Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT
Dissertação de Mestrado

Arnando Nelio Sousa Carvalho

Equações Diferenciais Fracionárias: Existência e Unicidade de Solução Branda para O Problema Abstrato de Cauchy.

São Luís - MA
2019

Arnando Nelio Sousa Carvalho

Equações Diferenciais Fracionárias: Existência e Unicidade de Solução Branda para O Problema Abstrato de Cauchy.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Renata de Farias Limeira Carvalho

São Luís - MA
2019

Arnando Nelio Sousa Carvalho

Equações Diferenciais Fracionárias: Existência e Unicidade de Solução Branda para O Problema Abstrato.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 30 de Julho de 2019.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dra. Renata de Farias Limeira Carvalho (Orientadora)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Agradecimentos

A todos os meus amigos e familiares, pelo encorajamento e apoio.

A professora Renata de Farias Limeira Carvalho pela orientação, amizade e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMA pelos seus ensinamentos e aos colegas de curso, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

Finalmente, o meu agradecimento à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - pelo apoio financeiro.

A história está repleta de pessoas que, como resultado do medo, ou por ignorância, ou por cobiça de poder, destruíram conhecimentos de imensurável valor que em verdade pertenciam a todos nós. Nós não devemos deixar isso acontecer de novo.

Carl Sagan

Sumário

Notação

Abaixo estão as principais notações usadas no texto.

X	Espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$
X^*	Espaço dual de X.
χ_Ω	Função característica de Ω
$L^p(I;X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$	Página 5.
$C(I;X)$	Página 6.
$W^{1,1}(I;X)$	Página 6.
$L^1_{loc}([0,\infty);X)$	Página 6.
$\hat{f}$ ou $\mathcal{L}\{f(t)\}$	Transformada de Laplace da função f.
$\Gamma(\lambda)$	Função Gama.
$H_a(\epsilon,\theta)$	Caminho de Hankel.
$B(\lambda,z)$	Função Beta
$E_{\alpha,\beta}(\lambda)$	Função de Mittag-Leffler
J_t^α	Integral fracionária de Riemann-Liouville.
D_t^α	Derivada fracionária de Riemann-Liouville.
cD_t^α	Derivada fracionária de Caputo.

Resumo

Neste trabalho estudamos as equações diferenciais fracionárias em espaços de Banach. Nos dois primeiros capítulos apresentamos os pré-requisitos necessários para o estudo dessas equações. Primeiro, discorremos sobre diferenciação e integração de funções com valores em um espaço de Banach e, ainda, algumas propriedades sobre convoluções e transformada de Laplace. Depois apresentamos as funções elementares do cálculo fracionário e os principais operadores que serão usados ao longo do trabalho, como os operadores de Riemann-Liouville e a Derivada de Caputo. Finalizamos com o estudo das equações diferenciais fracionárias, iniciando com o problema de Cauchy até chegar ao problema abstrato de Cauchy, onde apresentamos a existência e unicidade de solução branda.

Palavras Chaves: Equações Diferenciais Fracionárias; Cálculo Fracionário; Solução Branda; Problema Abstrato de Cauchy.

Abstract

In this work we study the fractional differential equations in Banach spaces. In the first two chapters we present the necessary prerequisites for the study of these equations. First, we discuss the differentiation and integration of functions with values in a Banach space, and some properties about convolutions and Laplace transform. Then we present the elementary functions of fractional calculus and the main operators that will be used throughout the work, such as the Riemann-Liouville and Caputo Derivative operators. We conclude with the study of fractional differential equations, starting with the Cauchy problem until we get to the abstract Cauchy problem, where we present the existence and uniqueness of mild solution.

Keywords: Fractional Differential Equations; Fractional Calculus; Mild Solution; Abstract Cauchy Problem.

Introdução

A origem do cálculo fracionário pode ser associada a uma pergunta feita por L'Hôpital a Leibniz sobre o significado da derivada de ordem $1/2$. Desde então, esta teoria vem se desenvolvendo rapidamente nas últimas décadas e o estudo das equações diferenciais fracionárias passou a ser de grande interesse na comunidade científica. Muito disso, é por conta do vasto potencial de aplicações em diversas áreas como fluxo de fluidos, redes elétricas, probabilidade e estatística, teoria das distribuições, entre outras. Veja, por exemplo, as referências [8] e [9].

Motivados por isso, nesta dissertação estudamos as equações diferenciais fracionárias em espaços de Banach. Sendo mais específicos, estamos interessados no problema abstrato de Cauchy

$$\begin{cases} cD_t^{\alpha}u(t) & = Au(t) + f(t, u(t)) \quad t > 0 \\ u(0) & = u_0 \in X, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\alpha \in (0, 1)$, cD_t^{α} é a derivada de Caputo, X é um espaço de Banach sobre o corpo dos complexos, $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador setorial e $f : [0, \infty) \times X \to X$ é uma função contínua.

Nosso objetivo é estabelecer condições suficientes para que o problema (1) tenha existência e unicidade de soluções branda global. Uma solução branda global para (1) é uma função contínua $u : [0, \infty) \to X$ que satisfaz a equação

$$u(t) = E_{\alpha}(t^{\alpha}A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha}A)f(s, u(s))ds, \ \forall \ t \geq 0.$$

Para isso, apresentamos conceitos introdutórios nos dois primeiros capítulos. No Capítulo 1 discorremos sobre diferenciação e integração de funções com valores em um espaço de Banach, e ainda, algumas propriedades sobre convoluções e transformada de Laplace. Já no Capítulo 2, discutimos o cálculo fracionário. Mais precisamente, apresentamos as funções elementares do cálculo fracionário e os principais operadores que serão usados ao longo do trabalho, como os operadores de Riemann-Liouville e a Derivada de Caputo.

E no Capítulo 3, estudamos as equações diferenciais fracionárias em espaços de Banach.

Iniciamos com o problema de Cauchy

$$\begin{cases} cD_t^{\alpha}u(t) & = Bu(t), \quad t > 0 \\ u(0) & = u_0 \in X, \end{cases} \tag{2}$$

com $B : X \to X$ sendo um operador linear limitado. Logo em seguida, estudamos o caso mais geral

$$\begin{cases} cD_t^{\alpha}u(t) & = Au(t), \quad t > 0 \\ u(0) & = u_0 \in X, \end{cases} \tag{3}$$

com $A : D(A) \subset X \to X$ sendo um operador setorial. E por fim, apresentamos os resultados obtidos sobre o problema (1). As principais técnicas e resultados apresentados nesse trabalho foram desenvolvidas a partir de uma pesquisa detalhada do artigo [4] e de uma série de consultas em paralelo nas demais referências.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Integral de Bochner

O objetivo desta seção é apresentar uma teoria de integração para funções com valores em espaços de Banach. Ao longo deste capítulo, sempre que não for especificado, X denotará um espaço de Banach sobre os complexos e I representará um intervalo da reta (limitado ou ilimitado) ou um retângulo em $\mathbb{R}^2$ com a medida de Lebesgue. Começamos, então, definindo a noção de funções mensuráveis nesse contexto.

Definição 1. Uma função $g : I \to X$ é uma *função simples mensurável* se existem conjuntos mensuráveis $\Omega_1, ..., \Omega_k$ em I, todos com medida de Lebesgue finita, tais que $\Omega_r \cap \Omega_j = \emptyset$ sempre que $r \neq j$, e vetores $x_1, ..., x_k \in X$ tais que

$$g(t) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{\Omega_j}(t)\, x_j.$$

Uma função $f : I \to X$ é mensurável quando existe uma sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples mensuráveis definidas em I tal que $g_n(t) \longrightarrow f(t)$, quando $n \to \infty$, para quase todo $t \in I$.

Observação 1. Assim como na teoria de mensurabilidade de funções tomando valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, valem as seguintes propriedades: Se $f, g : I \to X$ e $h : I \to \mathbb{C}$ são funções mensuráveis, então as funções $f + g$ e hf são mensuráveis. Além disso, se $H : X \to Y$ é contínua (Y sendo um espaço de Banach), então $H \circ f$ é mensurável sempre que f for mensurável. Em particular, $||f||$ é mensurável sempre que $f : I \to X$ for mensurável.

Definição 2. Seja $f : I \to X$ uma função dada. Dizemos que

(i) f possui *valor enumerável* se existe uma partição $\{\Omega_n; n \in \mathbb{N}\}$ de I por subconjuntos Ω_n tais que f é constante em cada Ω_n.

(ii) f possui *valor quase separável* se existe um conjunto de medida nula Ω_0 em I tal que $f(I \setminus \Omega_0) := \{f(t); t \in I \setminus \Omega_0\}$ é separável.

(iii) f é fracamente mensurável se a função $x^* \circ f : t \longmapsto x^*(f(t))$ é Lebesgue mensurável para cada $x^* \in X^*$.

A princípio não é fácil verificar pela definição se uma dada função é mensurável ou não. O próximo resultado nos fornece uma outra alternativa para isso.

Teorema 1. *(Pettis). Uma função $f : I \to X$ é mensurável se, e somente se, é fracamente mensurável e possui valor quase separável.*

Demonstração. Veja [1], Teorema 1.1.1. □

Corolário 1. *Dada uma função $f : I \to X$, valem as seguintes afirmações:*

1. *Se X é separável, então f é mensurável se, e somente se, é fracamente mensurável.*

2. *Se f é contínua então é mensurável.*

3. *Se $f_n : I \to X$ é uma sequência de funções mensuráveis e $f_n(t) \to f(t)$ para quase todo $t \in I$, então f é mensurável.*

Demonstração. Veja [1], Corolário 1.1.2. □

Agora iniciaremos a teoria de integração. Como no caso de funções escalares, começamos definindo integral de funções simples.

Definição 3. Seja $g : I \to X$ uma função simples mensurável, $g = \sum_{j=1}^{k} \chi_{\Omega_j}\, x_j$, definimos

$$\int_I g(t)dt := \sum_{j=1}^{k} m(\Omega_j)x_j$$

onde $m(\Omega_j)$ é a medida de Lebesgue de Ω_j. Assim como no caso de funções escalares, esta definição não depende da representação da função g.

Definição 4. Uma função mensurável $f : I \to X$ é Bochner-integrável se existe uma sequência de funções simples mensuráveis $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

(i) $g_n(t) \longrightarrow f(t)$ para quase todo $t \in I$.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_I ||f(t) - g_n(t)||dt = 0.$

Neste caso, para cada subconjunto $\Omega \subset I$ mensurável definimos a integral de Bochner da função f sobre Ω como

$$\int_\Omega f(t)dt := \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_I \chi_\Omega g_n(t)dt.$$

As condições (i) e (ii) garantem que o limite acima existe e não depende da escolha da sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

O próximo resultado é de grande ajuda na verificação da Bocnher-integrabilidade de uma determinada função mensurável $f : I \to X$.

Teorema 2. *Uma função mensurável $f : I \to X$ é Bochner-integrável se, e somente se, a função $||f|| : I \to \mathbb{R}$ é Lebesgue-integrável.*

Demonstração. Veja [1], Teorema 1.1.4. □

Corolário 2. *Sejam $f : I \to X$ uma função Bochner-integrável e $\Omega \subset I$ um conjunto mensurável. Então*

$$\left|\left|\int_\Omega f(t)dt\right|\right| \leq \int_\Omega ||f(t)||dt.$$

Demonstração. Veja [7], Corolário 9.7.7. □

Proposição 1. *Sejam $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado sobre X e $f : I \to X$ uma função Bochner-integrável. Suponha que $f(I) \subset D(A)$ e $A \circ f : I \to X$ é Bochner-integrável. Então*

$$\int_I f(t)dt \in D(A),$$

e ainda,

$$A\int_I f(t)dt = \int_I A(f(t))dt$$

Demonstração. Veja [1], Proposição 1.1.7. □

Teorema 3. *(Convergência Dominada) Seja $f_n : I \to X$ uma sequência de funções Bochner-integráveis. Suponha que $f(t) := \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(t)$ existe para quase todo $t \in I$ e suponha que existe uma função Lebesgue-integrável $g : I \to \mathbb{R}$ tal que $||f_n(t)|| \leq g(t)$, para quase todo $t \in I$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Nessas condições, a função f é Bochner-integrável e*

$$\int_I f(t)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_I f_n(t)dt.$$

Além disso,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_I ||f(t) - f_n(t)||dt = 0.$$

Demonstração. Veja [1], Teorema 1.1.8. □

Para finalizarmos essa seção, apresentaremos os espaços de funções que aparecerão no restante do texto. Os destalhes omitidos podem ser encontrados na Seção 1.1.1 da referência [1].

Seja $1 \leq p < \infty$. O conjunto $L^p(I;X)$ é o conjunto formado por todas as funções $f : I \to X$ mensuráveis tais que $(\|f(\,.\,)\|)^p$ é integrável. A expressão

$$\|f\|_p := \left(\int_I \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma semi-norma em $L^p(I;X)$. No entanto, como no caso de funções com valores escalares, considerando os elementos $L^p(I;X)$ como classes de equivalências, temos que $\|f\|_p$ define uma norma e $(L^p(I;X), \| \ \|_p)$ é um espaço de Banach. O $L^\infty(I;X)$ é o conjunto das funções mensuráveis $f : I \to X$ tais que $\|f(t)\|$ é essencialmente limitada e definimos a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} \text{ess} \|f(t)\| < \infty.$$

Também neste caso, temos que $(L^\infty(I;X), \| \ \|_\infty)$ é um espaço de Banach. Já o conjunto $C(I;X)$ é formado pelas funções contínuas $f : I \to X$, e quando I é compacto, $C(I;X) \subset L^\infty(I;X)$ é um subespaço fechado, logo é um espaço de Banach. O espaço de Sobolev $W^{1,1}(I;X)$ pode ser definido como o conjunto das funções $f \in L^1(I;X)$ tais que existe uma função $\phi \in L^1(I;X)$ satisfazendo a equação

$$f(t) = f(s) + \int_s^t \phi(\tau)d\tau,$$

para quase todo $s, t \in I$.

No caso especial em que $I = [0,\infty)$, destacamos também o conjunto

$$L^1_{loc}([0,\infty);X) = \{f : [0,\infty) \to X : f_{|[0,\tau]} \in L^1([0,\tau];X) \text{ para todo } \tau > 0\}.$$

E ainda, se $f \in L^1_{loc}([0,\infty);X)$ então dizemos que f é *localmente integrável.*

Exemplo 1. Se $f \in L^1([0,\infty);X)$ então f é localmente integrável e

$$\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{\tau\longrightarrow\infty} \int_0^\tau f(t)dt.$$

Com efeito, dada uma sequência crescente de números reais positivos (τ_n) tal que $\tau_n \to \infty$, considere a sequência $f_n : [0,\infty) \to X$ definida por $f_n = \chi_{[0,\tau_n]}f$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (Teorema 3), temos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^{\tau_n} f(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt.$$

1.2 Convolução e Transformada de Laplace

Para funções $h, l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integráveis sabemos que a convolução entre essas funções

$$(h * l)(t) := \int_{\mathbb{R}} h(t-s)l(s)ds$$

existe para quase todo $t \in \mathbb{R}$ e $h * l$ é integrável. Além disso, esta operação é comutativa e associativa.

Nesta seção, vamos apresentar a definição de convolução envolvendo funções com valores escalares e vetoriais.

Definição 5. Sejam $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{R} \to X$ funções mensuráveis. Definimos a convolução entres essas duas funções como

$$(h * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-s)f(s)ds$$

sempre que essa integral existir. Observemos que $(h * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(s)f(t-s)ds$, e assim, podemos também escrever $f * h$ ao invés de $h * f$.

Muitos resultados sobre convoluções de funções escalares possuem versões semelhantes para o caso envolvendo funções vetoriais. Apresentamos alguns deles.

Proposição 2. *Sejam $h, l : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{R} \to X$ funções dadas. As seguintes afirmações são válidas:*

(*i*) *Se $h \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$, então $(h * f)(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$ e $h * f \in L^1(\mathbb{R}, X)$.*

(*ii*) *Se $h, l \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$, então $[h * (l * f)](t) = [(h * l) * f](t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

(*iii*) ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$ satisfazendo a equação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Se $h \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $f \in L^q(\mathbb{R}, X)$, então $h * f \in L^r(\mathbb{R}, X)$ e $||h * f||_r \leq ||h||_p ||f||_q$.*

(*iv*) *Sejam $1 < p, q < \infty$ satisfazendo a equação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $h \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $f \in L^q(\mathbb{R}, X)$, então $h * f : \mathbb{R} \to X$ é contínua e $\lim_{|t| \to \infty} ||(h * f)(t)||_X = 0$.*

(*v*) *Se $h \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $f \in L^\infty(\mathbb{R}, X)$, ou $h \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$, então $h * f : \mathbb{R} \to X$ é uniformemente contínua e limitada.*

Demonstração. Veja [1], Proposição 1.3.1. e Proposição 1.3.2. □

Observação 2. Quando h e f estão definidas em um intervalo, por exemplo em $[0, \tau](\tau \leq \infty)$, então para definirmos $h * f$ usamos a Definição 5 com $h \equiv 0 \equiv f$ em $\mathbb{R} \setminus [0, \tau]$, e assim, obtemos

$$(h * f)(t) = \int_0^t h(t-s)f(s)ds, \quad (0 \leq t \leq \tau).$$

Observe que a Proposição 2 continua válida nesse contexto. Dessa forma, se $h \in L^1_{loc}([0, \infty); \mathbb{R})$ e $f \in L^1_{loc}([0, \infty); X)$ então $(h * f)(t) \in L^1_{loc}([0, \infty); X)$.

Agora, expomos alguns resultados sobre a transformada de Laplace.

Definição 6. Seja $f : [0, \infty) \to X$ localmente integrável.

A integral de Laplace de f é

$$\hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

A abscissa de convergência da função f é

$$abs(f) := \inf\{\mathrm{Re}(\lambda) : \text{ existe } \hat{f}(\lambda)\}.$$

Se $\hat{f}(\lambda)$ converge para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, então $abs(f) := -\infty$. E se não existir $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\hat{f}(\lambda)$ converge, então $abs(f) := \infty$. Dizemos que f possui transformada de Laplace se $abs(f) < \infty$.

Observação 3. Usaremos também a notação $\mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$ para a transformada de Laplace de uma função f dada.

Proposição 3. *Seja $f \in L^1_{loc}([0, \infty), X)$. Então a integral de Laplace $\hat{f}(\lambda)$ converge sempre que $\mathrm{Re}(\lambda) > abs(f)$ e diverge se $abs(f) > \mathrm{Re}(\lambda)$.*

Demonstração. Veja [1], Proposição 1.4.1. □

Definição 7. Seja $f : [0, \infty) \to X$ uma função. O limite exponencial de f é dado por

$$\omega(f) = inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \sup_{t \geq 0} ||e^{-\omega t} f(t)|| < \infty \right\}.$$

Dizemos que f é do tipo exponencial quando $\omega(f) < \infty$.

Observação 4. Segue da última definição que

$$abs(f) \leq abs(||f||) \leq \omega(f).$$

Assim, toda função do tipo exponencial possui transformada de Laplace.

Teorema 4. *Se $f \in L^1_{loc}([0, \infty), X)$ e $abs(f) < \infty$, então a aplicação $\lambda \longmapsto \hat{f}(\lambda)$ é analítica para todo $\mathrm{Re}\,(\lambda) > abs(f)$.*

Demonstração. Veja [1], Teorema 1.5.1. e a Definição 13 para definição de função analítica. □

Proposição 4. *Sejam $f \in L^1_{loc}([0, \infty); X)$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado. Suponha que $f(t) \in D(A)$, para todo $t \geq 0$, e $A \circ f \in L^1_{loc}([0, \infty); X)$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}\,(\lambda) > 0$, se existem $\hat{f}(\lambda)$ e $\widehat{A \circ f}(\lambda)$, então $\hat{f}(\lambda) \in D(A)$ e $\widehat{A \circ f}(\lambda) = A(\hat{f}(\lambda)\,)$.*

Demonstração. Veja [1], Proposição 1.6.3. □

Proposição 5. *Sejam* $h \in L^1([0,\infty),\mathbb{C})$ *e* $f \in L^1_{loc}([0,\infty), X)$. *Valem as seguintes afirmações:*

(*i*) *Se* $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $\mathrm{Re}\,(\lambda) > \max\{abs(|h|), abs(f)\}$, *então* $(\widehat{h * f})(\lambda)$ *existe e* $(\widehat{h * f})(\lambda) = \hat{h}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$

(*ii*) *Seja* $F(t) = \int_0^t f(s)ds$, $t \geq 0$. *Se* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ *e* $\hat{f}(\lambda)$ *existe, então* $\hat{F}(\lambda)$ *também existe e* $\hat{F}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)/\lambda$.

Demonstração. Veja [1], Proposição 1.6.4 e Proposição 1.6.5. □

Teorema 5. *Sejam* $f, g \in L^1_{loc}([0,\infty), X)$ *tais que* $\max\{abs(f), abs(g)\} < \infty$ *e* $t_0 > \max\{abs(f), abs(g)\}$. *Suponha que* $\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)$ *para todo* λ *real com* $\lambda > t_0$. *Então* $f(t) = g(t)$ *para quase todo* $t \in [0,\infty)$.

Demonstração. Veja [1], Teorema 1.7.3. □

1.3 Funções Analíticas Tomando Valores em Espaços de Banach

Nesta seção são apresentados alguns resultados da teoria de funções analíticas com valores em espaços de Banach. Apresentamos resultados que serão utilizados ao longo do texto sobre a integral de linha. Para uma exposição detalhada, recomendamos [11] (Capítulo 5) e [10] (Capítulo 1).

1.3.1 Curvas Retificáveis

Uma partição de um intervalo $[a,b]$ da reta é um conjunto finito de pontos $P = \{t_0, ..., t_{n_P}\}$, onde $n_P \in \mathbb{N}$, tais que

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_{n_P} = b.$$

Usaremos a notação $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_{n_P} = b$ para denotar uma partição P de $[a,b]$.

Definição 8. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma função definida em um intervalo.

(1) Dizemos que γ é um caminho em $\mathbb{C}$ se for uma função contínua.

(2) Quando γ for diferenciável e γ' contínua, chamamos γ de um caminho suave.

(3) Se existir uma partição $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_{n_P} = b$ tal que, para todo $j = 1, ..., n_P$, $\gamma|_{[t_j, t_{j-1}]}$ é um caminho suave, então dizemos que γ é um caminho suave por partes.

(4) Para cada partição $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_{n_P} = b$ definimos

$$v(\gamma, P) := \sum_{j=1}^{n_P} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

Chamamos γ de uma função de variação limitada quando $V(\gamma, [a,b]) = \sup\{v(\gamma, P) : P$é partição de $[a,b]\,\} < \infty$. Neste caso, dizemos que $V(\gamma, [a,b])$ é a variação de γ em $[a,b]$.

Observação 5. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ uma função de variação limitada. A função $|\gamma| : [a,b] \to \mathbb{C}$, dada por $|\gamma|(t) = V(\gamma, [a,t])$, é de variação limitada e $V(|\gamma|, [a,b]) = V(\gamma, [a,b])$.

Definição 9. Dado um caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ chamamos o conjunto $\{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ de traço do caminho γ e denotamos por $\{\gamma\}$. Dizemos que γ é retificável quando for de variação limitada, fechado se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e simples quando $\gamma : [a,b) \to \mathbb{C}$ for injetora.

Proposição 6. *Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é um caminho suave por partes então é um caminho retificável e vale*

$$V(\gamma, [a,b]) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Demonstração. Veja [3], Proposição 1.3. □

1.3.2 Integral de Riemann-Stieltjes

Definição 10. Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho retificável, $f : [a,b] \to X$ uma função vetorial e $P : a = t_0 < t_1 < ... < t_{n_P} = b$ uma partição. Definimos a soma de Riemman-Stieltjes da função f com relação a γ, associada a partição P, como

$$S(f, \gamma, P) = S(P) = \sum_{j=1}^{n_P} [\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})] f(\tau_j)$$

onde $t_{j-1} \leq \tau_j \leq t_j$, para todo $j = 0, 1, ..., n_P$.

Definição 11. Sejam X, f e γ dados como na definição anterior. O vetor $I \in X$ é a integral de Riemman-Stieltjes da função f com relação a γ quando para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\| \, S(P) - I \, \| < \epsilon$$

sempre que $\max\{t_j - t_{j-1} : j = 1, ..., N_P\} < \delta$. Denotaremos esse vetor por

$$\int_a^b f d\gamma.$$

Observação 6. Se na definição acima $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é dado por $\gamma(t) = t$ e $f : [a, b] \to X$ possui a integral de Riemman-Stieltjes sobre γ e é ao mesmo tempo Bochner-integrável, então essas integrais coincidem (Veja [1], Seção 1.9).

Teorema 6. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho retificável e $f : [a, b] \to X$ uma função vetorial. Se f é contínua, então existe $I \in X$ tal que*

$$I = \int_a^b f d\gamma.$$

Demonstração. Veja [10], Teorema 1.16. □

Proposição 7. *(Propriedades). Sejam $f, g : [a, b] \to X$ contínuas, $\gamma, \sigma : [a, b] \to \mathbb{C}$ caminhos retificáveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então*

(i)
$$\int_a^b fd(\alpha\gamma + \beta\sigma) = \alpha \int_a^b fd\gamma + \beta \int_a^b fd\sigma.$$

(ii)
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)d\gamma = \alpha \int_a^b fd\gamma + \beta \int_a^b gd\gamma.$$

(iii) Se $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ então
$$\int_a^b fd\gamma = \sum_1^n \int_{t_{j-1}}^j fd\gamma.$$

(iv)
$$\left|\left|\int_a^b fd\gamma\right|\right|_X \leq \int_a^b ||f||d|\gamma|.$$

Demonstração. Veja [10], Proposição 1.17. □

Definição 12. Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to X$ uma função vetorial contínua, definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$, e $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho retificável tal que $\{\gamma\} \subset \Omega$. Assim, a função $f \circ \gamma : [a, b] \to X$ é contínua, e daí, podemos definir a integral de linha de f sobre γ como

$$\int_\gamma f(\lambda)d\lambda := \int_a^b (f \circ \gamma)d\gamma.$$

Os próximos resultados nos dizem como podemos calcular as integrais de linha e que elas são compatíveis com as transformações lineares limitadas.

Teorema 7. *Se X é um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to X$ é uma função contínua definida em um aberto e $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é uma caminho suave por partes, tal que*

$\{\gamma\}$ *está contido no domínio da* f, *então*

$$\int_\gamma f(\lambda)d\lambda = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Demonstração. Veja [10], Teorema 1.19 $\square$

Teorema 8. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach sobre* $\mathbb{C}$, $T \in L(X,Y)$, $f : \Omega \to X$ *uma função vetorial contínua, definida num aberto* $\Omega \subset \mathbb{C}$, *e* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *um caminho retificável tal que* $\{\gamma\} \subset \Omega$. *Nestas condições, existe a integral de linha da função* $T \circ f$ *sobre* γ *e é dada por*

$$T\left(\int_\gamma f(\lambda)d\lambda\right) = \int_\gamma T(f(\lambda))d\lambda.$$

Demonstração. Veja [10], Teorema 1.18. $\square$

Definição 13. Seja X um espaço de Banach sobre o corpo dos números complexos. Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to X$ definida num aberto Ω do plano complexo é analítica quando para todo $\lambda_0 \in \Omega$ o limite

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0}[f(\lambda) - f(\lambda_0)]$$

existe. O limite acima será denotado por $f'(\lambda_0)$, $\lambda_0 \in \Omega$.

Definição 14. Chamamos um subconjunto D do plano complexo de Domínio de Cauchy quando for aberto, possuir um número finito de componentes conexas e a fronteira de D, ∂D, é composta por um número finito de caminhos fechados simples e retificáveis. Quando a fronteira ∂D está orientada positivamente, denotaremos por $+\partial D$.

A maioria dos resultados clássicos de análise complexa possuem versões análogas para funções analíticas tomando valores em espaços de Banach. No entanto, para nossos interesses destacamos apenas o seguinte resultado:

Teorema 9. *(Teorema de Cauchy) Seja* D *um Domínio de Cauchy limitado,* f *uma função que é contínua no fecho* $\overline{D}$, *tomando valores em um espaço de Banach* X, *tal que* f *é analítica em* D. *Então*

$$\int_{+\partial D} f(\lambda)d\lambda = 0.$$

Demonstração. Veja, [10] Teorema 1.21 $\square$

Capítulo 2

Elementos de Cálculo Fracionário

2.1 Funções Especiais

Neste capítulo são apresentados resultados básicos sobre as funções especiais que serão usados no decorrer do texto. Damos aqui algumas informações sobre as funções Gama, Beta e funções de Mittag-Leffler. Essas aplicações desempenham um papel importante na teoria de diferenciação de ordem arbitrária e na teoria de equações diferenciais fracionárias.

2.1.1 Função Gama

Nesta seção apresentamos a função Gama e algumas de suas propriedades.

Definição 15. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, a integral

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} d\lambda.$$

é convergente. A função Gama é, frequentemente, definida por

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} d\lambda, \ \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{C}, \text{com } \ \mathrm{Re}(\lambda) > 0.$$

Ela também pode ser escrita como

$$\Gamma(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+\lambda)} \quad + \text{ função inteira.}$$

Assim, podemos considerar Γ definida em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\} =: D(\Gamma)$. Daí, a função Γ tem polos simples em $\lambda = 0, -1, -2, ...$.

Agora, expomos algumas propriedades dessa função:

Proposição 8. *Para todo* $\lambda \in D(\Gamma)$ *valem :*

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda\,\Gamma(\lambda) \tag{2.1}$$

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n^{\lambda}\, n!}{\lambda(\lambda+1)...(\lambda+n)} \tag{2.2}$$

Demonstração. Veja [8], Seção 1.1.2 e 1.1.3. □

Observação 7. Segue de (2.1) que $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto quer dizer que a função Gama generaliza a aplicação fatorial definida nos naturais. Esta é, provavelmente, a propriedade mais conhecida dessa função.

Definição 16. Dados $\epsilon > 0$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$ o Caminho de Hankel $Ha = Ha(\epsilon, \theta)$ é o caminho $Ha = Ha_1 + Ha_2 - Ha_3$ onde os Ha_j são definidos por

$$\begin{aligned} Ha_1 &:= \{te^{i\theta} : t \in [\epsilon, \infty)\} \\ Ha_2 &:= \{\epsilon e^{it} : t \in [-\theta, \theta]\} \\ Ha_3 &:= \{te^{-i\theta} : t \in [\epsilon, \infty)\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

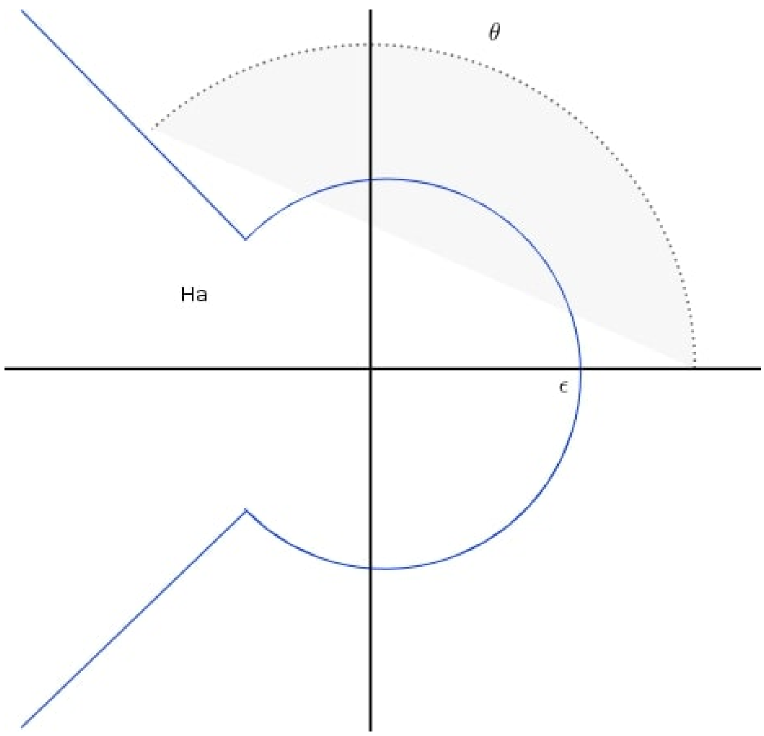

Figura 2.1: Caminho de Hankel Ha

Proposição 9. *(Representação integral de* $1/\Gamma(\lambda)$*.)*

Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ *tal que* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ *temos*

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^t t^{-\lambda} dt$$

onde $Ha = Ha(\epsilon,\, \theta)$ é qualquer Caminho de Hankel com $\epsilon > 0$ e $\pi/2 < \theta < \pi$.

Demonstração. Veja [8], Seção 1.1.6. □

2.1.2 Função Beta

Agora, apresentamos a função Beta e sua relação com a função Gama.

Definição 17. A função Beta $B(\lambda,\, z)$, definida sobre

$$D(B) = \{(\lambda,\, z) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(\lambda), \mathrm{Re}(z) > 0\},$$

é dada pela fórmula integral

$$B(\lambda,\, z) = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{z-1} dt.$$

A próxima proposição mostra como as funções Gama e Beta estão relacionadas.

Proposição 10. *Para todo λ e z em $D(B)$ temos*

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(z) = \Gamma(\lambda + z)B(\lambda,\, z).$$

Demonstração. Veja [8], Seção 1.1.4. □

2.1.3 Função de Mittag-Leffler

A função exponencial, e^λ, é muito utilizada na teoria de equações diferenciais de ordem inteira. Sua generalização, a um parâmetro, é a função de Mittag-Leffler definida por

$$E_\alpha(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \qquad (\alpha > 0).$$

Estas funções foram introduzidas por G.M. Mittag-Leffler, em 1903, e estuda também por A. Wiman na mesma época. Já a função de Mittag-Leffler a dois parâmetros, a qual desempenha papel importante em calculo fracionário, foi de fato introduzida por R.P. Agarwal em 1953. Várias relações envolvendo essas funções foram obtidas por P. Humert e R.P. Agarwal, na década de 50, usando técnicas que envolvem a transformada de Laplace. No entanto, Humert e Agarwal generosamente usaram a mesma notação das funções a um parâmetro e essa é uma das razões pela qual esta função, associada a dois parâmetros, é ainda chamada de função de Mittag-Leffler.

Definição 18. Sejam $\alpha, \beta > 0$. A função, associada a dois parâmetros, de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dada pela série

$$E_{\alpha,\beta}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{2.4}$$

As seguintes propriedades podem ser encontradas em [2].

Proposição 11. *As seguintes afirmações a respeito das funções de Mittag-Leffler são verdadeiras:*

(i) A função $E_{\alpha,\beta}$ definida em (2.4) é analítica, e ainda, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e escolhendo um caminho de Hankel $H_{a_\lambda} = H(\epsilon_\lambda, \theta)$, com $\epsilon_\lambda > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}$ e $\theta \in (\pi/2, \pi)$, então

$$E_{\alpha,\beta}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_{a_\lambda}} \frac{\omega^{\alpha-\beta} e^{\omega}}{\omega^\alpha - \lambda} d\omega.$$

(ii) Se $\alpha = \beta = 1$, então

$$E_{1,1}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Isto é, a função exponencial é um caso particular das funções de Mittag-Leffler.

Demonstração. Veja [8], Seção 1.2. □

O próximo resultado será usado na prova da unicidade de soluções brandas locais no capítulo 3.

Teorema 10. *(Gronwall) Sejam $b \geq 0$ e $\alpha > 0$ e $\sigma : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa localmente integrável sobre o intervalo $[0, T)$, onde $T \leq \infty$. Suponha que $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função não-negativa e localmente integrável em $[0, T)$ tal que*

$$h(t) \leq \sigma(t) + b \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \tag{2.5}$$

para todo $t \in [0, T)$. Nestas condições, temos

$$h(t) \leq \sigma(t) + b\Gamma(\alpha) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(b\Gamma(\alpha)(t-s)^\alpha) \sigma(s) ds$$

para todo $t \in [0, T)$. Em particular, se $\sigma \equiv 0$ então $h \equiv 0$ em $[0, T)$.

Demonstração. Começamos definindo o seguinte operador

$$F\phi(t) = b \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \phi(s) ds, \ t \geq 0,$$

para toda função não-negativa ϕ localmente integrável em $[0,T)$. Como F é dada pela convolução de duas funções reais localmente integráveis, então F está bem definida (Veja [6], Teorema 8.7.). Agora, faremos algumas observações sobre o operador definido acima.

A primeira delas é que esse operador satisfaz

$$F^k\phi(t) = \frac{[b\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-s)^{k\alpha-1}\phi(s)ds, \ t \geq 0. \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

De fato, para $k=1$ é a definição. Suponha que (2.6) vale para k, então

$$\begin{aligned}
F^{k+1}\phi(t) = F^k[F\phi(t)] &= \frac{[b\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-s)^{k\alpha-1}F\phi(s)ds \\
&= \frac{[b\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-s)^{k\alpha-1} b\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)d\tau ds. \\
&= \frac{b^{k+1}[\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-s)^{k\alpha-1} \int_0^t (s-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)\chi_{[0,s]}(\tau)d\tau ds \\
&= \frac{b^{k+1}[\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t \int_0^t (t-s)^{k\alpha-1}(s-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)\chi_{[\tau,t]}(s)dsd\tau \\
&= \frac{b^{k+1}[\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t \int_\tau^t (t-s)^{k\alpha-1}(s-\tau)^{\alpha-1}\phi(\tau)dsd\tau.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo a mudança de variável $s = (t-\tau)r + \tau$, temos

$$\begin{aligned}
F^{k+1}\phi(t) &= \frac{b^{k+1}[\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t \int_0^1 (t-(t-\tau)r-\tau)^{k\alpha-1}((t-\tau)r)^{\alpha-1}\phi(\tau)(t-\tau)drd\tau. \\
&= \frac{b^{k+1}[\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1}\phi(\tau) \int_0^1 (1-r)^{k\alpha-1}r^{\alpha-1}drd\tau. \\
&\overset{ⓐ}{=} \frac{b^{k+1}[\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{(k+1)\alpha-1}\phi(\tau)B(\alpha,k\alpha)d\tau,
\end{aligned}$$

onde B é a função Beta. Pela Proposição 10, obtemos

$$B(\alpha,k\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k\alpha)}{\Gamma((k+1)\alpha)}.$$

Substituindo essa última expressão em ⓐ, concluímos

$$F^{k+1}\phi(t) = \frac{[b\Gamma(\alpha)]^{k+1}}{\Gamma((k+1)\alpha)} \int_0^t (t-s)^{(k+1)\alpha-1}\phi(s)ds, \ t \geq 0.$$

Isso prova a nossa primeira observação.

A nossa segunda observação a respeito desse operador é que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} F^{n+1}\phi(t) = 0, \ \forall \ t \in (0,T). \tag{2.7}$$

Para provarmos isso, fixemos $t \in (0, T)$. Para $n+1 > 1/\alpha$, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq F^{n+1}\phi(t) &= \frac{[b\Gamma(\alpha)]^{n+1}}{\Gamma(n\alpha+\alpha)} \int_0^t (t-s)^{(n+1)\alpha-1}\phi(s)ds \\
&\leq \frac{[b\Gamma(\alpha)]^{n+1}}{\Gamma(n\alpha+\alpha)} \int_0^t t^{(n+1)\alpha-1}\phi(s)ds \\
&= \left(\frac{b\Gamma(\alpha)}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \phi(s)ds\right) \frac{[b\Gamma(\alpha)t^{\alpha}]^n}{\Gamma(n\alpha+\alpha)}
\end{aligned}
$$

e como $[b\Gamma(\alpha)t^{\alpha}]^n/\Gamma(n\alpha+\alpha) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, pois é o termo geral da série da função de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\alpha}$, concluímos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} F^{n+1}\phi(t) = 0.$$

Para finalizarmos, observe que a hipótese (2.5) implica

$$
\begin{aligned}
Fh(t) &\leq F[\sigma(t) + Fh(t)] \\
&= F\sigma(t) + F^2h(t).
\end{aligned}
$$

Dessa forma, temos

$$h(t) \leq \sigma(t) + Fh(t) \leq \sigma(t) + F\sigma(t) + F^2h(t), \ \forall\ t \in [0, T).$$

Prosseguindo por indução, obtemos

$$h(t) \leq \sigma(t) + \sum_{k=1}^{n} F^k\sigma(t) + F^{n+1}h(t), \ \forall\ t \in [0, T),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos

$$
\begin{aligned}
h(t) &\overset{\text{b}}{\leq} \sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F^k\sigma(t) \\
&= \sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{[b\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)}(t-s)^{k\alpha-1}\sigma(s)ds, \ \forall\ t \in [0, T).
\end{aligned}
$$

Como a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left| \frac{[b\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)}(t-s)^{k\alpha-1}\sigma(s) \right| ds$$

converge para todo $t \in [0, T)$ fixado, segue do Teorema da Convergência Dominada (sendo mais específico, estamos usando o Teorema 2.25 da referência [6]) que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \frac{[b\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)}(t-s)^{k\alpha-1}\sigma(s)ds &= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[b\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(k\alpha)}(t-s)^{k\alpha-1}\sigma(s)ds \\ &= \int_0^t b\Gamma(\alpha)(t-s)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[b\Gamma(\alpha)]^k(t-s)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+\alpha)}\sigma(s)ds \\ &\overset{\text{ⓒ}}{=} b\Gamma(\alpha)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\big(b\Gamma(\alpha)(t-s)^{\alpha}\big)\sigma(s)ds.\end{aligned}$$

Assim, juntando a desigualdade ⓑ com a igualdade ⓒ, concluímos

$$h(t) \leq \sigma(t) + b\Gamma(\alpha)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(b\Gamma(\alpha)(t-s)^{\alpha})\sigma(s)ds,$$

para todo $t \in [0,T]$.

□

2.2 Derivada e Integral Fracionárias

Dada uma função $f \in L^1([0,b],\, X)$, definimos o operador I que associa essa função a

$$If(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad t \in [0,b].$$

O que nos dá $I : L^1([0,b],\, X) \to L^1([0,b],\, X)$. Agora, veja que podemos calcular as potências de ordem inteira desse operador da seguinte forma

$$I^2 f(t) = \int_0^t \int_0^s f(\tau)d\tau ds = \int_0^t (t-s)f(s)ds,$$

$$I^3 f(t) = \int_0^t \int_0^s \int_0^{\sigma} f(\sigma)d\sigma d\tau ds = \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2 f(s)ds,$$

Prosseguindo por indução, obtemos a fórmula de Cauchy para a n-ésima iteração

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}f(s)ds.$$

Usando a função Gama, podemos escrever

$$I^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t (t-s)^{n-1}f(s)ds. \tag{2.8}$$

Observe que o lado direito da expressão (2.8) está definido também para $n > 0$ não-inteiro.

Definição 19. Sejam $\alpha \in (0,1), b > 0$ e $f \in L^1([0,b];X)$. A *integral fracionária de*

Riemann-Liouville de ordem α da função f é

$$J_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

para quase todo $t \in [0,b]$. Para $\alpha = 0$ definimos $J_t^0 f(t) = f(t)$ para todo $t \in [0,b]$.

Observação 8. Seja $\alpha > 0$. Considere a função $g_\alpha : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ definida por

$$g_\alpha = \begin{cases} \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Dessa forma, podemos escrever

$$J_t^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t), \ \forall \ t \in [0,b].$$

Teorema 11. *Dados* $\alpha \in (0,1)$ *e* $b > 0$*, o operador integral fracionário de Riemann-Liouville*

$$\begin{array}{rcl} J_t^\alpha : L^1([0,b];X) & \longrightarrow & L^1([0,b];X) \\ f & \longmapsto & J_t^\alpha f \end{array}$$

é um operador linear limitado.

Demonstração. Dada $f \in L^1([0,b];X)$, temos

$$\begin{aligned} \| J_t^\alpha f(t) \|_{L^1([0,b];X)} &= \int_0^b \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right\| dt \\ &\leq \int_0^b \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \| f(s) \| ds \right] dt \\ &= \int_0^b \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b (t-s)^{\alpha-1} \| f(s) \| \chi_{[0,t]}(s) ds \right] dt \\ &= \int_0^b \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b (t-s)^{\alpha-1} \| f(s) \| \chi_{[s,b]}(t) ds \right] dt \\ &= \int_0^b \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b (t-s)^{\alpha-1} \| f(s) \| \chi_{[s,b]}(t) dt \right] ds \\ &= \int_0^b \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_s^b (t-s)^{\alpha-1} \| f(s) \| dt \right] ds \\ &= \int_0^b \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{(b-s)^\alpha}{\alpha} \| f(s) \| \right] ds \\ &\leq \frac{b^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \| f(t) \|_{L^1([0,b];X)} \end{aligned}$$

□

Definição 20. Sejam $\alpha \in (0,1)$, $b > 0$ e $f \in L^1([0,b];X)$ tal que $(f * g_{1-\alpha}) \in$

$W^{1,1}([0,b];X)$. Definimos a *Derivada Fracionária de Riemann-Liouville de ordem* α da função f por

$$D_t^\alpha f := D_t J_t^{1-\alpha} f = D_t(g_{1-\alpha} * f)(t),$$

para quase todo t em $[0,b]$, onde $D_t = \dfrac{d}{dt}$.

Observação 9. Explicitamente, temos

$$D_t^\alpha f(t) = D_t \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right\}$$

para quase todo $t \in [0,b]$. E ainda, se $f : [0,b] \to X$ é uma função absolutamente contínua e $\alpha \in (0,1)$ então $D_t^\alpha f \in L^p([0,b], X)$ para todo $p \in [1, \frac{1}{\alpha})$. (Para uma demonstração desse resultado veja [9], Lema 2.2).

Exemplo 2. Sejam $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (-1,\infty)$ e $c \in X$. Considere a função $f : [0,b] \to X$ dada por $f(t) = c\,t^\beta$. Temos

$$\begin{aligned} D_t^\alpha f(t) = D_t \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} c\, s^\beta ds \right\} &= D_t \left\{ c \frac{t^{1+\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\alpha} \left(\frac{s}{t}\right)^\beta \frac{1}{t} ds \right\} \\ &= D_t \left\{ c \frac{t^{1+\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\beta ds \right\} \\ &= c\,(1+\beta-\alpha) \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^\beta ds \\ &= c\,(1+\beta-\alpha) \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} B(1-\alpha,\, \beta+1) \\ &= c\,(1+\beta-\alpha) \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma((1+\beta-\alpha)+1)} \\ &= c\ t^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(\beta+1) t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}\, c.$$

Do exemplo anterior, obtemos a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma função constante

$$D_t^\alpha c = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\, c.$$

Assim, podemos observar que $D_t^\alpha c$ tem um comportamento singular em zero e, além disso, a derivada de uma constante não é nula. Então, a fim de evitar dificuldades desse tipo, adotaremos o conceito da derivada fracionária de Caputo. Esta é uma das razões que levaram Michele Caputo, em 1969, a propor essa definição (para mais detalhes, veja [8], seção 2.4.1) .

Definição 21. Sejam $\alpha \in (0,1), b > 0$ e $f \in C([0,b];X)$ tal que $(f * g_{1-\alpha}) \in W^{1,1}([0,b];X)$. Definimos a derivada fracionária de Caputo de ordem α da função f como

$$cD_t^{\alpha} f(t) = D_t^{\alpha}(f(t) - f(0))$$

para quase todo t em $[0,b]$.

Proposição 12. *Seja $\alpha \in (0,1)$. Para toda $f \in C^1([0,b];X)$ temos $cD_t^{\alpha} f(t) \in C([0,b];X)$, e ainda vale a seguinte igualdade*

$$cD_t^{\alpha} f(t) = J_t^{1-\alpha} f'(t), \quad \forall\, t \in [0,b].$$

Demonstração. Veja [2], Proposição 2.34. $\square$

Proposição 13. *Dados $\alpha, \beta \in (0,1)$ e $b > 0$. Se $f \in L^1([0,b];X)$ e $h \in C([0,b];X)$, então valem as seguintes propriedades:*

(i) Se $\alpha + \beta \in (0,1)$, então

$$J_t^{\alpha} J_t^{\beta} f(t) = J_t^{\alpha+\beta} f(t)$$

(ii) $D_t^{\alpha} J_t^{\alpha} f(t) = f(t)$

(iii) Se $(g_{1-\alpha} * f) \in W^{1,1}([0,b];X)$ então

$$J_t^{\alpha} D_t^{\alpha} f(t) = f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \{J_t^{1-\alpha} f(s)\}|_{s=0}.$$

Além disso, se existe uma função integrável ϕ tal que $f(t) = J_t^{\alpha}\phi(t)$, então

$$J_t^{\alpha} D_t^{\alpha} f(t) = f(t).$$

(iv) $cD_t^{\alpha} J_t^{\alpha} h(t) = h(t)$

(v) Se $(g_{1-\alpha} * h) \in W^{1,1}([0,b];X)$, então

$$J_t^{\alpha} cD_t^{\alpha} h(t) = h(t) - h(0).$$

Demonstração. Veja [2], Proposição 2.35. $\square$

Capítulo 3

Equações Diferenciais Fracionárias

3.1 Caso com Operadores limitados

Nesta seção provaremos a existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy para a equação diferencial linear

$$\begin{cases} cD_t^\alpha u(t) &= Bu(t), \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0 \in X \end{cases} \tag{3.1}$$

onde X é um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, $\alpha \in (0,1)$, cD_t^α é a derivada de Caputo e $B : X \to X$ é um operador linear limitado.

Iniciamos nossa discussão considerando o seguinte conjunto

$$C^\alpha([0,\tau]; X) := \{u \in C([0,\tau]; X) : cD_t^\alpha u \in C([0,\tau]; X)\},$$

que é um subespaço vetorial de $C([0,\tau]; X)$.

Definição 22. A função contínua $u : [0,\infty) \to X$ é uma solução global de (3.1) se $u \in C^\alpha([0,\tau]; X)$, para todo $\tau > 0$, e satisfaz a equação (3.1).

Lema 1. *Seja $u : [0,\infty) \to X$ uma função contínua. Uma condição necessária e suficiente para que u seja solução global de* (3.1) *é satisfazer a seguinte equação integral*

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Bu(s)ds, \ \forall \ t \geq 0 \tag{3.2}$$

Demonstração. Suponhamos que u é uma solução global da equação (3.1) e fixemos $\tau > 0$. Como u é solução global e B é um operador linear limitado, então $u \in C^\alpha([0,\tau]; X)$ e

$$cD_t^\alpha u(t) = Bu(t), \ \forall \ t \in (0,\tau].$$

Portanto, podemos aplicar J_t^α na igualdade acima, pois $cD_t^\alpha u \in L^1([0,\tau]; X)$. E assim, obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &= u(0) + J_t^\alpha Bu(t) \\ &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Bu(s)ds, \ \forall\ t \in [0,\tau]. \end{aligned}$$

Como a escolha de $\tau > 0$ foi arbitrária, concluímos que u satisfaz (3.2).

Reciprocamente, suponhamos que u satisfaça a equação integral (3.2) e fixemos $\tau > 0$. Por hipótese, $u \in C([0,\tau]; X)$ e

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Bu(s)ds, \ \ \forall\ t \in [0,\tau].$$

Podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$u(t) - u(0) = J_t^\alpha Bu(t), \forall\ t \in [0,\tau],$$

pois $u(0) = u_0$ e $J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds$. Então, como $Bu(t) \in C([0,\tau]; X)$, concluímos pelo item (ii) da Proposição (13) que

$$\begin{aligned} cD_t^\alpha u(t) &= D_t^\alpha (u(t) - u(0)) \\ &= D_t^\alpha J_t^\alpha Bu(t) \\ &= Bu(t), \ \forall\ t \in [0,\tau]. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que $cD_t^\alpha u \in C([0,\tau]; X)$. E novamente pela arbitrariedade de $\tau > 0$, concluímos que u é uma solução global de (3.1). $\square$

Para demonstração do nosso próximo resultado, usaremos um Teorema clássico da Análise, conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Banach, o qual enunciaremos da seguinte forma:

Teorema 12. *(Ponto Fixo de Banach) Sejam K um espaço métrico completo e $T : K \to K$ uma aplicação. Suponha que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n : K \to K$ é uma contração. Nestas condições, T possui um único ponto fixo em K. Além disso, para todo $u \in K$, a sequência $(T^n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a esse único ponto fixo.*

Demonstração. Veja [5] Corolário 5.9. $\square$

Teorema 13. *Sejam $\alpha \in (0,1), B : X \to X$ um operador linear limitado e $u_0 \in X$. Então o problema (3.1) possui uma única solução global.*

Demonstração. Fixemos $\tau > 0$. Consideremos $K = \{u \in C([0,\tau];\, X) : u(0) = u_0\}$ e T uma aplicação definida sobre K por

$$Tu\,(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Bu(s)ds,\ t\in[0,\tau]$$

Observemos que $Tu(0) = u_0$ e pela Proposição 2, item (v), a aplicação $t \longmapsto \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Bu(s)ds$ é contínua. Então, temos $Tu \in K$.

Nós mostraremos agora que $T : K \to K$ é uma contração. Com efeito, dados $u, v \in K$, temos

$$\begin{aligned}
||Tu(t) - Tv(t)|| &= \left|\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}B[u(s)-v(s)]ds\right|\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{||B||\;||u(s)-v(s)||}{(t-s)^{1-\alpha}}ds \\
&\leq \frac{||B||}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \sup_{s\in[0,\tau]}||u(s)-v(s)|| \\
&= \frac{t^\alpha||B||}{\alpha\Gamma(\alpha)}\sup_{s\in[0,\tau]}||u(s)-v(s)|| \\
&= \frac{t^\alpha||B||}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{s\in[0,\tau]}||u(s)-v(s)||,\ \forall\, t\in[0,\tau].
\end{aligned}$$

Prosseguindo por indução, obtemos

$$\begin{aligned}
||T^n u(t) - T^n v(t)|| &= \frac{t^{n\alpha}||B||^n}{\Gamma(n\alpha+1)}\sup_{s\in[0,\tau]}||u(s)-v(s)|| \\
&\leq \frac{\tau^{n\alpha}||B||^n}{\Gamma(n\alpha+1)}\sup_{s\in[0,\tau]}||u(s)-v(s)||,\ \forall\, t\in[0,\tau].
\end{aligned}$$

Assim, como $\frac{\tau^{n\alpha}||B||^n}{\Gamma(n\alpha+1)}$ é o termo geral de uma série convergente, veja (2.4), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n : K \to K$ é uma contração. E considerando a norma $||u|| = \sup_{s\in[0,\tau]}||u(s)||$ em K, temos um espaço de Banach $(K, ||\ ||)$. Portanto, pelo Teorema 12 e Lema 1, concluímos que (3.1) possui uma única solução global, pois $\tau > 0$ foi tomado arbitrariamente. □

Corolário 3. *Mesmas hipóteses do Teorema* 13.

(i) Seja $v_n : [0,\infty) \to X$ uma sequência de funções contínuas dadas por

$$v_0(t) \equiv u_0 \quad e \quad v_{n+1}(t) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Bv_n(s)ds,\ \ n = 0,1,2,....$$

Então existe uma função $u : [0,\infty) \to X$ tal que para todo $\tau > 0$ temos $v_n \to u$ em $C([0,\tau]; X)$. Além disso, u é a única solução global de (3.1).

(ii) A solução u é dada por

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t^\alpha B)^k u_0}{\Gamma(k\alpha+1)}$$

Demonstração. O item (i) segue da demonstração do Teorema 13 e do Teorema 12. Para provar o item (ii) observemos que

$$\begin{aligned} v_1(t) &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B u_0 ds \\ &= u_0 + \frac{t^\alpha B u_0}{\alpha \Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

e usando as propriedades da função gama, Proposição 8, obtemos

$$v_1(t) = u_0 + \frac{t^\alpha B}{\Gamma(\alpha+1)} u_0.$$

Agora, calculando $v_2(t)$, temos

$$\begin{aligned} v_2(t) &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B v_1(s) ds \\ &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B[u_0 + \frac{s^\alpha B}{\Gamma(\alpha+1)} u_0] ds \\ &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B u_0 ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\alpha B^2 u_0 ds \\ &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B u_0 ds + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (1-\frac{s}{t})^{\alpha-1} \left(\frac{s}{t}\right)^\alpha B^2 u_0 \frac{ds}{t} \\ &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B u_0 ds + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\alpha ds \, B^2 u_0 \\ &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B u_0 ds + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} B(\alpha+1, \alpha) \, B^2 u_0 \\ &= u_0 + \frac{t^\alpha B u_0}{\alpha \Gamma(\alpha)} + \frac{(t^\alpha B)^2 u_0}{\Gamma(2\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Prosseguindo por indução, obtemos

$$v_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(t^\alpha B)^k u_0}{\Gamma(k\alpha+1)}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Dessa forma, temos

$$u(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(t^\alpha B)^k u_0}{\Gamma(k\alpha+1)} =: E_{\alpha,1}(t^\alpha B) u_0$$

□

Observação 10. Como

$$\|B^n\| \leq \|B\|^n, \; \forall \; n \in \mathbb{N}$$

temos
$$\left\| \sum_{n=0}^{m} \frac{(t^\alpha B)^n}{\Gamma(n\alpha+1)} \right\| \leq \sum_{n=0}^{m} \frac{\|t^\alpha B\|^n}{\Gamma(n\alpha+1)} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|t^\alpha B\|^n}{\Gamma(n\alpha+1)} = E_\alpha(\|t^\alpha B\|).$$
Assim, está bem definida a função $E_{\alpha,1}(t^\alpha B)$ que associa cada $t \geq 0$ ao operador linear limitado
$$\sum_{n}^{\infty} \frac{(t^\alpha B)^n}{\Gamma(n\alpha+1)}.$$
No entanto, diferentemente do caso quando $D_t^\alpha = \frac{d}{dt}$ em (3.1), a família de operadores $\{E_{\alpha,1}(t^\alpha B)\}_{t\geq 0}$ não possui a propriedade de semigrupo, isto é, não é verdade que

$$E_{\alpha,1}((t+s)^\alpha B) = E_{\alpha,1}(t^\alpha B)E_{\alpha,1}(s^\alpha B), \ \forall\, t, s \geq 0.$$

3.2 Operadores de Mittag-Leffler

Nesta seção, apresentamos o principal operador deste trabalho. Na seção anterior provamos que se $B : X \to X$ é um operador linear limitado, então $E_{\alpha,1}(t^\alpha B)u_0$ é a única solução da equação diferencial fracionária

$$\begin{cases} cD_t^\alpha u(t) & = Bu(t), \quad t > 0 \\ u(0) & = u_0 \in X. \end{cases}$$

Na presente seção, estudaremos o caso um pouco mais geral que (3.1). Para isso, precisamos da seguinte definição:

Definição 23. (Definição extraída do artigo [4]) Um operador $A : D(A) \subset X \to X$ é chamado de operador setorial quando for linear, fechado, denso e existirem $\phi \in (\pi/2, \pi)$ e $N \geqslant 1$ tais que
$$S_\phi := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| \leqslant \phi, \, \lambda \neq 0\} \subset \rho(A),$$
$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant \frac{N}{|\lambda|}, \ \forall\, \lambda \in S_\phi.$$
Neste caso, dizemos que A é um operador setorial de ângulo ϕ.

Agora, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} cD_t^\alpha u(t) & = Au(t), \quad t > 0 \\ u(0) & = u_0 \in X. \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $\alpha \in (0, 1)$, cD_t^α é a derivada de Caputo e $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador setorial. O primeiro resultado é a definição da família de operadores de Mittag-Leffler $\{E_\alpha(t^\alpha A), E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)\}_{t\geq 0}$.

Observação 11. Na demonstração do próximo resultado, usaremos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}\frac{e^{\lambda}}{\lambda}d\lambda = 1,$$

onde $Ha = Ha(\epsilon,\theta)$, com $\epsilon > 0$ e $\theta \in (\pi/2,\pi)$, é um caminho de Hankel dado. Para uma demonstração detalhada, o leitor pode consultar o Exemplo 3.3 da referencia [10].

Teorema 14. *Se $\alpha \in (0,1)$ e $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador setorial de ângulo $\phi \in (\pi/2,\pi)$, então as funções*

$$\begin{aligned} E_{\alpha}(t^{\alpha}A) &:= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^{\alpha}-A)^{-1}d\lambda,\ t\geq 0 \\ E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}A) &:= \frac{t^{1-\alpha}}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}(\lambda^{\alpha}-A)^{-1}d\lambda,\ t\geq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

(onde Ha é qualquer caminho de Hankel (Veja (2.3)), contido em S_{ϕ}.) estão bem definidas. Além disso, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|E_{\alpha}(t^{\alpha}A)\| \leq M \quad e \quad \|E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}A)\| \leq M \ \textit{para todo}\ t \geq 0$$

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que para todo $t > 0$ o resultado é válido. Para isso, fixemos $t > 0$ e considere $\pi/2 < \theta < \phi$, $\epsilon = 1/t$ e $Ha = Ha(\epsilon,\theta)$ o caminho de Hankel. Agora, vamos estimar a função $\|E_{\alpha}(t^{\alpha}A)\|$ sobre cada caminho Ha_j que compõe Ha:

- Sobre Ha_1 temos

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^{\alpha}-A)^{-1}d\lambda\right\| &= \frac{1}{2\pi}\left\|\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{\epsilon}^{R} e^{tse^{i\theta}}(se^{i\theta})^{\alpha-1}((se^{i\theta})^{\alpha}-A)^{-1}ds\right\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{\epsilon}^{R} |e^{tse^{i\theta}}||se^{i\theta}|^{\alpha-1}||(\,(se^{i\theta})^{\alpha}-A)^{-1}||ds. \end{aligned}$$

Como $\alpha \in (0,1)$ e $Ha_1 \subset S_{\phi}$, temos

$$||(\,(se^{i\theta})^{\alpha}-A)^{-1}|| \leq \frac{N}{s^{\alpha}}, \forall\ s \in [\epsilon, R]$$

pois A é um operador setorial. Observemos também que $|e^{tse^{i\theta}}| = e^{ts\cos\theta}$. Dessa forma, temos

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\| &\leq \frac{N}{2\pi}\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_\epsilon^R e^{ts\cos\theta}s^{\alpha-1}s^{-\alpha}ds\\
&\leq \frac{N}{2\pi\epsilon}\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_\epsilon^R e^{ts\cos\theta}ds\\
&= \frac{N}{2\pi\epsilon}\lim_{R\longrightarrow\infty}\left[\frac{e^{ts\cos\theta}}{t\cos\theta}\right]_\epsilon^R\\
&= \frac{N}{2\pi\epsilon t\cos\theta}\left[\left(\lim_{R\longrightarrow\infty} e^{tR\cos\theta}\right) - e^{t\epsilon\cos\theta}\right].
\end{aligned}
$$

Usando agora o fato de $\cos\theta < 0$, pois $\theta \in (\pi/2, \pi)$, e de $\epsilon = t^{-1}$, obtemos

$$
\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\| \leq \frac{Ne^{\cos\theta}}{2\pi(-\cos\theta)}.
$$

- Sobre Ha_2, usando argumentos semelhantes ao caso anterior, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_2} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\| &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{-\theta}^{\theta} e^{t\epsilon e^{is}}(\epsilon e^{is})^{\alpha-1}(\,(\epsilon e^{is})^\alpha - A)^{-1}\epsilon e^{is}ds\right\|\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} e^{t\epsilon\cos(s)}\epsilon^{\alpha-1}\frac{N}{\epsilon^\alpha}\epsilon ds\\
&= \frac{N}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} e^{\cos(s)}ds \leq \frac{\theta Ne}{\pi}.
\end{aligned}
$$

- Sobre Ha_3 é análogo a Ha_1.

Dessa forma, escolhendo $M > 0$ como o maior dos três limitantes encontrados acima, temos

$$
\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda\right\| \leq M.
$$

Observe que o limitante M obtido depende de t, pois o caminho de Hankel $Ha(\epsilon,\theta)$ foi escolhido de modo que $\epsilon = 1/t$. Sendo assim, precisamos mostrar que o valor da integral

$$
\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda \tag{3.5}
$$

não depende do caminho de Hankel escolhido. Dados $0 < \epsilon < \epsilon'$ e $2/\pi < \theta' < \theta < \phi$, considerem os caminhos de Hankel $Ha = Ha(\epsilon,\theta)$ e $Ha' = Ha(\epsilon',\theta')$. Para $R > \epsilon'$

considere o caminho $\gamma_R = Ha'_R - \gamma_{1,R} - Ha_R + \gamma_{2,R}$, onde

$$\begin{cases} Ha'_R := \{\lambda \in Ha' : |\lambda| \leq R/\sin\theta'\} \\ \gamma_{1,R} := \{s + iR : s \in [R/\tan\theta, R/\tan\theta']\} \\ Ha_R := \{\lambda \in Ha : |\lambda| \leq R/\sin\theta\} \\ \gamma_{2,R} := \{s - iR : s \in [R/\tan\theta, R/\tan\theta']\} \end{cases}.$$

A figura 3.2 ilustra o caminho γ_R.

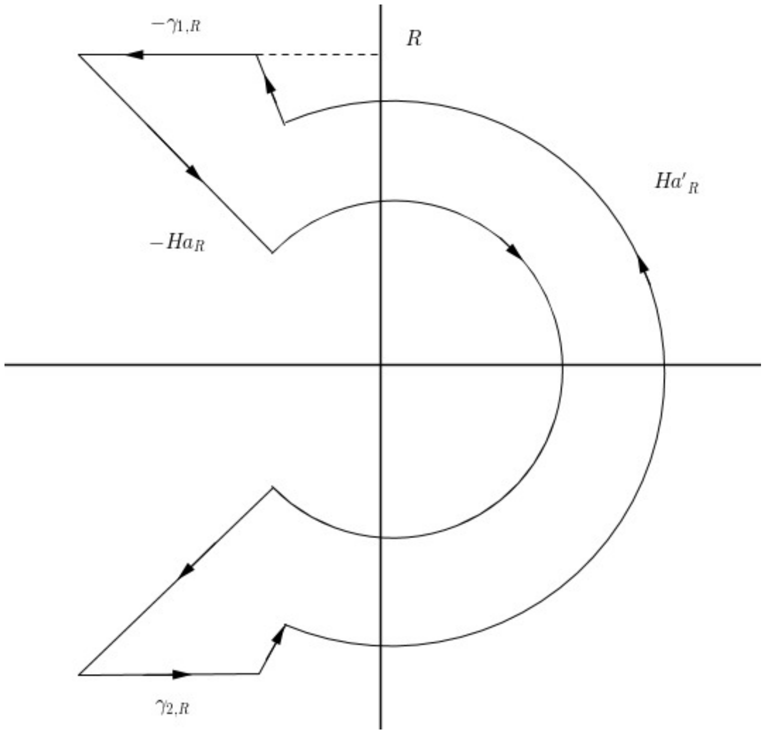

Figura 3.1: Caminho γ_R

A partir de agora, para simplificar a escrita, ponhamos $\Phi(\lambda) = e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$. Pelo Teorema 9 obtemos

$$\int_{\gamma_R} \Phi(\lambda)d\lambda = 0.$$

E como $\gamma_R = Ha'_R - \gamma_{1,R} - Ha_R + \gamma_{2,R}$, então

$$\int_{Ha'_R} \Phi(\lambda)d\lambda + \int_{\gamma_{2,R}} \Phi(\lambda)d\lambda = \int_{Ha_R} \Phi(\lambda)d\lambda + \int_{\gamma_{1,R}} \Phi(\lambda)d\lambda.$$

Observemos agora que

$$\lim_{R\longrightarrow\infty} \int_{Ha_R} \Phi(\lambda)d\lambda = \int_{Ha} \Phi(\lambda)d\lambda$$

e

$$\lim_{R\longrightarrow\infty}\int_{Ha'_R}\Phi(\lambda)d\lambda=\int_{Ha'}\Phi(\lambda)d\lambda.$$

Assim, para valer a igualdade

$$\int_{Ha}\Phi(\lambda)d\lambda=\int_{Ha'}\Phi(\lambda)d\lambda$$

é suficiente que

$$\lim_{R\longrightarrow\infty}\left|\left|\int_{\gamma_{j,R}}\Phi(\lambda)d\lambda\right|\right|=0,\ \ j=1,2. \tag{3.6}$$

Sendo assim, vamos provar (3.6). Temos

$$\begin{aligned}
\left|\left|\int_{\gamma_{1,R}}\Phi(\lambda)d\lambda\right|\right| &= \left|\left|\int_{\gamma_{1,R}}e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha-A)^{-1}d\lambda\right|\right|\\
&= \left|\left|\int_{R/\tan\theta}^{R/\tan\theta'}e^{(s+iR)t}(s+iR)^{\alpha-1}(\,(s+iR)^\alpha-A)^{-1}ds\right|\right|\\
&\leq \int_{R/\tan\theta}^{R/\tan\theta'}e^{st}|s+iR|^{\alpha-1}\frac{N}{|s+iR|^\alpha}ds\\
&= N\int_{R/\tan\theta}^{R/\tan\theta'}\frac{e^{st}}{\sqrt{s^2+R^2}}ds\\
&\leq \frac{N}{R}\int_{R/\tan\theta}^{R/\tan\theta'}e^{st}ds=\frac{N}{R}\left[\frac{e^{Rt/\tan\theta}}{t}-\frac{e^{Rt/\tan\theta'}}{t}\right].
\end{aligned}$$

Como $\tan\theta,\tan\theta'<0$, obtemos

$$\lim_{R\longrightarrow\infty}\left|\left|\int_{\gamma_{1,R}}\Phi(\lambda)d\lambda\right|\right|=0.$$

De modo análogo, mostra-se para $j=2$. Portanto, podemos concluir que a integral em (3.5) não depende do caminho de Hankel escolhido, e assim, vale

$$\|E_\alpha(t^\alpha A)\|\leq M,\,\forall\; t>0.$$

Agora, mostraremos o caso $t=0$. Fazendo uma mudança de variável, obtemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha-A)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}e^{\mu}\mu^{\alpha-1}(\,\mu^\alpha-At^\alpha)d\mu,\ \forall\; t>0. \tag{3.7}$$

Como a integral

$$\int_{Ha}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha-A)^{-1}d\lambda$$

existe, segue de (3.7) que

$$E_\alpha(0^\alpha A) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}\frac{e^\lambda}{\lambda}d\lambda\right) Id.$$

Pela Observação 11, temos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}\frac{e^\lambda}{\lambda}d\lambda = 1,$$

e assim, concluímos que $E_\alpha(0^\alpha A) = Id$. Portanto,

$$\|E_\alpha(t^\alpha A)\| \le M, \ \forall \ t \ge 0.$$

De modo análogo, obtemos também

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)\| \le M, \ \forall \ t \ge 0.$$

□

Proposição 14. *Considerando válida as mesmas hipóteses do Teorema* 14. $E_\alpha(t^\alpha A)$ *é fortemente contínua, isto é, para cada* $x \in X$ *temos*

$$\lim_{t\to 0^+} ||E_\alpha(t^\alpha A)x - x|| = 0. \tag{3.8}$$

Demonstração. Como $\|E_\alpha(t^\alpha A)\| \le M$, para todo $t \ge 0$, é suficiente mostrarmos que (3.8) vale para todo $x \in D(A)$. Dado $x \in D(A)$, para todo $t > 0$ temos

$$\begin{aligned}
E_\alpha(t^\alpha A)x - x &= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}x\,d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}[\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1} - \lambda^{-1}]x\,d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}[\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1} - \lambda^{-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}(\lambda^\alpha - A)]x\,d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}(\lambda^\alpha - A)^{-1}[\lambda^{\alpha-1} - \lambda^{-1}(\lambda^\alpha - A)]x\,d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}(\lambda^\alpha - A)^{-1}[\lambda^{-1}A]x\,d\lambda\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\mu}\left[\left(\frac{u}{t}\right)^\alpha - A\right]^{-1}\left[\left(\frac{u}{t}\right)^{-1}A\right]\frac{d\mu}{t}.
\end{aligned}$$

Segue dessa igualdade, que

$$||E_\alpha(t^\alpha A)x - x|| \le \frac{1}{2\pi}\int_{Ha} e^{\mathrm{Re}\,(\mu)}\frac{Nt^\alpha||Ax||}{|\mu|^{\alpha+1}}d|\mu| \le C||Ax||t^\alpha, \ \forall \ t > 0,$$

onde

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{Ha}\frac{e^{\mathrm{Re}\,(\mu)}}{|\mu|^{\alpha+1}}d|\mu|$$

é finito (para uma demonstração desse fato, veja [10] página 70). Portanto, (3.8) segue da última desigualdade. $\square$

Proposição 15. *Considerando válidas as mesmas hipóteses do Teorema* 14. *Dado* $x \in X$*, temos*

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(t^\alpha A)x\}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x$$

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)x\}(\lambda) = (\lambda^\alpha - A)^{-1}x$$

Demonstração. Veja [2], Teorema 2.43. $\square$

Proposição 16. *Mesmas hipóteses da Teorema* 14. *Para todo* $u_0 \in X$ *a função* $u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u_0$ *é analítica e é a única solução do problema (*3.3*).*

Demonstração. Veja [2], Teorema 2.44. $\square$

3.3 O Problema Abstrato de Cauchy

Nesta seção apresentamos os principais resultados deste trabalho. Considere o problema abstrato de Cauchy

$$\begin{cases} cD_t^\alpha u(t) & = Au(t) + f(t, u(t)) \quad t > 0 \\ u(0) & = u_0 \in X. \end{cases} \tag{3.9}$$

onde $\alpha \in (0,1)$, cD_t^α é a derivada de Caputo, $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador setorial e $f : [0,\infty) \times X \to X$ é uma função contínua.

Definição 24. Seja $u : [0,\infty) \to X$ uma função contínua. Dizemos que u é uma solução branda global de (3.9) se satisfaz a seguinte equação

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)f(s,u(s))ds, \ \forall\, t \geq 0. \tag{3.10}$$

Este conceito é baseado na seguinte construção: Suponha que $u : [0,\infty) \to X$ satisfaz a equação (3.9). Então aplicando o operador fracionário de Riemman-Liouville J_t^α (Definição 19) em ambos os lado da equação (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} u(t) - u(0) &= J_t^\alpha Au(t) + J_t^\alpha f(t,u(t)) \\ \Rightarrow u(t) &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Au(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,u(s))ds, \ \forall\, t \geq 0. \end{aligned}$$

Agora, aplicando a transformada de Laplace na igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} \hat{u}(\lambda) &= \frac{u_0}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^\alpha} A\hat{u}(\lambda) + \frac{1}{\lambda^\alpha}\widehat{f(u)}(\lambda) \\ \Rightarrow \lambda^\alpha \hat{u}(\lambda) &= u_0 \lambda^{\alpha-1} + A\hat{u}(\lambda) + \widehat{f(u)}(\lambda), \end{aligned}$$

onde $\widehat{f(u)}(\lambda) = \mathcal{L}\{f(s,u(s))\}(\lambda)$. Assim, para $\lambda^\alpha \in \rho(A)$, segue que

$$\hat{u}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda - A)^{-1}u_0 + (\lambda - A)^{-1}[\widehat{f(u)}(\lambda)].$$

Portanto, pelo Teorema 5 e Proposição 15, obtemos

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s,u(s))ds, \ \forall\ t \geq 0.$$

Motivados por essa discussão, adotaremos as seguintes definições:

Definição 25. Seja $\tau > 0$.

(*i*) Chamamos a função $u : [0,\tau] \to X$ de solução branda local de (3.9) em $[0,\tau]$ quando u é contínua e satisfaz a equação

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s,u(s))ds, \ \forall\ t \in [0,\tau].$$

(*ii*) Dizemos que a função $u : [0,\tau) \to X$ é solução branda local de (3.9) em $[0,\tau)$ quando, para todo $\tau' < \tau$ positivo, $u : [0,\tau'] \to X$ é solução branda local de (3.9) em $[0,\tau']$.

Definição 26. Dizemos que uma função $f : [0,\infty) \times X \to X$ é localmente Lipschitz na segunda variável, uniformemente com respeito à primeira variável, se para todo $x \in X$ fixado, existe uma bola aberta B_x, que contém x, e uma constante $L > 0$, que depende da bola B_x, tais que

$$||f(t,z) - f(t,y)|| \leq L||z - y||$$

para todo $z, y \in B_x$ e $t \in [0,\infty)$.

Teorema 15. *Suponha que no problema* (3.9) *a função contínua* $f : [0,\infty) \times X \to X$ *é localmente Lipschitz na segunda variável e uniformemente com respeito à primeira. Então, existe* $t_0 > 0$ *tal que* (3.9) *tem uma única solução local branda em* $[0,t_0]$.

Demonstração. Sejam $r > 0$, $B_{u_0}(r)$ a bola de centro u_0 com raio r e $L > 0$ a constante de Lipschitz de f associada à bola $B_{u_0}(r)$. Fixemos $\beta \in (0,r)$. Sejam $M > 0$ a constante dada pelo Teorema 14, isto é, $M = \sup_{t\geq 0} ||E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)||$ e $C = \sup_{s\in[0,t_0]} ||f(s,u_0)||$. Agora, pela Proposição 14, podemos escolher $t_0 > 0$ tal que

$$\frac{M}{\alpha}(L\beta + C){t_0}^{\alpha} \leq \frac{\beta}{2}$$

e

$$||E_\alpha(t^\alpha A)u_0 - u_0|| \leq \frac{\beta}{2},\ \forall\ t \in [0, t_0].$$

Considere $K := \{u \in C([0,t_0]; X) : u(0) = u_0 \text{ e } ||u(t) - u_0|| \leq \beta, \text{ para todo } t \in [0, t_0]\}$. Assim, K é completo, já que é um subconjunto fechado de um espaço de Banach, e não-vazio, pois $u(t) \equiv u_0 \in K$. Agora definimos para cada $u \in K$, a função $Tu : [0, t_0] \to X$ dada por

$$Tu(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s, u(s)) ds.$$

Afirmamos que $T(K) \subset K$. De fato, dado $u \in K$ temos diretamente que $Tu(0) = u_0$ e $Tu \in C([0, t_0]; X)$. E para mostrar que $||Tu(t) - u_0|| \leq \beta$ para todo $t \in [0, t_0]$, observe que

$$\begin{aligned} ||Tu(t) - u_0|| &= ||E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s, u(s)) ds - u_0|| \\ &\leq ||E_\alpha(t^\alpha A)u_0 - u_0|| + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} M(\|f(s,u(s)) - f(s,u_0)\| + \|f(s,u_0)\| ds \end{aligned}$$

e como f é localmente Lipschitz na segunda variável e $u \in K$, obtemos

$$\begin{aligned} \|Tu(t) - u_0\| &\leq \frac{\beta}{2} + ML\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|u(s) - u_0\| ds + MC\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{\beta}{2} + \frac{ML\beta t^\alpha}{\alpha} + \frac{MCt^\alpha}{\alpha} \leq \frac{\beta}{2} + \frac{M}{\alpha}(L\beta + C){t_0}^\alpha \leq \beta,\ \forall\ t \in [0, t_0] \end{aligned}$$

Provando assim, a nossa afirmação.

Mostraremos agora que o operador $T : K \to K$ é uma contração. Dados $u, v \in K$ e $t \in [0, t_0]$, temos

$$\begin{aligned} ||Tu(t) - Tv(t)|| &= \left|\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))] ds\right|\right| \\ &\leq M\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ||f(s,u(s)) - f(s,v(s))|| ds. \end{aligned}$$

Como $u(s), v(s) \in B_{u_0}(r)$, para todo $s \in [0, t]$, podemos usar a hipótese assumida sobre a função f para concluir que

$$\begin{aligned} ||Tu(t) - Tv(t)|| &\leq ML \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ||u(s) - v(s)|| ds \\ &\leq ML \left(\sup_{s \in [0,t_0]} ||u(s) - v(s)|| \right) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{ML{t_0}^{\alpha}}{\alpha} \sup_{s \in [0,t_0]} ||u(s) - v(s)||. \end{aligned}$$

Dessa forma, pela escolha do $t_0 > 0$, obtemos

$$||Tu(t) - Tv(t)|| \leq \frac{1}{2} \sup_{s \in [0,t_0]} ||u(s) - v(s)||, \ \forall \ t \in [0, t_0].$$

Segue-se da expressão acima que $T : K \to K$ é uma contração.

Portanto, pelo Teorema 12, existe $u \in K$ tal que $Tu(t) = u(t)$, para todo $t \in [0, t_0]$. Isto mostra a existência de uma solução branda local $u : [0, t_0] \to X$ de (3.9) em K. No entanto, nada nos garante que u é a única solução em $C([0, t_0]; X)$. Sendo assim, precisamos mostrar a unicidade da solução nesse espaço.

Suponha agora que $v : [0, t_0] \to X$ é uma solução branda local de (3.9). Existe então $T > 0$ tal que

$$||v(t) - u_0|| \leq \beta/2 < r, \ \forall \ t \in [0, T], \tag{3.11}$$

já que $\|v(0) - u_0\| = 0$(Veja item (i) da Definição 25.) e v é contínua. Assim, obtemos que $v(s), u(s) \in B_{u_0}(r)$ para todo $s \in [0, T]$. O que implica

$$\begin{aligned} \|v(t) - u(t)\| &= \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^{\alpha} A)[f(s, v(s)) - f(s, u(s))] ds \right\| \\ &\leq M \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, v(s)) - f(s, u(s))\| ds \\ &\leq ML \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|v(s) - u(s)\| ds, \ \forall \ t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Logo, podemos usar o Teorema 10, com $b = ML$, $\sigma \equiv 0$ e $h(t) = \|v(t) - u(t)\|$, para concluir que $v(t) = u(t)$ no intervalo $[0, T]$. Considere agora o subconjunto da reta $H = \{T \in (0, t_0] : v(t) = u(t), \ \forall \ t \in [0, T]\}$. Vimos acima que H é não-vazio. Então, existe $d = \sup H \leq t_0$. Suponhamos que $d < t_0$. Como $v(d) = u(d)$, pois $v(t) = u(t)$ em $[0, d)$, existe $d < T \leq t_0$ tal que

$$||v(t) - u(t)|| \leq \beta/2, \ \forall \ t \in [0, T],$$

pois $\|v(d) - u(d)\| = 0$ e $v \equiv u$ em $[0, d]$. Do mesmo modo como fizemos anteriormente, obtemos $v(t) = u(t)$ em $[0, T]$. O que é uma contradição, pois $T \in H$ e $T > d$. Esta contradição mostra que tem que ser $\sup H = t_0$, o que implica $v = u$. Portanto, u é a única solução branda local de (3.9). $\square$

Definição 27. Seja $u : [0, t_0] \to X$ uma solução branda local de (3.9). Se $t_1 > t_0$ e $v : [0, t_1] \to X$ é uma solução branda local de (3.9) em $[0, t_1]$, então dizemos que v é uma continuação de u em $[0, t_1]$.

Teorema 16. *Seja $f : [0, \infty) \times X \to X$ como no Teorema 15. Se $u : [0, t_0] \to X$ é uma solução branda local de (3.9) em $[0, t_0]$, então existe uma única continuação u^* de u em algum intervalo da forma $[0, t_0 + \tau], \tau > 0$.*

Demonstração. Seja $u : [0, t_0] \to X$ uma solução branda local de (3.9) em $[0, t_0]$,. Como f é localmente Lipschitz, existem $r > 0$, uma bola $B = B_{u(t_0)}(r)$ de centro $u(t_0)$ e raio r, e L a constante de Lipschitz de f associada à bola B. Fixemos $\beta \in (0, r)$. Sejam

$$C = \sup_{s \in [0, t_0]} \|f(s, u(t_0))\|),$$

$$D = \sup_{s \in [0, t_0]} \|f(s, u(s))\|),$$

$$M = \max \left\{ \sup_{t \geq 0} \|E_\alpha(t^\alpha A), \quad \sup_{t \geq 0} \|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)\| \right\}.$$

Agora, podemos escolher $\tau > 0$ satisfazendo as seguintes condições:

- $\|E_\alpha(t^\alpha A)u_0 - E_\alpha({t_0}^\alpha A)u_0\| \leq \beta/4$
- $\dfrac{M}{\alpha}(L\beta + C)\tau^\alpha \leq \beta/4$
- $\dfrac{MD}{\alpha}[t^\alpha - (t - t_0)^\alpha - {t_0}^\alpha] \leq \beta/4, \ \forall \ t \in [t_0, t_0 + \tau]$
- $\int_0^{t_0} (t_0 - s)^{\alpha - 1} \|[E_{\alpha,\alpha}((t - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((t_0 - s)^\alpha A)] f(s, u(s))\| ds \leq \beta/4,$
  $\forall \ t \in [t_0, t_0 + \tau]$.

Consideremos o conjunto

$$\begin{aligned} K := \{ w \in C([0, t_0 + \tau]; X) : \quad & w(t) = u(t) \quad \text{para todo } t \in [0, t_0] \\ & \text{e} \quad \|w(t) - u(t_0)\| \leq \beta \text{ para todo } t \in [t_0, t_0 + \tau] \} \end{aligned}$$

e $T : K \to C([0, t_0 + \tau]; X)$ dado por

$$Tw(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} E_{\alpha,\alpha}((t - s)^\alpha A) f(s, w(s)) ds, \ t \in [0, t_0 + \tau].$$

Verifiquemos que $T(K) \subset K$. Dado $w \in K$, temos $Tw = u$ em $[0, t_0]$. Porque $w(t) = u(t)$ em $[0, t_0]$ e u é a solução branda local para (3.9) em $[0, t_0]$, e assim,

$$\begin{aligned} Tw(t) &= E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s, w(s)) ds \\ &= E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s, u(s)) ds = u(t). \end{aligned}$$

Agora, se $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, temos

$$\begin{aligned} \|Tw(t) - u(t_0)\| &= \|E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s, w(s)) ds \\ &- E_\alpha({t_0}^\alpha A)u_0 - \int_0^{t_0} (t_0-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t_0-s)^\alpha A) f(s, w(s)) ds\|, \end{aligned}$$

pois $w(s) = u(s)$ em $[0, t_0]$. Agora, adicionando e subtraindo

$$\int_0^{t_0} (t_0-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s, w(s)) ds$$

no lado direito da igualdade acima e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\|Tw(t) - u(t_0)\| \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \|E_\alpha(t^\alpha A)u_0 - E_\alpha({t_0}^\alpha A)u_0\| \\ I_2 &= \left\| \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s, w(s)) ds \right\| \\ I_3 &= \left\| \int_0^t [(t-s)^{\alpha-1} - (t_0-s)^{\alpha-1}] E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s, w(s)) ds \right\| \\ I_4 &= \left\| \int_0^{t_0} (t_0-s)^{\alpha-1} [E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((t_0-s)^\alpha A)] f(s, w(s)) ds \right\|. \end{aligned}$$

Assim, pela escolha de $\tau > 0$, temos $I_j \leq \beta/4$, para $j = 1, 2, 3, 4$. Portanto, $\|Tw(t) - u(t_0)\| \leq \beta$.

De forma similar, como foi feito acima, verificamos que

$$\|Tw(t) - Tv(t)\| \leq \frac{ML\tau^\alpha}{\alpha} \sup_{s \in [0, t_0+\tau]} \|w(s) - v(s)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{s \in [0, t_0+\tau]} \|w(s) - v(s)\|, \ \forall \ t \in [0, t_0+\tau],$$

quaisquer que sejam $w, v \in K$. Portanto, T é uma contração e pelo Teorema 12 existe um único u^* em K que é ponto fixo de T. Da mesma forma como foi feito ao final da demonstração do Teorema 15, obtemos que u^* é a única continuação de u em $[0, t_0+\tau]$. $\square$

O próximo resultado será usado na demonstração do Teorema 17.

Lema 2. *Sejam $\omega \in (0,\infty)$, $u : [0,\omega) \to X$ uma função contínua limitada e $f : [0,\infty) \times X \to X$ também uma função contínua limitada. Se $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos no intervalo $[0,\omega)$ que converge para ω, então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} ||[E_{\alpha,\alpha}((t_n - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((\omega - s)^\alpha A)]f(s, u(s))||ds = 0$$

Demonstração. Sejam $M = \sup_{t\geq 0} \|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)\|$ e $C = \sup_{s\in[0,\omega)} \|f(s, u(s))\|$. Dado $\epsilon > 0$, fixemos $0 < \beta < \omega$ tal que

$$\frac{MC}{\alpha}(\omega - \beta)^\alpha \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} t_n = \omega$, podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que

- $t_n > \beta$ para todo $n \geq N$.
- $\displaystyle\int_0^{\beta} (t_n - s)^{\alpha-1} \|[E_{\alpha,\alpha}((t_n - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((\omega - s)^\alpha A)]f(s, u(s))\|ds < \epsilon/2, \ \forall\ n \geq N.$

Assim, para $n \geq N$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \|[E_{\alpha,\alpha}((t_n - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((\omega - s)^\alpha A)]f(s, u(s))\|ds = \\
&\int_0^{\beta} (t_n - s)^{\alpha-1} \|[E_{\alpha,\alpha}((t_n - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((\omega - s)^\alpha A)]f(s, u(s))\|ds + \\
&\int_\beta^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \|[E_{\alpha,\alpha}((t_n - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((\omega - s)^\alpha A)]f(s, u(s))\|ds < \\
&\qquad \frac{\epsilon}{2} + MC \int_\beta^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} ds \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{MC}{\alpha}(\omega - \beta)^\alpha < \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, o Lema está demonstrado.

□

Teorema 17. *Seja $f : [0,\infty) \times X \to X$ como no Teorema 15 com a hipótese adicional de que a imagem de conjuntos limitados são limitados. Nestas condições, ou o problema (3.9) tem uma solução branda global em $[0,\infty)$ ou existe $\omega \in (0,\infty)$ tal que $u : [0,\omega) \to X$ é uma solução branda local em $[0,\omega)$ tal que u não pode ter uma continuação e, além disso, temos*

$$\limsup_{t\to\omega^-} ||u(t)|| = \infty.$$

Demonstração. Considere o conjunto $H := \{\tau \in (0,\infty) :$ Existe uma única função $u_\tau : [0,\tau] \to X$ que é solução branda local de 3.9 em $[0,\tau]\}$. O Teorema 15 garante que H é não-vazio. Sendo assim, seja $\omega = \sup H \leq \infty$. Para cada $t \in [0,\omega)$ existe $\tau \in H$ tal que

$t < \tau$, e dessa forma, podemos definir $u(t) = u_\tau(t)$. Afirmamos que u está bem definida e é solução branda local de (3.9) em $[0, \omega)$. De fato, para provar a nossa afirmação precisamos mostrar que o valor de $u(t)$ não depende da escolha de $\tau \in H$. Sendo assim, sejam τ e τ' em H tais que $t < \tau, \tau'$. Sem perda de generalidade, podemos supor $\tau < \tau'$, e dessa forma, u_τ e $u_{\tau'} : [0, \tau] \to X$ são soluções brandas locais de (3.9) em $[0, \tau]$. Pelo Teorema 15, temos $u_\tau(t) = u_{\tau'}(t)$. Logo, $u : [0, \omega) \to X$ está bem definida. O fato dessa função ser a solução branda local em $[0, \omega)$ segue de sua própria definição.

Agora, observe que temos duas possibilidades mutuamente excludentes: ou $\omega = \infty$, e nesse caso u será solução branda global, ou $\omega < \infty$, e nesse caso u é uma solução branda local em $[0, \omega)$.

Portanto, para finalizar a demonstração, precisamos mostrar que se $\omega < \infty$ então

$$\limsup_{t \to \omega^-} ||u(t)|| = \infty.$$

Assim, com propósito de chegar a uma contradição, suponha que exista uma constante positiva $C > 0$ tal que $\|u(t)\| \leq C$ para todo $t \in [0, \omega)$. Sejam $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $[0, \omega)$, com $t_n \to \omega$,

$$M = \max \left\{ \sup_{t \geq 0} \|E_\alpha(t^\alpha A)\|, \quad \sup_{t \geq 0} \|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)\| \right\}.$$

e $D = \sup_{s \in [0, \omega)} \|f(s, u(s))\|$ (Observe que $[0, \omega) \times \{u(t) : t \in [0, \omega)\} \subset [0, \infty) \times X$ é limitado, então a hipótese adicional sobre f implica $D < \infty$). Dado $\epsilon > 0$, pelo Lema 2 podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m \geq N$, nós temos

$$|t_n - t_m|^\alpha \frac{MD}{\alpha} \leq \frac{\epsilon}{5},$$

$$|{t_n}^\alpha - (t_n - t_m)^\alpha - {t_m}^\alpha| \frac{MD}{\alpha} \leq \frac{\epsilon}{5},$$

$$\|E_\alpha({t_n}^\alpha A)u_0 - E_\alpha({t_m}^\alpha A)u_0\| \leq \frac{\epsilon}{5},$$

$$\int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha - 1} ||[E_{\alpha,\alpha}((t_n - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((\omega - s)^\alpha A)] f(s, u(s))|| ds \leq \frac{\epsilon}{5},$$

$$\int_0^{t_m} (t_m - s)^{\alpha - 1} ||[E_{\alpha,\alpha}((t_m - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((\omega - s)^\alpha A)] f(s, u(s))|| ds \leq \frac{\epsilon}{5}.$$

Agora, para $n, m \geq N$, digamos $t_n > t_m$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|u(t_n) - u(t_m)\| &= \|E_\alpha({t_n}^\alpha A)u_0 - E_\alpha({t_m}^\alpha A)u_0 \\
&+ \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t_n - s)^\alpha A) f(s, u(s)) ds \\
&+ \int_0^{t_m} (t_m - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t_m - s)^\alpha A) f(s, u(s)) ds\|.
\end{aligned}
$$

Adicionando e subtraindo

$$
\int_0^{t_m} (t_n - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t_m - s)^\alpha A) f(s, u(s)) ds
$$

no lado direito da igualdade acima, e depois usando a desigualdade triangular, obtemos

$$
\|u(t_n) - u(t_m)\| \leq \|E_\alpha({t_n}^\alpha A)u_0 - E_\alpha({t_m}^\alpha A)u_0\| + I_1 + I_2 + I_3,
$$

onde

$$
I_1 = \int_{t_m}^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t_n - s)^\alpha A) f(s, u(s))\| ds \leq |t_n - t_m|^\alpha \frac{MD}{\alpha},
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{t_m} (t_n - s)^{\alpha-1} \|[E_{\alpha,\alpha}((t_n - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((t_m - s)^\alpha A)] f(s, u(s))\| ds \\
&\leq \int_0^{t_m} (t_n - s)^{\alpha-1} \|[E_{\alpha,\alpha}((t_n - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((\omega - s)^\alpha A)] f(s, u(s))\| ds \\
&+ \int_0^{t_m} (t_n - s)^{\alpha-1} \|[E_{\alpha,\alpha}((t_m - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((\omega - s)^\alpha A)] f(s, u(s))\| ds \\
&\leq \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \|[E_{\alpha,\alpha}((t_n - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((\omega - s)^\alpha A)] f(s, u(s))\| ds \\
&+ \int_0^{t_m} (t_m - s)^{\alpha-1} \|[E_{\alpha,\alpha}((t_m - s)^\alpha A) - E_{\alpha,\alpha}((\omega - s)^\alpha A)] f(s, u(s))\| ds
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{t_m} |(t_n - s)^{\alpha-1} - (t_m - s)^{\alpha-1}| \; \|E_{\alpha,\alpha}((t_m - s)^\alpha A) f(s, u(s))\| ds \\
&\leq |{t_n}^\alpha - (t_n - t_m)^\alpha - {t_m}^\alpha| \frac{MD}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelas estimativas acima, obtemos

$$
\|u(t_n) - u(t_m)\| \leq \epsilon, \; \forall \; n, m \geq N.
$$

Isto mostra que a sequência $(u(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X, e consequentemente, existe $u_\omega \in X$ tal que $u(t_n) \to u_\omega$. Assim, podemos estender u sobre $[0, \omega]$ obtendo

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s, u(s)) ds, \ \forall \ t \in [0, \omega].$$

E então, pelo Teorema 16, podemos estender a solução u para um intervalo maior que $[0, \omega]$, o que contradiz a definição de ω. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Wolfgang Arendt, Charles J.K. Batty, Matthias Hieber, and Frank Neubrander. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Birkhauser, 2010.

[2] Paulo Mendes de Carvalho Neto. *Fractional differential equations: a novel study of local and global solutions in Banach spaces*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2013.

[3] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable I*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[4] Bruno de Andrade, Alexandre N Carvalho, Paulo M Carvalho-Neto, and Pedro. Marín-Rubio. Semilinear fractional differential equations: global solutions, critical nonlinearities and comparison results. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, (2):439–467, 2015.

[5] César R de Oliveira. *Introdução à análise funcional*. Impa, Rio de Janeiro, 2012.

[6] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, New York, 2013.

[7] Daniel Pellegrino, Eduardo Teixeira, and Geraldo Botelho. *Fundamentos de Análise Funcional*. SBM, 2015.

[8] Igor Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, San Diego, 1999.

[9] Stefan G. Samko, Anatoly A. Kilbas, and Oleg I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. CRC, 1993.

[10] Bosoerg Pereira da Silva. Potências fracionárias do operador de ondas. Master's thesis, Universidade Federal da Paraíba, 2018.

[11] Angus E. Taylor and David C. Lay. *Introduction to functional analysis*. Wiley New York, 1980.