Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT
Dissertação de Mestrado

Ergodicidade Intrínseca de uma Classe de Sistemas Parcialmente Hiperbólicos

Aldelayne Passos Silva

São Luís - MA
Outubro de 2019

Ergodicidade Intrínseca de uma Classe de Sistemas Parcialmente Hiperbólicos

Aldelayne Passos Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof^{a} Dr^{a} Vanessa Ribeiro Ramos.

São Luís-MA
Outubro de 2019

Silva, Aldelayne Passos.

/ Ergodicidade Intrínseca de uma Classe de Sistemas Parcialmente Hiperbólicos / Aldelayne Passos Silva. – São Luís - MA, 2019.

60 f. : il.

Orientador: Prof$^{\text{a}}$ Dr$^{\text{a}}$ Vanessa Ribeiro Ramos.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

Referências bibliográficas.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Teoria Ergódica. I. Ramos, Vanessa Ribeiro. II. Universidade Federal do Maranhão, Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU : 517.938

Aldelayne Passos Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em – de —- de 2019.

Banca examinadora:

Profª Drª Vanessa Ribeiro Ramos (Orientador)
UFMA

Profº Drº Giovane Ferreira Silva
UFMA

Profª Drª Valdiane Sales Araújo
UFMA

A minha família e namorado
pela paciência e incentivo.

"O Meu Imaculado Coração será o teu refúgio e o caminho que te conduzirá até Deus"

(Nossa Senhora Aparecida)

Agradecimentos

Ao Senhor Deus, detentor da verdade e do amor. A Nossa Senhora pela interseção, amparo e luz.

A minha mãe Joana Machado, meu pai Francisco Passos, meus irmãos Aldery e Alderyce, agradeço-os pelo imenso incentivo e encorajamento desde o início de tudo. Os tenho com grande amor.

Ao namorado Reginaldo pelo apoio nesta caminhada.

A Profª Drª Vanessa Ribeiro Ramos pela orientação, na qual pude desenvolver este trabalho, por dedicar seu tempo, sanar dúvidas, por seu incentivo e disposição, por todo seu apoio matemático enriquecedor. Não menos importante, por sua atenção e cuidado que foram essenciais.

Aos professores do PPGMAT, em ressalva ao Profº Drº Ivaldo Paz, Profª Drª Sandra Imaculada, Profº Drº Giovane Ferreira, Profº Drº José Santana, por boa parte do conhecimento por mim adquirido e por todas as palavras de apoio durante o curso.

Aos colegas e amigos do mestrado, em especial William e Roclilson, que me acolheram e me alegraram sempre.

E não menos importante, à CAPES pelo fomento da bolsa de mestrado proporcionando meu desenvolvimento profissional e formação acadêmica.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos alguns resultados de ergodicidade intrínseca para uma classe de sistemas parcialmente hiperbólicos, ou seja, a classe possui apenas uma medida de entropia máxima.

Primeiro, discutimos sobre o trabalho “Intrinsic Ergodicity of Partially Hyperbolic Diffeomorphisms with Hyperbolic Linear Part” devido a Ures, R. Ele mostrou que qualquer difeomorfismo (absolutamente) parcialmente hiperbólico de $\mathbb{T}^3$ homotópico a um automorfismo hiperbólico é intrinsecamente ergódico.

A seguir, nós falamos sobre o artigo “Maximal Entropy Measures for Certain Partially Hyperbolic, Derived from Anosov Systems” devido a Buzzi J., Fisher T., Sambarino M. e Vásquez C. Neste trabalho, eles provaram que a classe dos difeomorfismos robustamente transitivos descritos por Mañé são intrinsecamente ergódicos. De fato, eles previram que seu método se aplica a várias classes de sistemas que são similarmente derivados de Anosov, por uma isotopia, a saber, um exemplo misto de Mañé e outro obtido através de uma bifurcação de Hopf.

Palavras-chave: Entropia, Ergodicidade Intrínseca, Derivado de Anosov.

Abstract

In this work, we present some results on intrinsic ergodicity for a class of parially hyperbolic systems, that means, the class has only one maximal entropy measure.

First, we discuss about the work "Intrinsic Ergodicity of Partially Hyperbolic Diffeomorphisms with Hyperbolic Linear Part" due to Ures, R. He showed that any (absolutely) partially hyperbolic diffeomorphism of $\mathbb{T}^3$ homotópic to a hyperbolic automorphism is intrisically ergodic.

Next, we disseus about the article "Maximal Entropy Measures for Certain Partially Hyperbolic, Derived from Anosov Systems" due to Buzzi J., Fisher T., Sambarino M. e Vásquez C. In this paper, they proved that the class of robustly transitive diffeomorphisms desoribed by Mañé are intrinsically ergodic. In fact, they preved that their method applies to several class of systems which are similarly derived from Anosov, by an isotopy, namely, a mixed Mañé example and one obtrained through a Hopf bifurcation.

Keywords: Entropy, Intrinsic Ergodicity, Derived from Anosov.

Sumário

Introdução

Em 1865, um dos pioneiros fundadores da Termodinâmica, Rudolf Clausius, inventou a palavra *entropia*. A segunda lei da Termodinâmica afirma que, quando um sistema isolado passa de um equilíbrio a outro, a entropia do estado final é necessariamente maior do que a entropia do estado inicial. Na teoria dos sistemas dinâmicos, a entropia é uma medida do grau de "desordem" do sistema.

Toda aplicação contínua definida num compacto possui medida de probabilidade invariante e é de interesse saber o comportamento do sistema do ponto de vista probabilístico para certas medidas consideradas naturais. As medidas de máxima entropia são medidas que captam subconjuntos invariantes para a aplicação $f : M \to M$ onde a aplicação se comporta com maior complexidade. O expoente central de uma medida invariante é a taxa média de crescimento exponencial da derivada na direção E^c com relação a esta medida.

Os resultados de W. Cowieson [8] e L.-S. Young [27] nos dizem que todo sistema parcialmente hiperbólico com direção central unidimensional é expansivo e em particular possui medida de máxima entropia. Embora a existência já seja fornecida por esses resultados, nosso método se dá imediatamente como uma consequência das propriedades da semiconjugação de f com sua parte linear.

Trataremos da unicidade das medidas de máxima entropia. Os sistemas que têm essa propriedade foram chamados por B. Weiss [26] de *intrinsecamente ergódicos.*

No primeiro capítulo, são introduzidos conceitos e resultados básicos, dentre eles, noções de hiperbolicidade, que serão necessários para a compreensão do texto.

No Capítulo 2, abordamos os conceitos e principais resultados de entropia métrica e entropia topológica. Na primeira, definimos a entropia introduzida por A. Kolmogorov e desenvolvida por Y. Sinai [23], baseada em uma transformação relativa a uma probabilidade invariante, e na segunda, definimos a entropia segundo R. Bowen [4] e E. Dinaburg [9], baseada na dispersão de órbitas de mapas uniformemente contínuos com espaço métrico não necessariamente compacto. Mostra-se ainda a relação entre esses dois conceitos, dada pelo Princípio Variacional.

No Capítulo 3, provou-se que qualquer difeomorfismos parcialmente hiperbólico f em $\mathbb{T}^3$ homotópico a um automorfismo hiperbólico A é intrinsecamente ergódico. Para isso, provamos algumas propriedades da semiconjugação h entre f e sua parte linear, e mostramos como as propriedades de h e da fórmula de Ledrappier-Walters [16] implicam a unicidade da medida de máxima entropia.

No Capítulo 4, tratamos a equidistribuição de pontos periódicos para um homeomorfismo expansivo com a propriedade de especificação, generalizando para algumas extensões bem-comportadas de tais sistemas.

No Capítulo 5, analisamos medidas de máxima entropia, e uma noção relativa de estabilidade, para uma classe de difeomorfismos não-Anosov robustamente transitivos baseado no exemplo de Mañé. Nosso método se aplica a alguns sistemas derivados de sistema Anosov (sistemas que são C^0-próximos de um sistema Anosov e obtidos de um certo tipo de perturbação).

Capítulo 1

Preliminares

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos e definições básicas, em particular, noções de hiperbolicidade que serão utilizados ao longo do texto.

1.1 Hiperbolicidade

Suponhamos que $f : M \to M$ é um difeomorfismo e M é uma variedade Riemanniana compacta.

Definição 1.1.1. *Um conjunto fechado $\Lambda \subset M$ invariante por itf é dito hiperbólico se existe $C > 0$, $\lambda \in (0,1)$ e para todo $x \in \Lambda$ existem $E^s(x), E^u(x) \subset T_xM$ tais que:*

1. $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$;
2. $\| df_x^n v^s \| \leq C\lambda \| v^s \|, \forall v^s \in E^s(x)$ *e* $n \geq 0$;
3. $\| df_x^{-n} v^s \| \leq C\lambda \| v^u \|, \forall v^u \in E^u(x)$ *e* $n \geq 0$;
4. $\| df_x E^s(x) \| = E^s(f(x))$ *e* $\| df_x E^u(x) \| = E^u(f(x))$.

É possível mostrar usando os itens da definição acima que os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam continuamente com relação a $x \in \lambda$.

Definição 1.1.2. *Dizemos que um difeomorfismo $f : M \to M$ é de Anosov se M for um conjunto hiperbólico para f.*

Seja $SL(\mathbb{Z}, n)$ o conjunto das matrizes com entradas inteiras e determinante igual a ± 1. Note que se $A \in SL(\mathbb{Z}, n)$, então $A(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$. Também temos que $A^{-1} \in SL(\mathbb{Z}, n)$, assim $A^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ e, portanto, $A(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Consequentemente, a transformação linear A induz um difeomorfismo no toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Denotamos este difeomorfismo por f_A, chamado também de *Anosov Linear*. Ou seja, temos que o diagrama abaixo comuta, onde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ é uma projeção canônica.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{T}^n \arrow[r, "f_A"'] & \mathbb{T}^n \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.1.3. *Considere a matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *A aplicação* $T_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *dada por* $T_A([x]) = [Ax]$ *é um difeomorfismo de Anosov.*

De fato, os autovalores de A *são* $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ *e* $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. *Logo, todo ponto de* $\mathbb{T}^2$ *é um ponto hiperbólico de* T_A. *O autoespaço gerado pelo autovetor correspondente ao autovalor* λ_1 *cuja norma é maior que 1 será o* E^u *e o autoespaço gerado pelo autovetor correspondente ao autovalor* λ_1 *cuja norma é maior que 1 será o* E^s.

Note que se λ *é autovalor de* A *e* v *é seu autovalor associado, então* λ^n *é autovalor de* A^n *e* v *é seu autovalor associado. Assim, se* $Df_x : T_xM \to T_{f(x)}M$ *é a aplicação de* f *no ponto* x, *então* $Df^n v = A^n v$.

Para $v^s \in E^s$, *temos:*

$$\| Df^n(v^s) \| = |\lambda_2^n| \| v \| < 2|\lambda_2|^n \| v^s \|.$$

Para $v^u \in E^u$, *temos:*

$$\|Df^{-n}(v^u)\| = |\lambda_1^{-n}| \|v^u\| = |\lambda_1^{-1}|^n \| v^u \| = |\lambda_2|^n \| v^u \| < 2|\lambda_2|^n \|v^u\|,$$

pois $|\lambda_2| = |\lambda_1^{-1}|$.

Tomando, $\lambda = |\lambda_2|$ *e* $C = 2$ *na definição 1.1.1, temos que* $\mathbb{T}^2$ *é um conjunto hiperbólico.*

Definição 1.1.4. *Dado um ponto hiperbólico* $x \in M$ *por um difeomorfismo* $f : M \to M$ *de classe* C^r *definimos:*

- $W^s(x) = \{y \in M; d(f^k x, f^k y) \to 0, k \to \infty\}$ *a variedade estável por x;*
- $W^s(x) = \{y \in M; d(f^{-k} x, f^{-k} y) \to 0, k \to \infty\}$ *a variedade instável por x;*

  E dado $\epsilon > 0$ *denotamos por* $W^s_\epsilon(x)$ *a variedade estável de* x *de raio* ϵ, *ou seja,*
- $W^s_\epsilon(x) = \{y \in M; d(f^k x, f^k y) \le \epsilon, \forall k \in \mathbb{N}\}$,

  e por $W^u_\epsilon(x)$ *a variedade instável de* x *de raio* ϵ, *ou seja,*
- $W^u_\epsilon(x) = \{y \in M; d(f^{-k} x, f^{-k} y) \le \epsilon, \forall k \in \mathbb{N}\}$.

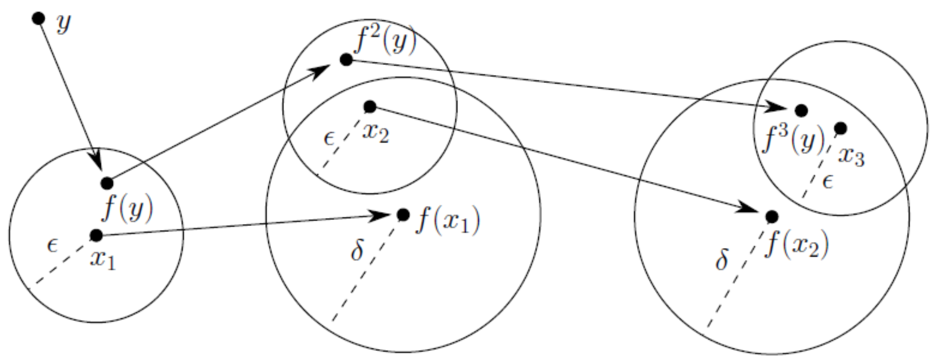

Figura 1.1: Propriedade de Sombreamento

Em difeomorfismos de Anosov, podemos em cada ponto de M definir as suas variedades instável e estável, obtendo folheações instável e estável de M que denotamos por $\mathcal{F}^u$ e $\mathcal{F}^s$, respectivamente. Entender a dinâmica em M, é estudar o que acontece nas folhas W^u e W^s, as quais podemos mostrar que variam continuamente com x e pela definição podemos dizer que f contrai folhas estáveis e expande folhas instáveis.

A partir de agora, assumamos $f : M \to M$ difeomorfismo de Anosov e M variedade Riemanniana compacta e conexa.

Definição 1.1.5. *Para $d > 0$, uma sequência de pontos $\{x_i\}_{i=j_1}^{j_2} \subset M$, com $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ e $j_1 \leq j_2$, é chamada uma δ-pseudo-órbita de f se $d(f(x_i), x_{i+1}) \leq \delta$ para todo $j_1 \leq i < j_2$, $i \in \mathbb{Z}$. Nós dizemos que itf possui propriedade de sombreamento se para todo $\epsilon > 0$, existe delta > 0 tal que para qualquer δ-pseudo-órbita $\{x_i\}_{i=j_1}^{j_2}$ de f, existe $y \in M$ satisfazendo $d(f^i(y), x_i) \leq \epsilon$ para todo $j_1 \leq i < j_2$, $i \in \mathbb{Z}$ (veja Figura 1.1).*

Lema 1.1.6. *(Lema do sombreamento) Para todo $\beta > 0$ existe um $\alpha > 0$ tal que toda α-pseudo órbita $\{x_i\}_{i=a}^{b}$ em ω é β-sombreada por um ponto $x \in \omega$.*

Definição 1.1.7. *Dizemos que uma $f : M \to M$ é δ-expansiva se $x, y \in M$, $x \notin y$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^N x, f^N y) > \delta$, δ assim sendo é chamado constante de expansividade da f.*

Observação 1.1.8. *Pode-se mostrar que se f é Anosov, então f é δ_0-expansiva, para algum δ_0.*

Seja δ_0 a constante de expansividade de f.

Teorema 1.1.9. *Se $a = -\infty$, $b = \infty$ e $\beta < \delta/2$ então existe $\alpha > 0$ tal que o β-sombreamento da α-pseudo órbita $\{x_i\}_{i=a}^{b}$ é único.*

Demonstração. A existência de α é garantida pelo Lema do Sombreamento. Seja $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ uma α-pseudo órbita. Suponhamos que y, z são dois β-sombreamento de $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, assim:

$$d(f^i(y), f^i(z)) \leq d(f^i(y), x_i) + d(x_i), f^i(z)) < \beta + \beta = 2\beta < \delta_0, \forall i \in \mathbb{Z},$$

pela expansividade de f, $y = z$.

□

Dizemos que $f : M \to M$ é *transitiva* se para quaisquer dois abertos $U, V \subset M$ existe $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Definição 1.1.10. *Um difeomorfismo $f : M \to M$ é robustamente transitivo se f é transitiva e existe uma vizinhança $\mathcal{V}_f$ de f na topologia C^1 tal que para toda $g \in \mathcal{V}_f$ é transitiva.*

Corolário 1.1.11. *Se f é Anosov transitiva, então f é robustamente transitiva.*

Na década de 1970, Shub [22] e Mañé [17] deram exemplos de difeomorfismos robustamente transitivos e que não são hiperbólicos, a existência de tais exemplos mostra que só a condição de hiperbolicidade não serve para a descrição geral dos sistemas. É por isso que se deve enfraquecer um pouco a condição de hiperbolicidade, o que culmina no estudo da dinâmica parcialmente hiperbólica. Que nada mais é que uma definição mais fraca de hiperbolicidade.

Definição 1.1.12. *Sejam M e N espaços topológicos. Dizemos que $f : M \to M$ e $g : N \to N$ são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo $h : M \to N$ que satisfaz: $g \circ h = h \circ f$.*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ N & \xrightarrow[g]{} & N \end{array}$$

Em outras palavras, uma conjugação topológica significa que f difere de g por uma mudança de coordenada. As conjugações são úteis pelo fato de preservarem propriedades dinâmicas tais como: invariância, transitividade, entre outras.

A definição a seguir nos diz que qualquer pequena perturbação de f tem a mesma estrutura topológica de f.

Definição 1.1.13. *Um difeomorfismo $f \in \mathit{Diff}^r(M)$ é estruturalmente estável se existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f tal que toda $g \in \mathcal{U}$ é topologicamente conjugada a f.*

Teorema 1.1.14. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. Então existe vizinhança $\mathcal{V}_f$ de f na topologia C^1 tal que para $g \in \mathcal{V}_f$ existe um homeomorfismo $h : M \to M$ que satisfaz, $h \circ f = g \circ h$.*

Capítulo 2

Entropia

A palavra *entropia* foi inventada em 1865 pelo matemático e físico alemão Rudolf Clausius, um dos primeiros fundadores da Termodinâmica. Podemos interpretar a entropia como sendo uma medida do grau de "desordem" de um sistema. Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados desta teoria que precisaremos ao longo deste trabalho. Na primeira seção definimos a entropia de uma transformação relativa a uma probabilidade invariante, que foi proposto por Kolmogorov-Sinai [23]. Na seção seguinte daremos a definição de entropia topológica introduzida por Bowen [4] e Dinaburg [9], baseada na dispersão de órbitas de mapas uniformemente contínuos $T : X \to X$, sendo X um espaço métrico não necessariamente compacto. Como sub-seção destacaremos a relação notável entre esses dois conceitos, dada pelo Princípio Variacional.

2.1 Entropia Métrica

Esta seção dedicada ao estudo da entropia de uma medida invariante, um conceito que contém muitas informações ergódicas do sistema dinâmico. Um aspecto importante refere-se a distinguir duas transformações que preservam medida do ponto de vista de sua estrutura ergódica: se suas entropias diferem, as transformações são definitivamente diferentes do ponto de vista ergódico.

Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Entenderemos por partição uma família finita ou enumerável $\mathcal{P}$ de conjuntos mensuráveis de M disjuntos dois-a-dois e cuja união tem medida total. A soma $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ de duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ é a partição cujos elementos são as interseções $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ com $P \in \mathcal{P}$ e $Q \in \mathcal{Q}$. Mais geralmente, dada qualquer família enumerável de partições $\mathcal{P}_n$, definimos:

$$\bigvee_n \mathcal{P}_n = \{\bigcap P_n : P_n \in \mathcal{P}_n \text{ para cada n}\}$$

Definição 2.1.1. *Seja $\mathcal{P}$ uma partição finita do espaço de probabilidade $(M, \mathcal{B}, \mu)$. Seja $\phi(x) = x \log x$ se $0 < x \leq 1$ e $\phi(0) = 0$. Definimos a entropia de $\mathcal{P}$ como:*

$$H(\mathcal{P}) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \phi(\mu(P))$$

Seja $f : M \to M$ uma transformação que preserva medida e seja $\mathcal{P}$ uma partição de M, então $f^{-j}\mathcal{P} = \{f^{-j}(P) : P \in \mathcal{P}\}$ é também uma partição de M, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Definição 2.1.2. *Suponhamos que $f : M \to M$ preserva medida e seja $\mathcal{P}$ uma partição, definimos a entropia $h(f, \mathcal{P})$ de f com respeito da partição $\mathcal{P}$ como:*

$$h(f, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{P}))$$

Definição 2.1.3. *A entropia de uma transformação $f : (M, \mathcal{B}, \mu) \to (M, \mathcal{B}, \mu)$ que preserva medida se define como:*

$$h_\mu(f) = \sup\{h(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é partição finita}\}.$$

Exemplo 2.1.4. *Suponhamos que a medida invariante μ está suportada numa órbita periódica. Em outras palavras, existe x em M e $k \geq 1$ tal que $f^k(x) = x$ e a medida μ é dada por:*

$$\mu = \frac{1}{k}(\delta_x + \delta_{f(x)} + \cdots + \delta_{f^{k-1}(x)}).$$

Neste caso a medida só toma um número finito de valores. Consequentemente, a entropia $H_\mu(\mathcal{P})$ também só toma um número finito de valores quando consideramos todas as partições enumeráveis $\mathcal{P}$. Isto prova que neste caso $h_\mu(f) = 0$.

Exemplo 2.1.5. *Esse exemplo é dedicado a calcular a entropia de uma rotação R_α de ângulo α do cícrulo S^1 com respeito à medida de Lebesgue m. Na verdade, o argumento que usaremos abaixo se aplica a qualquer bijeção mensurável $f : S^1 \to S^1$ (ou $f : [0, 1] \to [0, 1]$) que preserve uma dada medida μ. Primeiramente, observe que uma partição do círculo $\mathcal{P}$ com k elementos é determinada por uma sequência $p_1, \ldots, p_2$ de pontos de S^1. Observe também que se denotamos por $p_i^j = f^{-j}(p_i)$ então $\mathcal{P}^n$ é determinada pelo conjunto de pontos $C^n = \{(p_i^j) \in S^1; i = 1, \ldots, k$ e $j = 0, \ldots, n-1\}$. Note que $\sharp C_n \leq \sharp C_{n-1} + k$, pois $C_n - C_{n-1} = \{p_1^n, \ldots, p_k^n\}$. Assim, podemos deduzir por indução que $\sharp \mathcal{P}^n \leq kn$. Deste modo:*

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim \frac{H_\mu(\mathcal{P}^n)}{n} \leq \sharp \frac{\mathcal{P}^n}{n} = \lim \frac{\log kn}{n} = 0.$$

Como a escolha de $\mathcal{P}$ foi arbitrária, temos que $h_\mu(f) = 0$.

A seguinte proposição nos diz que a entropia $h_\mu(f)$ é sempre uma função *afim* da medida invariante μ.

Proposição 2.1.6. *Sejam μ e ν medidas de probabilidades invariantes por uma transformação $f : M \to M$. Então $h_{t\mu+(1-t)\nu}(f) = th_\mu(f) + (1-t)h_\nu(f)$ para todo $0 < t < 1$.*

Demonstração. Defina $\phi(x) = -x\log x$, para $x > 0$. Por um lado, como a função ϕ é côncava,

$$\phi(t\mu(B) + (1-t)\nu(B)) \geq t\phi(\mu(B)) + (1-t)\phi(\nu(B))$$

para todo conjunto mensurável $B \subset M$.

Por outro lado, dado qualquer conjunto mensurável $B \subset M$, como a função $-\log$ é decrescente, temos que:

$$\phi(t\mu(B) + (1-t)\nu(B)) - t\phi(\mu(B)) + (1-t)\phi(\nu(B)) \leq -t\mu(B)\log t - (1-t)\nu(B)(1-t).$$

Portanto, dada qualquer partição finita ou enumerável $\mathcal{P}$, com entropia finita,

$$H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}) \geq tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P})$$

e

$$H_{t\mu+(1-t)\nu}(\mathcal{P}) \leq tH_\mu(\mathcal{P}) + (1-t)H_\nu(\mathcal{P}) - t\log t - (1-t)\log(1-t).$$

Consequentemente,

$$h_{t\mu+(1-t)\nu}(f, \mathcal{P}) = th_\mu(f, \mathcal{P}) + (1-t)h_\nu(f, \mathcal{P}).$$

Segue, imediatamente, que $h_{t\mu+(1-t)\nu}(f) = th_\mu(f) + (1-t)h_\nu(f)$. Além disso,

$$h_{t\mu+(1-t)\nu}(f, \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2) \geq th_\mu(f, \mathcal{P}_1) + (1-t)h_\nu(f, \mathcal{P}_2)$$

para quaisquer partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

Tomando o supremo em $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ obtemos que $h_{t\mu+(1-t)\nu}(f) \geq th_\mu(f) + (1-t)h_\nu(f)$. $\square$

Definição 2.1.7. *Sejam μ e ν medidas de probabilidades invariantes por transformações $f : M \to M$ e $g : N \to N$, respectivamente. Dizemos que os sistemas (f, μ) e (g, ν) são ergodicamente equivalentes se podemos escolher conjuntos mensuráveis $X \subset M$ e $Y \subset N$ com $\mu(X) = 1$ e $\nu(Y) = 1$, e uma bijeção mensurável $\phi : X \to Y$ com inversa mensurável, de tal forma que:*

$$\phi_*\mu = \nu \qquad e \qquad \phi \circ f = g \circ \phi$$

onde $\phi_*\mu(A) := \mu(\phi^{-1}(A)$.

Como veremos na proposição abaixo, a entropia é um invariante com respeito a essa relação de equivalência. Isso torna a entropia bastante útil em identificar quando duas transformações preservando medida não são equivalentes.

Proposição 2.1.8. *Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ transformações preservando probabilidades μ em M e ν em N. Se (f, μ) é ergodicamente equivalente a (g, ν), então:*

$$h_\mu(f) = h_\nu(g)$$

Demonstração. Seja $\mathcal{P}_1$ uma partição de M. Desprezando um conjunto de medida μ nula podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{P}_1$ é uma partição em X. Defina:

$$\mathcal{P}_2 = \phi(\mathcal{P}_1) = \{\phi(P) \subset N; P \in \mathcal{P}_1\}$$

Observe que como ϕ é uma bijeção mensurável, temos que $\mathcal{P}_2$ é de fato uma partição de N. Além disso, utilizando que $\phi \circ f = g \circ \phi$ vem que $\phi(\mathcal{P}_1^n) = \phi(\mathcal{P}_1)^n = \mathcal{P}_2^n$. Assim, existe uma bijeção entre os elementos de $\mathcal{P}_1^n$ e os elementos de $\mathcal{P}_2^n$.

Como $\mu(P) = \phi(\nu(P))$ para cada $P \in \mathcal{P}_1^n$, temos que:

$$\begin{aligned}
H_\mu(\mathcal{P}_1^n) &= \sum_{P \in \mathcal{P}_1^n} -\mu(P) \log \mu(P) \\
&= \sum_{P \in \mathcal{P}_1^n} -\nu(\phi(P)) \log \nu(\phi(P)) \\
&= \sum_{Q \in \mathcal{P}_1^n} -\nu(Q) \log \nu(Q) \\
&= H_\nu(\mathcal{P}_2^n)
\end{aligned}$$

Assim, vem diretamente que:

$$h_\mu(f, \mathcal{P}_1) = h_\nu(g, \mathcal{P}_2).$$

Como a partição $\mathcal{P}_1$ de M foi escolhida de modo arbitrário, tomando o supremo no lado esquerdo da igualdade acima, vem que:

$$h_\mu(f) \leq h_\nu(g).$$

Aplicando o mesmo argumento com g no lugar de f, vem que:

$$h_\nu(g) \leq h_\mu(f).$$

O que encerra a prova.

$\square$

Observação 2.1.9. *Apesar da utilidade clara do teorema acima em determinar quando duas transformações preservando medida não são equivalentes, a entropia métrica tem a limitação de não ser um invariante completo para a relação de equivalência que definimos. Por exemplo, a entropia da medida de Lebesgue de uma rotação é sempre igual a zero. Porém, rotações irracionais não podem ser equivalentes a rotações racionais. De fato, todas as órbitas de uma rotação racional são periódicas, enquanto todas as órbitas de uma rotação irracional são densas.*

Agora, vejamos algumas propriedades de sistemas com entropia igual a zero. Veremos que tais sistemas são invertíveis em quase todo ponto, se o ambiente é um espaço de Lebesgue.

No que segue $(M, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de probabilidade e $f : M \to M$ é uma transformação mensurável preservando a medida μ.

Lema 2.1.10. *Seja $\mathcal{P}$ uma partição finita. Então $h(f, \mathcal{P}) = 0$ se, e somente se, $\mathcal{P} \prec \vee_{j=1}^{\infty} f^{-j}(\mathcal{P})$.*

O Lema 2.1.10 nos diz que a taxa média $h_\mu(f, \mathcal{P})$ de informação (relativamente à partição $\mathcal{P}$) gerada pelo sistema a cada iteração é nula, se e somente se, o futuro determina o presente, no sentido de que a informação relativa ao iterado zero pode ser deduzida do conjunto das informações relativas aos iterados futuros.

Como consequência, obtemos que todo sistema com entropia nula é invertível:

Proposição 2.1.11. *Seja $(M, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de Lebesgue e seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável a medida μ. Se $h_\mu(f) = 0$, então (f, μ) é invertével: existe uma transformação mensurável $g : M \to M$ que preserva a medida μ e satisfaz $f \circ g = g \circ f = id$ em μ - quase todo ponto.*

Demonstração. Considere o homomorfismo $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{B}} \to \tilde{\mathcal{B}}$ induzido por f na álgebra de medida de $\mathcal{B}$. Sabemos que $\tilde{f}$ é sempre injetivo.

Dado qualquer $B \in \mathcal{B}$, considere a partição $\mathcal{P} = \{B, B^c\}$. A hipótese $h_\mu(f) = 0$ implica que $h_\mu(f, \mathcal{P}) = 0$ então, pelo Lema 2.1.10, $\mathcal{P} \prec \vee_{j=1}^{\infty} f^{-j}(\mathcal{P})$. Isto implica que $\mathcal{P} \subset f^{-1}(\mathcal{B})$, já que $f^{-1}(\mathcal{P}) \subset f^{-1}(\mathcal{B})$ para todo $j \geq 1$. Fazendo variar B, concluímos que $\mathcal{B} \subset f^{-1}(\mathcal{B})$.

Em outras palavras, o homomorfismo $\tilde{f}$ é sobrejetivo. Então $\tilde{f}$ é um isomorfismo de álgebras de medida. Então, existe alguma aplicação mensurável $g : M \to M$, preservando a medida μ, tal que o respectivo homomorfismo de álgebra de medida $\tilde{g} : \tilde{\mathcal{B}} \to \tilde{\mathcal{B}}$ é o inverso de $\tilde{f}$.

Ou seja, $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{f} = id$. Então $f \circ g = g \circ f = id$, e a prova estão completa.

□

2.2 Entropia Topológica

O invariante numérico mais importante relacionado com o crescimento orbital é a entropia topológica. Representa a taxa de crescimento exponencial do número de segmentos de órbitas distinguíveis com precisão arbitrariamente pequena mas finita. Em um certo sentido, a entropia topológica descreve, de um modo pouco preciso mas sugestivo, a complexidade exponencial total da estrutura orbital através de um único número.

Daremos ênfase à definição de entropia topológica segundo Bowen-Dinaburg ([4],[3], respectivamente), usando a definição de conjuntos geradores e conjuntos separáveis.

Definição 2.2.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$. Dizemos que $F \subset X$ é (n, ϵ)-gerador com respeito é f se para todo $x \in X$ existe $y \in F$ com $d_n(x, y) \leq \epsilon$, ou seja,*

$$X \subseteq \bigcup_{y \in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}\overline{B}(f^i y, \epsilon)$$

Definição 2.2.2. *A entropia topológica de f em termos de conjuntos geradores é:*

$$h_G(f) := \lim_{\epsilon \to 0} r(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n} \log r(n, \epsilon),$$

onde,

$$r(n, \epsilon) = \min\{\sharp F : F \text{ é } (n, \epsilon)\text{-gerador}\} \qquad e \qquad r(\epsilon) = \lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n} \log r(n, \epsilon).$$

Definição 2.2.3. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$. Dizemos que $E \subset X$ é (n, ϵ)-separado com relação a f se $x, y \in E$ com $x \neq y$, implica $d_n(x, y) > \epsilon$. Ou seja, para cada $x \in E$, o conjunto $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}\overline{B}(f^i x, \epsilon)$ não contém outro ponto de E.*

Definição 2.2.4. *A entropia topológica de f em termos de conjuntos separados é definida por:*

$$h_S(f) := \lim_{\epsilon \to 0} s(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon),$$

onde,

$$s(n, \epsilon) = \max\{\sharp E : E \text{ é } (n, \epsilon)\text{-separado}\} \qquad e \qquad s(\epsilon) = \lim_{n \to \infty} \sup \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon).$$

A observação a seguir nos esclarece que a definição de entropia topológica usando conjuntos separados e a definição usando conjuntos geradores são equivalentes.

Observação 2.2.5. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, então:*

1. $r(n,\epsilon) < \infty$. De fato, se $X = \bigcup_{x\in X} B(x,\epsilon)$, então pela compacidade de X existem $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ tal que $X = \cup_{i=1}^{k} B(x_i,\epsilon,n)$. Assim, temos que $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ é um conjunto (n,ϵ)-gerador. Portanto, $r(n,\epsilon) \le k$.

2. $r(n,\epsilon) \le s(n,\epsilon) \le r(n,\epsilon/2)$ e, portanto, $s(n,\epsilon) < \infty$. De fato, se $\sharp(E) = s_n(\epsilon, X)$, então E é (n,ϵ)-gerador. Logo, $r(n,\epsilon) \le s(n,\epsilon)$. Para provar a segunda desigualdade, consideremos E um conjunto (n,ϵ)-separado, F um conjunto $r(n,\epsilon/2)$-gerador e defina o mapa $\phi : E \to F$ escolhendo para cada $x \in E$ um ponto $\phi(x) \in F$ tal que $d_n(x,\phi(x)) \le \epsilon/2$. Assim, ϕ é injetora e, portanto, $s(n,\epsilon) \le r(n,\epsilon/2)$.

Assim,

$$r(\epsilon) \le s(\epsilon) \le r(\epsilon/2).$$

Da observação acima temos que, $h_S(f) = \lim_{\epsilon\to 0} s(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} r(\epsilon) = h_G(f)$ e, portanto:

$$h(f) = h_{top}(f) = h_G(f) = h_S(f).$$

Exemplo 2.2.6. *(Mapa de duplicação) Considere o mapa $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definido por $Tx = 2x(mod 1)$. Para $k \ge 1$ podemos definir o conjunto:*

$$F_k = \{\tfrac{m}{2^k} : m = 0, \ldots, 2^k - 1\}.$$

(onde a cardinalidade é 2^k). Para $\epsilon > 0$ escolha $k \ge 1$ tal que $\frac{1}{2^k} \le \epsilon \frac{1}{2^{k-1}}$.

Para $n \ge 1$ afirmamos que F_{n+k-2} é um conjunto (n,ϵ)-separado. Isso é claro, pois para pontos distintos $\frac{m_1}{2^{n+k-2}}, \frac{m_2}{2^{n+k-2}} \in F_{n+k}$ temos que $d(T^{n-1}(\frac{m_1}{2^{k+n}}), \frac{m_2}{2^{k+n}})) = d(\frac{m_1}{2^{k-1}}, \frac{m_1}{2^{k-1}}) \ge \frac{1}{2^{k-1}} \ge \epsilon$. Assim, $s(n,\epsilon) \ge 2^{k+n-2}$.

Para $n \ge 1$ afirmamos que F_{n+k} é um conjunto (n,ϵ)-gerador. Para qualquer $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ podemos escolher $\frac{m}{2^{k+n}} \in F_{n+k}$ com $d(x, \frac{m}{2^{k+n}}) \le \frac{1}{2^{k+1} \le \epsilon}$. Portanto, $r(n,\epsilon) \le 2^{n+k-1}$.

Agora sabemos que:

$$h(f) = \lim_{\epsilon\to 0}(\lim_{n\to+\infty} \sup \tfrac{1}{n} \log s(n,\epsilon)) \ge \log 2$$

e

$$h(f) = \lim_{\epsilon\to 0}(\lim_{n\to+\infty} \sup \tfrac{1}{n} \log s(n,\epsilon)) \le \log 2$$

Juntando ambas as desigualdades provamos que $h(f) = \log 2$.

Em seguida, calculamos a entropia de uma isometria, que deve ser claramente 0, uma vez que a distância entre os pontos é preservada, de modo que o número de órbitas distinguíveis é constante sob as aplicações de f.

Teorema 2.2.7. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e seja $f : X \to X$ uma isometria contínua, isto é, $d(x, y) = d(f(x), f(y))$. Então, $h(f) = 0$.*

Demonstração. Como f é uma isometria, temos que $d(x, y) = d(f^n(x), f^n(y))$ para todo n. Assim, $s(n, \epsilon)$ não depende de n. Então,

$$h(f) = \lim_{\epsilon \to 0} s(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \sup \tfrac{1}{n} \log s(n, \epsilon) = 0,$$

Onde concluímos a prova.

□

Agora vamos provar que a entropia é um invariante topológico. Esta propriedade é muito importante porque proporciona um método para calcular a entropia topológica. Observe que a entropia topológica não é fácil de ser calculada, porém é possível em alguns casos. Logo, se queremos calcular a entropia topológica de um sistema dinâmico usando este método, devemos calcular primeiro a entropia topológica de um sistema dinâmico conjugado mais simples. Precisaremos do lema a seguir.

Lema 2.2.8. *Para um espaço métrico compacto (X, d) e um mapa contínuo $f : X \to X$ a entropia topológica de f não depende da escolha da métrica d.*

Teorema 2.2.9. *Se (X, f) e (Y, g) são dois sistemas dinâmicos topologicamente conjugados com conjugação $\phi : Y \to X$, então $h(f) = h(g)$.*

Demonstração. Seja d uma métrica em X. Seja d' uma métrica em Y definido como:

$$d'(y_1, y_2) = d(\phi(y_1), \phi(y_2)).$$

Pelo Lema 2.2.8, o valor de $h(g)$ não depende da definição da métrica d'.

Agora, considere:

$$\begin{aligned} d'(y_1, y_2) &= \max_{0 \leq k \leq n-1} d'(g^k(y_1), g^k(y_2)) \\ &= \max_{0 \leq k \leq n-1} d'(\phi(g^k(y_1)), \phi(g^k(y_2))) \\ &= \max_{0 \leq k \leq n-1} d'(f^k(\phi(y_1)), g^k(\phi(y_2))) \\ &= d_n(\phi(y_1), \phi(y_2)). \end{aligned}$$

A segunda igualdade é dada pela definição de d' e a terceira igualdade vem do fato de ϕ ser um conjugação.

Assim, as distâncias em ambos X e Y depende unicamente da métrica d_n. Dado isso junto com o fato de que ϕ é uma bijeção, bem como conjuntos de coberturas geradoras e separados devem ter a mesma cardinalidade para X e Y. Segue que $h(f) = h(g)$.

□

Corolário 2.2.10. *Sejam (X, f), (Y, g) sistemas dinâmicos com entropias $h(f) \neq h(g)$. Então os sistemas não são conjugados.*

Exemplo 2.2.11. *Seja $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ o toro bidimensional e definimos um automorfismo linear no toro $T : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ por $T(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)(mod 1)$. Dizemos que $T : \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^2$ é hiperbólico se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ não tem autovalores de módulo 1.*

A entropia de um automorfismo hiperbólico no toro é dado por $h(T) = \log \lambda_1$.

De fato, fixemos $\epsilon > 0$. Podemos cobrir $\mathbb{T}^2$ por ϵ-bolas centrada em um conjunto finito de pontos $\{(x_1^1, x_2^1), \ldots, (x_1^k, x_2^k)\}$,

$$B((x_1^i, x_2^i), \epsilon) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^2 : |(z_1, z_2) - (x_1, x_2)| < \epsilon\}$$

Em particular, podemos tomar $k \leq \frac{4}{\epsilon^2}$.

Em volta de cada ponto $x^i = (x_1^i, x_2^i), i = 1, \ldots, k$, podemos descrever uma "caixa":

$$C(x_1^i, x_2^i) = \{(x_1^i, x_2^i) +_1 +_2 : -\epsilon \leq \alpha, \beta \leq \epsilon\}$$

onde v_1 e v_2 são autovetores para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, (com $|v_1| = |v_2| = 1$) correspondente a $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| > 1$, respectivamente. Para cada $n \geq 1$ e $1 \leq i \leq k$ podemos considerar o subconjunto finito de $C(x^i)$ consistindo dos pontos

$$R(x_1^i, x_2^i) = \{(x_1^i, x_2^i) + \tfrac{j\epsilon}{|\lambda_1|^n} v_1 : j = -[|\lambda_1|^n], \ldots, [|\lambda_1|^n]\}.$$

Este conjunto tem cardinalidade $2[|\lambda_1|^n] + 1$. A cardinalidade do conjunto $(n, 2\epsilon)$-gerador $R = \bigcup_{i=1}^k R(x^i)$ é no máximo $k(2[|\lambda_1|^n] + 1)$, vemos que este é um limite superior na menor cardinalidade $r(n, \epsilon)$ de conjuntos $(n, 2\epsilon)$-geradores. Pelo Teorema 2.2.9 temos que:

$$\begin{aligned} h(T) &= \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(n, \epsilon) \\ &\leq \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log(\frac{16(2[|\lambda_1|^n] + 1)}{\epsilon^2}) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \log |\lambda_1| = \log |\lambda_1| \end{aligned}$$

Para obter a desigualdade reversa, fixemos um ponto $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$. Para $\epsilon > 0$ e $n \geq 1$ podemos considerar o subconjunto:

$$R(x_1,x_2)=\{(x_1^i,x_2^i)+\tfrac{j2\epsilon}{|\lambda_1|^n}v_1 : j=-[|\lambda_1|^n],\ldots,[|\lambda_1|^n]\}.$$

A cardinalidade do conjunto S *(n,ϵ)-separado é* $2[|\lambda_1|^n]+1$ *e então isso dá um limite inferior na maior cardinalidade* $s(n,\epsilon)$ *de conjuntos (n,ϵ)-separados. Pelo Teorema 2.2.9, temos que:*

$$\begin{aligned}
h(T) &= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(n,\epsilon)\\
&\geq \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log(2[|\lambda_1|^n]+1)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\log|\lambda_1| = \log|\lambda_1|
\end{aligned}$$

Assim, temos que $h(T)\leq\log|\lambda_1|$ *e* $h(T)\geq\log|\lambda_1|$ *provando que* $h(T)=\log|\lambda_1|$.

Se duas métricas são equivalentes do ponto de vista topológico, então sua entropia topológica é a mesma.

Teorema 2.2.12. *Seja d,d' duas métricas topologicamente equivalentes em X e seja $h(f)$, $h'(f)$ as entropias topológicas de T calculadas com respeito a d,d', respectivamente. Então $h(f)=h'(f)$.*

A proposição a seguir diz que a entropia topológica se comporta como seria de se esperar relativamente a iterados positivos, pelo menos quando a transformação é uniformemente contínua.

Proposição 2.2.13. *Se $f:M\to M$ é uma transformação uniformemente contínua num espaço métrico, então $h(f^k)=kh(f)$ para todo $k\in\mathbb{N}$.*

Demonstração. Veja que, $d_n(f^k(x),f^k(y))\leq d_{km}(x,y)$. Então $h(f^k)\leq kh(f)$. Reciprocamente, para $\epsilon>0$ existe $\delta(\epsilon)>0$ tal que $d(x,y)<\delta(\epsilon)$ implica que $d(f^i(x),f^i(y))<\epsilon$ para $i=0,\ldots,k$. Então $r(n,\epsilon,f^k)\geq r(km,\epsilon,f)$ e $h(f^k)\geq kh(f)$.

$\square$

Em particular, a Proposição 2.2.13 vale para toda transformação contínua num espaço métrico compacto. Por outro lado, no caso de homeomorfismos em espaços compactos, a conclusão se estende aos iterados negativos.

Proposição 2.2.14. *Se M é um espaço métrico compacto e $f:M\to M$ é um homeomorfismo, então $h(f^{-1})=h(f)$. Consequentemente, $h(f^n)=|n|h(f)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Observe que a enésima imagem de um conjunto (n, ϵ)-separado para f é (n, ϵ)-separado para f^{-1} e vice-versa.

$\square$

O seguinte resultado diz que toda a entropia está contida no conjunto não-errante, ou seja, as órbitas de pontos errantes não contribuem à entropia topológica.

Teorema 2.2.15. *A entropia topológica de f é igual à entropia topológica de T restrita ao seu conjunto não-errante, isto é, $h(f) = h(f_{\Omega(f)})$.*

Mais ainda, se o conjunto não-errante é um conjunto de pontos periódicos, então a entropia topológica é zero. Como diz o teorema a seguir.

Teorema 2.2.16. *Se $\Omega(f)$ é um conjunto finito de pontos periódicos. Então $h(f) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $\Omega(f) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ onde cada x_i é um ponto periódico com período n_i. Então, se N é o mínimo múltiplo comum entre $n_1, n_2, \ldots, n_k$, temos que $f|_{\Omega(f)}^N = f|_{\Omega(f)} \circ \ldots \circ f|_{\Omega(f)} = I$. Logo, pela Proposição 2.2.13 e pelo Teorema 2.2.15 temos que:

$$Nh(f) = h(f|_{\Omega(f)}^N) = h(I) = 0.$$

$\square$

2.2.1 Princípio Variacional

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida, com X um espaço métrico completo e $\mathcal{B}$ a sigma álgebra de Borel. Assumamos que μ é uma medida de probabilidade, ou seja, $\mu(X) = 1$.

Denotamos por $\mathcal{M}_f^1(X)$ o conjunto das medidas de probabilidade $\mu \in X$ que são f-invariantes.

O princípio variacional estabelece uma relação natural entre a entropia topológica e a entropia relativa a uma medida. Precisamente, ele nos diz que, se f é uma aplicação contínua e X é um espaço métrico compacto, então:

$$h(f) = \sup\{h_\mu(f); \mu \in \mathcal{M}_f^1(X)\}.$$

Dizemos então que uma medida de probabilidade f-invariante μ é uma *medida de máxima entropia para f* se:

$$h(f) = h_\mu(f)$$

A seguir veremos alguns resultados que serão utilizados nos próximos capítulos, mas omitimos suas demonstrações.

Definição 2.2.17. *Sejam $f : X \to X$ e $g : Y \to Y$ mapas contínuos em espaços métricos compactos. Um mapa contínuo $h : X \to Y$ é chamado uma semiconjugação se $h \circ f = g \circ h$ e $h(X) = Y$.*

O teorema abaixo fornece uma relação entre a entropia de sistemas semiconjugados.

Teorema 2.2.18. *(LEDRAPPIER; WALTERS, [16]) Sejam f e g sistems contínuos semiconjugados como abaixo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Considere ν uma medida g-invariante. Então, vale:

$$\sup_{\phi_*\mu=\nu} h_\mu(f) = h_\nu(g) + \int_Y h(f, \pi^{-1}(x))d\nu(x)$$

Teorema 2.2.19. *(FÓRMULA DE BOWEN, [4]) Sejam (X, d), (Y, e) espaços métricos compactos, $T : X \to X$ e $S : Y \to Y$ homeomorfismos e $\pi : X \to Y$ contínua, tal que $\pi \circ T = S \circ \pi$, então:*

$$h_d(T) = h_e(S) + \sup_{y\in Y} h(T, \pi^{-1}(y)).$$

Capítulo 3

Ergodicidade Intrínseca em $\mathbb{T}^3$

Um difeomorfismo $f : M \to M$ de uma variedade regular fechada M é parcialmente hiperbólico se TM divide-se em três espaços invariantes, de tal forma que um deles está se contraindo, o outro está se expandindo, e o terceiro, chamado direção central, tem um comportamento intermediário, isto é, não tão contrativo quanto o primeiro nem tão expansor quanto o segundo. A seguir apresentamos esta definição com um maior rigor matemático.

Um difeomorfismo $f : M \to M$ de uma variedade regular fechada M é parcialmente hiperbólico se admite uma decomposiçãao não-trivial Df-invariante do fibrado tangente $TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$, tal que todos os vetores unitários $v_x^\sigma(\sigma = s, c, u)$ com $x \in M$ satisfazem:

$$\|D_x f v^s\| < \|D_x f v^c\| < \|D_x f v^u\|$$

para alguma métrica Riemanniana adequada. Df também satisfaz: $\|Df|_{E^s}\| < 1$ e $\|Df^{-1}|_{E^u}\| < 1$.

Definição 3.0.1. *Duas transformações contínuas $h_0, h_1 : X \to Y$ entre espaços topológicos são homotópicas se existe uma transformação contínua $h : [0,1] \times X \to Y$ tal que $h(0,x) = h_0(x)$ e $h(1,x) = h_1(x)$. A transformação h é chamada de homotopia entre h_0 e h_1.*

Observação 3.0.2. *Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ uma aplicação contínua. Como $\mathbb{Z}^n$ é o grupo fundamental de $\mathbb{T}^n$ temos que f induz uma transformação linear $f_* : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$. Tal tranformação linear pode ser pensada como uma matriz L, onde todos os coeficientes são inteiros. Tal matriz induz uma transformação linear F_L de $\mathbb{T}^n$ em $\mathbb{T}^n$. Agora, dada uma aplicação contínua $g : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ na mesma classe de homotopia de f, os inteiros relacionados com o número de voltas que a g vai dar nos laços geradores do grupo fundamental de $\mathbb{T}^n$ não podem ser distintos daqueles induzidos pela f. Assim, a matriz G relacionada* *a g_*, será igual à matriz L e, portanto, a transformação linear F_G de $\mathbb{T}^n$ em $\mathbb{T}^n$ também será igual a F_L.*

Portanto, cada transformação do toro $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é determinada a menos de homotopia pela sua ação f_* no grupo fundamental $\mathbb{Z}^n$. Esta ação é dada por uma matriz $m \times m$ inteira A que também determina uma única transformação linear F_A na classe de homotopia de f.

Neste capítulo, consideramos difeomorfismos parcialmente hiperbólicos com direção central unidimensional homotópico a um automorfismo hiperbólico de $\mathbb{T}^n$. A principal questão será a unicidade das medidas de máxima entropia para esses sistemas.

Neste cenário, o método usado por R. Ures [25] para fornecer a exitência de medidas de máxima entropia se a direção central for unidimensional se dá imediatamente como consequência das propriedades da semiconjugação h entre f e sua parte linear, em particular, mostra-se que h só pode colapsar arcos centrais.

O principal resultado é a unicidade da medida de máxima entropia. Os sistemas que possuem essa propriedade são chamados *intrinsecamente ergódicos*. O principal resultado:

Teorema 3.0.3. *(Ures) Seja $f : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico homotópico a um automorfismo linear hiperbólico. Então f é intrinsecamente ergódico.*

Definição 3.0.4. *Uma folheação $\mathcal{W}$ de uma variedade Riemanniana é quase-isométrica se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $d_W(x, y) \leq ad(x, y) + b$ para qualquer x, y na mesma folha W de $\mathcal{W}$. Aqui d_W representa a distância induzida pela restrição de W do ambiente métrico Riemanniano.*

A prova do Teorema 3.0.3 depende de dois resultados sobre difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. O primeiro é que um difeomorfismo parcialmente hiperbólico em $\mathbb{T}^3$ tem folheações fortes quase-isométricas. O segundo resultado é dado por A. Hammerlindl [12], que mostrou que a propriedade quase-isométrica para as folheações fortes implica a propriedade quase-isométrica para a folheação central.

Após o resultado de Brin-Burago-Ivanov [5] (que nos diz que existem folheações ramificadas tangentes a E^{cs} e E^{cu} e invariante sob qualquer difeomorfismo C^1 $f : M \to M$ que preserva as distribuições orientadas E^s, E^c e E^u), o Teorema 3.0.3 é uma consequêcia do seguinte:

Teorema 3.0.5. *Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um difeomorfismo parcialmente hiperbólico com direção central unidimensional com folheações fortes quase-isométricas homotópicas a um automorfismo linear hiperbólico A. Então f é intrinsecamente ergódico. Mais ainda, se μ é* *medida de máxima entropia de f e m é a medida de Lebesgue, então (f,μ) e (A,m) são isomorfos.*

3.1 Propriedades da Semiconjugação

Seja f um difeomorfismo parcialmente hiperbólico homotópico a um automorfismo hiperbólico A de $\mathbb{T}^n$, com direção central unidimensional e com folheações fortes quase-isométricas. Por um resultado conhecido de J. Franks [11] f é semiconjugado a A, ou seja, existe $h : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ homotópico é identidade tal que $A \circ h = h \circ f$. Essa igualdade pode ser expressada em $\mathbb{R}^n$, a cobertura universal de $\mathbb{T}^n$, tomando valores de forma adequada obtemos $\tilde{A} \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ \tilde{f}$ com $\tilde{h}$ em uma distância finita do mapa identidade.

Uma das propriedades mais importantes de $\tilde{h}$ é que $\tilde{h}(\tilde{x}) = \tilde{h}(\tilde{y})$ se, e somente se, existe $K > 0$ tal que $d(\tilde{f}^n(\tilde{x}), \tilde{f}^n(\tilde{y})) < K$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Além disso, K pode ser tomado independente de $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$.

Devemos dizer que f é dinamicamente coerente se existem folheções invariantes $\mathcal{W}^{c,\sigma}$ tangentes a $E^{s\sigma} = E^c \oplus E^\sigma$ para $\sigma = s, u$. Note que tomando a interseção dessas folheações obtemos uma folheação invariante $\mathcal{W}^c$ tangente a E^c que subfolhea $\mathcal{W}^{c,\sigma}$ para $\sigma = s, u$. A folha de $\mathcal{W}^c$ contendo $\tilde{x}$ será chamada $W^c(\tilde{x})$.

Lema 3.1.1. *Suponha que $\tilde{h}(\tilde{x}) = \tilde{h}(\tilde{y})$. Então, $\tilde{y} \in W^c(\tilde{x})$.*

Demonstração. Se $\tilde{y} \notin W^c(\tilde{x})$, temos que, ou $\tilde{y} \notin W^{cs}(\tilde{x})$ ou $\tilde{y} \notin W^{cu}(\tilde{x})$. Suponha que ocorre o primeiro caso (o outro é análogo).

Seja $\tilde{z} = W^u(\tilde{y}) \bigcap W^{cs}(\tilde{x})$ e chame $D_{cs} = d_{cs}(\tilde{x}, \tilde{z})$ e $D_u = d_u(\tilde{y}, \tilde{z})$. A existência (e unicidade) de $\tilde{z}$ é provado por Brin-Burago-Ivanov [5] para $\mathbb{T}^3$ e na Proposição 2.15 da tese de Hammerlindl [12] em uma configuração mais geral.

Agora, a hiperbolicidade parcial absoluta implica a existência de constantes $1 < \lambda_c < \lambda_u$ tal que, $\forall n > 0$,

$$d(\tilde{f}^n(\tilde{x}), \tilde{f}^n(\tilde{z})) \leq \lambda_c^n D_{cs} \quad \text{e} \quad d_u(\tilde{f}^n(\tilde{y}), \tilde{f}^n(\tilde{z})) \geq \lambda_u^n D_u.$$

Como W^u é quase-isométrico, temos que:

$$d(\tilde{f}^n(\tilde{y}), \tilde{f}^n(\tilde{z})) > \tfrac{1}{a}(\lambda_u^n D_u - b)$$

Finalmente,

$$d(\tilde{f}^n(\tilde{y}), \tilde{f}^n(\tilde{z})) > \tfrac{1}{a}(\lambda_u^n D_u - b) - \lambda_c^n D_{cs}.$$

Esta quantidade vai para o infinito com n implicando que $\tilde{h}(\tilde{x}) \neq \tilde{h}(\tilde{y})$, completando a prova do lema.

$\square$

O lema 3.1.1 implica que $\tilde{h}^{-1}(W^c_{\tilde{A}}(\tilde{x}))$ estão contido em $W^c_{\tilde{f}}(\tilde{z})$ para qualquer $\tilde{z} \in \tilde{h}^{-1}(\tilde{x})$. Além disso temos que, $\tilde{h}^{-1}(W^c_{\tilde{A}}(\tilde{x})) = W^c_{\tilde{f}}(\tilde{z})$.

A seguir, vamos nos concentrar no estudo dos conjuntos onde a injetividade de $\tilde{h}$ falha.

Proposição 3.1.2. *Para todo $z \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{h}^{-1}(z)$ é um subconjunto compacto conexo (isto é, um arco ou um ponto) de uma variedade central.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1.1, $\tilde{h}^{-1}(z)$ é um conjunto compacto contido em uma variedade central. Tome $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{h}^{-1}(z)$. Por um lado, sabemos que existe K tal que $d(\tilde{f}^n(\tilde{x}), \tilde{f}^n(\tilde{y})) < K$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, se tomarmos $\tilde{w}$ no segmento central unindo $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$, a propriedade quase-isométrica da folheação central implica que existem constantes $a, b > 0$ tais que para todo $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}^n(\tilde{x}), \tilde{f}^n(\tilde{w})) &\leq d_{W^c}(\tilde{f}^n(\tilde{x}), \tilde{f}^n(\tilde{w})) \\ &\leq d_{W^c}(\tilde{f}^n(\tilde{x}), \tilde{f}^n(\tilde{y})) \\ &\leq ad(\tilde{f}^n(\tilde{x}), \tilde{f}^n(\tilde{y})) + b \\ &\leq aK + b \end{aligned}$$

Então, $\tilde{h}(\tilde{w}) = \tilde{h}(\tilde{x}) = \tilde{h}(\tilde{y})$, implicando que todo o arco central juntando $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ está contido em $\tilde{h}^{-1}(z)$. Assim, $\tilde{h}^{-1}(z)$ é conexo.

$\square$

Agora, o lema a seguir mostra que A admite decomposição parcialmente hiperbólica semelhante à decomposição parcialmente hiperbólica de f.

Sejam $\rho, \rho' > 1$ e $\delta, \delta\prime > 1$, tais que:

$$\|D_x f v^s\| < \delta < \delta\prime < \|D_y f v^c\| < \rho\prime < \rho < \|D_z f v^u\|$$

para todo $x, y, z \in M$ e $v^\sigma \in E^\sigma_w$ vetores unitários, $\sigma = s, c, u$ e $w = x, y, z$ respectivamente.

Lema 3.1.3. *$\tilde{A}$ admite uma cisão parcialmente hiperbólica $E^s_A \oplus E^c_A \oplus E^u_A = \mathbb{R}^n$ tal que $dim(E^c_A)$ é unidimensional e $\delta\prime < \tilde{A}v^c < \rho\prime$ se v^c é um vetor unitário em E^c_A.*

Demonstração. Seja $\tilde{x}$ um ponto fixo para $\tilde{f}$. $\tilde{h}(W^c(\tilde{x}))$ é uma curva $\tilde{A}$-invariante e, portanto, está contido na variedade estável ou instável de 0 (o único ponto fixo de $\tilde{A}$).

Suponha que, $\tilde{h}(W^c(\tilde{x})) \subset W^u_{\tilde{A}}(0)$, sendo o outro caso análogo. Por um lado, a distância até 0 de qualquer ponto $\tilde{z}$ em $\tilde{h}(W^c(\tilde{x}))$ cresce menos que $C(\rho')^n + K$ sob $\tilde{A}$-iterato, onde C, K são algumas constantes positivas.

De fato, o comprimento de uma curva central unindo $\tilde{x}$ e uma pré imagem por $\tilde{h}$ de $\tilde{z}$ cresce menos que $C(\rho\prime)^n$, e $\tilde{h}$ está dentro de uma distância finita da identidade. Isso implica que $\tilde{A}$ tem, pelo menos, um autovalor instável com módulo menor que $\rho\prime$.

Por outro lado, $\tilde{h}(W^c(\tilde{x})) \subset W^u_{\tilde{A}}(0)$, e um argumento similar dá que as distâncias crescem mais do que $C^n_\rho + K$. Então, não é difícil concluir que existe um único autovalor instável com módulo menor que $\rho\prime$, e isso dá a divisão desejada.

□

O lema 3.1.3 implica que a imagem h de uma variedade central de f é uma variedade central (linha) de A.

3.2 Demonstração do Teorema 3.0.5

Seja f um difeomorfismo absolutamente parcialmente hiperbólico homotópico a um automorfismo hiperbólico A de $\mathbb{T}^n$, com um espaço central unidimensional e com folheações fortes quase-isométricas. Vamos provar a unicidade da medida de máxima entropia de f, Teorema 3.0.5.

Seja $\tilde{X} = \left\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n;\ \#\ \tilde{h}^{-1}(\tilde{x}) > 1\right\}$. Pelos resultados da seção anterior, $\tilde{X}$ é o conjunto de pontos cujas pré-imagens por h são arcos centrais não-triviais. Seja $\pi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ a projeção cobertura e $X = \pi(\tilde{X})$.

Lema 3.2.1. *$m(\tilde{X}) = 0$ (também temos que $m(X) = 0$).*

Demonstração. Seja $W^c_{\tilde{A}}(\tilde{x})$ uma variedade central para A que é unidimensional pelo Lema 3.1.2. O Lema 3.1.1 diz que $h^{-1}(W^c_{\tilde{A}}(\tilde{x})) = W^c_{\tilde{f}}(\tilde{z})$.

Seja $\tilde{X}^c_{\tilde{x}} = W^c_{\tilde{A}}(\tilde{x}) \cap \tilde{X}$. Como $\tilde{h}^{-1}(y)$ é um intervalo não-trivial de $W^c_{\tilde{f}}(\tilde{z})$ para todo $\tilde{y} \in \tilde{X}^c_{\tilde{x}}$, temos que $\tilde{X}^c_{\tilde{x}}$ é um conjunto contável. Obtemos que $\tilde{X}^c_{\tilde{x}}$ é contável para todo $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$.

Como $\tilde{A}$ é linear, sabemos que a folheação central de A é uma folheação por linhas de retas paralelas. Portanto, pelo Teorema de Fubini temos que $m(\tilde{X}) = 0$.

□

Certamente, o Lema 3.1.3 implica a existência e unicidade de uma medida μ cuja pré-imagem por h é m. Graças à desintegração de Rokhlin, também é verdade que qualquer medida f-invariante via h é uma medida A-invariante.

Assim, para obter o Teorema 3.0.5 é suficiente provar que a imagem h de uma medida de máxima entropia é a medida de Lebesgue m.

Tome qualquer medida invariante ν para f e seja $\hat{\nu} = \nu \circ h^{-1}$ (obseve que $\hat{\nu}$ é dado pela desintegração de Rokhlin). Então, o princípio variacional de Ledrappier-Walters (Teorema 2.2.18) diz que:

$$\sup_{\tilde{\mu}:\tilde{\mu}\circ h^{-1}=\hat{\nu}} h_{\tilde{\mu}}(f) = h_{\hat{\nu}}(A) + \int_{\mathbb{T}^n} h(f, h^{-1}(y))d\hat{\nu}(y)$$

Agora já temos o necessário para a prova do Teorema 3.0.5.

Primeiro observe que, como as pré-imagens por h dos pontos são arcos de comprimento uniformemente limitado e a partição através da pré-imagem por h é f-invariante, obtemos que $h_{top}(f, h^{-1}(y)) = 0$ para qualquer $y \in \mathbb{T}^n$.

Isto significa, depois da fórmula de Ledrappier-Walters [16], que $h_\nu(f) = h_{\hat{\nu}}(A)$ para qualquer medida f-invariante ν.

Como uma consequência fácil temos que qualquer medida de máxima entropia para f tem como sua imagem h a medida de Lebesgue m, isto é, a única medida de máxima entropia para A.

Os resultados anteriores implicam a unicidade de tal medida dando a prova do Teorema 3.0.5. Que (f, μ) e (A, m) são isomorfos via h segue a partir da construção.

Capítulo 4

Um Critério para Ergodicidade Intrínseca

A noção da propriedade de especificação, devida a R. Bowen [4], pode ser usada para a dedução de boas propriedades topológicas, entre elas a existência de pontos periódicos.

Moralmente, dizemos que uma transformação f satisfaz a propriedade de especificação se dado um erro $\epsilon > 0$, para um número arbitrário de segmentos de órbitas arbitrariamente grandes, podemos encontrar uma órbita periódica que acompanha cada um dos segmentos com o erro de ϵ e muda de um segmento para outro em uma quantidade fixa de tempo que depende apenas de ϵ.

Bowen [4] mostrou que se X é um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ é um homeomorfismo expansivo com a propriedade de especificação, existe uma única medida de probabilidade f-invariante que maximiza a entropia métrica.

Definição 4.0.1. *Seja $f \in Diff(M)$. Seja $\epsilon > 0$ e Per_ϵ um subconjunto (ϵ, n)-separado de $\{x \in M; f^n(x)\}$, o conjunto dos pontos periódicos. Um difeomorfismo f é dito ter pontos periódicos equidistribuídos com respeito a medida μ se vale o seguinte para ϵ suficientemente pequeno:*

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{|Per_\epsilon(n)|} \textstyle\sum_{x\in|Per_\epsilon(n)|} \delta_x = \mu.$$

A seguir, apresentaremos a propriedade que nos permite construir muitos pontos periódicos.

Definição 4.0.2. *Um difeomorfismo $f : X \to X$ tem a propriedade de especificação se para qualquer $\epsilon > 0$, existe um inteiro $M = M(\epsilon) > 0$ tal que para qualquer $k \geq 2$, para todos os k pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, para quaisquer inteiros $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < n \cdots < a_k \leq b_k$ com $a_i - b_{i-1} \geq N$ para $2 \leq i \leq k$, existe um ponto $y \in X$ tal que $d(f^i(y), f^j(x_i)) \leq \epsilon$ para $a_i \leq j \leq b_i$, $1 \leq i \leq k$ (veja a Figura 4.1).*

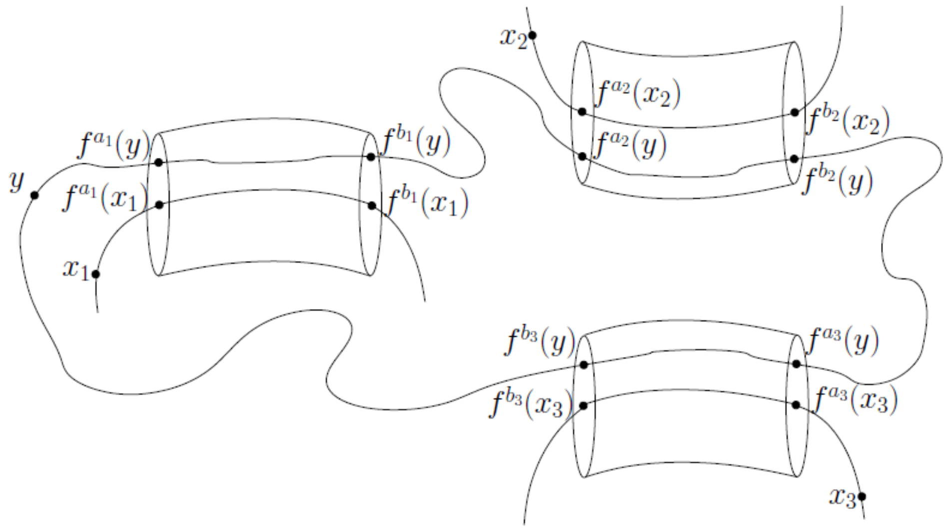

Figura 4.1: Propriedade de Especificação

Considere um homeomorfismo de um espaço métrico completo $f : X \to X$. Assuma que ele é expansivo e tem a propriedade de especificação. Por enquanto, vamos observar que eles valem para todos os difeomorfismos Anosov e garantir a existência de uma única medida de máxima entropia.

Seja $g : X \to X$ uma extensão contínua de f, isto é, existe um mapa contínuo sobrejetivo $\pi : X \to X$ tal que $f \circ \pi = \pi \circ g$. O mapa π define uma relação de equivalência $y \sim_\pi z$ se, e somente se, $\pi(y) = \pi(z)$.

Para $x \in X$, denotemos por:

$$[x] := \{y \in X; \pi(y) = \pi(x)\} = \pi^{-1}(\pi(x))$$

a classe de quivalência de x.

Dizemos que uma classe $[x]$ é periódica se $\pi(x)$ é um ponto periódico de f. Neste caso, $g^m|_{[x]} : [x] \to [x]$ é um homeomorfismo em um conjunto compacto $[x]$, onde m é o período de $\pi(x)$. Então, existe uma probabilidade g^m-invariante suportada em $[x]$. Escolhemos um e denotamos ele por $\delta_{[x]}$.

Podemos assumir que $\delta_{[gx]} = g_*\delta_{[x]}$. Naturalmente,

$$\tfrac{1}{m}\textstyle\sum_{k=0}^{m-1} g_*^k \delta_{[x]}$$

é uma medida de probabilidade g-invariante suportada em uma órbita da classe periódica $[x]$.

Definimos $\widetilde{Per}_n(g)$ como o conjunto de classes equivalentes que são fixos por g^n e o conjunto:

$$\upsilon_n := \frac{1}{|\tilde{Per_n(g)}|}\sum_{x\in|\tilde{Per_n(g)}|}\delta_x.$$

Bowen [4] estabeleceu a equidistribuição de pontos periódicos para um homeomorfismo expansivo com a propriedade de especificação. Generalizamos isso para algumas extensões bem-comportadas de tais sistemas, obtendo o teorema abstrato enunciado a seguir.

Teorema 4.0.3. *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo expansivo de um espaço métrico compacto com a propriedade de especificação e seja μ a única medida de máxima entropia de f. Seja $g : X \to X$ uma extensão contínua de f através de algum mapa sobrejetivo contínuo $\pi : X \to X$ e assuma que as seguintes duas condições são satisfeitas:*

(H1) $h_{top}(g, [x]) = 0$, para qualquer $x \in X$;

(H2) $\mu(\{\pi(x) : [x]$ é reduzido a $\{x\}\}) = 1$.

Então, recordando que $\nu_n := \frac{1}{|\tilde{P}er_n(g)|}\sum_{x\in\tilde{P}er_n(g)}\delta_x$, segue que o limite $\nu = \lim_{n\to\infty}\nu_n$ existe.

Além disso, a medida ν é g-invariante, ergódica, e é a única medida que maximiza a entropia de g.

Vamos dividir a prova em vários lemas.

Lema 4.0.4. *Existe ponto de acumulação para a sequência $\nu_n := \frac{1}{|\tilde{P}er_n(g)|}\sum_{x\in\tilde{P}er_n(g)}\delta_x$.*

Demonstração. Faremos..

□

Seja ν qualquer ponto de acumulação da sequência ν_n. Vamos provar que ν é a única medida de máxima entropia, e assim, ν será o limite de ν_n e o resultado segue.

Lema 4.0.5. *No cenário do teorema, $\pi_*\nu = \mu$.*

Demonstração. Primeiro, veja que:

$$\pi_*\nu n = \mu_n, \ \forall n \geq 1.$$

De fato, para todo $A \subseteq X$ Borel, se $x \in X$ é ponto qualquer, então:

$$\delta_{[x]}(\pi^{-1}(A)) = \delta_{(\pi^{-1}(\pi(x))}(\pi^{-1}(A)) = \delta_{\pi(x)}(A).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\pi_*\nu_n(A) &= \nu_n(\pi^{-1}(A)) \\
&= \frac{1}{|\tilde{P}er_n(g)|}\sum_{x\in \tilde{P}er_n(g)} \delta_{[x]}(\pi^{-1}(A)) \\
&= \frac{1}{|Per_n(f)|}\sum_{\pi(x)\in Per_n(f)} \delta_{\pi(x)}(A) \\
&= \mu_n(A)
\end{aligned}$$

onde, $\mu_n(A) := \frac{1}{|Per_n(f)|}\sum_{\pi(x)\in Per_n(f)} \delta_{\pi(x)}(A)$.

A primeira e a segunda igualdades vem da definição de $\pi_*\nu_n$, e da definição de ν_n, respectivamente, e a terceira igualdade vem do fato de g ser uma extensão contínua de f.

Da continuidade de π_*, obtemos:

$$\pi_*\nu = \mu.$$

□

Lema 4.0.6. *A medida ν é de máxima entropia, isto é:*

$$h_\nu(g) = h_{top}(g).$$

Demonstração. De fato, (g,ν) sendo uma extensão de (f,μ), temos $h_\mu(f) \leq h_\nu(g)$. Por outro lado, a fórmula de Bowen (Teorema 2.2.19) afirma que:

$$h_{top}(g) \leq h_{top}(f) + \sup_{x\in X} h_{top}(g,[x]).$$

Sendo assim, do princípio variacional, temos que:

$$h_{top}(g) \leq h_{top}(f) + \sup_{x\in X} h_{top}(g,[x]).$$

De (H1), temos que $h_{top}(g,[x]) = 0$, logo, $h_{top}(g) \leq h_{top}(f)$.

Como μ é de máxima entropia, temos que $h_{top}(f) \leq h_\mu(f)$, e como (g,ν) é extensão de (f,μ), segue que $h_\mu(f) \leq h_\nu(g)$.

Ou seja,

$$h_{top}(g) \leq h_{top}(f) \leq h_\mu(f) \leq h_\nu(g) \leq h_{top}(g).$$

Temos, então que:

$$h_\nu(g) = h_{top}(g).$$

Portanto, ν é de máxima entropia.

$\square$

Definição 4.0.7. *Dizemos que A é saturado se $A = \pi^{-1}(\pi(x))$.*

Em geral, a saturação de $A \subseteq X$ é definida como $sat(A) := \pi^{-1}(\pi(x))$. Veja que, $\nu(sat(A)) = \mu(\pi(A))$.

Lema 4.0.8. *Para cada conjunto de Borel A, temos:*

$$\nu(A) = \nu(sat(A)).$$

Demonstração. Considere o conjunto $\tilde{X} = \{x \in X : [x] = \{x\}\}$. De (H2) e do fato de que $\pi_*\nu = \mu$, temos que, $\nu(\tilde{X}) = 1$.

Para $A \subseteq X$ Borel, temos:

$$\nu(sat(A)) = \nu(sat(A) \cap \tilde{X}) = \nu(A \cap X) = \nu(A).$$

Daí,

$$\nu(A) = \nu(sat(A)).$$

$\square$

Lema 4.0.9. *A medida de probabilidade ν é ergódica.*

Demonstração. De fato, como $\nu(A) = \nu(sat(A)) = \mu(\pi(A))$, segue que se P é um subconjunto g-invariante, então:

$$\nu(P) = \nu(\pi^{-1}(\pi(x)) = \mu(\pi(P)).$$

Como $\pi(P)$ é f-invariante e μ é ergódica, temos que ν é ergódica.

$\square$

Lema 4.0.10. *Seja η uma medida de probabilidade g-invariante e assuma que η é singular com respeito a ν. Então:*

$$h_\eta(g) < h_{top}(g).$$

Demonstração. Observe que é suficiente provar o lema para η ergódico e então usar a decomposição ergódica.

Seja $\rho = \pi_*\eta$. A medida η é, portanto, ergódica, pelo Lema 4.0.9.

Afirmamos que ρ e μ são mutuamente singular. Prosseguimos por contradição. Pela ergodicidade, ρ e μ são iguais. Mas a hipótese (H2) diz que π é um-a-um sobre um conjunto de medida total para μ. Assim, $\eta = \rho$, contrariando a hipótese. A afirmação está provada.

A fórmula de Ledrappier - Walter (Teorema 2.2.18) afirma que:

$$h_\eta(g) \leq h_\rho(f) + \int_X h_{top}(g, \pi^{-1}(x))d\rho(x).$$

Como de (H1), temos que:

$$h_{top}(g, [x]) = 0, \forall x \in X.$$

Então,

$$h_\eta(g) \leq h_\rho(f).$$

Bowen [8] provou que:

$$h_\rho(f) < h_{top}(f) = h_{top}(g).$$

Portanto,

$$h_\eta(g) < h_{top}(g).$$

□

Agora, podemos finalizar o Teorema 4.0.3.

Seja η qualquer medida de probabilidade g-invariante tal que $h_\eta(g) = h_{top}(g)$.

Podemos escrever: $\eta = \alpha\eta + (1-\alpha)\eta_2$, para algum $\alpha \in [0,1]$ tal que η_i são medidas de probabilidade invariantes, $\eta << \nu$, e η_2 é singular com respeito a ν.

Segue que, pela Proposição 2.1.6:

$$\begin{aligned} h_{top}(g) &= h_\eta(g) \\ &= h_{\alpha\eta+(1-\alpha)\eta_2}(g) \\ &= \alpha h_{\eta_1}(g) + (1-\alpha)h_{\eta_2}(g) \\ &\leq h_{top}(g) \end{aligned}$$

O Lema 4.0.10 implica que $\alpha = 1$, isto é, η é absolutamente contínua com respeito a ν. Como ν é ergódico, temos que $\eta = \nu$. Isso completa a prova do teorema.

Vamos aplicar o Teorema 4.0.3 para várias classes que são derivados de Anosov, nomeados:

- Mañé Robustamente Transitivo;
- Exemplo de Mañé Derivado de Anosov;
- Derivado de Anosov através da bifurcação de Hopf.

Capítulo 5

Exemplos

Neste capítulo, provaremos que uma classe de difeomorfismos robustamente transitivos descritos por R. Mañé [17] são intrinsecamente ergódicos. Mostraremos também que o método se aplica a várias classes de sistemas que são similarmente derivados de Anosov, nomeados, um exemplo de Mañé e um obtido através da bifurcação de Hopf.

5.1 Exemplo de Mañé Robustamente Transitivos

O exemplo de Mañé de um sistema dinâmico robustamente transitivo que não é Anosov foi construído em $\mathbb{T}^3$, mas pode ser extendido para dimensões maiores.

Fixemos $d \geq 3$ e seja $A \in GL(d, \mathbb{Z})$ um automorfismo dentro de um círculo unitário e todos os autovalores reais, positivos, simples, e irracionais.

Seja λ_s o único módulo menor que 1 e λ_c o menor dos módulos maior que 1.

Denotemos o sistema Anosov linear induzido em $\mathbb{T}^d$ por f_A e seja $\mathcal{F}^c$ a folheação correspondente ao autovalor λ_c. Localmente, em cada ponto, $\mathcal{F}^c$ é apenas um segmento linha na direção de um autovalor associado com λ_c. Similarmente, $\mathcal{F}^c$ e $\mathcal{F}^s$ são folheações correspondentes a um autovalor λ_s e todos os autovalores maiores que λ_c, respectivamente.

Como todos os autovalores são irracionais, cada folha de $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^c$ e $\mathcal{F}^u$ é denso em $\mathbb{T}^d$.

Tais matrizes podem ser construídas para qualquer $d \geq 3$ como matrizes companheiras para o polinômio minimal sobre $\mathbb{Q}$ de um número de Pisot cujos conjugados algébricos são todos reais. Tais números são dados por M.J.Bertin [2, p. 85, Teorema 5.2.2] (A prova implica que os conjugados são reais). Os módulos são então pareados distintos por C. Smyth [24].

Sem perda de generalidade, podemos assumir que f_A tem pelo menos dois pontos fixos e que qualquer autovalor instável que não seja λ_c tem módulo maior que 3 (se não,

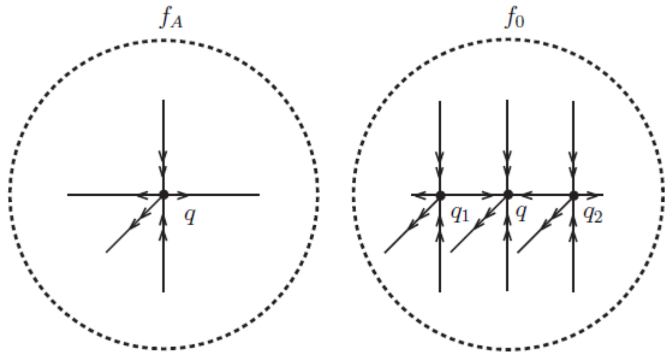

Figura 5.1: Construção Mañé

substitua A por algum capaz).

Seja p e q pontos fixos sob a ação de f_A e $\rho > 0$ um número pequeno a ser determinado abaixo.

Seguindo a construção em [17], definimos f_0 modificando f_A em um domínio suficientemente pequeno C contido em $B_{\rho/2}(q)$, mantendo invariante a folheação $\mathcal{F}^c$.

Então, existe uma vizinhaça U de p tal que $f_{A_{|_U}} = f_{0_{|_U}}$.

Em C o ponto fixo q sofre uma bifurcação forçada na direção da folheação $\mathcal{F}^c$. O índice estável de q aumenta em 1, e são criados dois outros pontos com o mesmo índice estável que o q inicial. (Veja Figura 5.1).

O difeomorfismo resultante f_0 é fortemente parcialmente hiperbólico com um folheação central $\mathcal{F}^c$ C^1. De acordo com [17], f_0 é robustamente transitivo para $\rho > 0$ suficientemente pequeno.

Proposição 5.1.1. *Seja f_A um difeomorfismo de Anosov no d-toro, $d \geq 3$, como acima. Seja $f \in Diff^1(\mathbb{T}^d)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*
(a) Existem constantes $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que cada ϵ-cadeia em f_A é δ-sombreada por uma órbita em f_A e 3δ é uma constante de expansividade para f_A, isto é, se $x, y \in \mathbb{T}^d$ e $d(f_A^n(x), f_A^n(y)) < 3\delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $x = y$.
(b) Cada f-órbita é uma ϵ-cadeia para f_A.
Então, o mapa $\pi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, onde $\pi(x)$ é um ponto em $\mathbb{T}^d$ que sob a ação de f_A vai δ-sombrear a f-órbita de x, é uma semiconjugação de f para f_A, isto é, é contínuo com $\pi \circ f = f_A \circ \pi$.

Demonstração. Pelo Teorema do Sombreamento, obtemos que o mapa π está bem definido e que $\pi(f(x)) = f_A(\pi(x))$ e $d(\pi(x), x) < \delta$. Precisamos ver que π é contínuo e sobrejetivo.

Para provar que π é contínua, tomemos uma sequência $x_n \to x$ e provemos que $\pi(x_n) \to \pi(x)$.

Fixe $M \in \mathbb{N}$. Então, existe um $N(M) \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N(M)$, temos:

$$d(f^j(x_n), f^j(x)) < \delta, \text{ para todo } -M \leq j \leq M$$

Temos que,

$$d(f_A^j(\pi(x_n)), f_A^j(\pi(x))) < 3\delta, \text{ para todo } -M \leq j \leq M, \text{ onde } n \geq N(M).$$

Segue que, para qualquer ponto limite y da sequência $\pi(x_n)$, temos que:

$$d(f_A^j(y), f_A^j(\pi(x))) \leq 3\delta, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Como 3δ é uma constante de expansividade para f_A, isso implica que $y = \pi(x)$ e $\pi(x_n)$ converge para $\pi(x)$. Logo, π é contínua.

Agora, provemos que π é sobrejetiva. Suponha, por absurdo, que não é e seja $y \notin \pi(\mathbb{T}^d)$.

Considere a bola fechada $\overline{B} = \overline{B}(y, 3\delta)$ e o mapa da bola sobre sua borda $r : \overline{B} \to \partial\overline{B}$ do seguinte modo: Para $x \in \overline{B}$, $r(x)$ é a interseção do raio geodésico (começando por y e passando por $\pi(x)$) com a borda $\partial\overline{B}$.

O mapa está bem definido desde que $\pi(x) \neq y$. Mais ainda, ele é contínuo.

Por outro lado, $r_{|_{\partial\overline{B}}} : \partial\overline{B} \to \partial\overline{B}$ é isotópico à identidade(desde que $d(\pi(x), x) < \delta$ e a bola tenha raio 3δ). Mas isso contradiz o Teorema de Brouwer.

□

Lema 5.1.2. *Seja $g : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ um mapa contínuo injetivo. Seja K uma curva compacta tal que o comprimento de todos seus iteratos, $g^n(K)$, $n \geq 0$, são limitados pela constante L. Então, $h(g, K) = 0$.*

Demonstração. Para cada $n \geq 0$, existe um subconjunto $K(\epsilon, n)$ de $g^n(K)$ com cardinalidade no máximo $\frac{L}{3} + 1$ dividindo $g^n(K)$ em curvas com comprimento no máximo ϵ.

Veja que, $\bigcup_{0 \leq k < n} g^{-k} K(\epsilon, k)$ é um (n, ϵ)-gerador de K com cardinalidade subexponencial.

□

Observe que, ao usar a semiconjugação π_g da Proposição 5.1.1 mostra-se que para cada $x \in \mathbb{T}^d$ e cada g C^1-próximo de f_0, o conjunto $\pi_g^{-1}(x)$ é um intervalo compacto de comprimento limitado contido em uma folha central, e é um único ponto para quase todo x.

Esses fatos, juntamente com o Lema 5.1.2 e o Teorema 4.0.4 implicam que uma classe de difeomorfismos robustamente transitivos descritos por Mañé são intrinsecamente ergódicos. Notamos que a medida de máxima entropia para f_A é a medida de Lebesgue, denotada por μ, em $\mathbb{T}^d$.

Observemos que, para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, qualquer difeomorfismo f que seja C^1-próximo do difeomorfismo previamente construído f_0 satisfaz a hipótese (b) da Proposição 5.1.1.

Seja $r > 0$ uma constante de expansividade para f_A e fixe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ de f_0 tal que cada $g \in \mathcal{U}$ satisfaz a hipótese (a) da Proposição 5.1.1 com $0 < \varepsilon < min(r/3, \rho)$.

Obtemos um conjunto aberto de difeomorfismos que não são normalmente hiperbólicos e estruturalmente estável, no entanto, tem a seguinte estabilidade em relação à sua entropia: sua entropia topológica é constante e cada uma tem uma medida de máxima entropia com respeito à qual as órbitas periódicas são equidistribuídas.

Mais ainda, equipada com sua respectiva medida de máxima entropia, esses difeomorfismos são isomórficos aos pares.

Assim, para qualquer $d \geq 3$, existe um conjunto aberto não-vazio $\mathcal{U}$ em $Diff^1(\mathbb{T}^d)$ satisfazendo que: cada $f \in \mathcal{U}$ é fortemente hiperbólico, robustamente transitivo e intrinsecamente estável; cada $f \in \mathcal{U}$ tem pontos periódicos equidistribuídos com respeito à medida de máxima entropia; e nenhum $f \in \mathcal{U}$ é Anosov ou estruturalmente estável.

5.2 Exemplo de Mañé derivado de Anosov

Seja $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ um difeomorfismo de Anosov (linear), onde $n \geq 4$, tal que $T\mathbb{T}^n$ admite divisão dominada $T\mathbb{T}^n = E^{ss} \oplus E^s \oplus E^u \oplus E^{uu}$ com $dimE^s = dimE^u = 1$, e a taxa de contração/expansão é $\lambda_{ss} < \lambda_s < 1 < \lambda_u < \lambda_{uu}$, onde λ_{ss} é o maior módulo de um autovalor correspondente a E^{ss}, λ_s é o módulo de um autovalor correspondente a E^s, λ_u é o módulo de um autovalor correspondente a E^u, e λ_{uu} é o menor módulo de um autovalor correspondente a E^{uu}.

De fato, tome qualquer mapa Anosov linear A em $\mathbb{T}^2$ com $T\mathbb{T}^2 = E^s \oplus E^u$ e depois tome um mapa Anosov linear B em $\mathbb{T}^{n-2}$ tal que $T\mathbb{T}^{n-2} = E^{ss} \oplus E^{ss}$ e:

$$\lambda_{ss} :=\| B|E^{ss} \| < \| A|E^s \| \quad , \quad \lambda_{uu}^{-1} :=\| B^{-1}|E^{uu} \| < \| A^{-1}|E^u \|.$$

Então, $f := A \times B$ é um mapa Anosov linear em $\mathbb{T}^n$ com as propriedades requeridas.

Observe também que, se definirmos $E^c = E^s \oplus E^u$, então f é um difeomorfismo fortemente parcialmente hiperbólico, $T\mathbb{T}^n = E^{ss} \oplus E^c \oplus E^{uu}$, e $\mathbb{T}^n$ tem uma folheação hiperbólica normal cujas folheação hiperbólica normal cujas folhas são toro $\mathbb{T}^2$ tangente a E^c.

Tomando o domínio de f, se necessário, assuma que f tem dois diferentes pontos fixos p e q.

Seja $r > 0$ pequeno e deforme f dentro de $B(p,r)$ e $B(q,r)$, similar para a construção de Mañé derivado de Anosov. Em $B(p,r)$ executamos uma perturbação forçada ao longo de E^s e em $B(q,r)$ executamos uma bifurcação forçada ao longo de E^u (isso também pode ser feito de forma que a folheação pelo toro $\mathbb{T}^2$ tangente a E^c seja preservada).

Assim, obtemos g que cai na Proposição 4.2.1. De fato, seja δ, r tal que qualquer r-cadeia é δ-sombreada. Podemos assumir que g satisfaz as seguintes propriedades:

- g é fortemente parcialmente hiperbólico $T\mathbb{T}^n = E^{ss} \oplus E^{cs} \oplus E^{cu} \oplus E^{uu}$ que é dominado (cada subespaço dominou os anteriores por um fator $a < 1$), e $dimE^{cs} = dimE^{cu} = 1$. Estes subespaços são C^0-próximos aos respectivos de f;
- $d_{C^0}(f,g) < r$;
- Se $d(x,y) < 2\delta$, então $\| D_g|E^{ci}(x) \| \,/\, \| D_{itg}|E^{ci}(y) \| < a^{\frac{-1}{4}}$, $i = s,u$;
- $D_f|E^{cs}(x)$ é uniformemente contratante fora de $B(p,r)$ com taxa λ_s.
- $D_f|E^{cu}(x)$ é uniformemente expansivo fora de $B(q,r)$ com taxa λ_u.

Observe também que as condições acima valem em uma vizinhança de g (os dois últimos, a taxa expansivo/contração, estará perto de λ_s e λ_u, respectivamente).

Além disso, pela maneira como construímos g, $E^c = E^{cs} \oplus E^{cu}$ é unicamente integrável e normalmente hiperbólica, e assim, o mesmo acontece em uma vizinhança de g.

Mais ainda, esse exemplo também é robustamente transitivo, já que podemos tomar uma folha central periódica que não intersecta o suporte ou a perturbação e, portanto, suporta um Anosov transitivo, e pela estabilidade estrutural das folhas centrais, as variedades estáveis e instáveis deste toro periódico são densas.

Mostramos que g satisfaz as hipóteses de Teorema 4.0.3 e, portanto, possui uma única medida de máxima entropia.

Este exemplo compartilha semelhanças com o exposto no capítulo anterior.

Sejam

$$\sigma_1 = \sup\{\| D_g|E^{cs}(x) \|; x \in M\},$$

$$\sigma_2 = \sup\{\| D_g|E^{cu}(x) \|; x \in M\},$$

e $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_1\lambda_s^m < 1$ e $\sigma_2\lambda_u^m > 1$. Seja $\rho > 0$ satisfazendo

$$\mu(M \backslash B(j, \rho)) \geq 1 - \tfrac{1}{2m}, \; j = p, q$$

onde μ é a medida de Borel de f, onde a medida de Borel é a única medida de máxima entropia do difeomorfismo de Anosov.

Assumamos que $2\delta < \frac{\rho}{2}$. Seja $\pi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ a semiconjugação (da Propopsição 5.1.1, $d(\pi, id) < \delta$).

Observe que E^{cs} e E^{cu} são unidimensionais e, assim, são integráveis. Vamos denotar por $W^{cs}(x)$ a folha (curva integral máxima) de E^{cs} contendo x. Não afirmamos que a curva é única. Também denotamos por $W^{cs}_\gamma(x)$ o arco em $W^{cs}(x)$ de tamanho 2γ com x no centro. Analogamente, definimos W^{cu}.

Como mencionado acima, a folheação por $\mathbb{T}^2$ tangente a E^c é preservada por g. Denotamos por W^c a folha da folheação tangente a $E^c = E^{cs} \oplus E^{cu}$.

Seja J o segmento tangente a E^{cs}. Dizemos que E^{cs} é localmente integrável através de J se qualquer curva integral máxima de E^{cs} através de qualquer ponto de J deve conter J, e analogamente para E^{cu}.

Lema 5.2.1. *Seja $x \in \mathbb{T}^n$ um ponto qualquer. Então um e apenas um dos seguintes vale:*

(1) $\pi^{-1}(x)$ consiste em um único ponto.

(2) $\pi^{-1}(x)$ é um segmento tangente a E^{cs} de comprimento menor que 2δ.

(3) $\pi^{-1}(x)$ é um segmento tangente a E^{cu} de comprimento menor que 2δ.

(4) $\pi^{-1}(x)$ é um quadrado tangente a $E^{cs} \oplus E^{cu}$ tal que:

- *para cada $y \in \pi^{-1}(x)$, temos que $W^{cs}_\gamma(y) \cap \pi^{-1}(x)$ é um segmento estável central que denotamos por $J^{cs}(y)$ e E^{cs} é localmente integrável através de $J^{cs}(y)$, e similarmente para E^{cu}; e*
- *se y e z estão em $\pi^{-1}(x)$, então $\varnothing \neq J^{cs}(y) \cap J^{cu}(z) \in \pi^{-1}(x)$.*

Demonstração. Assuma que $\pi^{-1}(x)$ é não-trivial, e seja $y, z \in \pi^{-1}(x)$ dois pontos distintos. Pela hiperbolicidade normal, concluímos que $y \in W^c(z)$.

Também, se $z \in W^{cs}_\gamma(y)$, então $[y, z]^{cs} \subset \pi^{-1}(x)$. Isso significa que $W^{cs}_\gamma(y) \cap \pi^{-1}(x)$ é um segmento, digamos $J^{cs}(y)$, cujo comprimento permanece limitado no futuro e no passado e, pela dominação em $E^{cs} \oplus E^{cu}$, concluímos que E^{cs} é unicamente integrável através de $J^{cs}(y)$, e similarmente, se $z \in W^{cu}_\gamma(y)$.

Assuma também que nem (2) nem (3) valem.

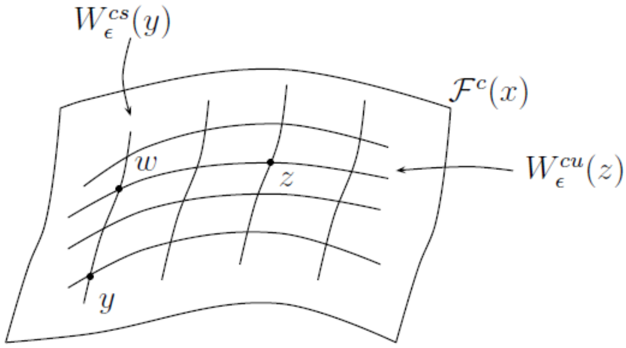

Figura 5.2: Estrutura produto em uma classe de equivalência.

Considere curvas integrais centrais locais $W_\gamma^{cs}(y)$ e $W_\gamma^{cu}(z)$, e seja w o ponto de interseção (veja Figura 5.2). Embora possam não ter taxas de expansão ou contração, um argumento similar pode ser feito para que $\pi(w) = \pi(z) = \pi(y)$.

Portanto, $\{w\} = J^{cs}(y) \cap J^{cu}(y) \in \pi^{-1}(x)$.

$\square$

Corolário 5.2.2. *As condições (H1) e (H2) são satisfeitas por g.*

Demonstração. Precisamos apenas verificar (H1) no caso (4).

Pela notação acima, observamos que:

$$g(J^{cs}(y) = J^{cs}(g(y)) \quad \text{e} \quad g(J^{cu}(y) = J^{cu}(g(y))$$

Assim sendo, a estrutura produto é invariante e não é difícil ver que a cardinalidade máxima de um conjunto (n, ϵ)-gerador na classe de equivalência tem no máximo crescimento polinomial.

De fato, pela dominação, concluímos que $\| \; D_{g^n}|E^{cs}(y) \; \| \leq (a^{\frac{1}{2}})^n$ para cada n grande o suficiente e, de fato, o mesmo vale para qualquer $w \in J^{cu}(y)$. Assim, o comprimento de $g^n(J^{cs}(w))$ diminuirá exponencialmente rápido.

Observamos que uma propriedade semelhante é válida no passado: os segmentos *cu* estão contraindo exponencialmente rápido (veja Figura 5.3).

Seja $\epsilon > 0$ dado e n_0 tal que $(a^{\frac{1}{n}})2\delta < \frac{\epsilon}{2}$. Então, para $n \geq n_0$, não é difícil ver que podemos cobrir $g^n(\pi^{-1}(x))$ com no máximo $\frac{4\delta}{\epsilon} + 1$ bolas de raio ϵ.

Assim sendo, temos uma (n, ϵ)-cobertura de $\pi^{-1}(x)$ com crescimento polinomial com n. Portanto, $h_{top}(g, [y]) = 0$.

Finalmente, para condição (H2), consideremos x um ponto genérico. Então, o Teorema Ergódico de Birkhoff garante que:

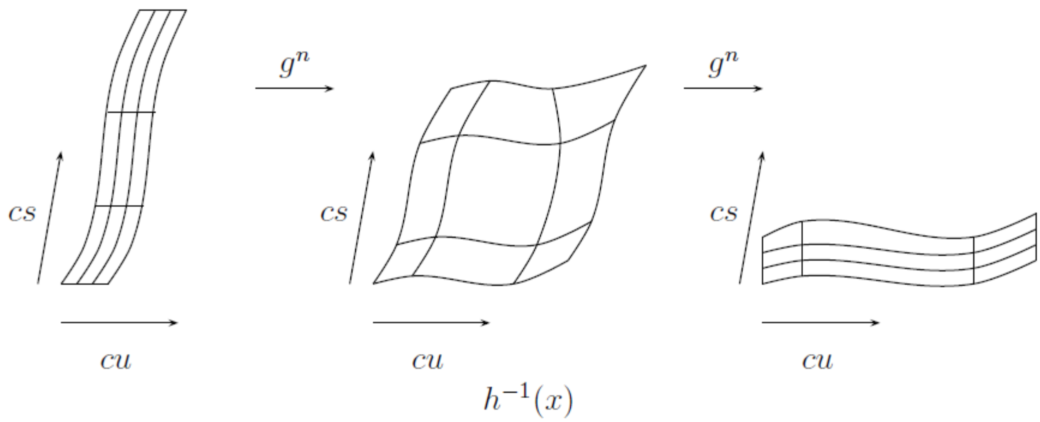

Figura 5.3: Iteração de uma classe de equivalência

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{j : f^j \notin B(p,\rho)\} \geq 1 - \frac{1}{2m},$$

e, então, para $n \geq n_0$, com n_o garante, temos que:

$$\frac{1}{n}\{j : f^j(x) \notin B(p,\rho)\} \geq 1 - \frac{1}{2m}.$$

Agora, tome um ponto, $y \in h^{-1}(x)$. Então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$dist(g^n(y), f^n(x)) < Cr.$$

Então, para $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n}\{j : g^j(x) \notin B(p,\frac{\rho}{2}\} \geq 1 - \frac{1}{2m}.$$

Afirmamos que $h^{-1}(x)$ consiste em um ponto. Por outro lado, seja $y_1, y_2 \in h^{-1}(x)$. Tome $n \geq n_0$, tal que:

$$(\sigma\lambda_u^m)^{-n} 2Cr < dist(y_1, y_2)$$

Assim, $dist(g^n(y_1), g^n(y_2)) < 2Cr$, e o segmento central entre y_1, y_2 é tammbém uma classe equivalente, temos que:

$$dist(y_1, y_2) = dist(g^{-n}(g^n(y_1)), g^{-n}(g^n(y_2)))$$

$$\leq (\sigma\lambda_u^m)^{-n} dist(g^n(y_1), g^n(y_2))$$

$$< (\sigma\lambda_u^m)^{-n} 2Cr < dist(y_1, y_2)$$

Uma contradição. Assim, para qualquer ponto x μ-genérico, temos que $h^{-1}(x)$ consiste de um único ponto.

$\square$

5.3 Derivado de Anosov através da bifurcação de Hopf

Até agora vimos exemplos robustamente transitivos. Esse não é.

Lembre-se que o clássico mapa derivado de Anosov no 2-toro é obtido de um mapa de Anosov executando uma deformação em um ponto que passa por uma bifurcação. O resultado é um mapa Axioma A, cujo conjunto não-errante consiste de um ponto fixo repulsor e um atrator hiperbólico não-trivial.

No toro $\mathbb{T}^3$, podemos fazer uma construção semelhante onde o ponto fixo passa por uma bifurcação de Hopf. O resultado não é Axioma A.

De fato, o conjunto não-errante consiste de um ponto fixo repulsor e de um atrator transitivo não-hiperbólico (por causa da existência de um círculo invariante - correspondente à bifurcação de Hopf - dentro do atrator).

Este exemplo pode ser obtido a partir de um Anosov linear através de uma bifurcação de Hopf.

Seja $f_A : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ um difeomorfismo Anosov linear induzido pela matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & a^2-1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

onde $a \in \mathbb{Z} \setminus 0$.

A matriz é hiperbólica e possui apenas um autovalor real λ_u que é maior que 1. Os outros autovalores são complexos de módulo $\lambda_s < 1$. Assim, f_A é um difeomorfismo Anosov linear em $\mathbb{T}^3$ e $T\mathbb{T}^3 = E^s_A \oplus E^{uu}_A$ com $dimE^s = 2$.

Considere $p = 0$ um ponto fixo de f_A. Em coordenadas locais, e com respeito à decomposição $T\mathbb{T}^3 = E^s_A \oplus E^{uu}_A$, o mapa f_A parece $f_A(x, y) = (\lambda_s, Rx, \lambda_u y)$, onde R é uma rotação.

Deformamos f_A dentro de uma bola $B(p, r)$ para obter um difeomorfismo $g : T\mathbb{T}^3 \to T\mathbb{T}^3$, de forma que em coordenadas locais em torno de p (e com respeito à decomposição $E^s_A \oplus E^{uu}_A$) o mapa g é:

$$g(x, y) = ((1 - \chi(y))\lambda_s Rx + \chi(y)\phi(\| x \|)Rx, \lambda_u y),$$

onde χ é uma função de colisão e ϕ é uma função suave não-crescente com $\phi(t) = \lambda_s$ se $t \geq 1$ e $\lambda_u > \phi(t) = \alpha > 1$ para $t \leq 0$.

Vemos que para g o ponto fixo p é um repulsor, cercado por um círculo invariante S (em $y = 0$ existe um único $c > 0$ tal que $\| x \| = c$, onde $\phi(c) = 1$).

De fato, não é difícil ver que g pode ser visto como o resultado de uma bifurcação de Hopf em p (veja Figura 5.4).

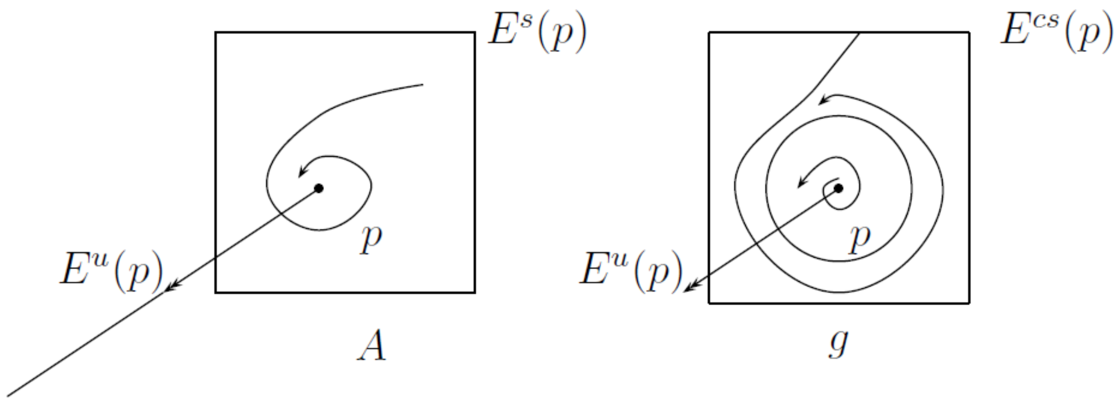

Figura 5.4: Derivada de Anosov através da bifurcação de Hopf.

Observe que E^s_A é invariante sob D_g. De fato, g é parcialmente hiperbólico, $T\mathbb{T}^3 = E^{cs} \oplus E^{uu}$, onde $E^{cs} = E^s_A$.

Denote por W^{cs} a folheação central estável tangente a E^{cs} e por W^{uu} a folheação instável (forte). Denotemos também por $W^u(p)$ a depressão da repulsão de p e por $W^u_{loc}(p)$ a depressão local da repulsão.

As principais propriedades de g são as seguintes:

- p é um repulsor de g.
- g é parcialmente hiperbólico em $\mathbb{T}^3 = E^{cs} \oplus E^{uu}$.
- D_g contrai uniformemente E^{cs} fora de $B(p, r)$.
- $\parallel D_g|_{E^{cs}}(x) \parallel \leq 1$ para qualquer $x \notin W^u_{loc}(p)$.
- $d_{C^0}(g, f) < r$.
- $E^{cs} = E^s_A$ é localmente integrável.

Provemos que um difeomorfismo g satisfazendo as condições acima possui uma única medida de máxima entropia.

Denote por h a semiconjugação entre f e g. Não é difícil ver que h é injetiva em cada $W^{uu}(y, g)$ para qualquer y e, mais ainda, $h(W^{uu}(y, g)) = W^{uu}(h(y), f_A)$.

Também afirmamos que $h(W^{cs}(y, g)) = W^s(h(y), f_A)$. Para ver isso, elevemos g e h para a cobertura universal $\mathbb{R}^3$. Denote a elevação por G e H. Assim, $H \circ G = A \circ H$ e $H - Id$ é limitado.

Seja $z \in W^{cs}(y, G)$ e assuma que:

$$H(z) \notin W^s(H(y), A) = H(y) + E^s_A$$

Observe que a distância entre $G^n(y)$ e $G^n(z)$ pode crescer no máximo com taxa exponencial $\alpha = sup \parallel D_g|E^{cs} \parallel$.

Por outro lado, se $H(z) \notin W^s(H(y), A)$, então a distância entre $A^n(H(y))$ e $A^n(H(z))$ vai crescer com taxa exponencial λ_u. Desde que, $A^n(H(y)) = H(G^n(y))$ e $A^n(H(z)) = H(G^n(y))$, temos uma contradição. Isso prova nossa afirmação.

Em particular, segue-se que uma classe equivalente deve estar contida em uma variedade central estável. Como $h(p) = p$, temos que:

$$W^{cs}(p) = W^s(p, f_A) = W^s(h(p), f_A) = h(W^{cs}(p)),$$

e percebemos que o círculo $S \subset W^{cs}(p)$ atrai todos os pontos em $W^{cs}(p)$ exceto p.

Denote por D o disco fechado em $W^{cs}(p)$ limitado por S. Temos:

$$[p] = h^{-1}(p) = \{z : d(g^n(z), p) < Cr, \forall n \in \mathbb{Z}\} = D$$

Lema 5.3.1. *Se $x \notin W^{cs}(p)$, então $diam(g^n[x]) \to 0$.*

Demonstração. Como $x \notin W^{cs}(p)$, existem infinitamente muitos $n \geq 0$ tais que $g^n(x) \notin B(p, r)$ (e podemos supor sem perda de generalidade que $g^n(x) \notin W^u_{loc}(p)$).

Portanto, $\parallel D_g|E^{cs}(x) \parallel \to 0$ e o mesmo vale para qualquer $y \in [x]$ (e uniformemente em y). A conclusão segue.

□

Corolário 5.3.2. *As condições (H1) e (H2) valem.*

Demonstração. Como dissemos antes, a classe $[p]$ é o disco fechado D, com p um repulsor, e a fronteira de S atrai tudo no disco exceto p. Assim sendo, $h_{top}(g, [p]) = 0$.

Se $[x] \subset W^{cs}(p)$ e $[x] = [p]$, então a classe $[x]$ é atraída pelo círculo invariante e, então, $h_{top}(g, [x]) = 0$.

Agora, se $[x]$ não é um subconjunto de $W^{cs}(p)$, então $diam(g^n[x]) \to 0$ e, assim, para qualquer ϵ e qualquer n suficientemente grande, a cardinalidade de qualquer conjunto (n, ϵ)-gerador em $[x]$ é limitado e, assim, $h_{top}(g, [x]) = 0$.

Provamos que (H1) vale.

A condição (H2) pode ser provada com métodos semelhantes aos do exemplo anterior.

□

Referência Bibliográfica

[1] ALVES, José F.; BONATTI, Christian; VIANA, Marcelo. 2000, *SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding.* Invent. Math **140** 351-98.

[2] BERTIN, M.J.; A. DECOMPS-GUILLOUX; M. GRANDET-HUGOT; M. PATHIAUX-DELEFOSSE; J.P. SCHREIBER. 1992, *Pisot and Salem Numbers.* Birkhauser, Basel.

[3] BOWEN, R; RUELLE, D. *The ergodic theory of Axiom A flows* Invent. Math. **29** 181-202.

[4] BOWEN, Rufus. 2008, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* Springer.

[5] BRIN, M; BURAGO, D; IVANOV, S. 2009. *Dynamical coherence of partially hyperbolic diffeomorphisms of the 3-torus* Mod. Dyn.

[6] BUZZI, J.; FISHER, T.; SAMBARINO, M.; VÁSQUEZ, C. 2011, *Maximal entropy measures for certain partially hyperbolic, derived from Anosov systems.* Cambridge University Press, **32** 63-79.

[7] BUZZI, J; FISHER, T., *Entropic stality beyong partial hyperbolicity.*

[8] COWIESON, W.; YOUNG, L.-S. 2005. *SRB measures as zero-noise limits.* Ergodic Theory Dynam. Systems 25, no. 4, 1115-1138.

[9] DINABURG, E. 1970. *A correlation between topological entropy and metric entropy.* Dokland Academii Neuk SSSR, **190** 19-22.

[10] DINIZ, Diego Araújo. 2017, *Tópicos de Dinâmica Hiperbólica.* UFMA, 63f.

[11] FRANKS, J. 1970. *Anosov diffeomorphisms.* Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkelev, Calif., 1968) pp. 61-93, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. MR0271990.

[12] HAMMELINDL A. 2009, *Leaf conjugacies of the torus*, Ergodic Theory Dynam. Systems, and PhD Thesis, University of Toronto. MR27367818.

[13] HERTZ, F. Rodriguez; HERTZ, A. Rodriguez; TAHZIBI, A.; URES. R. *Maximizing measures for partially hyperbolic systems with compact center leaves*.

[14] HUA, Y; SAGHIN, Z; XIA, Z. 2008, *Topological entropy and partially hyperbolic diffeomorphisms*, Ergodic Theory Dynamic Systems. 843-862.

[15] KOLMOGOROV, A. 1958, *A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces*, Dokland Academii Neuk SSSR **119** 861-864.

[16] LEDRAPPIER, F.; WALTERS, P. 1977, *A relativized variational principle for continuous transformations*, J. Lond. Math. Soc. **16** 568-576.

[17] MAÑÉ, Ricardo. 1985, *Hyperbolicity, sinks and measure in one-dimensional dynamics* Commun. Math. Phys. **100** 495-524.

[18] MCSWIGGEN, P. 1993, *Diffeomorphism of the torus with wandering domains* Proc. Amer. Math. Soc. **117** 1175-1186.

[19] MISIUREWICZ, M. 1973. *Diffeomorphisms without any measures with maximal entropy*, Bull.Acad.Polon.Sci.Sce.Sci.Math.Astronom **21** 903-910.

[20] PESIN, Yakov. 2004. *Lectures on Partial Hyperbolicity and Stable Ergodicity*, European Math. Soc.

[21] POLLICOTT, M.; YUTI, M. 1998, *Dynamical Systems and Ergodic Theory* London Math. Soc. **40**.

[22] SHUB, M. 1987, *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer, New York.

[23] SINAI, Ya. G. 1988. *About A. N. Kolmogorov work on the entropy of dynamical systems*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **8(4)** 501-502.

[24] SMYTH, C. 1975. *The conjugates of algebraic integers*, Advanced Problem. Vol. 5931. Amer. Math. Monthly **82** 86.

[25] URES, R. 2012, *Intrinsic Ergodicity of Partially Hyperbolic Diffeomorphisms with a Hiperbolic Linear Part*. Proc. Am. Math. Soc. **140** 1973-1985.

[26] WEISS, B. 1970. *Intrinsically ergodic systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **76)** 1266-1269.

[27] YOUNG, L.-S. 1998. *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Ann. of Math, no. 3, **147** 585D-650.