bolas totalmente geodésicas e as calotas esféricas são estáveis e, mais ainda, são minimizantes do funcional área. De fato, estas hipersuperfícies são soluções do problema isoperimétrico neste contexto, fato provado por Bukowski-Sperner [13] (1979) e Almgren [1] (1987).

Por outro lado, o problema de unicidade foi primeiro estudado por Ros-Vergasta [12] (1995) para hipersuperfícies mínimas ou CMC em caso de bordo livre, isto é, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e depois por Ros-Souam [11] (1997) para capilares em geral. Comparando com o resultado de unicidade para hipersuperfícies fechadas com curvatura média constante estáveis [12, 11], existia um problema interessante e bastante natural em aberto sobre a unicidade das hipersuperfícies capilares estáveis desde o trabalho de Ros-Vergasta e Ros-Souam:

Qualquer hipersuperfície capilar estável imersa em uma bola de uma forma espacial é totalmente umbílica?

A resposta dessa pergunta é o foco desta dissertação. Alguns resultados parciais já apontavam para uma resposta afirmativa.

- i)* Quando $n \geq 2$, $H = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, i.e, no caso de hipersuperfícies mínimas com bordo livre, Ros-Vergasta deram uma resposta afirmativa em [12] (1995) no caso em que o ambiente é uma bola geodésica em \mathbb{R}^n .
- ii)* Quando $n = 2$, $H = \text{const.}$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, i.e, no caso de superfícies CMC de dimensão 2 com bordo livre, Ros-Vergata [12] e Nunes [10] (2016) deram uma resposta afirmativa, também no caso Euclidiano.

Mais especificamente, em (ii) Ros-Vergasta provaram que qualquer superfície CMC estável com bordo livre na bola unitária em \mathbb{R}^3 é um disco totalmente geodésico, uma calota esférica ou tem gênero 1 com no máximo duas componentes no bordo. Recentemente, Nunes [10] conseguiu provar que este último caso não ocorre, completando dessa forma a classificação em dimensão 3. Em dimensão qualquer, E. Barbosa [3] conseguiu provar que toda hipersuperfície CMC estável com bordo livre na bola unitária Euclidiana é estrelada com respeito à origem.

A solução completa do problema veio apenas com o trabalho *Uniqueness of Stable Capillary Hypersurfaces in a Ball* de Guofang Wang e Chao Xia, publicado no arXiv em

23 de agosto de 2017 [14]. Neste artigo, os autores iniciam com o caso de hipersuperfícies capilares em uma bola geodésica Euclidiana e depois fazem o caso de hipersuperfícies capilares em uma bola geodésica de qualquer forma espacial. Uma das principais ferramentas na solução do problema é uma nova formula de Minkowski, obtida pelos pesquisadores.

A prova do teorema se desdobra em provar a unicidade para as três formas espaciais: o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n e a esfera \mathbb{S}^n . Organizamos o trabalho em quatro capítulos, no capítulo 1 é apresentado alguns resultados de variedades diferenciáveis e geometria Riemanniana necessários à leitura da dissertação. No capítulo 2 definimos hipersuperfície capilar e estabilidade. No capítulo 3 provamos a unicidade de hipersuperfícies capilares estáveis em uma bola unitária em \mathbb{R}^{n+1} . No capítulo 4, fornecemos uma prova detalhada da unicidade para o caso hiperbólico e esboçamos a prova do caso esférico. Também esboçamos a prova de uma variante do problema que será chamado de problema externo, aqui o bordo da hipersuperfície estará contido no bordo da bola da forma espacial porém a hipersuperfície está contida na região externa da bola.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Variedades Diferenciáveis

Neste capítulo fixaremos algumas notações e apresentaremos alguns resultados de variedades diferenciáveis e geometria Riemanniana necessários para o estudo de hipersuperfícies capilares. Salvo menção contrária, os resultados aqui apresentados encontram-se demonstrados em do Carmo [6] e Lee [8].

1.1.1 Estrutura Diferenciável e Exemplos

Definição 1.1.1. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n tais que:

- i) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$.
- ii) Para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ são diferenciáveis.
- iii) A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (i) e (ii).

O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ (ou aplicação) com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma *parametrização* (ou *sistema de coordenadas*) de M em p ; $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada *vizinhança coordenada* em p . Uma família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ satisfazendo (i) e (ii) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M .

Exemplo 1.1.1 (\mathbb{R}^n). O espaço euclidiano \mathbb{R}^n , com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável.

Exemplo 1.1.2 (\mathbb{H}^n). Considere o semiespaço superior de \mathbb{R}^n , $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Com a topologia induzida como aberto de \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n é uma variedade diferenciável de dimensão n .

Exemplo 1.1.3 (\mathbb{S}^n). Seja $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ a esfera unitária de raio 1. Defina uma aplicação $\pi_1 : \mathbb{S}^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (*projeção estereográfica a partir do polo norte*) que leva $p = (x_1, \dots, x_{n+1})$ de $\mathbb{S}^n - \{N\}$ na intersecção do hiperplano $x_{n+1} = 0$ com a reta que passa por p e N . Verifica-se que

$$\pi_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

A aplicação π_1 é diferenciável, injetiva e aplica $\mathbb{S}^n - \{N\}$ sobre o hiperplano $x_{n+1} = 0$. A projeção estereográfica $\pi_2 : \mathbb{S}^n - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a partir do polo sul sobre o hiperplano $x_{n+1} = 0$ possui as mesmas propriedades. Portanto, as parametrizações $(\mathbb{R}^n, \pi_1^{-1}), (\mathbb{R}^n, \pi_2^{-1})$ cobrem \mathbb{S}^n . Pode-se provar que a mudança de coordenadas é diferenciável, portanto, \mathbb{S}^n é uma variedade diferenciável de dimensão n .

Seja $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0\}$ e considere a topologia induzida de \mathbb{R}^n , $\bar{A} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0\}$. Identificaremos o hiperplano do \mathbb{R}^n , $x_1 = 0$, com \mathbb{R}^{n-1} . Sejam U e V conjuntos abertos de \bar{A} e $\mathbf{x} : U \rightarrow V$ um homeomorfismo, então a restrição de \mathbf{x} a $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ é um homeomorfismo de $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$ sobre $V \cap \mathbb{R}^{n-1}$. Por definição, uma função sobre \bar{A} é diferenciável quando é a restrição a \bar{A} de uma função diferenciável sobre \mathbb{R}^n .

Definição 1.1.2 (Variedade com bordo). Uma variedade diferenciável com bordo, de dimensão n , é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \bar{A} \rightarrow M$ de abertos U_α de \bar{A} tais que $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ satisfaz as três condições da Definição 1.1.1

Observemos que os abertos de \bar{A} que não contém pontos do hiperplano \mathbb{R}^{n-1} também são abertos de \mathbb{R}^n .

Os pontos de M^n que tem vizinhança homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^n são chamados pontos interiores, os demais pontos, ou seja, aqueles em que toda vizinhança possui pontos do hiperplano \mathbb{R}^{n-1} , são chamados pontos do bordo. Denotaremos o conjunto dos pontos do bordo por ∂M e o conjunto dos pontos interiores de por $\text{int } M$.

Teorema 1.1.1. *Seja M^n uma variedade com bordo, então ∂M é uma variedade sem bordo de dimensão $n - 1$.*

Definição 1.1.3 (Fibrado tangente). Seja M^n uma variedade munida da estrutura diferenciável $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. O *fibrado tangente* de M é a variedade diferenciável de dimensão $2n$

$$TM = \{(p, v) : p \in M \text{ e } v \in T_p M\},$$

com a estrutura diferenciável

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM,$$

definido por

$$\varphi_\alpha(x, v_1, \dots, v_n) = \left(x_\alpha, \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right), (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 1.1.4 (Variedade orientável). Seja M uma variedade diferenciável. Diz-se que M é *orientável* se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ tal que para todo par α, β , com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Caso contrário, diz-se que M é *não-orientável*. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo o item acima é chamada uma *orientação* de M .

1.1.2 Campos de Vetores e Colchete de Lie

Definição 1.1.5. Um *campo de vetores* X em uma variedade diferenciável M é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é a base associada a \mathbf{x} , $i = 1, \dots, n$. X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma parametrização.

Às vezes é conveniente pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$ do conjunto \mathcal{D} das funções diferenciáveis em M no conjunto \mathcal{F} das funções em M , definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), f \in \mathcal{D},$$

A interpretação de X como um operador em \mathcal{D} permite-nos considerar os inteiros de X . Por exemplo, se X e Y são campos diferenciáveis em M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Em geral, tais operações não conduzem a campos vetoriais, por envolverem derivadas de ordem superior à primeira. Entretanto temos o seguinte.

Lema 1.1.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.*

O campo vetorial Z dado pelo lema cima é chamado *colchete* $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y ; Z é evidentemente diferenciável.

Proposição 1.1.1. *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M , a, b são números reais, f, g são funções diferenciáveis, então*

- i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anticomutatividade*),
- ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (*linearidade*),
- iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*),
- iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.2 Conceitos de Geometria Riemanniana

1.2.1 Métricas Riemannianas

Definição 1.2.1. Uma *métrica Riemanniana* (ou *estrutura Riemanniana*) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM , que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{i,j}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .

Observação 1.2.1. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se *variedade Riemanniana*.

Exemplo 1.2.1 (Métrica Euclidiana). A variedade Riemanniana mais simples é o \mathbb{R}^n com a métrica Euclidiana

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Exemplo 1.2.2. Com a estrutura diferenciável do Exemplo (1.1.3) uma métrica na esfera unitária \mathbb{S}^n é dada por

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 + |x|^2)^2}.$$

Exemplo 1.2.3. O semiespaço \mathbb{H}^n munido com a métrica $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$ é conhecido como *espaço hiperbólico*.

Outro modelo do espaço hiperbólico é o modelo de bola de Poincaré. Sendo $\mathbb{B}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a bola unitária temos

$$\mathbb{H}^{n+1} = (\mathbb{B}^{n+1}, \bar{g}_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}), \quad e^{2u} = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2}.$$

Definição 1.2.2 (Isometria). Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado uma *isometria* se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_pM.$$

Exemplo 1.2.4 (Métrica induzida). Seja $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ uma imersão, isto é, f é diferenciável e $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$ para todo $p \in M, u, v \in T_pM$. Como df_p é injetiva, \langle, \rangle_p é positivo definido. As demais condições da Definição 1.2.1 podem ser verificadas.

A métrica de M é chamada então a *métrica induzida* por f , e f é uma *imersão isométrica*.

Definição 1.2.3 (Métrica conforme). Duas métricas \langle, \rangle e $\langle\langle, \rangle\rangle$ em uma variedade diferenciável M são *conformes* se existe uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, positiva, tal que para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_pM$ se tenha

$$\langle u, v \rangle_p = f(p) \langle\langle u, v \rangle\rangle_p.$$

Exemplo 1.2.5. As métricas dos Exemplos 1.2.2 e 1.2.3 são conformes.

1.2.2 Conexão de Levi-Civita

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe \mathcal{C}^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe \mathcal{C}^∞ definidas em M .

Definição 1.2.4 (Conexão afim). Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

$$i) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$$

$$ii) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$$

$$iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y,$$

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.2.1. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial $V \in \mathcal{X}(M)$ ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:*

$$i) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt},$$

ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I ,

iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$.

onde $W \in \mathcal{X}$ e $f \in \mathcal{D}(M)$.

Observação 1.2.2. A última linha de (iii) faz sentido, pois $\nabla_X Y(p)$ depende só do valor de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p . Com efeito, a parte (iii) da definição 1.2.4 permite mostrar que a noção de conexão afim é, de fato, uma noção local. Escolhemos um sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i \quad \text{e} \quad Y = \sum_j y_j X_j,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, teremos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) \\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} X_i(y_j) X_j. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Fazendo

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k, \quad (1.2)$$

concluimos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

o que mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X .

Em (1.2), as funções Γ_{ij}^k definidos em U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ são os *coeficientes da conexão* ∇ em U ou os *símbolos de Christoffel* da conexão. Em termos da métrica Riemanniana temos

$$\sum_l \Gamma_{ij}^k g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\},$$

onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa (g^{km}) , teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \quad (1.3)$$

A equação (1.3) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel. Em termos dos símbolos de Christoffel, a derivada covariante tem a expressão clássica

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} \right\} X_k. \quad (1.4)$$

Observe que a derivada covariante difere da derivada usual no espaço euclidiano por termos que envolvem os símbolos de Christoffel.

Definição 1.2.5 (Transporte paralelo). Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado *paralelo* quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.2.2. *Seja M um variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0), t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$.*

Proposição 1.2.3. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e somente se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I. \quad (1.5)$$

Teorema 1.2.1 (Conexão de Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo:*

- i) ∇ é simétrica, ou seja, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.
- ii) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

A demonstração do teorema acima faz uso de uma identidade importante chamada formula de Koszul, não iremos demonstrar o teorema, mas iremos apresentar a formula de Koszul para referência futura.

Lema 1.2.1 (Formula de Koszul). *Supondo a existência de ∇ nas condições do Teorema 1.2.1, então temos que*

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= X \langle Y, Z \rangle + Y \langle X, Z \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &+ \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Exemplo 1.2.6. Com o modelo de bola de Poincaré, calculemos a Conexão de Levi-Civita.

Para expressar a conexão Riemanniana no espaço hiperbólico devemos encontrar os símbolos de Christoffel nesse espaço. Lembrando que $\bar{g} = e^{2u}g_{ij}$, com $g_{ij} = \delta_{ij}$ temos

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ij}^m &= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{g}_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{g}_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{g}_{ij} \right\} \bar{g}^{km} \\
&= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ 2e^{2u} \frac{\partial u}{\partial x_i} g_{jk} + e^{2u} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + 2e^{2u} \frac{\partial u}{\partial x_j} g_{ki} + e^{2u} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - 2e^{2u} \frac{\partial u}{\partial x_k} g_{ij} - e^{2u} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right\} \frac{1}{e^{2u}} g^{km} \\
&= \Gamma_{ij}^m + \sum_k \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial u}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial u}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km} \\
&= \Gamma_{ij}^m + \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta_{jm} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \delta_{im} - \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} g_{ij} g^{km}.
\end{aligned}$$

Agora temos condições de expressar a conexão Riemanniana, como segue

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X Y &= \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \bar{\Gamma}_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k \\
&= \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \left(\Gamma_{ij}^k + \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta_{jk} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \delta_{ik} - \sum_m \frac{\partial u}{\partial x_m} g_{ij} g^{km} \right) + X(y_k) \right) X_k \\
&= \nabla_X Y + \sum_{ijk} x_i y_j \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta_{jk} X_k + \sum_{ijk} x_i y_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \delta_{ik} X_k - \sum_{ijkm} x_i y_j \frac{\partial u}{\partial x_m} g_{ij} g^{km} X_k \\
&= \nabla_X Y + X(u)Y + Y(u)X - \langle X, Y \rangle \nabla u.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

1.2.3 Curvatura

Definição 1.2.6 (Curvatura). A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \tag{1.8}$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Observação 1.2.3. Chamamos à atenção que alguns autores definem a curvatura com o sinal oposto a de (1.8), como do Carmo [6], o que não será praticado neste trabalho.

Exemplo 1.2.7. Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, se indicarmos por $Z = (z_1, \dots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do \mathbb{R}^n , obtemos que

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n),$$

donde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (Y X z_1, \dots, Y X z_n),$$

o que implica que

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = 0.$$

Proposição 1.2.4. *O campo curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

i) R é trilinear,

ii) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,

iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$. *Primeira identidade de Bianchi.*

De agora em diante, escreveremos por conveniência, $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$.

Proposição 1.2.5.

i) $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$

ii) $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$

iii) $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$

iv) $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$.

É conveniente escrever o que foi visto acima em um sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) em torno do ponto $p \in M$. Ponhamos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l.$$

Assim R_{ijk}^l são as componentes da curvatura R em (U, \mathbf{x}) . Se

$$X = \sum_i u^i X_i, Y = \sum_j v^j X_j, Z = \sum_k w^k X_k,$$

obtemos, pela linearidade de R ,

$$R(X, Y)Z = \sum_{i, j, k, l} R_{ijk}^l u^i v^j w^k X_l.$$

Fazendo

$$\langle R(x_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \sum_l R_{ijk} g_{ls} = R_{ijks},$$

podemos escrever as identidades da proposição 1.2.5 como:

$$R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0 \quad (1.9)$$

$$R_{ijks} = -R_{jik s} \quad (1.10)$$

$$R_{ijks} = -R_{ijsk} \quad (1.11)$$

$$R_{ijks} = R_{ksij}. \quad (1.12)$$

No que se segue convém usar a seguinte notação: dado um espaço vetorial V , indicaremos por $|X \wedge Y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par $x, y \in V$.

Definição 1.2.7 (Curvatura seccional). Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$ o número real $K(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x \wedge y|^2} = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado *curvatura seccional* de σ em p .

Lema 1.2.2. *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M . Defina uma aplicação multilinear $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ por*

$$\langle R'(X, Y, W)Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se e só se $R = K_0 R'$, onde R é a curvatura de M .

Definição 1.2.8 (Curvatura de Ricci). Seja $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$; tomemos uma base ortonormal $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x e consideremos a seguinte média:

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (1.13)$$

com $j = 1, \dots, n$. Ela é chamada *curvatura de Ricci* na direção x .

Definição 1.2.9 (Tensor). Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow \mathcal{D}(M).$$

Isto quer dizer que, dados $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{X}(M)$, $T(Y_1, \dots, Y_r)$, é uma função diferenciável em M , e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1, \dots, fX + gY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + gT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r),$$

pra todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 1.2.10. Seja T um tensor de ordem r . A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r + 1)$ dada por

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r).$$

Para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$, a *derivada covariante* $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r).$$

1.2.4 Derivada de Lie de Campos Tensoriais Covariantes

Definição 1.2.11. Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ um difeomorfismo. Definimos a aplicação pullback

$$F^* : \mathcal{X}^k(N) \rightarrow \mathcal{X}^k(M)$$

por

$$(F^*T)_p(v_1, \dots, v_k) = T_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)).$$

Definição 1.2.12. Sejam $X \in T_p M$ um campo vetorial, $T \in T_p^k M$ um campo tensorial covariante, $p \in M$ e φ_t o fluxo local do campo X em uma vizinhança V de p em M . A derivada de Lie do tensor T na direção do campo X em p é definida por

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^*)_p(T_{\varphi_t(p)}) - T_p}{t} = \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t^*)_p T_{\varphi_t(p)} \right|_{t=0}.$$

Teorema 1.2.2. Se $X \in T_p M$ um campo vetorial, $T \in T_p^k M$ um campo tensorial covariante, $p \in M$ e φ_t o fluxo local do campo X em uma vizinhança V de p em M , então

$$(\mathcal{L}_X T)(X_1, \dots, X_k) = X(T(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k T(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k)$$

Em particular, para campos tensoriais 2-covariantes temos

$$(\mathcal{L}_X T)(Y, Z) = X(T(Y, Z)) - T([X, Y], Z) - T(Y, [X, Z]).$$

1.2.5 Imersão Isométrica

Seja $(\overline{M}, \overline{g})$ uma variedade Riemanniana de dimensão $m = n + k$. Se M é uma variedade diferenciável com dimensão n , se existe uma imersão

$$f : M \rightarrow \overline{M}$$

e M é dotada da métrica induzida por esta imersão, então dizemos que f é uma imersão isométrica de (M, g) em $(\overline{M}, \overline{g})$.

Dessa forma, se $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ é uma imersão, então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de \overline{M} . Isto quer dizer que existe uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do \mathbb{R}^k , tal que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_q M, q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)} \overline{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p \overline{M}$ decompõe $T_p \overline{M}$ na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$.

A conexão Riemanniana de \overline{M} será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M , e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a \overline{M} , definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T$$

Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$. Para isto convém introduzir previamente a seguinte definição: se X, Y são campos locais em M ,

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em \overline{M} normal a M . $B(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$.

Proposição 1.2.6. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{C}(U)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Como B é bilinear, concluímos, exprimindo B em um sistema de coordenadas, que o valor de $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental: seja $p \in M$ e $\nu \in (T_p M)^\perp$, a aplicação $h_\nu : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h_\nu(x, y) = \langle B(x, y), \nu \rangle, x, y \in T_p M,$$

é uma aplicação bilinear simétrica.

Definição 1.2.13 (Segunda forma fundamental). A forma quadrática II_ν definida em $T_p M$ por

$$II_\nu = h_\nu(x, x)$$

é chamada a *segunda forma fundamental* de f em p segundo o vetor normal ν .

Observe que à aplicação bilinear h_ν fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $S_\nu : T_pM \rightarrow T_pM$ por

$$\langle S_\nu(x), y \rangle = h_\nu(x, y) = \langle B(x, y), \nu \rangle.$$

A proposição seguinte nos dá uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 1.2.7 (Operador de forma). *Seja $p \in M, x \in T_pM$ e $\nu \in (T_pM)^\perp$. Seja V uma extensão local de ν normal a M . Então*

$$S_\nu(x) = -(\bar{\nabla}_x V)^T.$$

Demonstração. Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y , respectivamente, e tangentes a M . Então $\langle V, Y \rangle = 0$, e portanto

$$\begin{aligned} \langle S_\nu(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), V \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, V \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, V \rangle(p) \\ &= -\langle Y, \bar{\nabla}_X V \rangle(p) \\ &= \langle -\bar{\nabla}_X V, y \rangle, \end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$. □

Exemplo 1.2.8 (Hipersuperfície). Considere o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, isto é, $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$; $f(M) \subset \bar{M}$ é então denominada de hipersuperfície. (observe que uma hipersuperfície pode ter auto-intersecções).

Seja $p \in M$ e $\nu \in (T_pM)^\perp$, $|\nu| = 1$. Como $S_\nu : T_pM \rightarrow T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_i\}_{i=1}^n$ de T_pM com valores próprios reais $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, isto é, $S_\nu(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$.

Se M e \bar{M} são ambas orientáveis e estão orientadas então o vetor ν fica univocamente determinado que sendo $\{e_i\}_{i=1}^n$ na orientação de M , $\{\{e_i\}_{i=1}^n, \nu\}$ seja uma base na orientação de \bar{M} . Neste caso, denominamos os e_i *direções principais* e os $\lambda_i = k_i$ *curvatura principais* de f .

As funções simétricas de $\{\lambda_i\}$ são invariantes por imersão. Por exemplo: $\det(S_\nu) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ é denominada a *curvatura de Gauss-Kronecker* de f e $\frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ é denominada a *curvatura média* de f .

Definição 1.2.14. Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. O vetor curvatura média de f em p é definido por

$$\vec{H}(p) = \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i)(p) \in (T_pM)^\perp,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal para T_pM .

Em particular, quando $p = 1$, $\nu \in (T_p M)^\perp$, $|\nu| = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\vec{H}(p) &= \left\langle \vec{H}(p), \nu \right\rangle \nu \\
&= \sum_{i=1}^n \langle B(e_i, e_i), \nu \rangle \nu \\
&= \sum_{i=1}^n \langle S_\nu(e_i), e_i \rangle \nu \\
&= (k_1 + k_2 + \dots + k_n) \nu \\
&= H(p) \nu.
\end{aligned}$$

Definição 1.2.15. Uma imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$ é *geodésica* em $p \in M$ se para todo $\nu \in (T_p M)^\perp$ a segunda forma fundamental II_ν é identicamente nula em p . A imersão é *totalmente geodésica* se ela é geodésica para todo ponto $p \in M$.

Observação 1.2.4 (Convenções adotadas). O sentido dos vetores ν e $\vec{H}(p)$ é determinado pelo sinal de $H(p)$. Em consonância com Wang-Xia [14], neste trabalho faremos a convenção sobre a escolha de ν tendo direção oposta ao vetor curvatura média \vec{H} de modo que a curvatura média constante H seja sempre não-negativa. Além disso, outras convenções serão adotadas, como segue

i) $h(X, Y) = \langle \overline{\nabla}_X \nu, Y \rangle \Rightarrow S_\nu(X) = \overline{\nabla}_X \nu$

ii) $H = \text{tr } S_\nu(e_i) \Rightarrow \text{div}_M \nu = H$

1.3 Operadores Diferenciais

Apresentaremos uma generalização dos conceitos dos operadores gradiente, divergente e laplaciano para uma variedade riemanniana para uso futuro . Para mais detalhes, ver [8].

Definição 1.3.1 (Referencial geodésico). Seja M uma variedade Riemanniana n -dimensional, $p \in M$ e $\Omega \subset M$ uma vizinhança de p . Uma família $\{e_i\}_{i=1}^n$ de campo de vetores $\mathcal{X}(\Omega)$ é chamada um referencial geodésico em p se:

i) Para cada ponto $q \in U$, tem-se que $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{X}(\Omega)$ são ortonormais;

ii) Para todos $i, j = 1, \dots, n$, tem-se $\nabla_{e_i} e_j = 0$

Observação 1.3.1. Dada uma variedade Riemanniana M e um ponto $p \in M$ qualquer. Existe uma vizinhança $\Omega \subset M$ de p na qual podemos definir um referencial geodésico.

Definição 1.3.2 (Gradiente). Seja M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$, onde $\mathcal{D}(M)$ é o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M . Definimos o gradiente ∇f como sendo o campo de vetores ∇f em M definido por

$$\nabla f = \langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in M, \quad v \in T_p M.$$

Proposição 1.3.1. *Considere um referencial geodésico $\{e_i\}_{i=1}^n$ em uma vizinhança $\Omega \subset M$ de $p \in M$. então*

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^n (e_i(f))e_i.$$

Em coordenadas, temos a seguinte expressão para o gradiente

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Definição 1.3.3 (Divergente). Sejam M uma variedade Riemanniana e $X \in \mathcal{X}(M)$. Definimos a divergência de X como sendo uma função $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\operatorname{div} X(p) = \text{traço da aplicação linear } [Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)], \quad p \in M$$

Proposição 1.3.2. *Considere um referencial geodésico $\{e_i\}_{i=1}^n$ em uma vizinhança $\Omega \subset M$ de $p \in M$. então*

$$\operatorname{div} X(p) = \sum_{i=1}^n e_i(f_i)(p)$$

Definição 1.3.4 (Laplaciano). Seja M uma variedade Riemanniana. Definimos o Laplaciano Δ de M como sendo o operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ definido por

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f, \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

Proposição 1.3.3. *Nas mesmas condições das definições 1.3.2 e 1.3.4 temos*

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Proposição 1.3.4. *Considere um referencial geodésico $\{e_i\}_{i=1}^n$ em uma vizinhança $\Omega \subset M$ de $p \in M$. então*

$$\nabla f(p) = \sum_{j=1}^n e_j(e_j(f))(p)$$

1.4 Campos de Killing

Definição 1.4.1 (Campo de Killing). Dizemos que um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M)$ em uma variedade Riemanniana M é um campo de Killing se

$$\mathcal{L}_X g = 0.$$

Em outras palavras, X é um campo de Killing se a derivada de Lie do tensor métrica na direção de X se anula, isto é, o tensor métrica é constante ao longo das curvas integrais do campo X .

Sem demonstração, apresentaremos agora algumas formas de caracterizar um campo de Killing.

Proposição 1.4.1. *Sejam M e N variedades diferenciáveis, então*

i) X é um campo de Killing se e somente se o seu fluxo local φ_t é uma isometria para todo t ;

ii) X é um campo de Killing se e somente se

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle$$

iii) X é um campo de Killing se e somente se

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle = -\langle \nabla_Z X, Y \rangle$$

iv) Sejam $X \in \mathcal{X}(M)$ e $f : M \rightarrow N$ uma isometria. Seja $Y \in \mathcal{X}(N)$ definido por $Y(f(p)) = df_p(X(p))$, $p \in M$. Então Y é um campo de Killing se e somente se X também o for.

Definição 1.4.2 (Campo de Killing conforme). Seja M uma variedade Riemanniana, $X \in \mathcal{X}(M)$ é campo de Killing conforme se

$$\mathcal{L}_X g = \lambda g.$$

Com $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função real positiva.

Proposição 1.4.2. *Seja M uma variedade Riemanniana, um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(M)$ é um campo de Killing conforme se, e somente se, existe uma função $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que*

i) O divergente de X satisfaz: $\operatorname{div} X = \frac{n}{2}\lambda$;

ii) Se $V \subset M$ é um conjunto aberto e $f \in C^\infty(V)$ tal que $X(f) = 0$, então $\mathcal{L}_{\nabla f} X = \lambda \nabla f$.

Capítulo 2

Hipersuperfícies Capilares: definições e estabilidade

Neste capítulo será apresentado os conceito básicos necessários à investigação das hipersuperfícies capilares, são eles: variação admissível, funcional energia, formula da primeira variação do funcional energia, formula da segunda variação do funcional energia. Em particular a formula da primeira variação da energia será usada para definir hipersuperfície capilar, bem como mostrar exemplos. A formula da segunda variação do funcional energia será usada para definir estabilidade.

2.1 Variação admissível e funcional energia

Antes de iniciarmos o estudo de hipersuperfícies capilares, fixaremos algumas notações e apresentaremos alguns resultados que serão necessários ao longo da dissertação.

Seja $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ uma variedade Riemanniana orientável e seja $B \subset \overline{M}$ um domínio compacto diferenciável difeomorfo a uma bola Euclidiana. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo $\partial M \neq \emptyset$. Seja $x : (M, g) \rightarrow (B, \overline{g})$ uma imersão isométrica tal que $x(\text{int } M) \subset \text{int } B$ e $x(\partial M) \subset \partial B$. Denotaremos por $\overline{\nabla}$, $\overline{\Delta}$ e ∇ , Δ o gradiente e o Laplaciano em \overline{M} e M , respectivamente.

Denotemos por $\nu \in TM^\perp$ um campo de vetores normais e unitários ao longo de x e por $\overline{N} \in TB|_{\partial B}$ o campo de vetores unitários normais a ∂B apontando para fora. Seja $\mu \in TM|_{\partial M}$ o campo de vetores unitários normais a ∂M apontando para fora. Além disso, seja $\overline{\nu} \in T\partial B|_{\partial M}$ o campo de vetores unitários normais a ∂M tal que $\{\nu, \mu\}$ e $\{\overline{\nu}, \overline{N}\}$ possuem a mesma orientação no fibrado normal de ∂M em \overline{M} (ver Figura 2.1).

Observação 2.1.1. Sem perda de generalidade, a Figura 2.1 é uma boa visualização do problema para os propósitos deste trabalho, contudo, observa-se que por se tratar de uma imersão, a superfície $\Sigma = x(M)$ pode ter laços.

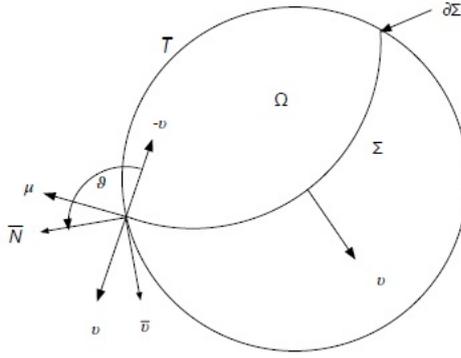


Figura 2.1: $\Sigma = x(M)$ e $\partial\Sigma = x(\partial M)$.

Definiremos agora o conceito de variação admissível.

Definição 2.1.1 (Variações). Seja $x : M \rightarrow B$ uma imersão isométrica como acima. Uma *variação* de x é uma aplicação diferenciável $x : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow B$ tal que $x(0, \cdot) = x$. Uma variação $x : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow B$ de x é *admissível* se $x(t, \text{int } M) \subset \text{int } B$ e $x(t, \partial M) \subset \partial B$ para todo t . O *campo variacional* de uma variação é o campo $Y \in TB|_{x(M)}$ dado por

$$Y = \left. \frac{\partial x}{\partial t}(t, \cdot) \right|_{t=0}.$$

Dizemos que a variação $x : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow B$ é *normal* se $Y = \varphi\nu$, para alguma função $\varphi \in C^\infty(M)$.

Observação 2.1.2. Note que se Y é o campo variacional de uma variação admissível de uma imersão $x : M \rightarrow B$ com $x(\text{int } M) \subset \text{int } B$ e $x(\partial M) \subset \partial B$, então $Y(p) \in T_p\partial B$ para todo $p \in \partial M$.

Seja $x : M \rightarrow B$ uma imersão isométrica tal que $x(\text{int } M) \subset \text{int } B$ e $x(\partial M) \subset \partial B$. Dada uma variação admissível $x : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow B$ de x , definimos o funcional área, volume e área “molhada”, respectivamente, por

$$A(t) = \int_M dA_t, \tag{2.1}$$

$$V(t) = \int_{[0,t] \times M} x^* dV_{\overline{M}} \tag{2.2}$$

e

$$W(t) = \int_{[0,t] \times \partial M} x^* dA_{\partial B}, \tag{2.3}$$

onde dA_t é o elemento de área de M com respeito à métrica induzida por $x(t, \cdot)$, $dV_{\overline{M}}$ é o elemento de volume de \overline{M} e $dA_{\partial B}$ é o elemento de área de ∂B induzido pela métrica de B .

Por fim, dado $\theta \in (0, \pi)$, definimos o *funcional Energia* por

$$E(t) = A(t) - \cos \theta W(t).$$

Na seção a seguir deduziremos duas identidades muito importantes, a saber: as fórmulas da primeira e segunda da variações da energia.

2.2 Primeira e segunda variações da energia

Iniciaremos a seção com o seguinte lema.

Lema 2.2.1. *Seja*

$$A(t) = (a_{ij}(t)), |t| < \epsilon$$

uma família diferenciável de matrizes $n \times n$ satisfazendo $A(0) = I_n$. Então:

$$\frac{d}{dt} \det A(t) \Big|_{t=0} = \text{tr } A'(0).$$

Demonstração. Assuma que $\{e_i\}_{i=1}^n$ seja a base canônica do \mathbb{R}^{n+1} temos que:

$$\det(A(t))e_1 \wedge \dots \wedge e_n = (A(t)e_1) \wedge \dots \wedge (A(t)e_n).$$

Tomando a derivada de ambos os lados da equação acima, e depois avaliando em $t = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\det(A(t))e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \Big|_{t=0} &= \sum_{j=1}^n (A(0)e_1) \wedge \dots \wedge (A'(0)e_j) \wedge \dots \wedge (A(0)e_n) \\ &= \sum_{i,j} e_1 \wedge \dots \wedge \langle A'(0)e_j, e_k \rangle e_k \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \sum_{j=1}^n \langle A'(0)e_j, e_j \rangle e_1 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \text{tr } A'(0)e_1 \wedge \dots \wedge e_n, \end{aligned}$$

de onde temos que:

$$\frac{d}{dt} \det A(t) \Big|_{t=0} = \text{tr } A'(0).$$

□

Proposição 2.2.1 (Fórmula da primeira variação do funcional área). *Seja $x : M \rightarrow B$ uma imersão isométrica. Se $x : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow B$ é uma variação de x , então*

$$A'(0) = \int_M H\bar{g}(Y, \nu) dA + \int_{\partial M} \bar{g}(Y, \mu) ds$$

Demonstração. Seja g_t a métrica induzida pela imersão x_t e dA_t o elemento de área correspondente. Escolha $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal local em M com respeito a métrica g_0 e $\{\omega^i\}_{i=1}^n$ a base dual correspondente. Temos que:

$$g_{ij}(t) = \bar{g}(x_{t*}e_i, x_{t*}e_j) = g_t(e_i, e_j),$$

onde $g_t = g_{ij}(t)\omega^i \otimes \omega^j$, $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Seja $g_t = \det(g_{ij}(t))$. Assim,

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_M dA_t = \int_M \sqrt{\det g(t)} \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n \\ &= \int_M \sqrt{\det g(t)} dA. \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} A'(0) &= \left. \frac{d}{dt} \int_M \sqrt{\det g(t)} dA \right|_{t=0} \\ &= \int_M \left. \frac{d}{dt} \sqrt{\det g(t)} dA \right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} \int_M \frac{\det g'(0)}{\sqrt{\det g(0)}} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_M \det g'(0) dA. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.1 temos em cada ponto $p \in M$

$$A'(0) = \frac{1}{2} \int_M \text{tr } g'(0) dA = \frac{1}{2} \int_M \sum_{k=1}^n g'_{kk}(0) dA.$$

Seja $\{\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em $(-\epsilon, \epsilon) \times U$, onde U é uma vizinhança de p em M . Seja $Y(t), e_1(t), \dots, e_n(t)$ denotando as imagens daqueles campos vetoriais sobre x . Observe que $e_i(0) = e_i$, $Y(0) = Y$ e $g_{kk}(t) = \langle e_k(t), e_k(t) \rangle$, portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{kk}(t) &= Y(t) \bar{g}(e_k, e_k) = 2\bar{g}(\bar{\nabla}_Y e_k(t), e_k(t)) \\ &= 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_k} Y(t) + [Y(t), e_k], e_k(t)) \\ &= 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_k} Y(t), e_k(t)) \\ &= 2[e_k(t) \bar{g}(Y(t), e_k(t)) - \bar{g}(Y(t), \bar{\nabla}_{e_k} e_k)]. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g'_{kk}(0) &= e_k \bar{g}(Y, e_k) - \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_{e_k} e_k) \\ &= \text{div}(Y^T) - \bar{g}(Y, (\bar{\nabla}_{e_k} e_k)^T) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_k} e_k, \nu) \\ &= \text{div}(Y^T) + \bar{g}(Y, \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_k} \nu, e_k) \nu) \\ &= \text{div}(Y^T) + H \bar{g}(Y, \nu) \\ &= \text{div}(Y^T) + H \bar{g}(Y, \nu), \end{aligned}$$

portanto

$$A'(0) = \int_M \operatorname{div}(Y^T) dA + \int_M H\bar{g}(Y, \nu) dA.$$

Usando o teorema de Stokes temos que:

$$\int_M \operatorname{div}(Y^T) dA = \int_{\partial M} \bar{g}(Y, \mu) ds, \quad (2.4)$$

E por tanto temos finalmente que:

$$A'(0) = \int_M H\bar{g}(Y, \nu) dA + \int_{\partial M} \bar{g}(Y, \mu) ds.$$

□

Proposição 2.2.2 (Fórmula da primeira variação do funcional volume). *Seja $x : M \rightarrow B$ uma imersão isométrica. Se $x : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow B$ é uma variação de x , então*

$$V'(0) = \int_M \bar{g}(Y, \nu) dA.$$

Demonstração. Fixe $p \in M$ e considere e considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal numa vizinhança U de $x(p)$. Como $x^*dV_{\bar{M}}$ é uma forma de volume, existe uma função $a : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo

$$x^*(dV_{\bar{M}}) = a(t, p) dt \wedge dA,$$

onde

$$\begin{aligned} a(t, p) &= x(dV_{\bar{M}}) \left(\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \dots, e_n \right) = dV_{\bar{M}} \left(Y(t), dx_t(e_1), \dots, dx_t(e_n) \right) \\ &= \operatorname{vol} \left(Y(t), dx_t(e_1), \dots, dx_t(e_n) \right) = \bar{g}(Y(t), \nu_t), \end{aligned}$$

e ν_t é o vetor unitário normal da imersão. Usando o Teorema de Fubini segue que

$$\int_{[0, t] \times M} a(t, p) dt \wedge dA = \int_{[0, t]} \left(\int_M a(t, p) dA \right) dt.$$

Derivando o funcional volume em $t = 0$ temos que:

$$\begin{aligned} V'(0) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{[0, t] \times M} x^* dV_{\bar{M}} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_{[0, t]} \left(\int_M a(t, p) dA \right) \right) \Big|_{t=0} = \int_M a(0, p) dA \\ &= \int_M \bar{g}(Y, \nu) dA, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 2.2.1 (Fórmula da primeira variação do funcional área “molhada”). *Seja $x : M \rightarrow B$ uma imersão isométrica. Se $x : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow B$ é uma variação de x , então*

$$W'(0) = \int_M \bar{g}(Y, \bar{\nu}) dA.$$

Demonstração. Basta observar que ∂M^{n-1} é uma variedade orientada no sentido de $\bar{\nu}$. Como $x^* dA_{\partial B}$ é uma forma de área, existe uma função $a : (-\epsilon, \epsilon) \times \partial M \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo as condições análogas às da proposição 2.2.2. \square

Corolário 2.2.2 (Fórmula da primeira variação do funcional energia). *Seja $x : M \rightarrow B$ uma imersão isométrica. Se $x : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow B$ é uma variação de x , então*

$$E'(0) = \int_M H\bar{g}(Y, \nu) dA + \int_{\partial M} \bar{g}(Y, \mu - \cos \theta \bar{\nu}) ds$$

Definição 2.2.1 (Hipersuperfície capilar). Uma hipersuperfície é dita ser capilar se é um ponto crítico do funcional energia E para qualquer variação x preservando volume.

Exemplo 2.2.1 (Exemplo de hipersuperfície capilar). Segue da fórmula da primeira variação do funcional energia que x é capilar se, e somente se, x tem curvatura média constante e ∂M intersecta ∂B em um ângulo constante θ . Portanto, exemplos de hipersuperfícies capilares são as hipersuperfícies mínimas e hipersuperfícies com curvatura média constante.

Para exemplificar, vamos observar que uma calota esférica é capilar. Seja $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ e \langle, \rangle a métrica Euclidiana. Seja

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \leq 1 \right\}, \text{ int } B = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 < 1 \right\} \text{ e}$$

$$\partial B = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\},$$

respectivamente a bola unitária fechada, o seu interior e fronteira.

Considere agora

$$B_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^n x_i^2 + (x_{n+1} - t)^2 \leq 1 \right\} \text{ e}$$

$$\partial B_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^n x_i^2 + (x_{n+1} - t)^2 = 1 \right\},$$

uma bola fechada deslocada de t , com $t \in (0, 2)$, na direção do eixo x_{n+1} e sua fronteira respectivamente.

Agora considere

$$C_t = B \cap \partial B_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^n x_i^2 + (x_{n+1} - t)^2 = 1, \text{ com } x_{n+1} \in [t - 1, \frac{t}{2}] \right\},$$

$$\text{int } C_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^n x_i^2 + (x_{n+1} - t)^2 = 1, \text{ com } x_{n+1} \in [t - 1, \frac{t}{2}) \right\} \text{ e}$$

$$\partial C_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \text{ e } x_{n+1} = \frac{t}{2} \right\},$$

a família de calotas esféricas obtida pela interseção $B \cap \partial B_t$, o seu interior e fronteira respectivamente. Observe que $\text{int } C_t \subset \text{int } B$ e $\partial C_t \subset \partial M$ para todo $t \in (0, 2)$, sendo dessa forma uma variação admissível.

Provemos que ∂C_t intersecta ∂B em um ângulo constante.

Seja $N(\partial B) = (x_1, \dots, x_{n+1})$ e $N(\partial C_t) = (x_1, \dots, x_{n+1} - t)$ os vetores normais unitários de ∂B e ∂C_t respectivamente. Fazendo o produto interno temos

$$\begin{aligned} \langle N(\partial B), N(\partial C_t) \rangle &= \langle (x_1, \dots, x_{n+1}), (x_1, \dots, x_{n+1} - t) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - x_{n+1}t \\ &= 1 - \frac{t^2}{2} = \frac{2 - t^2}{2}. \end{aligned}$$

Onde o ultimo resultado é obtido avaliando a equação em ∂C_t . Portanto para cada $t \in (0, 2)$, ∂C_t intersecta ∂B em um ângulo constante $\arccos(\frac{2-t^2}{2})$. Observe ainda que $0 < \arccos(\frac{2-t^2}{2}) < \pi$ quando $t \in (0, 2)$. Por fim, é sabido que a calota esférica tem curvatura constante, provando, assim, que a calota esférica é um hipersuperfície capilar.

Observação 2.2.1. Esse resultado pode ser estendido para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} , basta observar que a métrica de \mathbb{H}^{n+1} é conforme à métrica usual do espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , e usar o fato de que métricas conformes preservam ângulo. Com relação a curvatura, usamos o fato de que uma imersão continua sendo umbílica se mudamos a métrica original para uma métrica conforme.

Observação 2.2.2. Fazemos a convenção escolhendo ν estando na direção oposta a do vetor curvatura média tal que a curvatura média constante H seja sempre não negativa. Sob esta convenção, ao longo de ∂M , o ângulo entre $-\nu$ e \bar{N} , semelhantemente μ e $\bar{\nu}$, é sempre igual a θ (veja Figura 2.1). Assim, no fibrado normal de ∂M , temos as seguintes relações:

$$\mu = \text{sen } \theta \bar{N} + \text{cos } \theta \bar{\nu}, \quad (2.5)$$

$$\nu = -\text{cos } \theta \bar{N} + \text{sen } \theta \bar{\nu}. \quad (2.6)$$

Para cada função diferenciável φ em M com $\int_M \varphi dA_M = 0$, existe uma variação admissível preservado volume x com campo vetorial variacional $\varphi\nu$.

Passaremos agora a demonstração da fórmula da segunda variação do funcional energia. Essa prova se encontra, a menos de notações e detalhes, no apêndice de Ros e Souam [11]. Dois lemas são fundamentais na demonstração.

Lema 2.2.2. *Seja $x : M \rightarrow B \subset \overline{M}$ uma hipersuperfície capilar, $\tilde{\nabla}$ o gradiente em ∂M na métrica induzida por x e Y_0 (resp. Y) a componente tangente de Y em M (resp. para ∂M). Seja também S_0, S_1 e S_2 denotando respectivamente o operador de forma de M em \overline{M} com respeito a μ , de ∂M em M com respeito ν de ∂M em ∂B com respeito a $\bar{\nu}$. Então:*

$$i) \quad \nu' = -\nabla\varphi - S_0(Y_0);$$

$$ii) \quad \mu' = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + h(Y_0, \mu)\right)\nu + \varphi S_0(\mu) - \varphi h(\mu, \mu)\mu - S_1(Y_1) + \cot\theta\tilde{\nabla}\varphi;$$

$$iii) \quad \bar{\nu}' = -h^{\partial M}(Y, \bar{\nu})\bar{N} - S_2(Y_1) + \frac{1}{\text{sen}\theta}\tilde{\nabla}\varphi.$$

Demonstração. Para provar a identidade (i), considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal de T_pM para algum $p \in M$. Tomando $e_i(t) = dx_t(e_i)$, então usando o fato que ν tem norma um, temos

$$\bar{g}(\nu, D_{e_i}Y) = d\varphi(e_i) + \bar{g}(\nu, D_{e_i}Y_0).$$

Agora, visto que $\bar{g}(\nu_t, e_i(t)) = 0$ e $[e_i(t), Y(t)] = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \nu' &= \sum_{i=1}^n \bar{g}(\nu', e_i)e_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \bar{g}(\nu, e'_i)e_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \bar{g}(\nu, D_{e_i}Y)e_i \\ &= \sum_{i=1}^n df(e_i)e_i - \sum_{i=1}^n \bar{g}(\nu, D_{e_i}Y_0)e_i \\ &= \sum_{i=1}^n df(e_i)e_i + \sum_{i=1}^n \bar{g}(D_{Y_0}\nu, e_i)e_i \\ &= -\nabla\varphi - S_0(Y_0). \end{aligned}$$

Como consequência da identidade (i) temos que:

$$\begin{aligned} \bar{g}(\mu', \nu) &= -\bar{g}(\mu, \nu') \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + h(Y_0, \mu). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Agora seja $v_i, i = 1, \dots, n-1$ um referencial ortonormal de $T_p M$ para algum $p \in \partial M$. Como antes, tome $v_i(t) = dx_t(v_i)$, então pode-se verificar que ao longo de ∂M vale:

$$\begin{aligned} Y &= \varphi\nu + Y_1 - \cot\theta d\varphi\mu \\ \bar{g}(\mu', v_i) &= -\bar{g}(\mu, v_i') \\ &= -\bar{g}(\mu, D_{v_i} Y) \\ &= -\varphi\bar{g}(\mu, D_{v_i}\nu) - \bar{g}(\mu, D_{v_i} Y_1) + \cot\theta df(v_i). \end{aligned} \tag{2.8}$$

A identidade (ii) agora segue de (2.7) e (2.8) e do fato que $\langle \mu', \mu \rangle = 0$. Para provar a identidade (iii), notemos que em ∂M , temos que:

$$Y = Y_1 - \frac{1}{\sin\theta} \varphi \bar{\nu}. \tag{2.9}$$

Assim, para $i = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nu}', v_i) &= -\bar{g}(\bar{\nu}, v_i') \\ &= -\bar{g}(\bar{\nu}, D_{v_i} Y) + \frac{1}{\sin\theta} df v_i. \end{aligned}$$

Além disso:

$$\bar{g}(\bar{\nu}', \bar{\nu}) = 0 \text{ e } \bar{g}(\bar{\nu}', \nu) = -h^{\partial M}(Y, \bar{\nu}).$$

Assim:

$$\bar{\nu}' = -h^{\partial M}(Y, \bar{\nu})\bar{N} - \sum_{i=1}^{n-1} \bar{g}(\bar{\nu}, D_{v_i} Y_1) v_i + \frac{1}{\sin\theta} \sum_{i=1}^{n-1} df(v_i) v_i, \tag{2.10}$$

e essa é exatamente a identidade (iii). \square

Lema 2.2.3. *Nas mesmas condições do Lema 2.2.2, a seguinte identidade é válida*

$$H'(0) = \Delta\varphi + (|h|^2 + \overline{\text{Ric}}(\nu, \nu))\varphi.$$

Demonstração. Ambrozio [2] apêndice. \square

Proposição 2.2.3 (Fórmula da segunda variação da energia). *Seja $x : M \rightarrow B$ uma hipersuperfície capilar. Então para toda variação $x : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow B$ admissível normal de x a segunda variação da energia é dada por*

$$E''(0) = \int_M -\varphi(\Delta\varphi + (|h|^2 + \overline{\text{Ric}}(\nu, \nu))\varphi) dA + \int_{\partial M} \varphi(\overline{\nabla}_\mu \varphi - q\varphi) ds.$$

onde

$$q = \frac{1}{\sin\theta} h^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot\theta h(\mu, \mu),$$

$\overline{\text{Ric}}$ é o tensor curvatura de Ricci de \overline{M} , h é a segunda forma fundamental da imersão x dada por $h(X, Y) = \bar{g}(\overline{\nabla}_X \nu, Y)$ e $h^{\partial B}$ é a segunda forma fundamental de x em ∂B dada por $h(X, Y) = \bar{g}(\overline{\nabla}_X \bar{N}, Y)$.

Demonstração. A primeira fórmula de variação é dada por:

$$E'(t) = \int_M H(t) \bar{g}(Y_t, \nu_t) dA_t + \int_{\partial M} \bar{g}(Y_t, \mu_t - \cos \theta \bar{\nu}_t) ds_t,$$

onde

$$Y_t = \left. \frac{\partial x}{\partial s}(p) \right|_{s=t}.$$

Derivando a primeira variação do funcional energia em relação a t temos:

$$\begin{aligned} E''(0) &= \int_M H'(0) \bar{g}(Y, \nu) dA + H(0) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\int_M \bar{g}(Y_t, \nu_t) dA_t \right) \\ &+ \int_{\partial M} \bar{g} \left(\left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} Y_t, \mu - \cos \theta \bar{\nu} \right) ds + \int_{\partial M} \bar{g} \left(Y, \left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} \mu_t - \cos \theta \bar{\nu}_t \right) ds \\ &\quad + \int_{\partial M} \bar{g}(Y, \mu - \cos \theta \bar{\nu}) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (ds_t), \end{aligned}$$

onde D denota a derivada covariante em \bar{M} . Note que:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\int_M \bar{g}(Y_t, \nu_t) dA_t \right) = V''(0) = 0,$$

e $\bar{g}(Y, \mu - \cos \theta \bar{\nu}) = 0$ visto que Y é tangente a ∂B ao longo de ∂M . Além disso $\mu - \cos \theta \bar{\nu} = \sin \theta \bar{N}$. Portanto temos que:

$$E''(0) = \int_M H'(0) \bar{g}(Y, \nu) dA + \int_{\partial M} \bar{g} \left(\left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} Y_t, \mu - \cos \theta \bar{\nu} \right) ds + \int_{\partial M} \bar{g} \left(Y, \left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} \mu_t - \cos \theta \bar{\nu}_t \right) ds.$$

Visto que temos $H'(0)$ pelo Lema 2.2.3, devemos calcular

$$\bar{g} \left(\left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} Y_t, \mu - \cos \theta \bar{\nu} \right) + \bar{g} \left(Y, \left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} \mu_t - \cos \theta \bar{\nu}_t \right).$$

Daqui em diante, denotaremos simplesmente um $(')$ a derivada covariante $\left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0}$.

Usando as identidades (ii) e (iii) do Lema 2.2.2 obtemos:

$$\bar{g}(Y, \mu' - \cos \theta \bar{\nu}') = \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \varphi^2 \cot \theta h(\mu, \mu) + 2\varphi h(Y_0, \mu) + \sin \theta h^{\partial M}(Y_1, Y_1). \quad (2.11)$$

Além disso, a relação:

$$Y_0 = Y_1 - \cot \theta \varphi \mu,$$

implica que:

$$h(Y_0, \mu) = h(Y_1, \mu) - \varphi \cot \theta h(\mu, \mu). \quad (2.12)$$

Substituindo esse resultado em (2.11) obtemos:

$$\bar{g}(Y, \mu' - \cos \theta \bar{\nu}') = \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \varphi^2 \cot \theta h(\mu, \mu) + 2\varphi h(Y_1, \mu) + \sin \theta h^{\partial M}(Y_1, Y_1). \quad (2.13)$$

Agora calculemos $\bar{g}(Y', \mu' - \cos \theta \bar{\nu}')$. Visto que $\mu - \cos \theta \bar{\nu} = \sin \theta \bar{N}$, temos que:

$$\bar{g}(Y', \nu - \cos \theta \bar{\nu}) = -\sin \theta h^{\partial M}(Y, Y). \quad (2.14)$$

Usando a decomposição (2.9), temos:

$$h^{\partial M}(Y, Y) = h^{\partial M}(Y_1, Y_1) - \frac{2}{\sin \theta} \varphi h^{\partial M}(Y_1, \bar{\nu}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \varphi^2 h^{\partial M}(\bar{\nu}, \bar{\nu}). \quad (2.15)$$

É direto verificar que

$$h(Y_1, \mu) + h^{\partial M}(Y_1, \bar{\nu}) = 0. \quad (2.16)$$

Finalmente de (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16) temos que:

$$\bar{g}(Y', \mu - \cos \theta \bar{\nu}) + \bar{g}(Y, \mu' - \cos \theta \bar{\nu}') = \varphi \frac{\partial f}{\partial \mu} - \left\{ \cot \theta h(\mu, \mu) + \frac{1}{\sin \theta} h^{\partial M}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) \right\} \varphi^2,$$

isso completa a prova da fórmula de segunda variação. \square

Definição 2.2.2 (Estabilidade). Uma hipersuperfície capilar é dita estável se $E''(0) \geq 0$ para toda variação preservando volume, isto é,

$$E''(0) \geq 0, \forall \varphi \in \mathcal{F} := \{\varphi \in C^\infty(M); \int_M \varphi dA_M = 0\}.$$

Exemplo 2.2.2 (Exemplo de hipersuperfície capilar estável). Continuaremos com o exemplo das calotas esféricas. A prova deste exemplo é apresentada em Li e Xiong [9] e faz uso de um resultado de Gonzalez e Massari [7] de estabilidade. Omitiremos os detalhes.

Seja $M \subset B^{n+1}$ uma calota esférica com R o raio da esfera contendo M e ângulo de contato constante igual a θ . Considere o hiperplano P n -dimensional contendo ∂M . Então M é uma hipersuperfície capilar em um semiespaço com ângulo de contato θ' . Por [10], M é estável em um semiespaço, ou seja

$$\int_M (|\nabla \varphi|^2 - \frac{n}{R^2} \varphi^2) dA \geq \frac{\cot \theta'}{R} \int_{\partial M} \varphi^2 ds, \forall \varphi \in \mathcal{F}. \quad (2.17)$$

Usando relações trigonométricas e semelhança de triângulos temos que

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cot \theta}{R} = \frac{\cot \theta'}{R} \quad (2.18)$$

juntando (2.17) e (2.18) está provada a estabilidade de M em B^{n+1}

A seguinte proposição é bem conhecida e é fato fundamental para hipersuperfícies capilares quando

Proposição 2.2.4. *Assuma ∂B é umbílica em \bar{M} . Seja $x : M \rightarrow B$ uma imersão na qual a fronteira ∂M intersecta B em um ângulo constante θ . Então μ é uma direção principal de ∂M em M . Isto é, $h(e, \mu) = 0$ para todo $e \in T\partial M$. Por sua vez,*

$$\nabla_e \nu = h(\mu, \mu)\mu.$$

Demonstração. Para todo $e \in T\partial M$, usando (2.5) e (2.6) temos que:

$$\begin{aligned}
h(e, \mu) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_e \nu, \mu) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_e(-\cos \theta \bar{N} + \sin \theta \bar{\nu}), \sin \theta \bar{N} + \cos \theta \bar{\nu}) \\
&= \bar{g}(e(-\cos \theta) \bar{N} - \cos \theta \bar{\nabla}_e \bar{N} + e(\sin \theta) \bar{\nu} + \sin \theta \bar{\nabla}_e \bar{\nu}, \sin \theta \bar{N} + \cos \theta \bar{\nu}) \\
&= \bar{g}(-\cos \theta \bar{\nabla}_e \bar{N} + \sin \theta \bar{\nabla}_e \bar{\nu}, \sin \theta \bar{N} + \cos \theta \bar{\nu}) \\
&= -\cos \theta \sin \theta \bar{g}(\bar{\nabla}_e \bar{N}, \bar{N}) - \cos \theta^2 \bar{g}(\bar{\nabla}_e \bar{N}, \bar{\nu}) + \sin \theta^2 \bar{g}(\bar{\nabla}_e \bar{\nu}, \bar{N}) + \\
&\quad \sin \theta \cos \theta \bar{g}(\bar{\nabla}_e \bar{\nu}, \bar{\nu}) \\
&= -\cos \theta^2 \bar{g}(\bar{\nabla}_e \bar{N}, \bar{\nu}) + \sin \theta^2 \bar{g}(\bar{\nabla}_e \bar{\nu}, \bar{N}) \\
&= -\cos \theta^2 \bar{g}(\bar{\nabla}_e \bar{N}, \bar{\nu}) - \sin \theta^2 \bar{g}(\bar{\nabla}_e \bar{N}, \bar{\nu}) \\
&= -\bar{g}(\bar{\nabla}_e \bar{N}, \bar{\nu}) \\
&= -h^{\partial B}(e, \bar{\nu}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Hipersuperfícies Capilares em uma Bola Euclidiana

Neste capítulo será trabalhado o caso Euclidiano, $B = \overline{B}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma bola unitária fechada. Nessas condições temos que, $\overline{\text{Ric}} \equiv 0$, $h^{\partial B} = g^{\partial B}$ e $\overline{N}(x) = x$, onde x denota o vetor posição em \mathbb{R}^{n+1} . Além disso, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno Euclidiano.

Construiremos uma nova formula do tipo Minkowski que é a principal ferramenta na prova da unicidade deste trabalho. Através da formula de Minkowski será possível obter funções testes admissíveis particularmente convenientes. Uma propriedade interessante dessas funções testes obtidas através da nova formula do tipo Minkowski é que elas anulam o termo do bordo na condição de estabilidade (proposição (2.2.3)), simplificando, dessa forma sua manipulação.

3.1 Uma nova fórmula do tipo Minkowski em \mathbb{R}^{n+1}

Estabeleceremos uma nova fórmula do tipo Minkowski, a qual será muito útil no estudo de hipersuperfícies em \mathbb{B}^{n+1} tanto no caso com bordo livre quanto quando ∂M intersecta $\partial \mathbb{B}^{n+1}$ com um ângulo constante. A construção de tal formula envolve um certo campo de Killing conforme (X_a) obtido através do pullback de uma transformação conforme (inversão). Construiremos uma inversão que deixa fixa a esfera $\mathbb{S}_{\sqrt{2}}^n(-a)$ de centro $-a$ e raio $\sqrt{2}$ e permuta entre as regiões interior e exterior a tal esfera.

Seja $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|a| = 1$. Seja $I_a : \mathbb{R}^{n+1} - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{a\}$ a inversão conforme ao longo da esfera $\mathbb{S}_{\sqrt{2}}^n(-a)$ de centro $-a$ e raio $\sqrt{2}$, ou seja

$$I_a(x) = -a + 2 \frac{(x+a)}{|x+a|^2}.$$

Observe que $I_a(I_a(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \neq -a$. Além disso, I_a mapeia $B^{n+1} - \{-a\}$ em $\mathbb{R}_+^{n+1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, a \rangle \geq 0\}$ e vice-versa.

Proposição 3.1.1. Para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \neq -a$, e todo $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, tem-se

$$DI_a(x)v = \frac{2v}{|x+a|^2} - \frac{4\langle v, x+a \rangle}{|x+a|^4}(x+a).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} DI_a(x)v &= 2 \left(\frac{v|x+a|^2 - 2(x+a)\langle v, x+a \rangle}{|x+a|^4} \right) \\ &= \frac{2v}{|x+a|^2} - \frac{4\langle v, x+a \rangle}{|x+a|^4}(x+a). \end{aligned}$$

□

Corolário 3.1.1. Para todo $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|a| = 1$, a aplicação I_a é conforme, ou seja,

$$(I_a^*\delta)_{ij} = \frac{4}{|x+a|^4}\delta_{ij},$$

para todo $i, j = 1, \dots, n+1$.

Considere o campo de vetores X_a definido em $B^{n+1} - \{-a\}$ por

$$X_a = DI_a(I_a(x))I_a(x),$$

ou seja, X_a é o pullback do campo de vetores radial $x \rightarrow x$ em \mathbb{R}^{n+1} , o qual é um campo de Killing conforme. Em particular, segue do Corolário acima que X_a é um campo de Killing conforme em $B^{n+1} - \{-a\}$. Observe que $X_a(x) \in T_x\mathbb{S}^n$ para todo $x \in \mathbb{S}^n - \{-a\}$. Mais explicitamente, temos

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{2I_a(x)}{|I_a(x)+a|^2} - \frac{4\langle I_a(x), I_a(x)+a \rangle}{|I_a(x)+a|^4}(I_a(x)+a) \\ &= \frac{2\left(-a + 2\frac{(x+a)}{|x+a|^2}\right)}{\left|2\frac{(x+a)}{|x+a|^2}\right|^2} - 4\frac{\left\langle -a + 2\frac{(x+a)}{|x+a|^2}, 2\frac{(x+a)}{|x+a|^2} \right\rangle}{\left|2\frac{(x+a)}{|x+a|^2}\right|^4} \left(2\frac{(x+a)}{|x+a|^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(-a|x+a|^2 + 2x + 2a) + \langle a, x+a \rangle(x+a) - 2(x+a) \\ &= \frac{1}{2}a|x|^2 - a\langle a, x \rangle - \frac{1}{2}a + x + a + x + a + \langle a, x \rangle x + \langle a, x \rangle a - 2x - 2a \\ &= \langle a, x \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A proposição a seguir apresenta duas propriedades simples e importantes de X_a .

Proposição 3.1.2. X_a é um campo de Killing conforme e sua restrição a $\partial\mathbb{B}^{n+1}$ é um campo tangente a $\partial\mathbb{B}^{n+1}$, ou seja,

i) X_a é um campo de Killing conforme com $\mathcal{L}_{X_a}\bar{g} = 2\langle x, a \rangle\bar{g}$, isto é:

$$\frac{1}{2}[\bar{\nabla}_i(X_a)_j + \bar{\nabla}_j(X_a)_i] = \langle x, a \rangle\delta_{ij}. \tag{3.2}$$

ii) $X_a|_{\partial\mathbb{B}}$ é um campo tangente em $\partial\mathbb{B}$, isto é,

$$\langle X_a, x \rangle|_{\partial\mathbb{B}} = 0. \quad (3.3)$$

Demonstração. Identidade (i). Aqui $\bar{\nabla}_i(X_a)_j := \langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_j \rangle$, onde $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} , portanto,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_j \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} (\langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a), e_j \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} \langle x, a \rangle x, e_j \rangle - \frac{1}{2} \langle \bar{\nabla}_{e_i} (|x|^2 + 1)a, e_j \rangle \\ &= \langle e_i(\langle x, a \rangle) x + \langle x, a \rangle \bar{\nabla}_{e_i} x, e_j \rangle - \frac{1}{2} \langle e_i(|x|^2 + 1)a + (|x|^2 + 1)\bar{\nabla}_{e_i} a, e_j \rangle \\ &= \langle e_i, a \rangle \langle x, e_j \rangle + \langle x, a \rangle \delta_{ij} - \langle e_i, x \rangle \langle a, e_j \rangle. \end{aligned}$$

Analogamente temos que:

$$\langle \bar{\nabla}_{e_j} X_a, e_i \rangle = \langle e_j, a \rangle \langle x, e_i \rangle + \langle x, a \rangle \delta_{ij} - \langle e_j, x \rangle \langle a, e_i \rangle.$$

Somando temos que:

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_j \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_j} X_a, e_i \rangle = 2\langle x, a \rangle \delta_{ij}.$$

De onde temos finalmente que:

$$\frac{1}{2} [\langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_j \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_j} X_a, e_i \rangle] = \langle x, a \rangle \delta_{ij}.$$

O item (ii) segue diretamente do cálculo:

$$\begin{aligned} \langle X_a, x \rangle &= \langle \langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a, x \rangle \\ &= \langle x, a \rangle |x|^2 - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1) \langle a, x \rangle, \end{aligned}$$

para X_a restrito a $\partial\mathbb{B}$ temos que

$$\langle X_a, x \rangle|_{\partial\mathbb{B}} = \langle x, a \rangle - \langle x, a \rangle = 0,$$

provando que $X_a|_{\partial\mathbb{B}} \perp x$, ou seja, $X_a|_{\partial\mathbb{B}}$ é tangente a $\partial\mathbb{B}$. □

Proposição 3.1.3 (Fórmula de Minkowski). *Seja $x : M \rightarrow \bar{\mathbb{B}}^{n+1}$ uma imersão isométrica em uma bola unitária Euclidiana, cujo o bordo ∂M intersecta $\partial\mathbb{B}^{n+1}$ em um ângulo constante $\theta \in (0, \pi)$. Seja $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ e X_a o campo definido por (3.1). Então*

$$\int_M n \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle dA = \int_M H \langle X_a, \nu \rangle dA. \quad (3.4)$$

Demonstração. Denote por X_a^T a projeção tangente de X_a em M . Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial local ortonormal em M . Afirmamos que:

$$\frac{1}{2}[\nabla_i(X_a^T)_j + \nabla_j(X_a^T)_i] = \langle x, a \rangle g_{ij} - h_{ij} \langle X_a, \nu \rangle. \quad (3.5)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a^T, e_j \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_j \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} (\langle X_a, \nu \rangle \nu), e_j \rangle \\ &= \bar{\nabla}_i (X_a)_j - \langle X_a, \nu \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_j \rangle \\ &= \bar{\nabla}_i (X_a)_j - h_{ij} \langle X_a, \nu \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Analogamente temos que

$$\nabla_j (X_a^T)_i = \bar{\nabla}_j (X_a)_i - h_{ji} \langle X_a, \nu \rangle. \quad (3.7)$$

Somando (3.6) e (3.7) e usando (3.2) e a simetria da segunda forma obtemos (3.5).

$$\begin{aligned} \nabla_i (X_a^T)_j + \nabla_j (X_a^T)_i &= \bar{\nabla}_i (X_a)_j - h_{ij} \langle X_a, \nu \rangle + \bar{\nabla}_j (X_a)_i - h_{ji} \langle X_a, \nu \rangle \\ &= (\bar{\nabla}_i (X_a)_j + \bar{\nabla}_j (X_a)_i) - (h_{ij} \langle X_a, \nu \rangle + h_{ji} \langle X_a, \nu \rangle) \\ &= 2\langle x, a \rangle \delta_{ij} - 2h_{ij} \langle X_a, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}[\nabla_i (X_a^T)_j + \nabla_j (X_a^T)_i] = \langle x, a \rangle \delta_{ij} + h_{ij} \langle X_a, \nu \rangle.$$

Tomando o traço de (3.5) com respeito a métrica induzida e integrando sobre M , temos:

$$\int_M \operatorname{div}_M (X_a^T) dA = \int_M (n \langle x, a \rangle - H \langle X_a, \nu \rangle) dA.$$

Usando o Teorema de Stokes temos:

$$\int_M (n \langle x, a \rangle - H \langle X_a, \nu \rangle) dA = \int_M \operatorname{div}_M (X_a^T) dA = \int_{\partial M} \langle X_a^T, \mu \rangle ds. \quad (3.8)$$

Note que em ∂M , $\bar{N} = x$ e $X_a = \langle x, a \rangle x - a$. Usando (2.5), (2.6) e (3.3) deduzimos que:

$$\begin{aligned} \langle X_a^T, \mu \rangle &= \langle X_a, \mu \rangle \\ &= \langle \langle x, a \rangle x - a, \operatorname{sen} \theta \bar{N} + \operatorname{cos} \theta \bar{\nu} \rangle \\ &= \operatorname{sen} \theta \langle x, a \rangle \langle x, x \rangle + \operatorname{cos} \theta \langle x, a \rangle \langle x, \nu \rangle - \operatorname{sen} \theta \langle x, a \rangle - \operatorname{cos} \theta \langle a, \bar{\nu} \rangle \\ &= \operatorname{cos}(\theta \langle x, a \rangle \langle x, \nu \rangle - \langle a, \bar{\nu} \rangle) \\ &= -\operatorname{cos} \theta \langle a, \bar{\nu} \rangle. \end{aligned}$$

Segue de (3.8) que:

$$\int_M (n\langle x, a \rangle - H\langle X_a, \nu \rangle) dA = \int_M \operatorname{div}_M(X_a^T) dA = -\cos \theta \int_{\partial M} \langle \bar{\nu}, a \rangle ds. \quad (3.9)$$

Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, isto é, no caso de bordo livre, a fórmula de Minkowski (3.4) segue direto de (3.9). Para o caso geral, basta provar que

$$n \int_M \langle \nu, a \rangle dA = \int_{\partial M} \langle \bar{\nu}, a \rangle ds. \quad (3.10)$$

Seja $Z_a = \langle \nu, a \rangle x - \langle x, \nu \rangle a$. Observando que Z_a é tangente a M ($\langle Z_a, \nu \rangle = 0$). Tomando o divergente de Z_a nem um referencial local ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M Z_a &= \langle \bar{\nabla}_{e_i}(\langle \nu, a \rangle x - \langle x, \nu \rangle a), e_i \rangle \\ &= \langle e_i(\langle \nu, a \rangle) x + \langle \nu, a \rangle e_i - e_i(\langle x, \nu \rangle) a, e_i \rangle \\ &= \langle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, a \rangle x + \langle \nu, a \rangle e_i - \langle e_i, \nu \rangle a - \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} \nu \rangle a, e_i \rangle \\ &= (\langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, a \rangle \langle x, e_i \rangle + \langle \nu, a \rangle \langle e_i, e_i \rangle - \langle e_i, \nu \rangle \langle a, e_i \rangle - \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} \nu \rangle \langle a, e_i \rangle) \\ &= h(a^T, x^T) + n\langle \nu, a \rangle - h(x^T, a^T) \\ &= n\langle \nu, a \rangle. \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} n \int_M \langle \nu, a \rangle dA &= \int_M \operatorname{div}_M Z_a dA \\ &= \int_{\partial M} (\langle \langle \nu, a \rangle x - \langle x, \nu \rangle a, \mu \rangle) ds \\ &= \int_{\partial M} (\langle \nu, a \rangle \langle x, \mu \rangle - \langle x, \nu \rangle \langle a, \mu \rangle) ds, \end{aligned}$$

Por fim, temos

$$\begin{aligned} \langle \nu, a \rangle \langle x, \mu \rangle - \langle x, \nu \rangle \langle a, \mu \rangle &= \sin \theta \langle -\cos \theta \bar{N} + \sin \theta \bar{\nu}, a \rangle + \cos \theta \langle \sin \theta \bar{N} + \cos \theta \bar{\nu}, a \rangle \\ &= \langle \bar{\nu}, a \rangle, \end{aligned}$$

o que prova (3.10). □

Observação 3.1.1. Para o problema de bordo livre, isto é, $\theta = \frac{\pi}{2}$, obtemos a seguinte fórmula de Minkowski:

$$n \int_M \langle x, a \rangle dA = \int_M H \langle X_a, \nu \rangle dA. \quad (3.11)$$

Observamos que (3.11) é válida também para qualquer hipersuperfície compacta sem bordo em \mathbb{R}^{n+1} com a mesma prova, apenas ignorando a integral do bordo. Até onde sabemos, esta identidade também é nova e achamos que poderá ser útil neste contexto.

Observação 3.1.2. Em seus trabalhos, Barbosa-do Carmo [5] e Ros-Vergasta [12] usaram as seguintes formulas do tipo Minkowski (3.12) e (3.13) respectivamente:

$$\int_M H\langle x, \nu \rangle dA = n \int_M dA \quad (3.12)$$

$$|\partial M| - n|M| - \int_M H\langle x, \nu \rangle dA \quad (3.13)$$

Observe que a formula (3.13), ao contrário de (3.12) envolve a área do bordo $|\partial M|$, a área da hipersuperfície $|M|$ além da curvatura média H . Portanto a formula usada nos trabalhos de Barbosa-do Carmo é mais interessante de trabalhar. Através de (3.12) obtemos a função teste admissível $\varphi = n - H\langle x, \nu \rangle$ que claramente satisfaz $\int_M \varphi = 0$.

Observando a formula do tipo Minkowski da proposição 3.1.3 obtemos a seguinte função teste admissível

$$n\langle x + \cos \theta \nu, a \rangle - H\langle X_a, \nu \rangle,$$

que tem semelhanças com a função teste admissível usada por Barbosa-do Carmo. A chave dessa construção está nas propriedades de Killing do campo X_a que será explorada constantemente neste trabalho.

3.2 Unicidade de hipersuperfícies capilares estáveis em uma bola Euclidiana

Proposição 3.2.1. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ uma imersão isométrica em uma bola Euclidiana unitária, cujo bordo ∂M intersecta $\partial \mathbb{B}^{n+1}$ em um ângulo constante $\theta \in (0, \pi)$. Seja $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor constante. Então ao longo de ∂M ,*

$$\bar{\nabla}_\mu \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle = q \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle, \quad (3.14)$$

$$\bar{\nabla}_\mu \langle X_a, \nu \rangle = q \langle X_a, \nu \rangle, \quad (3.15)$$

onde

$$q = \frac{1}{\text{sen } \theta} + \cot \theta h(\mu, \mu). \quad (3.16)$$

Demonstração. Usando a proposição 2.2.4

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\mu \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle &= \langle \bar{\nabla}_\mu (x + \cos \theta \nu), a \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_\mu x + \cos \theta \bar{\nabla}_\mu \nu, a \rangle \\ &= \langle \mu + \cos \theta h(\mu, \mu) \mu, a \rangle \\ &= (1 + \cos \theta h(\mu, \mu)) \langle \mu, a \rangle \\ &= q \text{sen } \theta \langle \mu, a \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando (2.5) e (2.6) e o fato de que $x = \bar{N}$ em ∂B^{n+1} temos

$$\begin{aligned}
\langle x + \cos \theta \nu, a \rangle &= \langle x + \cos \theta (-\cos \theta \bar{N} + \sin \theta \bar{\nu}), a \rangle \\
&= \langle (1 - \cos^2 \theta) \bar{N} + \cos \theta \sin \theta \bar{\nu}, a \rangle \\
&= \langle \sin^2 \theta \bar{N} + \cos \theta \sin \theta \bar{\nu}, a \rangle \\
&= \sin \theta \langle \sin \theta \bar{N} + \cos \theta \bar{\nu}, a \rangle \\
&= \sin \theta \langle \mu, a \rangle.
\end{aligned}$$

Assim (3.14) está provada.

Usando a definição de X_a e novamente a proposição 2.2.4 temos:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu \langle X_a, \nu \rangle &= \langle \bar{\nabla}_\mu X_a, \nu \rangle + \langle X_a, \bar{\nabla}_\mu \nu \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_\mu (\langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a), \nu \rangle + h(\mu, \mu) \langle X_a, \mu \rangle \\
&= \langle \langle \mu, a \rangle x + \langle x, a \rangle \mu - \langle x, \mu \rangle a, \nu \rangle + h(\mu, \mu) \langle \langle x, a \rangle x - a, \mu \rangle \\
&= -\cos \theta \langle \mu, a \rangle - \sin \theta \langle \nu, a \rangle + h(\mu, \mu) (\sin \theta \langle x, a \rangle - \langle \mu, a \rangle).
\end{aligned}$$

Note que $x = \bar{N} = \sin \theta \mu - \cos \theta \nu$ e $\mu = \frac{1}{\sin \theta} x + \cot \theta \nu$ (basta isolar \bar{N} em (2.5) e (2.6) e substituir o resultado em (2.6)), deduzimos ainda mais:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_\mu \langle X_a, \nu \rangle &= -\cot \theta (1 + h(\mu, \mu) \cos \theta) \langle x, a \rangle - \frac{1}{\sin \theta} (1 + h(\mu, \mu) \cos \theta) \langle \nu, a \rangle \\
&= -q(\cos \theta \langle x, a \rangle + \langle \nu, a \rangle).
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\langle X_a, \nu \rangle|_{\partial M} &= \langle x, a \rangle \langle x, \nu \rangle - \langle a, \nu \rangle \\
&= -(\cos \theta \langle x, a \rangle + \langle \nu, a \rangle),
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração de (3.15). □

Proposição 3.2.2. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica e $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ vetor constante. As seguintes identidades são válidas ao longo de M :*

i) $\Delta x = -H\nu,$

ii) $\Delta \frac{1}{2}|x|^2 = n - H\langle x, \nu \rangle,$

iii) $\Delta \nu = \nabla H - |h|^2 \nu,$

iv) $\Delta \langle x, \nu \rangle = \langle x, \nabla H \rangle + H - |h|^2 \langle x, \nu \rangle,$

v) $\Delta \langle X_a, \nu \rangle = \langle X_a, \nabla H \rangle + \langle x, a \rangle H - |h|^2 \langle X_a, \nu \rangle - n \langle \nu, a \rangle.$

Demonstração. Prova da identidade (i): considere o produto interno $\langle x, a \rangle$ com $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Derivemos agora na direção de um vetor qualquer $W \in T_x M$.

$$d\langle x, a \rangle \cdot W = W\langle x, a \rangle = \langle \bar{\nabla}_W x, a \rangle = \langle W, a \rangle.$$

Portanto, $\nabla\langle x, a \rangle = a^T$. Tomando agora o divergente do gradiente em um referencial local ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ temos:

$$\begin{aligned} \Delta\langle x, a \rangle &= \operatorname{div}_M(a^T) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} a^T, e_i \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i}(a - \langle a, \nu \rangle \nu), e_i \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i}(\langle a, \nu \rangle \nu), e_i \rangle \\ &= \langle e_i(\langle a, \nu \rangle) \nu + \langle a, \nu \rangle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i \rangle \\ &= \langle a, \nu \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i \rangle \\ &= -\langle a, \nu \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i \rangle \\ &= -\langle a, \nu \rangle H, \end{aligned}$$

e portanto temos que $\Delta x = -H\nu$.

Prova da identidade (ii): a exemplo da identidade (i) faremos primeiro o gradiente de $\frac{1}{2}|x|^2$ tomando um vetor qualquer $W \in T_x M$. Temos

$$W\frac{1}{2}\langle x, x \rangle = \langle \bar{\nabla}_W x, x \rangle = \langle W, x^T \rangle.$$

Portanto $\nabla\frac{1}{2}\langle x, x \rangle = x^T$. Agora calcularemos $\operatorname{div}_M(x^T)$ em M num referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^n$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M(x^T) &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} x^T, e_i \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i}(x - \langle x, \nu \rangle \nu), e_i \rangle \\ &= \langle e_i - \bar{\nabla}_{e_i}(\langle x, \nu \rangle \nu), e_i \rangle \\ &= \langle e_i - e_i(\langle x, \nu \rangle) \nu - \langle x, \nu \rangle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i \rangle \\ &= n - \langle x, \nu \rangle H, \end{aligned}$$

portanto a identidade (ii) está provada.

Prova da identidade (iii). Notemos que:

$$\Delta\langle \nu, a \rangle = \operatorname{div}_M(\nabla_M\langle \nu, a \rangle),$$

para todo $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Portanto, iniciaremos calculando o gradiente de $\langle \nu, a \rangle$ em M . Tomando um vetor qualquer $W \in T_x M$ temos:

$$W\langle \nu, a \rangle = \langle \bar{\nabla}_W \nu, a \rangle = \langle \bar{\nabla}_W \nu, a^T \rangle = \langle \bar{\nabla}_{a^T} \nu, W \rangle,$$

portanto,

$$\nabla \langle \nu, a \rangle = \bar{\nabla}_{a^T} \nu.$$

Tomando um referencial geodésico em x , isto é, $\nabla_{e_i} e_j = 0$, onde $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, calcularemos o divergente de $\bar{\nabla}_{a^T} \nu$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M (\nabla \langle \nu, a \rangle) &= \langle \nabla_{e_i} \bar{\nabla}_{a^T} \nu, e_i \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_i} \bar{\nabla}_{\langle a, e_j \rangle e_j} \nu, e_i \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_i} (\langle a, e_j \rangle \bar{\nabla}_{e_j} \nu), e_i \rangle \\ &= \langle e_i (\langle a, e_j \rangle) \bar{\nabla}_{e_j} \nu, e_i \rangle + \langle \langle a, e_j \rangle \nabla_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} \nu, e_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Observe que

$$\begin{aligned} e_i (\langle a, e_j \rangle) &= \langle a, \bar{\nabla}_{e_i} e_j \rangle \\ &= \langle a, \nabla_{e_i} e_j + \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, \nu \rangle \nu \rangle \\ &= \langle a, -\langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i} \nu \rangle \nu \rangle \\ &= -\langle a, \nu \rangle h(e_i, e_j). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Observe também que

$$\langle \nabla_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} \nu, e_i \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} \nu, e_i \rangle,$$

e

$$\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} \nu = \bar{\nabla}_{e_j} \bar{\nabla}_{e_i} \nu + R(e_i, e_j) \nu + \bar{\nabla}_{[e_i, e_j]} \nu.$$

Lembrando que $[e_i, e_j] = \bar{\nabla}_{e_i} e_j - \bar{\nabla}_{e_j} e_i = 0$ e substituindo na equação acima temos:

$$\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} \nu = \bar{\nabla}_{e_j} \bar{\nabla}_{e_i} \nu + R(e_i, e_j) \nu.$$

Agora usamos o fato de que o ambiente tem curvatura constante.

$$\langle R(e_i, e_j) \nu, e_i \rangle = c (\langle e_j, \nu \rangle \langle e_i, e_i \rangle - \langle e_i, \nu \rangle \langle e_j, e_i \rangle) = 0,$$

e portanto temos

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_j} \nu, e_i \rangle = \langle \bar{\nabla}_{e_j} \bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i \rangle, \quad (3.19)$$

substituindo (3.18) e (3.19) e (3.17) temos:

$$\begin{aligned} \Delta \langle \nu, a \rangle &= -\langle a, \nu \rangle h(e_i, e_j) \langle \bar{\nabla}_{e_j} \nu, e_i \rangle + \langle a, e_j \rangle \langle \nabla_{e_j} \bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i \rangle \\ &= -\langle a, \nu \rangle h(e_i, e_j) h(e_j, e_i) + \langle a, e_j \rangle (e_j (\langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i \rangle) - \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, \nabla_{e_j} e_i \rangle) \\ &= -\langle a, \nu \rangle |h|^2 + \langle a, e_j \rangle e_j(H) \\ &= -\langle a, \nu \rangle |h|^2 + \langle a, \nabla H \rangle \\ &= \langle a, \nabla H - |h|^2 \nu \rangle. \end{aligned}$$

Portanto a identidade (iii) está provada.

Provemos agora a identidade (iv). Usando um referencial ortonormal em $\{e_i\}_{i=1}^n$ em M , temos

$$\begin{aligned}
\Delta\langle x, \nu \rangle &= \Delta\langle x, e_i \rangle \langle \nu, e_i \rangle \\
&= \langle \nu, e_i \rangle \Delta\langle x, e_i \rangle + \langle x, e_i \rangle \Delta\langle \nu, e_i \rangle + 2\langle \nabla\langle x, e_i \rangle, \nabla\langle \nu, e_i \rangle \rangle \\
&= \langle \Delta x, \nu \rangle + \langle x, \Delta \nu \rangle + 2\langle \nabla x, \nabla \nu \rangle \\
&= -H + \langle x, \nabla H \rangle - |h|^2 \langle x, \nu \rangle + 2\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} \nu \rangle \\
&= -H + \langle x, \nabla H \rangle - |h|^2 \langle x, \nu \rangle + 2H \\
&= H + \langle x, \nabla H \rangle - |h|^2 \langle x, \nu \rangle,
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

Por fim, provemos a identidade (v).

$$\begin{aligned}
\Delta\langle X_a, \nu \rangle &= \Delta\langle X_a, e_i \rangle \langle \nu, e_i \rangle \\
&= \langle \nu, e_i \rangle \Delta\langle X_a, e_i \rangle + \langle X_a, e_i \rangle \Delta\langle \nu, e_i \rangle + 2\langle \nabla\langle X_a, e_i \rangle, \nabla\langle \nu, e_i \rangle \rangle \\
&= \langle \Delta X_a, \nu \rangle + \langle X_a, \Delta \nu \rangle + 2\langle \nabla X_a, \nabla \nu \rangle.
\end{aligned}$$

Usando a definição de X_a e as identidades (i) e (ii) temos:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta X_a, \nu \rangle &= \langle \Delta(\langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a), \nu \rangle \\
&= \langle \Delta\langle x, a \rangle x + \langle x, a \rangle \Delta x - (\Delta \frac{1}{2}|x|^2)a, \nu \rangle \\
&= -H\langle \nu, a \rangle \langle \nu, x \rangle - H\langle x, a \rangle - (n - H\langle x, \nu \rangle)\langle \nu, a \rangle \\
&= -H\langle x, a \rangle - n\langle \nu, a \rangle.
\end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}
\langle \nabla X_a, \nabla \nu \rangle &= \langle \nabla(\langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a), \nabla \nu \rangle \\
&= \langle \langle e_i, a \rangle x + \langle x, a \rangle e_i - \langle e_i, x \rangle a, \overline{\nabla}_{e_i} \nu \rangle \\
&= \langle x, \overline{\nabla}_{\langle e_i, a \rangle e_i} \nu \rangle + \langle x, a \rangle \langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} \nu \rangle - \langle a, \overline{\nabla}_{\langle e_i, x \rangle e_i} \nu \rangle \\
&= h(x^T, a^T) + \langle x, a \rangle H - h(a^T, x^T) \\
&= \langle x, a \rangle H.
\end{aligned}$$

E por fim, usando a identidade (iii):

$$\begin{aligned}
\langle X_a, \Delta \nu \rangle &= \langle X_a, \nabla H - |h|^2 \nu \rangle \\
&= \langle X_a, \nabla H \rangle - |h|^2 \langle X_a, \nu \rangle.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.2.3. *Seja $x : M \rightarrow \overline{\mathbb{B}^{n+1}}$ uma imersão isométrica em uma bola unitária Euclidiana, cujo o bordo ∂M intersecta $\partial \mathbb{B}^{n+1}$ em um ângulo constante $\theta \in (0, \pi)$. Para cada $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, defina:*

$$\varphi_a = n\langle x + \cos \theta \nu, a \rangle - H\langle X_a, \nu \rangle \quad (3.20)$$

ao longo de M . Então φ_a satisfaz

$$\int_M \varphi_a dA = 0, \quad (3.21)$$

$$\nabla_\mu \varphi_a - q\varphi_a = 0. \quad (3.22)$$

Se, além disso, M tem curvatura média constante, então φ_a satisfaz também

$$\Delta \varphi_a + |h|^2 \varphi_a = (n|h|^2 - H^2)\langle x, a \rangle. \quad (3.23)$$

Demonstração. (3.21) e (3.22) seguem das Proposições 3.1.3 e 3.2.1 respectivamente, após fazer uma substituição direta. Se H é constante, a proposição 3.2.2 implica que:

$$\begin{aligned} (\nabla + |h|^2)\langle x, a \rangle &= |h|^2\langle x, a \rangle - H\langle \nu, a \rangle, \\ (\nabla + |h|^2)\langle X_a, \nu \rangle &= H\langle x, a \rangle - n\langle \nu, a \rangle, \\ (\nabla + |h|^2)\langle \nu, a \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Então (3.23) segue diretamente do cálculo anterior. \square

Agora caracterizaremos as hipersuperfícies capilares estáveis em uma bola unitária Euclidiana.

Teorema 3.2.1. *Assuma que $x : M \rightarrow \overline{\mathbb{B}^{n+1}}$ é uma hipersuperfície capilar estável imersa em uma bola Euclidiana unitária \mathbb{B}^{n+1} com curvatura média constante $H \geq 0$ e ângulo de contato constante $\theta \in (0, \pi)$. Então x ou é uma bola totalmente geodésica ou uma calota esférica.*

Demonstração. A condição de estabilidade nos diz que

$$-\int_M \varphi(\Delta \varphi + |h|^2 \varphi) dA + \int_{\partial M} \varphi(\nabla_\mu \varphi - q\varphi) ds \geq 0, \quad (3.24)$$

para toda função $\varphi \in \mathcal{F}$, onde

$$q = \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta h(\mu, \mu).$$

Seja $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} . Para cada $i = 1, \dots, n+1$, seja $\varphi_{e_i} = n\langle x + \cos \theta \nu, e_i \rangle - H\langle X_{e_i}, \nu \rangle$. Pela proposição 3.2.3, temos $\int_M \varphi_{e_i} dA = 0$ para todo

$i = 1, \dots, n+1$. Logo, aplicando cada uma das funções φ_{e_i} , $i = 1, \dots, n+1$, na desigualdade (3.24) e usando as identidades (3.21) e (3.23), obtemos

$$\int_M (n\langle x + \cos \theta \nu, e_i \rangle \langle x, e_i \rangle - H \langle \langle x, e_i \rangle X_{e_i}, \nu \rangle) (n|h|^2 - H^2) dA \leq 0. \quad (3.25)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} n\langle x + \cos \theta \nu, e_i \rangle \langle x, e_i \rangle &= n\langle x + \cos \theta, x \rangle \\ &= n|x|^2 + n \cos \theta \langle x, \nu \rangle, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle x, e_i \rangle X_{e_i} &= \langle x, e_i \rangle (\langle x, e_i \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)e_i) \\ &= \langle x, e_i \rangle^2 x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)\langle x, e_i \rangle e_i \\ &= |x|^2 x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)x \\ &= |x|^2 x - \frac{1}{2}|x|^2 x - \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)x. \end{aligned}$$

Logo, somando (3.25) para $i = 1, \dots, n+1$ e usando as duas identidades acima, obtemos

$$\int_M \left(n|x|^2 + n \cos \theta \langle x, \nu \rangle - \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)H \langle x, \nu \rangle \right) (n|h|^2 - H^2) dA \leq 0. \quad (3.26)$$

No caso em que $H = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, a desigualdade (3.26) implica

$$\int_M |x|^2 |h|^2 dA \leq 0.$$

Portanto, segue que $|h| \equiv 0$, ou seja, M é totalmente geodésica. Com isso, temos uma prova alternativa para um resultado de Ros-Vergasta [12].

Para o caso geral, inicialmente note que se

$$\Phi = \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)H - n(\langle x, \nu \rangle + \cos \theta). \quad (3.27)$$

Usando as identidades (ii) e (iv) da proposição 3.2.2, pode-se verificar que Φ satisfaz:

$$\Delta \Phi = (n|h|^2 - H^2) \langle x, \nu \rangle. \quad (3.28)$$

Como H é uma função constante temos que: $\nabla H = 0$ portanto:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \Delta \left(\frac{1}{2}(|x|^2 - 1)H - n(\langle x, \nu \rangle + \cos \theta) \right) \\ &= H \Delta \frac{1}{2}(|x|^2 - 1) - n \Delta \langle x, \nu \rangle \\ &= H(n - H \langle x, \nu \rangle) - n(H - |h|^2 \langle x, \nu \rangle) \\ &= (n|h|^2 - H^2) \langle x, \nu \rangle \end{aligned}$$

Uma vez que $|x|^2 = 1$ e $\langle x, \nu \rangle = -\cos \theta$ em ∂M , temos $\Phi = 0$ em ∂M . Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_M \Delta \frac{1}{2} \Phi^2 dA &= \int_M (\Phi \Delta \Phi + |\nabla \Phi|^2) dA \\ &= \int_{\partial M} \Phi \nabla_\mu \Phi ds \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Adicionando (3.29) a (3.26) e usando 3.28, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M \left(n(|x|^2 + \cos \theta \langle x, \nu \rangle) - \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)H \langle x, \nu \rangle \right) (n|h|^2 - H^2) + \Delta \frac{1}{2} \Phi^2 dA \\ &= \int_M \left(n|x^T|^2 + n\langle x, \nu \rangle^2 + n \cos \theta \langle x, \nu \rangle - \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)H \langle x, \nu \rangle \right) (n|h|^2 - H^2) + \Delta \frac{1}{2} \Phi^2 dA \\ &= \int_M n|x^T|^2 (n|h|^2 - H^2) + \left(n(\langle x, \nu \rangle + n \cos \theta) - \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)H \right) (n|h|^2 - H^2) \langle x, \nu \rangle \\ &\quad + \Delta \frac{1}{2} \Phi^2 dA \\ &= \int_M n|x^T|^2 (n|h|^2 - H^2) - \Phi \Delta \Phi + \Phi \Delta \Phi + |\nabla \Phi|^2 dA \\ &= \int_M n|x^T|^2 (n|h|^2 - H^2) + |\nabla \Phi|^2 dA \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

onde usamos que $n|h|^2 - H^2 \geq 0$. Basta observar que:

$$|h|^2 = \sum_{i,j} h_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^n h_{ii}^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n h_{ii} \right)^2 = \frac{1}{n} (\text{tr } h)^2 = \frac{H^2}{n},$$

onde a segunda desigualdade acima é exatamente a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática. Observe que a igualdade na primeira desigualdade ocorre se, e somente se, $h_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Por outro lado, a igualdade entre as médias ocorre se, e somente se, $h_{11} = \dots = h_{nn}$, ou seja, $h_{ij} = \alpha \delta_{ij}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Com isso, obtemos que $|x^T|^2 (n|h|^2 - H^2) = 0$ e $\nabla \Phi = 0$ em M . Desta última, segue que Φ é constante. Portanto,

$$0 = \Delta \Phi = (n|h|^2 - H^2) \langle x, \nu \rangle,$$

em M .

Por fim, segue de $|x^T|^2 (n|h|^2 - H^2) = 0$ e $(n|h|^2 - H^2) \langle x, \nu \rangle = 0$ que $n|h|^2 - H^2 = 0$ em M . De fato, basta notar que $\{x \in M : x = 0\}$ tem interior vazio pois $M \rightarrow B^{n+1}$ é uma imersão. Portanto, $n|h|^2 = H^2$ em M e disto segue que M é umbílica. \square

Observação 3.2.1. Uma vez que a nova fórmula de Minkowski vale também para hiper-superfícies fechadas em \mathbb{R}^{n+1} , (Observação 3.1.1) a prova acima para a estabilidade de

superfícies capilares funciona sem alterações para hipersuperfícies fechadas. Isto significa que foi dado uma nova prova do resultado de Barbosa-do Carmo [4] mencionado acima. Isso também funciona para hipersuperfícies fechadas em formas espaciais.

Capítulo 4

Hipersuperfícies Capilares em uma Bola de \mathbb{H}^{n+1} e \mathbb{S}^{n+1}

Neste capítulo trabalharemos o caso quando \overline{M} é a forma espacial \mathbb{H}^{n+1} ou \mathbb{S}^{n+1} e B é uma bola geodésica em \overline{M} . Como esses dois casos são similares, provaremos o caso hiperbólico e indicaremos as modificações necessárias para o caso esférico na seção 5.3.

O roteiro da prova da unicidade no espaço hiperbólico é o mesmo do caso Euclidiano, a ideia é construir o campo de Killing conforme X_a para o caso hiperbólico via a transformação conforme inversão. Usando a mesma técnica de tomar o divergente da componente tangente de X_a construiremos a formula do tipo Minkowski para o espaço hiperbólico, dessa formula obteremos uma família de funções teste admissíveis que utilizaremos no critério de estabilidade e usando os mesmo argumentos do caso Euclidiano provaremos a unicidade.

O caso \mathbb{S}^n é totalmente análogo e será indicado as modificações mínimas. Além disso, daremos a prova de uma variação do teorema que é o caso em que a hipersuperfície não está contida na bola, porém o bordo ainda está contido no bordo da bola e o intersecta em um angulo constante.

4.1 A nova fórmula do tipo Minkowski em \mathbb{H}^{n+1}

Seja \mathbb{H}^{n+1} o espaço hiperbólico simplesmente conexo com curvatura -1 . Usamos aqui o modelo de bola de Poincaré, o qual é dado por:

$$\mathbb{H}^{n+1} = (\mathbb{B}^{n+1}, \overline{g} = e^{2u} \delta_{ij}), \quad e^{2u} = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2}. \quad (4.1)$$

A vantagem de usar o modelo da bola de Poincaré é que, para este modelo, é relativamente fácil encontrar o campo de Killing conforme correspondente X_a , como no caso Euclidiano.

Usamos δ ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar a métrica Euclidiana em $\mathbb{B}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Às vezes também representamos a métrica hiperbólica, em termos de coordenadas polares com respeito a origem, como

$$\bar{g} = dr^2 + \sinh^2 r g_{\mathbb{S}^n}.$$

Usamos $r = r(x)$ para denotar a distância hiperbólica da origem e denote $V_0 = \cosh r$. É fácil verificar que:

$$V_0 = \cosh r = \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}, \quad \sinh r = \frac{2|x|}{1 - |x|^2}. \quad (4.2)$$

A função posição x , em termos de coordenadas polares, pode ser representada por:

$$x = \sinh r \partial_r. \quad (4.3)$$

É bem conhecido que x é um campo de Killing conforme

$$\bar{\nabla} x = V_0 \bar{g}. \quad (4.4)$$

Seja $B_R^{\mathbb{H}}$ uma bola em \mathbb{H}^{n+1} com raio hiperbólico $R \in (0, \infty)$. Por uma isometria de \mathbb{H}^{n+1} , podemos assumir $B_R^{\mathbb{H}}$ centrada na origem. $B_R^{\mathbb{H}}$, quando vista como um subconjunto de $\mathbb{B}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, é a bola Euclidiana com raio $R_{\mathbb{R}} := \sqrt{\frac{1 - \operatorname{arccosh} R}{1 + \operatorname{arccosh} R}} \in (0, 1)$. As curvaturas principais de $\partial B_R^{\mathbb{H}}$ são $\coth R$. O vetor normal unitário \bar{N} a $\partial B_R^{\mathbb{H}}$ com respeito a \bar{g} é dado por

$$\bar{N} = \frac{1}{\sinh R} x.$$

Como no caso Euclidiano, para cada $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, definimos o correspondente campo vetorial diferenciável X_a e \mathbb{H}^{n+1} por:

$$X_a = \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \left[\langle x, a \rangle x - \frac{1}{2} (|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2) a \right]. \quad (4.5)$$

Além disso, definimos outro campo vetorial diferenciável Y_a em \mathbb{H}^{n+1} por:

$$Y_a = \frac{1}{2} (|x|^2 + 1) a - \langle x, a \rangle x. \quad (4.6)$$

Note que o vetor a não é constante (ou paralelo) com respeito a métrica hiperbólica. Precisamos expressar algumas fórmulas de derivados covariantes na métrica hiperbólica de várias funções e campos vetoriais associados a a .

Proposição 4.1.1. Para qualquer campo vetorial tangente Z em \mathbb{H}^{n+1} ,

$$i) \quad \bar{\nabla}_Z a = e^{-u}[\bar{g}(x, Z)a + \bar{g}(x, a)Z - \bar{g}(Z, a)x],$$

$$ii) \quad \bar{\nabla}_Z(e^{-u}a) = e^{-u}[\bar{g}(x, e^{-u}a)Z - \bar{g}(Z, e^{-u}a)x],$$

$$iii) \quad \bar{\nabla}_Z V_0 = \bar{g}(x, Z),$$

$$iv) \quad \bar{\nabla}_Z V_a = \bar{g}(Z, e^{-u}a) + e^{-u}\bar{g}(x, e^{-u}a)\bar{g}(Z, x)$$

$$v) \quad \bar{\nabla}_Z Y_a = e^{-u}\bar{g}(x, Z)a - e^{-u}\bar{g}(Z, a)x,$$

$$vi) \quad \bar{\nabla}_Z X_a = -\cosh R[e^{-u}\bar{g}(x, Z)a - e^{-u}\bar{g}(Z, a)x] + e^{-u}\bar{g}(x, a)Z.$$

Demonstração. Prova de (i). Seja $\{E_i\}_{i=1}^{n+1}$ os vetores unitários coordenados em \mathbb{R}^{n+1} . Seja $Z = Z^i E_i$ e $a = a^i E_i$. De (1.7) temos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_i} E_j &= E_i(u)E_j + E_j(u)E_i - \delta_{ij}\nabla u \\ &= \frac{2}{1-|x|^2}(x_i E_j + x_j E_i - x\delta_{ij}). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Z a &= Z^i a^j \bar{\nabla}_{E_i} E_j \\ &= Z^i a^j \frac{2}{1-|x|^2}(x_i E_j + x_j E_i - x\delta_{ij}) \\ &= e^{-u}[\bar{g}(x, Z)a + \bar{g}(x, a)Z - \bar{g}(Z, a)x], \end{aligned}$$

onde temos usado $e^{-u} = \frac{1-|x|^2}{2}$ e $\bar{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Prova de (ii). Observe que

$$\bar{\nabla}_Z(e^{-u}) = -e^{-u}Z(u) = -e^{-2u}\bar{g}(x, Z). \quad (4.7)$$

A identidade (ii) segue então da identidade (i) e da equação (4.7), como se observa

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Z e^{-u}a &= Z(u)a + e^{-u}\bar{\nabla}_Z a \\ &= -e^{-2u}\bar{g}(x, Z)a + e^{-2u}[\bar{g}(x, Z)a + \bar{g}(x, a)Z - \bar{g}(Z, a)x] \\ &= e^{-u}[\bar{g}(x, e^{-u}a)Z - \bar{g}(Z, e^{-u}a)x]. \end{aligned}$$

Prova de (iii). A identidade (iii) segue facilmente observando que $V_0 = e^u - 1$. Como segue

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Z V_0 &= \bar{\nabla}_Z(e^u - 1) \\ &= e^u Z(u) \\ &= \bar{g}(x, Z) \end{aligned}$$

Prova de (iv). Reescrevemos V_a como

$$V_a = \frac{2\langle x, a \rangle}{|x|^2} = \bar{g}(x, e^{-u}a). \quad (4.8)$$

Calculemos V_a usando (4.8). Usando (4.4) e a identidade (ii), temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Z V_a &= \bar{g}(\bar{\nabla}_Z x, e^{-u}a) + \bar{g}(x, \bar{\nabla}_Z(e^{-u}a)) \\ &= V_0 e^{-u} \bar{g}(Z, a) + e^{-2u} [\bar{g}(x, a) \bar{g}(x, Z) - \bar{g}(Z, a) \bar{g}(x, x)] \\ &= e^{-u} \bar{g}(Z, a) + e^{-2u} \bar{g}(x, a) \bar{g}(Z, x), \end{aligned}$$

na ultima igualdade, usamos que

$$\begin{aligned} V_0 - e^{-u} \bar{g}(x, x) &= \cosh r - \frac{1}{1 + \cosh r} \sinh^2 r \\ &= 1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Provando assim a identidade (iv).

Prova de (v). Relembre que $Y_a = \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a - \langle x, a \rangle x$. Usando a identidade (i) e (4.4) temos:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Z Y_a &= \langle x, Z \rangle a + \frac{1}{2}(|x|^2 + 1) \bar{\nabla}_Z a - \langle Z, a \rangle x - \langle x, a \rangle \bar{\nabla}_Z x \\ &= e^{-2u} \bar{g}(x, Z) a + \frac{1}{2}(|x|^2 + 1) e^{-u} [\bar{g}(x, Z) a + \bar{g}(x, a) Z - \bar{g}(Z, a) x] \\ &\quad - e^{-2u} \bar{g}(Z, a) x - e^{-2u} \bar{g}(x, a) V_0 Z \\ &= e^{-u} \bar{g}(x, Z) a - e^{-u} \bar{g}(Z, a) x. \end{aligned}$$

Prova de (vi). A prova da identidade (vi) é similar a da identidade (v).

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Z X_a &= \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \left[\langle Z, a \rangle x + \langle x, a \rangle \bar{\nabla}_Z x - \langle x, Z \rangle a - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2) \bar{\nabla}_Z a \right] \\ &= \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \left[e^{-2u} \bar{g}(Z, a) x + e^{-2u} \bar{g}(x, a) V_0 Z - e^{-2u} \bar{g}(x, Z) a \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1) e^{-u} [\bar{g}(x, Z) a + \bar{g}(x, a) Z - \bar{g}(Z, a) x] \right] \\ &= \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \left[\left(e^{-2u} + \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2) e^{-u} \right) (\bar{g}(Z, a) x - \bar{g}(x, Z) a) \right] \\ &\quad + \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \left(e^{-2u} V_0 - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2) e^{-u} \right) \bar{g}(x, a) Z \\ &= \frac{(1 - |x|^2)}{2} \frac{1 + R_{\mathbb{R}}^2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} (\bar{g}(Z, a) x - \bar{g}(x, Z) a) + \frac{(1 - |x|^2)}{2} \bar{g}(x, a) Z \\ &= -\cosh R [e^{-u} \bar{g}(x, Z) a - e^{-u} \bar{g}(Z, a) x] + e^{-u} \bar{g}(x, a) Z. \end{aligned}$$

□

Proposição 4.1.2.

i) X_a é um campo de Killing conforme em \mathbb{H}^{n+1} com

$$\frac{1}{2}(\bar{\nabla}_i(X_a)_j + \bar{\nabla}_j(X_a)_i) = V_a \bar{g}_{ij}, \quad \text{onde } V_a = \frac{2\langle x, a \rangle}{|x|^2}. \quad (4.10)$$

ii) $X_a|_{\partial\mathbb{B}_R^{\mathbb{H}}}$ é um campo vetorial tangente em $\partial\mathbb{B}_R^{\mathbb{H}}$. Em particular,

$$\bar{g}(X_a, \bar{N}) = 0.$$

iii) Y_a é um campo vetorial de Killing em \mathbb{H}^{n+1} , isto é,

$$\frac{1}{2}(\bar{\nabla}_i(Y_a)_j + \bar{\nabla}_j(Y_a)_i) = 0. \quad (4.11)$$

Demonstração. Item (i). Recorde que X_a é um campo de Killing conforme em uma bola unitária Euclidiana \mathbb{B}^{n+1} com respeito a métrica Euclidiana (proposição 3.1.2). Um fato bem conhecido é que um campo de Killing conforme ainda é conforme em relação a uma métrica conforme. Para ser mais exato, uma um referencial local ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$, temos

$$\frac{1}{2}(\bar{\nabla}_i(X_a)_j + \bar{\nabla}_j(X_a)_i) = \frac{1}{n+1} \operatorname{div}_{\bar{g}}(X_a) \bar{g}_{ij},$$

onde

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\bar{g}}(X_a) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_i) \\ &= \bar{g}(-\cosh R[e^{-u} \bar{g}(x, e_i) a - e^{-u} \bar{g}(e_i, a) x] + e^{-u} \bar{g}(x, a) e_i, e_i) \\ &= -\cosh R[e^{-u} \bar{g}(x, a) - e^{-u} \bar{g}(x, a)] + (n+1) \bar{g}(x, e^{-u} a) \\ &= (n+1) V_a. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Item (ii). Isto é válido devido ao fato que $\langle X_a, x \rangle|_{\partial\mathbb{B}_{R^{\mathbb{H}}}} = 0$ na métrica Euclidiana e o fato que a transformação conforme preserva ângulo.

Item (iii). Como no item (i), sabemos que Y_a é um campo de Killing conforme em \mathbb{B}^{n+1} com respeito a métrica Euclidiana. Assim Y_a é novamente um campo de Killing conforme com respeito a métrica conforme \bar{g} com

$$\frac{1}{2}(\bar{\nabla}_i(Y_a)_j + \bar{\nabla}_j(Y_a)_i) = \frac{1}{n+1} \operatorname{div}_{\bar{g}}(Y_a) \bar{g}_{ij},$$

onde

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\bar{g}}(Y_a) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} Y_a, e_i) \\ &= \bar{g}(e^{-u} \bar{g}(x, Z) a - e^{-u} \bar{g}(Z, a) x, e_i) \\ &= \bar{g}(x, e^{-u} a) - \bar{g}(x, e^{-u} a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Seja $x : M \rightarrow B_R^{\mathbb{H}}$ uma hipersuperfície imersa isometricamente a qual intersecta $\partial B_R^{\mathbb{H}}$ em um ângulo constante θ . Como no espaço Euclidiano, pelo uso das propriedades de X_a e Y_a na proposição 4.1.2 e o fato de $\partial B_R^{\mathbb{H}}$ ser umbílica em \mathbb{H}^{n+1} , temos a seguinte fórmula do tipo Minkowski.

Proposição 4.1.3. (*Fórmula de Minkowski*). *Seja $x : M \rightarrow B_R^{\mathbb{H}}$ uma imersão isométrica na bola hiperbólica $B_R^{\mathbb{H}}$, cujo bordo ∂M intersecta $\partial B_R^{\mathbb{H}}$ em um ângulo constante $\theta \in (0, \pi)$. Seja $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ um campo vetorial constante e X_a, Y_a são definidos por (4.5) e (4.6). Então:*

$$\int_M n(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) dA = \int_M H \bar{g}(X_a, \nu) dA. \quad (4.13)$$

Demonstração. Da mesma forma que na prova da proposição 3.2.1, pelo uso das duas propriedades de X_a na proposição 4.1.2 temos

$$\int_M nV_a - H \bar{g}(X_a, \nu) dA = \int_M \operatorname{div}_M(X_a^T) dA \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial M} \bar{g}(X_a^T, \mu) ds \\ &= -\frac{2R_{\mathbb{R}}^2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \cos \theta \int_{\partial M} \bar{g}(a, \bar{\nu}) ds. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Seja

$$Z_a = \bar{g}(\nu, e^{-u}a)x - \bar{g}(x, \nu)(e^{-u}a).$$

Afirmamos que

$$\operatorname{div}_M Z_a = n \bar{g}(Y_a, \nu). \quad (4.16)$$

De fato, por um cálculo direto temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M[\bar{g}(\nu, e^{-u}a)x] &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{g}(\nu, e^{-u}a)x, e_i) \\ &= (\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \nu, e^{-u}a) + \bar{g}(\nu, e^{-u}[\bar{g}(x, e^{-u}a)e_i - \bar{g}(e_i, e^{-u}a)x])) \bar{g}(x, e_i) \\ &+ \bar{g}(\nu, e^{-u}a)(nV_0 - H \bar{g}(x, \nu)) \\ &= h(a^T, x^T) - e^{-u} \bar{g}(x^T, e^{-u}a) \bar{g}(x, \nu) + \bar{g}(\nu, e^{-u}a)(nV_0 - H \bar{g}(x, \nu)), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M[\bar{g}(x, \nu)(e^{-u}a)] &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{g}(x, \nu)(e^{-u}a), e_i) \\ &= (\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} x, \nu) + \bar{g}(x, \bar{\nabla}_{e_i} \nu)) \bar{g}(e_i, e^{-u}a) \\ &+ \bar{g}(x, \nu)(e^{-u}[\bar{g}(x, e^{-u}a)n - \bar{g}(e_i, e^{-u}a)\bar{g}(x, e_i)]) \\ &= h(x^T, a^T) + \bar{g}(x, \nu)[e^{-u}(n \bar{g}(x, e^{-u}a) - \bar{g}(x^T, e^{-u}a)) - H \bar{g}(\nu, e^{-u}a)]. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_M Z_a &= nV_0\bar{g}(\nu, e^{-u}a) - ne^{-u}\bar{g}(x, e^{-u}a)\bar{g}(x, \nu) \\
&= n\bar{g}(\nu, \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a - \langle x, a \rangle x) \\
&= n\bar{g}(Y_a, \nu),
\end{aligned}$$

onde usamos que $V_0 = \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}$, $e^{-u} = \frac{1-|x|^2}{2}$ e $\bar{g} = e^{2u}\langle \cdot, \cdot \rangle$. Assim provamos a afirmação. Integrando (4.16) sobre M e usando integração por partes, temos

$$\int_M n\bar{g}(Y_a, \nu)dA = \int_{\partial M} \bar{g}(Z_a, \mu)ds. \quad (4.17)$$

Usando (2.5) e (2.6) é fácil checar que

$$\bar{g}(Z_a, \mu)|_{\partial M} = R_{\mathbb{R}}\bar{g}(\bar{\nu}, a). \quad (4.18)$$

A fórmula do tipo Minkowski (4.13) segue de (4.14), (4.17) e (4.18). \square

Proposição 4.1.4. *Ao longo de ∂M , temos que:*

$$\bar{\nabla}_\mu(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a \nu)) = q(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a \nu)), \quad (4.19)$$

$$\bar{\nabla}_\mu \bar{g}(X_a, \nu) = q\bar{g}(X_a, \nu), \quad (4.20)$$

onde

$$q = \frac{1}{\sinh \theta} \coth R + \cot \theta h(\mu, \mu). \quad (4.21)$$

Demonstração. Nesta prova sempre tomaremos valores ao longo de ∂M e usamos (2.5) e (2.6). Primeiramente, note que:

$$\bar{g}(Y_a, \nu) = e^{2u}\langle Y_a, x \rangle = e^{2u}\frac{1}{2}(|x|^2 - 1)\langle x, a \rangle = e^{-u}\bar{g}(x, a) = V_a.$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}
V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu) &= \bar{g}(Y_a, x + \sinh R \cos \theta \nu) \\
&= \bar{g}(Y_a, \sinh R \bar{N} + \sinh R \cos \theta (-\cos \theta + \sin \theta \bar{\nu})) \\
&= \sinh R \sin \theta \bar{g}(Y_a, \mu).
\end{aligned} \quad (4.22)$$

Pelas identidades (iv) e (v) da proposição (4.1.1) temos que

$$\begin{aligned}
&\bar{\nabla}_\mu(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a \nu)) \\
&= e^{-u}\bar{g}(\mu, a) + e^{-2u}\bar{g}(x, a)\bar{g}(\mu, x) \\
&\quad + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, h(\mu, \mu)\mu) + \sinh R \cos \theta e^{-u}[\bar{g}(x, \mu)\bar{g}(\nu, a) - \bar{g}(\mu, a)\bar{g}(x, \nu)].
\end{aligned}$$

Usando $\nu = -\frac{1}{\cos\theta}\bar{N} + \tan\theta\mu$ e $x = \sinh R\bar{N}$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \sinh R \cos\theta e^{-u} [\bar{g}(x, \mu)\bar{g}(\nu, a) - \bar{g}(\mu, a)\bar{g}(x, \nu)] \\ &= \sinh^2 R e^{-u} \bar{g}(\mu, a) - e^{-u} \bar{g}(x, \mu)\bar{g}(x, a). \end{aligned}$$

Portanto temos:

$$\begin{aligned} & \bar{\nabla}_\mu(V_a + \sinh R \cos\theta \bar{g}(Y_a \nu)) \tag{4.23} \\ &= e^{-u} \cosh^2 R \bar{g}(\mu, a) + (e^{-2u} + e^{-u}) \bar{g}(x, a) \bar{g}(x, \mu) + \sinh R \cos\theta \bar{g}(Y_a, h(\mu, \mu)\mu) \\ &= \cosh R \bar{g} \left(\frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a - \langle x, a \rangle x, \mu \right) + \sinh R \cos\theta \bar{g}(Y_a, h(\mu, \mu)\mu) \\ &= (\cosh R + \sinh R \cos\theta h(\mu, \mu)) \bar{g}(Y_a, \mu). \end{aligned}$$

Portanto, o primeiro membro da fórmula (4.19) segue de (4.22) e (4.23).

Usando o fato de que $\bar{N} = \sin\theta\mu - \cos\theta\nu$, temos

$$\begin{aligned} \bar{g}(X_a, \nu) &= \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \left[e^{-2u} \bar{g}(x, a) \bar{g}(x, \nu) - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2) \bar{g}(a, \nu) \right] \tag{4.24} \\ &= \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} [-\cos\theta R_{\mathbb{R}}^2 \bar{g}(\sin\theta\mu - \cos\theta\nu, a) + R_{\mathbb{R}}^2 \bar{g}(a, \nu)] \\ &= \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \sin\theta \bar{g}(\cos\theta\mu + \sin\theta\nu, a). \end{aligned}$$

Como $\nu = -\frac{1}{\cos\theta}\bar{N} + \tan\theta\mu$ e $X_a \perp \bar{N}$, temos:

$$\bar{g}(X_a, \nu) = \tan\theta \bar{g}(X_a, \mu). \tag{4.25}$$

Usando a identidade (vi) da proposição (4.1.1) e a proposição 2.2.4, temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\mu \bar{g}(X_a, \nu) &= -\cosh R [e^{-u} \bar{g}(x, \mu) \bar{g}(a, \mu) - e^{-u} \bar{g}(\mu, a) \bar{g}(x, \nu)] \tag{4.26} \\ &\quad + e^{-u} \bar{g}(x, a) \bar{g}(\mu, \nu) + \bar{g}(X_a, h(\mu, \mu)\mu) \\ &= \cosh R R_{\mathbb{R}} [\sin\theta \bar{g}(a, \nu) + \cos\theta \bar{g}(\mu, a)] + h(\mu, \mu) \bar{g}(X_a, \mu) \\ &= \frac{1}{\sin\theta} \coth R \bar{g}(X_a, \nu) + h(\mu, \mu) \bar{g}(X_a, \mu), \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos (4.24), provando assim (4.20). A prova está completa. \square

Proposição 4.1.5. *Seja $x : M \rightarrow (\mathbb{B}^{n+1}, \bar{g})$ uma imersão isométrica na bola de Poincaré hiperbólica. Seja a um campo vetorial constante em \mathbb{R}^{n+1} . As seguintes identidades são válidas ao longo de M :*

i) $\Delta V_0 = nV_0 - H\bar{g}(x, \nu),$

ii) $\Delta V_a = nV_a - H\bar{\nabla}_\nu V_a,$

$$iii) \quad \Delta \bar{g}(x, \nu) = HV_0 + \bar{g}(x, \nabla H) - |h|^2 \bar{g}(x, \nu),$$

$$iv) \quad \Delta \bar{g}(X_a, \nu) = HV_a + \bar{g}(X_a, \nabla H) - |h|^2 \bar{g}(X_a, \nu) - n \bar{\nabla}_\nu V_a + n \bar{g}(\nu, X_a),$$

$$v) \quad \Delta \bar{g}(Y_a, \nu) = -|h|^2 \bar{g}(Y_a, \nu) + \bar{g}(Y_a, \nabla H) + n \bar{g}(Y_a, \nu).$$

Demonstração. Prova de (i). Da identidade (iv) da proposição (4.1.1) temos que $\nabla V_0 = x^T$, portanto, basta calcular $\text{div}_M x^T$.

$$\begin{aligned} \Delta V_0 &= \text{div}_M x^T \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} x^T, e_i) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}(x - \bar{g}(x, \nu)\nu), e_i) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} x, e_i) - \bar{g}(x, \nu) \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i) \\ &= nV_0 - H\bar{g}(x, \nu), \end{aligned}$$

portanto, a identidade (i) está provada.

Prova de (ii). Da identidade (v) da proposição (4.1.1) temos que $\nabla V_a = e^{-u} a^T + e^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) x^T$, portanto, basta calcular $\text{div}_M e^{-u} a^T + e^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) x^T$.

$$\begin{aligned} \Delta V_a &= \text{div}_M(e^{-u} a^T + e^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) x^T) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} e^{-u} a^T, e_i) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} e^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) x^T, e_i), \\ &= \bar{g}(e^{-u} [\bar{g}(x, e^{-u} a^T) e_i - \bar{g}(e_i, e^{-u} a^T) x], e_i) + \bar{g}(-e^{-2u} \bar{g}(x, e_i) \bar{g}(x, e^{-u} a) x^T, e_i) \\ &\quad + \bar{g}(e^{-u} (e^{-u} \bar{g}(e_i, a^T) + e^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) \bar{g}(e_i, x^T)) x^T, e_i) + \bar{g}(e^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) \bar{\nabla}_{e_i} x^T, e_i) \\ &= e^{-u} \bar{g}(x^T, e^{-u} a^T) (n-1) - e^{-2u} \bar{g}(x^T, x^T) \bar{g}(x, e^{-u} a) + e^{-u} \bar{g}(x^T, e^{-u} a^T) \\ &\quad + e^{-2u} \bar{g}(x, e^{-u} a) \bar{g}(x^T, x^T) + e^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) (nV_0 - H\bar{g}(x, \nu)) \\ &= ne^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) + e^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) (n(e^u - 1) - H\bar{g}(x, \nu)) \\ &= ne^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) + n\bar{g}(x, e^{-u} a) - ne^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) - He^{-u} \bar{g}(x, e^{-u} a) \bar{g}(x, \nu) \\ &= nV_a - H\bar{\nabla}_\nu V_a \end{aligned}$$

portanto, a identidade (ii) está provada.

Por conveniência provaremos primeiro a identidade (iv) e assim ganhamos (iii) e (v), bastando apenas observar que x é um campo de Killing conforme (4.4) e Y_a é um campo de Killing (4.11).

Prova de (iv). Escolha um referencial ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$ em um dado ponto p , isto é, $\bar{\nabla}_{e_i} e_j|_p = 0$. Usaremos frequentemente a propriedade de X_a ser conforme. Calculamos em p ,

$$\begin{aligned} e_i \bar{g}(X_a, \nu) &= \bar{g}(X_a, S_\nu(e_i)) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} X_a, \nu) \\ &= \bar{g}(X_a, S_\nu(e_i)) - \bar{g}(\bar{\nabla}_\nu X_a, e_i), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{g}(X_a, \nu) &= e_i e_i \bar{g}(X_a, \nu) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} X_a, S_\nu(e_i)) + \bar{g}(X_a, \nabla_{e_i}(S_\nu(e_i))) \\
&\quad - \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}(\bar{\nabla}_\nu X_a), e_i) - \bar{g}(\bar{\nabla}_\nu X_a, H\nu) \\
&= h_{ij} \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_j) + \bar{g}(X_a, (\nabla_{e_i} S_\nu(e_i))(e_i) - h(e_i, S_\nu(e_i))\nu) \\
&\quad - \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_\nu X_a, e_i) + HV_a \\
&= HV_a + \bar{g}(X_a, \nabla H) - |h|^2 \bar{g}(X_a, \nu) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_\nu X_a, e_i).
\end{aligned}$$

Usando a definição de tensor curvatura e o fato que o espaço ambiente tem curvatura -1 , temos

$$\begin{aligned}
& -\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_\nu X_a, e_i) \\
&= -\bar{g}(\bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_i) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{[\nu, e_i]} X_a, e_i) + \bar{g}(\bar{R}(\nu, e_i) X_a, e_i) \\
&= -\bar{\nabla}_\nu \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_i) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} X_a, \bar{\nabla}_\nu e_i) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{[\nu, e_i]} X_a, e_i) + n\bar{g}(\nu, X_a) \\
&= -n\bar{\nabla}_\nu V_a + \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} X_a, \bar{\nabla}_{e_i} \nu + [\nu, e_i]) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{[\nu, e_i]} X_a, e_i) + n\bar{g}(\nu, X_a) \\
&= -n\bar{\nabla}_\nu V_a + HV_a + \bar{g}([\nu, e_i], e_i) V_a + n\bar{g}(\nu, X_a)
\end{aligned}$$

Além disso, a fórmula de Koszul (1.6) fornece

$$2\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i) = -\bar{g}([\nu, e_i], e_i) - \bar{g}([e_i, e_i], \nu) + \bar{g}([e_i, \nu], e_i),$$

o que implica

$$\bar{g}([\nu, e_i], e_i) = -H.$$

Combinando o resultado acima, temos a identidade (iv). As identidades (iii) e (v) seguem diretamente de (iv). □

4.2 Unicidade de hipersuperfícies capilares estáveis em uma bola hiperbólica

Teorema 4.2.1. *Assuma $x : M \rightarrow \mathbb{B}_R^{\mathbb{H}} \subset (\mathbb{B}^{n+1}, \bar{g})$ é uma imersão capilar estável em uma bola $B_R^{\mathbb{H}}$ com curvatura média constante $H \geq 0$ e ângulo de contato constante $\theta \in (0, \pi)$. Então x é totalmente umbílica.*

Demonstração. A desigualdade da estabilidade, proposição 2.2.3, é dada por

$$-\int_M \varphi(\Delta \varphi + |h|^2 \varphi - n\varphi) dA - \int_{\partial M} \varphi(\bar{\nabla}_\mu \varphi - q\varphi) ds \geq 0, \quad (4.27)$$

para toda função $\varphi \in \mathcal{F}$, onde q é dado por (4.21) desde que $\partial B_R^{\mathbb{H}}$ tenha curvatura principal constante $\coth R$.

Para $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, consideramos a função teste

$$\varphi_a = n(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(X_a, \nu)) - H\bar{g}(X_a, \nu)$$

A fórmula do tipo Minkowski (4.13) nos diz que $\int_M \varphi_a dA = 0$. Portanto, $\varphi_a \in \mathcal{F}$ e é uma função admissível para teste de estabilidade. Usando as identidades (ii), (iv) e (v) da proposição (4.1.5), notando que H é constante, temos que

$$\Delta \varphi_a + |h|^2 \varphi_a - n\varphi_a = (n|h|^2 - H^2)V_a. \quad (4.28)$$

De (4.19) e (4.20), sabemos que:

$$\bar{\nabla}_\mu \varphi_a - q\varphi_a = 0. \quad (4.29)$$

Inserindo (4.28) e (4.29) na condição de estabilidade (4.27), temos para qualquer $a \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\int_M [n(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a \nu)) - H\bar{g}(X_a, \nu)] V_a (n|h|^2 - H^2) dA \leq 0. \quad (4.30)$$

Seja $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} . Para cada $i = 1, \dots, n+1$. Lembre que $V_a = \frac{2\langle x, a \rangle}{1-|x|^2}$, $X_a = \frac{2}{1-R_{\mathbb{R}^2}} (\langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}^2}^2)a)$ e $Y_a = \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a - \langle x, a \rangle x$, portanto temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} V_{e_i}^2 &= \frac{4|x|^2}{(1-|x|^2)^2} = \bar{g}(x, x), \\ \sum_{i=1}^{n+1} V_{e_i} X_{e_i} &= \frac{2}{1-R_{\mathbb{R}^2}} \frac{|x|^2 - R_{\mathbb{R}^2}}{1-|x|^2} x = (V_0 - \cosh R)x, \\ \sum_{i=1}^{n+1} V_{e_i} Y_{e_i} &= x. \end{aligned}$$

Portanto, pela somatório de (4.30) para todo e_i , $i = 1, \dots, n+1$, temos

$$\int_M [n(\bar{g}(x, x) + \sinh R \cos \theta \bar{g}(x, \nu)) - (V_0 - \cosh R)H\bar{g}(x, \nu)] (n|h|^2 - H^2) dA \leq 0. \quad (4.31)$$

Como no caso Euclidiano, introduziremos a função auxiliar

$$\Phi = (V_0 - \cosh R)H - n(\bar{g}(x, \nu) + \cos \theta \sinh R).$$

Das identidades (i) e (iii) da proposição (4.1.5), temos

$$\Delta \Phi = (n|h|^2 - H^2)\bar{g}(x, \nu). \quad (4.32)$$

Note que $\Phi|_{\partial M} = 0$. Assim temos:

$$\int_M \Delta \frac{1}{2} \Phi^2 dA = \int_{\partial M} \Phi \nabla_\mu \Phi ds = 0.$$

Adicionando isso a (4.31), usando (4.32), temos:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M (n\bar{g}(x, x) - (\cosh r - \cosh R)H\bar{g}(x, \nu))(n|h|^2 - H^2) + \frac{1}{2}\Delta\Phi^2 \\ &= \int_M n\bar{g}(x^T, x^T)(n|h|^2 - H^2) + |\nabla\Phi|^2 dA \\ &= \geq 0. \end{aligned}$$

O mesmo argumento do caso Euclidiano produz a umbilicidade da imersão x . Isso implica que $x : M \rightarrow \mathbb{B}_R^{\mathbb{H}}$ é parte de uma hipersuperfície totalmente geodésica ou parte de uma bola geodésica. A prova está completa. \square

4.3 O caso \mathbb{S}^{n+1}

Nesta seção, esboçaremos as modificações necessárias no caso em que o espaço ambiente é a forma espacial \mathbb{S}^{n+1} . Usaremos o modelo

$$(\mathbb{R}^{n+1}, \bar{g}_{\mathbb{S}} = e^{2u}\delta) \quad \text{com} \quad u(x) = \frac{4}{(1 + |x|^2)^2},$$

para representar $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{\mathcal{S}\}$, a esfera unitária sem o polo sul. Seja $B_R^{\mathbb{S}}$ uma bola em \mathbb{S}^{n+1} com raio $R \in (0, \pi)$ centrado no polo norte, onde $R_{\mathbb{R}} = \sqrt{\frac{1 - \cos R}{1 + \cos R}} \in (0, \infty)$. O campo vetorial de Killing conforme X_a e o campo vetorial de Killing Y_a neste caso são

$$X_a = \frac{2}{1 + R_{\mathbb{R}}^2} \left[\langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2)a \right], \quad (4.33)$$

$$Y_a = \frac{1}{2}(1 - |x|^2)a + \langle x, a \rangle x. \quad (4.34)$$

As funções V_0 e V_a neste caso são

$$V_0 = \cos r = \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2}, \quad V_a = \frac{2\langle x, a \rangle}{1 + |x|^2}.$$

Teorema 4.3.1. *Assuma $x : M \rightarrow \mathbb{B}_R^{\mathbb{S}} \subset (\mathbb{B}^{n+1}, \bar{g})$ é uma imersão capilar estável em uma bola $B_R^{\mathbb{S}}$ com curvatura média constante $H \geq 0$ e ângulo de contato constante $\theta \in (0, \pi)$. Então x é totalmente umbílica.*

Demonstração. Usando X_a, Y_a, V_0 e V_a , a prova é semelhante ao caso hiperbólico. O método funciona para para bola com raio qualquer $R \in (0, \pi)$. \square

4.4 O problema exterior

Para finalizar o Capítulo, daremos um esboço da prova do problema exterior. Tomamos o caso hiperbólico como exemplo.

Teorema 4.4.1. *Assuma que $x : M \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \setminus \mathbb{B}_R^{\mathbb{H}}$ uma hipersuperfície capilar estável imersa compacta fora da bola hiperbólica $B_R^{\mathbb{H}}$ com curvatura média constante $H \geq 0$ e ângulo de contato constante $\theta \in (0, \pi)$. Então x é totalmente umbílica.*

Demonstração. Neste caso, a diferença ocorre que $x = -\sinh R \bar{N}$ e o termo q na proposição 2.2.3 é dado por

$$q = -\frac{1}{\sinh \theta} \coth R + \cot \theta h(\mu, \mu).$$

Observando a prova da proposição 4.1.3 vemos que a fórmula de Minkowski fica

$$\int_M n(V_a - \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) dA = \int_M H \bar{g}(X_a, \nu) dA.$$

Tomamos a função teste sendo

$$\varphi_a = n(V_a - \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) - H \bar{g}(X_a, \nu). \quad (4.35)$$

Então $\int_M \varphi_a dA = 0$. Além disso, checando a prova da proposição 4.1.4 vemos que $\bar{\nabla}_\mu \varphi_a = q \varphi_a$ ao longo de ∂M . Da proposição 4.1.5, φ_a em (4.35) ainda satisfaz (4.28). Então a prova é exatamente a mesma como do problema interior, Teorema 4.2.1 \square

4.5 Considerações finais

Os teoremas (3.2.1), (4.2.1) e (4.3.1) juntos fecham o teorema de unicidade de hipersuperfícies capilares estáveis imersas em uma bola de uma forma espacial, caracterizando, portanto todas as hipersuperfícies com as tais propriedades sendo elas totalmente umbílicas, ou seja, um disco geodésico ou uma calota esférica. Além disso o teorema (4.4.1) afirma que a hipersuperfície não precisa estar contida na bola, contanto que seja compacta e as demais condições dos teoremas sejam satisfeitas. Este resultado, como já mencionado, produz uma nova prova do teorema de Barbosa-do Carmo-Esncheburg [5] e Ros-Vergasta [12]. Além disso, outros desdobramentos deste trabalho que não foram abordados aqui, porém são muito importantes é a produção de uma nova desigualdade do tipo Heintze-Karcher-Ros para hipersuperfícies em uma bola, que, juntamente com a nova fórmula de Minkowski, produz uma nova prova do Teorema de Alexandrov para hipersuperfícies CMC mergulhadas em uma bola com bordo livre. Estes resultado podem ser conferidos no seção 5 do trabalho *Uniqueness of Stable Capillary Hypersurfaces in a Ball* de Guofang Wang e Chao Xia [14].

Referências

- [1] ALMGREN F. J. *Spherical symmetrization*, Proc. International workshop on integral functions in the calculus of variations, Trieste, 1985, Red. Circ. Mat. Palermo 2 Supple. 11–25, 1987.
- [2] AMBROZIO, Lucas C. *Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds*. The Journal of Geometric Analysis, v. 25, n. 2, p. 1001-1017, 2015.
- [3] BARBOSA, Ezequiel. *On stable CMC hypersurfaces with free-boundary in a Euclidean ball*. arXiv preprint arXiv:1607.00038, 2016.
- [4] BARBOSA, Joao Lucas; DO CARMO, Manfredo. *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*. In: Manfredo P. do Carmo–Selected Papers. Springer, Berlin, Heidelberg, p. 221-235, 1984.
- [5] BARBOSA, J. Lucas; DO CARMO, Manfredo; ESCHENBURG, Jost. *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*. In: Manfredo P. do Carmo–Selected Papers. Springer, Berlin, Heidelberg, p. 291-306, 1988.
- [6] CARMO, Manfredo P. do. *Geometria Riemanniana*. 5 ed. Rio de Janeiro, 2015.
- [7] GONZALEZ, E.; MASSARI, Umberto; TAMANINI, I. *Existence and regularity for the problem of a pendent liquid drop*. Pacific Journal of Mathematics, v. 88, n. 2, p. 399-420, 1980.
- [8] LEE, John M. 2003, *Introduction to Smooth Manifolds*. 2 ed. San Francisco, 2003.
- [9] LI, Haizhong; XIONG, Changwei. *Stability of capillary hypersurfaces in a Euclidean ball*. arXiv preprint arXiv:1408.2086, 2014.
- [10] Nunes, Ivaldo Paz. *On stable constant mean curvature surfaces with free boundary*, Arxiv 1608.05689 to appear in Math. Z. 2016.
- [11] ROS, Antonio; SOUAM, Rabah. *On stability of capillary surfaces in a ball*. Pacific Journal of Mathematics, v. 178, n. 2, p. 345-361, 1997.

- [12] ROS, Antonio; VERGASTA, Enaldo. *Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary*. Geometriae Dedicata, v. 56, n. 1, p. 19-33, 1995.
- [13] SPERNER, Emanuel; BOKOWSKI, Jürgen. *Zerlegung konvexer Körper durch minimale Trennflächen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, v. 311, p. 80-100, 1979.
- [14] WANG, Guofang; XIA, Chao. *Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball*. arXiv preprint arXiv:1708.06861, 2017.