Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

Dissertação de Mestrado

Marisa Lemos de Almeida

VALORIZAÇÃO DE REES

São Luís - MA

2020

Marisa Lemos de Almeida

VALORIZAÇÃO DE REES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Henrique Apoliano Albuquerque Lima.

São Luís - MA

2020

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Almeida, Marisa Lemos de.
Valorização de REES / Marisa Lemos de Almeida. - 2020.
71 f.

Orientador(a): Pedro Henrique Apoliano Albuquerque Lima.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2020.

1. Fecho integral de ideais. 2. Valorização de Rees. 3. Valorizações. I. Lima, Pedro Henrique Apoliano Albuquerque. II. Título.

Marisa Lemos de Almeida

VALORIZAÇÃO DE REES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 03 de Agosto de 2020.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Pedro Henrique Apoliano Albuquerque Lima
(Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez
Universidade de São Paulo - USP

Prof. Dr. Thiago Henrique de Freitas
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Aos meus pais, Maria Antônia e Isael e ao meu orientador Pedro Lima.

Agradecimentos

Agradeço a Deus. À minha família, em especial, aos meus pais Maria Antônia e Isael. Aos meus primos Mateus, Rhuiago e aos meus tios Amadeus e Maria Lemos pelo carinho e apoio que me dedicaram.

Ao meu orientador prof. Dr. Pedro Lima, pela paciência, responsabilidade e disponiblidade em todos os momentos de dúvidas e a todos os professores do Programa de Mestrado.

Aos meus amigos Lauana, Beatriz, Marcus Vinícius, Arnando e Felipe, com os quais sempre pude contar.

Finalmente, o meu agradecimento à Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão - FAPEMA - pelo apoio financeiro.

Óbvio é a palavra mais perigosa de toda a Matemática.

(Eric Temple Bell)

Resumo

Neste trabalho, exibiremos a noção de valorização de Rees de um ideal em um anel Noetheriano. Para isso, apresentaremos resultados envolvendo valorizações, entre eles, a Existência de anéis de valorizações Noetherianos e o Critério de valorização para o fecho integral de um ideal. Por fim, trataremos da Unicidade e Existência de valorizações de Rees em anéis Noetherianos.

Palavras-chave: Fecho integral de ideais, Anéis de valorizações, Valorizações de Rees.

Abstract

In this work, we will show the notion of Rees' valuations of an ideal in a Noetherian ring. For this, we will present results involving valuations, among them, the Existence of Noetherian valuations rings and the Valuation Criterion for the integral closure of an ideal. Finally, we will deal with the Uniqueness and Existence of Rees valuations in Noetherian rings.

Keywords: Integral closure of ideals, Valuations rings, Rees valuations.

Notação

Abaixo seguem as notações utilizadas neste trabalho.

- $\overline{R}$ - fecho integral do anel R;
- $\mathrm{Q}(R)$ - anel total de frações de um anel R;
- $\mathrm{Frac}(R)$ - corpo de frações de um domínio R;
- $(R, \mathfrak{m})$ - anel local R, cujo ideal maximal é $\mathfrak{m}$;
- $\dim R$ - dimensão de Krull de R;
- $\mathrm{Ass}(R/I)$ - conjunto dos ideais primos associados de I;
- $\mathrm{Min}(R/I)$ - conjunto dos ideais primos minimais de I;
- $\mathrm{Min}(R)$ - conjunto dos ideais primos minimais de R;
- $\sqrt{I}$ - radical do ideal I;
- $\mathfrak{R}$ - radical de Jacobson do anel R;
- $\kappa(\mathfrak{p})$ - corpo de frações de $R/\mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{p} \subset R$ é um ideal primo;
- $\mathcal{RV}(I)$ - conjunto das valorizações de Rees de I;
- ord_I - ordem do ideal I;
- R_v - anel de valorização da valorização v;
- $\mathfrak{m}_v$ - ideal maximal do anel de valorização R_v;
- $\mathfrak{m}_V$ - ideal maximal do anel de valorização V;
- $\mathfrak{m}_V \cap R$ - centro da valorização de V em R;
- IV - extensão do ideal I no anel de valorização V;

- $I(R/\mathfrak{p})$ - extensão do ideal I no anel $R/\mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{p} \subset R$ é um ideal primo;
- $\mathrm{ht}(I)$ - altura do ideal I;
- $S^{-1}R$ - localização do anel R em um subconjunto multiplicativo $S \subseteq R$;
- $S^{-1}I$ - extensão do ideal I no anel local $S^{-1}R$;
- $R_\mathfrak{p}$ - localização do anel R no subconjunto mutiplicativo $R - \mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{p} \subset R$ é um ideal primo;
- $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ - ideal maximal do anel local $R_\mathfrak{p}$ ou extensão do ideal primo $\mathfrak{p}$ no anel local $R_\mathfrak{p}$;
- $I_\mathfrak{p}$ - extensão do ideal I no anel local $R_\mathfrak{p}$;
- R_n - componente homogênea de grau n de um anel graduado R;
- $\deg(r)$ - grau do elemento r;
- $R[It]$ - álgebra de Rees de um ideal I;
- $\mathrm{gr}_I(R)$ - anel graduado associado de I.

Sumário

1 Introdução

A Álgebra Comutativa é o ramo da Álgebra Abstrata que trata do estudo de anéis comutativos, bem como de seus ideais e módulos. Os anéis comutativos mais básicos são o anel $\mathbb{Z}$ de números inteiros racionais e os anéis polinomiais sobre um corpo. Foi durante o estudo de extensões do anel $\mathbb{Z}$ que Richard Dedeking introduziu a noção de ideal, por volta de 1870, e desde então matemáticos importantes têm deixado contribuições significativas nessa área. Dentre eles, podemos apontar David Hilbert, Emmy Noether, Wolfgang Krull, Oscar Zariski e David Rees. Este último terá um papel de destaque neste trabalho.

David Rees foi um matemático britânico, considerado um dos mais brilhantes de sua geração. Rees nasceu em 29 de Maio de 1918 e estudou Matemática na Sidney Sussex College, em Cambridge. Ele havia iniciado sua pesquisa de Pós-graduação em Setembro de 1939, quando foi recrutado para o Bletchley Park, para fazer parte da equipe que mais tarde decifraria a máquina alemã Enigma. Apesar dos poucos meses de estudo de Pós-graduação antes de ingressar no Bletchley Park, esse tempo foi suficiente para Rees alcançar notáveis resultados, pois em 1940 ele publicou seu primeiro artigo, intitulado *On semi-groups*, onde consta um resultado hoje conhecido como O Teorema de Rees. Já o primeiro artigo de David em Álgebra Comutativa, foi escrito em 1954 em conjunto com o matemático Douglas Northcott e nele é introduzido o conceito de redução de um ideal.

Rees também foi o primeiro a estudar anéis de valorizações associados a um ideal I de um anel comutativo R (com unidade). É conhecido (ver por exemplo [15]) que

$$\overline{I} = \bigcap_{V} IV \cap R$$

quando V percorre todos os anéis de valorizações discretas entre $R/\mathfrak{p}$ e $\kappa(\mathfrak{p})$, e $\mathfrak{p}$ varia sobre todos os ideais primos minimais de R. Se R é um anel Noetheriano, tais anéis de valorizações também são Noetherianos. Rees foi mais além e provou que existe uma quantidade finita de valorizações satisfazendo a igualdade acima não apenas para I, mas também para toda potência de I. Estes anéis foram posteriormente chamados de valorizações de Rees. O primeiro caso da existência e unicidade das valorizações de Rees foi provado por este em 1956 [11] para ideais em anéis Noetherianos locais de dimensão zero.

Já o segundo caso, para ideais arbitrários em domínios Noetherianos, foi provado por ele em 1956 [12] e o Teorema geral de Existência foi provado em [13] e o de Unicidade em [11].

Neste texto teremos como objetivo principal o estudo das valorizações de Rees, o que faremos com base no trabalho de Swanson e Huneke [15]. No segundo capítulo apresentaremos resultados preliminares, que serão usados ao longo do texto, bem como as definições de fecho integral de anéis e ideais e resultados envolvendo anéis Noetherianos, domínio de Krull e valorizações. No terceiro capítulo trataremos das valorizações de Rees, tendo como resultados principais os Teoremas da Unicidade e Existência de valorizações de Rees em um anel Noetheriano.

2 Preliminares

Neste capítulo elencaremos algumas definições e resultados essenciais para o desenvolvimento e entendimento deste trabalho. Para isso, usaremos [15] como principal bibliografia. Vale enfatizar que no decorrer de todo o texto, os anéis considerados serão sempre comutativos com unidade.

2.1 Fecho integral de anéis e ideais

Nesta seção faremos uma introdução ao fecho integral de anéis e ideais, mostrando suas definições, algumas propriedades e resultados elementares.

Definição 2.1. Sejam R um anel e S uma R-álgebra contendo R. Um elemento $r \in S$ é dito **integral sobre $\boldsymbol{R}$**, se existem um inteiro n e elementos $a_1, \ldots, a_n \in R$ tais que:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

O conjunto de todos os elementos de S que são integrais sobre R é chamado de **fecho integral de $\boldsymbol{R}$ em $\boldsymbol{S}$** e é denotado por $\overline{R}$. Se todos os elementos de S são integrais sobre R, então S é **integral sobre $\boldsymbol{R}$**. Se $R = \overline{R}$, dizemos que R é **integralmente fechado**.

Proposição 2.2. *Um domínio R de fatoração única é integralmente fechado.*

Demonstração. Seja $\frac{a}{b} \in \mathrm{Frac}(R)$, onde $a, b \in R$ e $b \neq 0$. Após cancelamentos, podemos supor que a e b não possuem em suas fatorações elementos irredutíveis em comum, isto é, $a = \alpha_1 \cdots \alpha_s$ e $b = \beta_1 \cdots \beta_r$, onde cada α_i e cada β_j é irredutível e $\alpha_i \neq \beta_j$ para todo $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, r$. Suponha que $\frac{a}{b}$ seja integral sobre R; então existem um inteiro n e elementos $r_1, \ldots, r_n \in R$, tais que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + r_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \ldots + r_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right) + r_n = 0.$$

Dessa forma, $b^n \cdot \frac{a^n}{b^n} + r_1 b^n \cdot \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \ldots + r_{n-1} b^n \cdot \frac{a}{b} + r_n b^n = 0$. Isso implica que $a^n + r_1 b a^{n-1} + \ldots + r_{n-1} b^{n-1} a + r_n b^n = 0$, ou seja, $a^n = b(-r_1 a^{n-1} - \ldots - r_{n-1} b^{n-2} a - r_n b^{n-1})$.

Tomando $c = -r_1a^{n-1} - \ldots - r_{n-1}b^{n-2}a - r_nb^{n-1}$, obtemos $a^n = bc$. Como R é domínio de fatoração única, segue que b é unidade em R. Logo, existe um elemento $y \in R$, tal que $b \cdot y = 1$. Isso implica que $\frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{1}{y}} = a \cdot y \in R$. Concluímos, então, que $\frac{a}{b} \in R$. Portanto, R é integralmente fechado. $\square$

Definição 2.3. Sejam R um anel e $I \subseteq R$ um ideal. Um elemento $r \in R$ é dito **integral sobre $\boldsymbol{I}$**, se existem um inteiro $n \geq 1$ e $a_i \in I^i$, com $1 \leq i \leq n$, tais que:

$$r^n + a_1r^{n-1} + ... + a_{n-1}r + a_n = 0.$$

O conjunto de todos os elementos integrais sobre I é chamado **fecho integral** de I e é denotado por $\overline{I}$. Se $I = \overline{I}$, dizemos que I é **integralmente fechado**.

Exemplo 2.4. Se x e y são elementos no anel R, então $xy \in \overline{(x^2, y^2)}$, onde (x^2, y^2) é um ideal em $R[x, y]$. De fato, se tormarmos $n = 2, a_1 = 0$ e $a_2 = -x^2y^2$, com $a_i \in (x^2, y^2)$, obtemos $(xy)^2 + a_1(xy) + a_2 = (xy)^2 + 0(xy) - x^2y^2 = 0$. De modo que $xy \in \overline{(x^2, y^2)}$. Analogamente, para qualquer inteiro não-negativo $i \leq d$, vale $x^iy^{d-i} \in \overline{(x^d, y^d)}$.

Exemplo 2.5. Se I é um ideal em R, então $\sqrt{I}$ é integralmente fechado, isto é, $\sqrt{I} = \overline{\sqrt{I}}$. Com efeito, como todo ideal está contido no seu fecho integral, resulta que $\sqrt{I} \subseteq \overline{\sqrt{I}}$. Para a outra inclusão, considere $y \in \overline{\sqrt{I}}$. Assim, existem um inteiro $m \geq 1$ e $b_i \in (\sqrt{I})^i$, com $1 \leq i \leq m$, tais que $y^m + b_1y^{m-1} + \ldots + b_{m-1}y + b_m = 0$. Isso implica que $y^m + b_1y^{m-1} + \ldots + b_{m-1}y + b_m \in I$, e como $b_i \in I$, segue que $y^m \in I$. Concluímos, então, que $y \in \sqrt{I}$.

Observação 2.6. O fecho integral de ideais possui algumas propriedades básicas, dentre elas destacamos a **persistência do fecho integral**, que consiste em:
Seja $I \subseteq R$ um ideal. Se $\varphi : R \to B$ é um homomorfismo de anéis, então $\varphi(\overline{I}) \subseteq \overline{\varphi(I)B}$.

Proposição 2.7. *Seja R um anel e $I \subseteq R$ um ideal. Para o subconjunto multiplicativo $S \subseteq R$, tem-se $S^{-1}\overline{I} = \overline{S^{-1}I}$.*

Demonstração. Pela persistência do fecho integral, $S^{-1}\overline{I} \subseteq \overline{S^{-1}I}$. Para a recíproca, seja $r \in \overline{S^{-1}I} \subseteq S^{-1}R$ e escreva

$$r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = \frac{0}{1} \tag{2.1}$$

para algum inteiro positivo n e $a_i \in S^{-1}I^i$. Dessa forma, $a_i = \dfrac{x_i}{s_i}$ com $x_i \in I^i, s_i \in S$ e $r = \dfrac{x}{t}$ onde $x \in R$ e $t \in S$. Tomando $s = s_1s_2\cdots s_nt$, resulta $a_is \in I^i$ e $sr \in R$. Multiplicando (2.1) por s^n, obtemos

$$(rs)^n + a_1s(rs)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s^{n-1}(rs) + a_ns^n = \frac{0}{1}.$$

Existe $s' \in S$ tal que $s'\left[(rs)^n + a_1s(rs)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s^{n-1}(rs) + a_ns^n\right] = 0$ e multiplicando a equação acima por $(s')^{n-1}$, temos

$$(rss')^n + a_1ss'(rss')^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(ss')^{n-1}(rss') + a_n(ss')^n = 0.$$

Dessa forma, $rss' \in \overline{I}$. Portanto, $r \in S^{-1}\overline{I}$. □

Proposição 2.8. *Sejam R um anel não necessariamente Noetheriano e $I \subseteq R$ um ideal. Então, um elemento $r \in \overline{I}$ se, e somente se, para todo ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ em R, a imagem de r em $R/\mathfrak{p}$ pertence ao fecho integral de $I(R/\mathfrak{p})$.*

Demonstração. Pela Persistência do fecho integral, vale $\overline{I}(R/\mathfrak{p}) \subseteq \overline{I(R/\mathfrak{p})}$. Logo, se $r \in \overline{I}$, segue que a imagem de r em $R/\mathfrak{p}$ está contida em $\overline{I(R/\mathfrak{p})}$.

Reciprocamente, seja $r \in R$ e defina $W = \{r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_n;\ a_i \in I^i\}$. Note que W é fechado para a multiplicação. Se $0 \in W$, segue que $0 = r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in I^i$ e então $r \in \overline{I}$. Caso contrário, suponha que $0 \notin W$. Seja $\sum$ o conjunto dos ideais contidos em $R - W$. Note que $\sum$ é não-vazio, pois $(0) \in \sum$. Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal $\mathfrak{q} \in \sum$.
Afirmação: $\mathfrak{q}$ é primo.
De fato, suponha por absurdo que $xy \in \mathfrak{q}$, onde $x \notin \mathfrak{q}$ e $y \notin \mathfrak{q}$. Como $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + (x)$, segue que $\mathfrak{q} + (x) \nsubseteq R - W$, ou seja, $x \notin R - W$; de modo que $x \in W$. Similarmente, $y \in W$. Como W é fechado, segue que $xy \in W$, o que é uma contradição.

Agora, tomemos um primo minimal $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. Daí, $\mathfrak{p} \cap W \subseteq \mathfrak{q} \cap W = \emptyset$. Por hipótese, $r + \mathfrak{p} \in \overline{I(R/\mathfrak{p})}$. Assim, tomando $r' = r + \mathfrak{p}$, obtemos

$$(r')^n + a_1^{'}(r')^{n-1} + \ldots + a_n^{'} = 0'$$

com $a_i^{'} \in I^i(R/\mathfrak{p})$ e $a_i \in I^i$. Logo, $(r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_n)' = 0'$ e isso implica que $r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathfrak{p}$. Portanto, $W \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$, o que é uma contradição. Segue que $0 \in W$ e assim $r \in \overline{I}$. □

Proposição 2.9. *Seja R um anel não necessariamente Noetheriano. Para algum elemento $r \in R$ e um ideal $I \subseteq R$, temos que $r \in \overline{I}$ se, e somente se, existe um inteiro n, tal que $(I+(r))^n = I(I+(r))^{n-1}$.*

Demonstração. Suponha que $r \in \overline{I}$; então existem $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in I^i$ tais que $r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_n = 0$. Assim,

$$r^n = -a_1 r^{n-1} - a_2 r^{n-2} \ldots - a_n$$

Note que $a_i r^{n-i} \in I^i(I+(r))^{n-i}$, pois $r^{n-i} \in (I+(r))^{n-i}$. Observe que $a_i r^{n-i} \in I^i(I+(r))^{n-i} \subseteq I(I+(r))^{i-1}(I+(r))^{n-i} = I(I+(r))^{n-1}$. Logo, $r^n \in I(I+(r))^{n-1}$. Note então que $(I+(r))^n = I^n + I^{n-1}r + I^{n-2}r^2 + \ldots + Ir^{n-1} + (r^n) = II^{n-1} + II^{n-2}r + II^{n-3}r^2 + \ldots + Ir^{n-1} + (r^n) \subseteq I(I+(r))^{n-1}$. Portanto, $(I+(r))^n = I(I+(r))^{n-1}$.

Para a recíproca, suponha que exista um inteiro n tal que $(I+(r))^n = I(I+(r))^{n-1}$. Como $r^n \in (I+(r))^n$, segue que $r^n \in I(I+(r))^{n-1}$. Temos $(I+(r))^{n-1} = I^{n-1} + I^{n-2}r + I^{n-3}r^2 + \ldots + Ir^{n-2} + r^{n-1}$. De onde segue

$$\begin{aligned} I(I+(r))^{n-1} &= I^n + I^{n-1}r + \ldots + I^2 r^{n-2} + Ir^{n-1} \\ &= Ir^{n-1} + I^2 r^{n-2} + \ldots + I^{n-1}r + I^n. \end{aligned}$$

Desse modo, podemos escrever $r^n = a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1}r + a_n$, onde $a_i \in I^i$ com $i = 1, \ldots, n$. Portanto, $r \in \overline{I}$. □

Definição 2.10. Sejam $J \subseteq I$ ideais de um anel R. Dizemos que J é uma **redução** de I, se existe um inteiro não-negativo n, tal que $I^{n+1} = JI^n$.

O corolário a seguir é obtido da Proposição 2.9.

Corolário 2.11. *Seja $r \in R$. Então $r \in \overline{I}$ se, e somente se, I é uma redução de $I+(r)$.*

Corolário 2.12. *Sejam $I \subseteq R$ um ideal e r um elemento no anel R. Suponha que exista um R-módulo finitamente gerado M satisfazendo as seguintes condições:*
(1) $rM \subseteq IM$;
(2) Sempre que $aM = 0$ para algum $a \in R$, temos $r \in \sqrt{(0:a)}$.
Então, $r \in \overline{I}$.

Demonstração. Seja M um $R-$módulo, onde $M = Rb_1 + \ldots + Rb_m$, isto é, $M = (b_1, \ldots, b_m)$ e tal que $rM \subseteq IM$. Então, para cada $i = 1, \ldots, m$ podemos escrever

$rb_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_j$ para algum $a_{ij} \in I$ e algum $b_j \in M$. Seja A a matriz $(\delta_{ij}r - a_{ij})$, onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker. Nesse caso, o delta de Kronecker se reduz à matriz identidade de ordem m. Seja b o vetor coluna $(b_1, \ldots, b_m) \in M^m$. Sendo assim, Ab será um vetor coluna, cuja primeira linha, por exemplo, é igual a $(\delta_{11}r - a_{11})b_1 + (\delta_{12}r - a_{12})b_2 +$ $+(\delta_{13}r - a_{13})b_3 + \ldots + (\delta_{1m}r - a_{1m})b_m = rb_1 - a_{11}b_1 - a_{12}b_2 - a_{13}b_3 - \ldots - a_{1m}b_m = 0$ de acordo com equação acima envolvendo rb_1. As demais linhas seguem analogamente e dessa maneira $Ab = 0$. Sendo assim, $\det(A)b = \text{adj}(A)Ab = 0$ e com isso para todo b_i, temos $\det(A)b_i = 0$, o que implica $\det(A)M = 0$. Tomando $a = \det(A)$ na condição (2), obtemos que $r \in \sqrt{(0 : \det(A))}$. Isso significa que para algum $k > 0$, vale $r^k \in (0 : \det(A))$, ou seja, $r^k\det(A) = 0$. Desenvolvendo

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} r - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \ldots & -a_{1m} \\ -a_{21} & r - a_{22} & -a_{23} & \ldots & -a_{2m} \\ -a_{31} & -a_{32} & r - a_{33} & \ldots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & -a_{m3} & \ldots & r - a_{mm} \end{bmatrix}$$

obtemos uma equação de dependência integral de r sobre I. Portanto, $r \in \overline{I}$. $\square$

Lema 2.13. *Sejam R um anel, M um R-módulo finitamente gerado, $\varphi : M \to M$ um homomorfismo de R-módulos e $I \subseteq R$ um ideal, tal que $\varphi(M) \subseteq IM$. Então, existe um inteiro n e $r_i \in I^i$, $0 \leq i \leq n$, tais que*

$$\varphi^n + r_1\varphi^{n-1} + \ldots + r_n\varphi^0 = 0,$$

onde $\varphi^0 : M \to M$ denota a aplicação identidade. Em particular, se $A \supseteq R$ é um anel tal que $x \in A$, $xM \subseteq M$ e M é fiel sobre $R[x]$, então $x \in \overline{R}$.

Demonstração. A segunda parte segue da primeira, pois tome φ como sendo a multiplicação por x, visto que $xM \subseteq M$ e como $(\varphi^n + r_1\varphi^{n-1} + \ldots + r_n\varphi^0)(1) = 0$, isso implica que $x^n + r_1x^{n-1} + \ldots + r_n = 0$, de modo que $x \in \overline{R}$.

Para a primeira parte, suponha $M = Rm_1 + \ldots + Rm_n$, isto é, $M = (m_1, \ldots, m_n)$. Como $\varphi(M) \subseteq IM$, escreva $\varphi(m_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}m_j$, para algum $a_{ij} \in I$. Seja A a matriz cuja entrada (i, j) é igual a $\delta_{i,j}\varphi - a_{ij}\text{Id}$ e seja m o vetor coluna $(m_1, \ldots, m_n) \in M^n$. Similarmente ao corolário anterior, obtemos $Am = 0$ e assim $\det(A)M = 0$. Desenvolvendo o $\det(A)$ encontramos uma função da forma $\varphi^n + r_1\varphi^{n-1} + \ldots + r_n\varphi^0$, onde $r_i \in I^i$. $\square$

Proposição 2.14. *Seja R um anel não necessariamente Noetheriano e integralmente fechado em $\mathrm{Q}(R)$. Então, para algum ideal I e algum não-divisor de zero f em R, temos $\overline{fI} = f\overline{I}$. Em particular, todo ideal principal gerado por um elemento não-divisor de zero em R é integralmente fechado.*

Demonstração. Suponha que $r \in \overline{fI}$, isto é, r é integral sobre fI. Então, existem um inteiro n e $b_i \in I^i$, tais que $r^n + b_1 f r^{n-1} + \ldots + b_{n-1} f^{n-1} r + a_n f^n = 0$. Dividindo essa equação por f^n, obtemos

$$\frac{r^n}{f^n} + \frac{b_1 f r^{n-1}}{f^n} + \ldots + \frac{b_{n-1} f^{n-1} r}{f^n} + \frac{b_n f^n}{f^n} = 0.$$

Dessa forma,

$$\left(\frac{r}{f}\right)^n + b_1 \left(\frac{r}{f}\right)^{n-1} + \ldots + b_{n-1} \left(\frac{r}{f}\right) + b_n = 0.$$

Logo, $\dfrac{r}{f} \in \overline{I}$ e com isso $r \in f\overline{I}$.

Reciprocamente, seja $r \in f\overline{I}$, com $r = sf, s \in \overline{I}$. Sendo $s \in \overline{I}$, temos $s^m + a_1 s^{m-1} + \ldots + a_{m-1} s + a_m = 0$, com $a_i \in I^i$. Agora, multiplicando por f^m, obtemos

$$(sf)^m + a_1 f^m s^{m-1} + \ldots + a_{m-1} f^m s + a_m f^n = 0.$$

Isso implica $(sf)^m + a_1 f f^{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_{m-1} f^{m-1} f s + a_m f^m = 0$. Com isso, $(sf)^m + a_1 f (fs)^{m-1} + \ldots + a_{m-1} f^{m-1}(fs) + a_m f^m = 0$, de modo que $r^m + a_1 f r^{m-1} + \ldots + a_{m-1} f^{m-1} r + a_m f^m = 0,\ \ a_i \in I^i$. Portanto, r é integral sobre fI, como queríamos.

Particularmente, seja $J = (f)$, onde f é não-divisor de zero em R. Como R é um ideal dele mesmo, temos $\overline{fR} = f\overline{R}$. Com isso, $\overline{J} = \overline{fR} = f\overline{R} = fR = J$, pois R é integralmente fechado. $\square$

Proposição 2.15. *Seja $R \subseteq S$ uma extensão de anéis e seja $I \subseteq R$ um ideal. Então,*

$$\overline{IS} \cap R = \overline{I}.$$

Demonstração. Temos $\overline{I} \subseteq \overline{I}S \cap R$. Mas, pela persistência do fecho integral, vale $\overline{I}S \subseteq \overline{IS}$. Logo, obtemos $\overline{I} \subseteq \overline{IS} \cap R$.

Para a recíproca, seja $r \in \overline{IS} \cap R$; então $r \in R$ e $r \in \overline{IS}$, de modo que

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0,$$

onde $a_i \in I^iS \subseteq S$; assim, $a_i = \sum_{j=1}^{k_i} z_jy_j$ com $z_j \in I^i$ e $y_j \in S$. Digamos que $z_j = \sum_i w_{ji}$. Seja $T \subseteq S$ uma R-álgebra finitamente gerada $R[y_j]$ e seja $J = (w_{ji})$. Então, $a_i \in J^iT$, o que implica $r \in \overline{JT}$. Como $r \in R$, suponha que $r \in \overline{JT} \cap R$. Queremos mostrar $r \in \overline{J}$, pois isso implicará $r \in \overline{I}$, visto que $J \subseteq I$. Sendo $r \in \overline{JT}$, temos do Corolário 2.11 que JT é uma redução de $JT + (r)$. Logo, existe um inteiro n, tal que

$$\begin{aligned} J(JT+(r))^nT &= (JT+(r))^{n+1} \\ &= (JT+(r))^n(JT+(r)) \\ &= (JT+(r))^n(J+r)T \\ &= J(J+(r))^nT + r(JT+(r))^nT. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Seja M o R-módulo finitamente gerado $(JT + (r))^nT$. Então, da Equação (2.2) obtemos $JM = JM + rM$ e com isso $rM \subseteq JM$. Além disso, se $aM = 0$ para algum $a \in R$, segue que $a(J + (r))^nT = 0$, de modo que $ar^n = 0$. Logo, $r^n \in (0 : a)$ e assim $r \in \sqrt{(0 : a)}$. Resulta, então, do Corolário 2.12 que $r \in \overline{J}$, e assim $r \in \overline{I}$. □

2.2 Anéis Noetherianos

Nesta seção abordaremos resultados sobre anéis Noetherianos e domínios de Krull.

2.2.1 Ideais principais

Lema 2.16. *Sejam R um anel Noetheriano, $J \subseteq R$ um ideal e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/J)$. Então, existe um não-divisor de zero $y \in R$, tal que $\mathfrak{p} = (J : y)$.*

Demonstração. Tome $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/J)$; então $\mathfrak{p} = (J : x)$, onde $x \notin J$. Por outro lado, temos

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/J)} \mathfrak{p} = D$$

onde D é o conjunto dos divisores de zero de R. Além disso, $R \nsubseteq (J : x)$, pois $(J : x) = \mathfrak{p}$ é primo. Da mesma forma, $R \nsubseteq \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/J)$. Com isso, pela Proposição A.2 existe $z \in R$, tal que

$$z \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/J)} \mathfrak{p}. \tag{2.3}$$

Logo, z é não-divisor de zero e consequentemente zx também não o é. Tome $y := zx$. Assim, $\mathfrak{p} = (J : x) \subset (J : zx) = (J : y)$. Por outro lado, $(J : zx) \subset (J : x) = \mathfrak{p}$, pois seja $a \in (J : zx)$, logo $azx \in J$. Daí, $az \in (J : x) = \mathfrak{p}$. Da Equação (2.3), temos $z \notin (J : x) = \mathfrak{p}$. O que implica $a \in (J : x)$. E assim, $\mathfrak{p} = (J : y)$ para algum $y \in R$ não-divisor de zero. □

Lema 2.17. *Sejam $(R, \mathfrak{p})$ um anel local Noetheriano integralmente fechado em $\mathrm{Q}(R)$ e $x \in R$ um elemento não-divisor de zero. Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/xR)$, então $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R/xR)$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/xR)$; então

$$\mathfrak{p} = (xR : y), \tag{2.4}$$

onde $y \notin xR$ e é não-divisor de zero pelo lema 2.16. Da Equação (2.4), $\mathfrak{p}y \subseteq xR$. Daí, $\frac{y}{x}\mathfrak{p} \subseteq R$. Sendo $\mathfrak{p}$ um ideal maximal, segue que $\frac{y}{x}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ ou $\frac{y}{x}\mathfrak{p} = R$. Se $\frac{y}{x}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$, então pelo Lema 2.13, temos $\frac{y}{x} \in \overline{R} = R$. Assim, $y \in xR$ e $\mathfrak{p} = (xR : y) = R$. O que é uma contradição. Sendo assim, $\frac{y}{x}\mathfrak{p} = R$. Logo, existe um elemento $z \in \mathfrak{p}$, tal que $\frac{y}{x}z = 1$ e então $yz = x$. Segue que $\mathfrak{p} = (xR : y) = (yzR : y) = zR$. Portanto, $\mathfrak{p}$ é um ideal principal. Como $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R/\mathfrak{p})$, resulta do Teorema A.23 que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. Sabendo que $\mathfrak{p} \supseteq xR$, concluímos que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R/xR)$. □

Proposição 2.18. *Sejam R um anel Noetheriano que é integralmente fechado em $\mathrm{Q}(R)$, x um elemento não-divisor de zero em R e $I = (x)$ um ideal principal. Então,*

$$\mathrm{Ass}(R/I) = \mathrm{Min}(R/I).$$

Demonstração. A inclusão $\mathrm{Min}(R/I) \subset \mathrm{Ass}(R/I)$ é imediata. Para a outra inclusão, seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I)$. Agora, localizando em $\mathfrak{p}$, temos $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p})$. Sendo $(R_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_\mathfrak{p})$ um anel local Noetheriano e $x \in R$ um elemento não-divisor de zero, segue do lema anterior que $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R_\mathfrak{p}/I_\mathfrak{p})$, o que implica pelo Corolário A.10 que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R/I)$. □

2.2.2 Domínios de Krull

Definição 2.19. Um domínio integral R é dito um **domínio de Krull** se:

(1) Para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$ tal que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, o anel $R_\mathfrak{p}$ é um domínio Noetheriano integralmente fechado;

(2) $R = \bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} R_{\mathfrak{p}}$;

(3) Todo elemento não-nulo de R pertence no máximo à uma quantidade finita de ideais primos de altura um.

Exemplos 2.20. 1. Todo domínio Noetheriano integralmente fechado é um domínio de Krull (vide [15, Proposition 4.10.4]). Por outro lado, todo domínio de Krull é integralmente fechado, pois como $R_{\mathfrak{p}}$ é integralmente fechado para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de altura um, segue que $\bigcap_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1} R_{\mathfrak{p}} = R$ também é integralmente fechado.

2. Seja $\{x_i\}$ um conjunto arbitrário de variáveis independentes. Se R é um domínio de Krull então o anel dos polinômios $R[\{x_i\}]$ é um domínio de Krull (vide [3, Proposition 1.6]). Em particular, se k é um corpo, segue do Exemplo 1 que o anel de polinômios $k[x_1, x_2, x_3, \ldots]$ em infinitas variáveis é um domínio de Krull que não é Noetheriano.

3. Se R é um domínio de Krull então o anel formal de séries de potências $R[[x]]$ em uma variável x é um domínio de Krull (vide [3, Proposition 1.7]).

Proposição 2.21. *Sejam R um domínio de Krull e $x \in R$ um elemento não-nulo. Sejam $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ ideais primos de R tais que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) = 1$ e $x \in \mathfrak{p}_i$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Então, $xR = \bigcap_{i=1}^{s} (xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$ é uma decomposição primária minimal de xR. Em particular, os ideais principais não tem primos imersos.*

Demonstração. Queremos mostrar:

(1) $xR = \bigcap_{i=1}^{s} (xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$;

(2) $xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R$ é um ideal primário, para todo i;

(3) A decomposição $xR = \bigcap_{i=1}^{s} (xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$ é minimal.

Para (1) tome $y \in \bigcap_{i=1}^{s} (xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$, logo $y \in R$ e $y \in xR_{\mathfrak{p}_i}$ para todo $\mathfrak{p}_i$. Com isso, $\dfrac{y}{x} \in R_{\mathfrak{p}_i}$ para todo $\mathfrak{p}_i$, onde $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) = 1$. Pela definição de domínio de Krull, temos que $\dfrac{y}{x} \in R$. Isso implica que $y \in xR$. A recíproca segue do fato de $xR \subseteq R$ e $xR \subseteq xR_{\mathfrak{p}_i}$ para todo $\mathfrak{p}_i$ de altura um.

(2) De acordo com a Definição 2.19, o anel $R_{\mathfrak{p}_i}$ é um domínio Noetheriano integralmente fechado para todo $\mathfrak{p}_i$. Sendo $R_{\mathfrak{p}_i}$ um anel local, de dimensão um, resulta da Proposição A.21 que $xR_{\mathfrak{p}_i}$ é uma potência do ideal maximal de $\mathfrak{p}_{i\mathfrak{p}_i}$. Assim, da Proposição A.9 concluímos que o ideal $xR_{\mathfrak{p}_i}$ é primário, para todo $\mathfrak{p}_i$ de altura um. Portanto, $xR = \bigcap_{i=1}^{s}$

$(xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$ é uma decomposição primária.

(3) *Afirmação 1:* $\sqrt{(xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R)} = \mathfrak{p}_i$ para todo $i = 1, \ldots, s$.

De fato, vimos no item (2) que $\sqrt{xR_{\mathfrak{p}_i}} = \mathfrak{p}_{i\mathfrak{p}_i}$. Assim, $\sqrt{(xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R)} = (\sqrt{xR_{\mathfrak{p}_i}} \cap R) = ((\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$. Note que $(\mathfrak{p}_{i\mathfrak{p}_i} \cap R) = \mathfrak{p}_i$. Já sabemos que $(\mathfrak{p}_{i\mathfrak{p}_i} \cap R) \supseteq \mathfrak{p}_i$. Daí, se supormos $(\mathfrak{p}_{i\mathfrak{p}_i} \cap R) \neq \mathfrak{p}_i$, teremos $\mathfrak{p}_{i\mathfrak{p}_i} = (\mathfrak{p}_{i\mathfrak{p}_i} \cap R)_{\mathfrak{p}_i} \neq (\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{p}_{i\mathfrak{p}_i}$, o que é uma contradição. Além disso, segue da hipótese que $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ para todo $i \neq j$.

Afirmação 2: $\bigcap_{i \neq j} (xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R) \nsubseteq (xR_{\mathfrak{p}_j} \cap R)$.

Com efeito, se $\bigcap_{i \neq j} (xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R) \subseteq (xR_{\mathfrak{p}_j} \cap R)$, então $\sqrt{\bigcap_{i \neq j}(xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R)} \subseteq \sqrt{(xR_{\mathfrak{p}_j} \cap R)}$. Isso implica $\bigcap_{i \neq j} \sqrt{(xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R)} \subseteq \sqrt{(xR_{\mathfrak{p}_j} \cap R)}$. Logo, $\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_j$. Segue da Proposição A.2 que $\mathfrak{p}_j \supseteq \mathfrak{p}_i$ para algum $i \neq j$. No entanto, temos $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) = 1$ para todo i. Logo, $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}_i$ para algum $i \neq j$, o que contradiz o fatos dos $\mathfrak{p}_{i'_s}$ serem todos distintos.

Portanto, $xR = \bigcap_{i=1}^{s} (xR_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$ é uma decomposição primária minimal de xR. A última afirmação dada no enunciado segue da Proposição 2.18. □

Lema 2.22. *Nas hipóteses da proposição anterior, sejam $I = xR$ e $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_t$ uma decomposição primária minimal de I, isto é, $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ são distintos para todo $i = 1, \ldots, t$ e $\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j \nsubseteq \mathfrak{q}_i$ para todo i. Então, $\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j \nsubseteq \mathfrak{p}_i$ para todo i.*

Demonstração. Suponha que $\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j \subseteq \mathfrak{p}_i$. Assim, $\sqrt{\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}_i}$. Isso implica que $\bigcap_{j \neq i} \sqrt{\mathfrak{q}_j} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}_i}$. Sendo assim, pela Proposição A.2, segue que $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}_i$ para algum $j \neq i$, o que é uma contradição, visto que $\mathfrak{p}_j \in \mathrm{Ass}(R/I) = \mathrm{Min}(R/I)$. □

2.3 Valorizações

Nesta seção trataremos do estudo de valorizações. Mostraremos algumas definições importantes, resultados auxiliares e de modo especial a Teorema de existência de anéis Noetherianos de valorizações e o Critério de valorização.

2.3.1 Definições

Definição 2.23. Seja K um corpo. Uma **valorização** em K (ou uma K-**valorização**) é um homomorfismo v de um grupo multiplicativo $K^* = K \backslash \{0\}$ em um grupo abeliano totalmente ordenado G (aditivo) tal que para todo $x, y \in K$,

$$\begin{array}{rcl} (1)\ v(x+y) & \geq & \min\{v(x), v(y)\}; \\ (2)\ v(xy) & = & v(x)+v(y). \end{array}$$

Segue das propriedades acima que $v(1) = 0$ e que para todo $x, y \in K \backslash \{0\}$ temos $v(x^{-1}) = -v(x)$; assim, $v\left(\dfrac{x}{y}\right) = v(x) - v(y)$. Além disso, adotamos $v(0) = \infty$.

Definição 2.24. Considere um corpo K. Dizemos que as valorizações $v : K^* \to G_v$ e $w : K^* \to G_w$ são **equivalentes** se existe um isomorfismo $\varphi : v(K^*) \to w(K^*)$ preservando ordem tal que para todo $\alpha \in K^*$, temos $\varphi(v(\alpha)) = w(\alpha)$.

Definição 2.25. Seja K um corpo. Um **anel de valorização** de K é um domínio integral V onde $\mathrm{Frac}(V) = K$ tal que para todo elemento não-nulo $x \in K$, ou $x \in V$ ou $x^{-1} \in V$ (ou ambos).

Notação 2.26. Seja $v : K^* \to G$ uma valorização. Pode-se verificar que

$$R_v = \{r \in K^*;\ \ v(r) \geq 0\} \cup \{0\}$$

é um anel de valorização de K, cujo ideal maximal é $\mathfrak{m}_v = \{r \in K^*;\ v(r) > 0\} \cup \{0\}$.

Exemplo 2.27. Seja V um domínio, com $\mathrm{Frac}(V) = K$, tal que para quaisquer ideais I e J em V, ou $J \subseteq I$ ou $I \subseteq J$. Então, V é um anel de valorização de K.
De fato, seja $\dfrac{a}{b} \in K$ tal que $a, b \in V$, com $b \neq 0$. Suponha que $\dfrac{a}{b} \notin V$. Logo, $(a) \nsubseteq (b)$, pois caso contrário, teríamos $a = bw$ para algum $w \in V$ e desse modo, $\dfrac{a}{b} \in V$, o que é uma contradição. Segue da hipótese que $(b) \subseteq (a)$ e assim $b = ay$, com $y \in V$. Por essa razão, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{ay}{a} = y \in V$. Portanto, V é um anel de valorização de K.

Definição 2.28. Dizemos que uma valorização $v : K^* \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ é uma **valorização discreta** e o anel R_v é chamado **anel de valorização discreta**.

Neste trabalho os anéis de valorizações discretas estão de acordo com [1], isto é, são domínios locais Noetherianos integralmente fechados, cuja dimensão de Krull é igual a um.

Definição 2.29. Sejam R um anel, $I \subseteq R$ um ideal e t uma indeterminada. A **álgebra de Rees de** I é o subanel de $R[t]$ definido por

$$R[It] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i t^i;\ \ n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ a_i \in I^i \right\} = \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n.$$

Definição 2.30. Seja R um anel e seja $I \subseteq R$ um ideal. A *álgebra blowup* associada ao par (R, I) é a R-álgebra graduada $R[It]$. Considere um elemento $a \in I$. Dizemos que a *álgebra blowup afim* $R\left[\frac{I}{a}\right]$ é a R-álgebra cujos elementos são representados por uma expressão da forma $\dfrac{x}{a^n}$ com $x \in I^n$.

2.3.2 Propriedades de anéis de valorizações

Lema 2.31. *Seja V um anel de valorização.*

(1) *Seja $I \subseteq V$ um ideal e seja G um conjunto finito de geradores de I. Então, existe $z \in G$ tal que $zV = I$.*

(2) *Se para alguns $x, y \in V$, $(x, y) \neq yV$, então para todo $r \in V$, temos*

$$(x - ry)V = (x, y)V.$$

Demonstração. (1) Seja n o número de elementos de G. Se $n = 1$, então $G = \{x\}$ e teremos $xV = I$. Suponha agora $G = \{x, y\}$ e mostraremos que I é um ideal principal. Como $x, y \in V$, segue que $xy^{-1} \in \mathrm{Frac}(V)$. Sendo V anel de valorização, resulta que $xy^{-1} \in V$ ou $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in V$. Assim, $x \in yV$ ou $y \in xV$. Portanto, $I = xV$ ou $I = yV$, e isso implica que I é um ideal principal. Fazendo indução em n, concluímos o resultado.

(2) Pelo item anterior, temos $x \in yV$ ou $y \in xV$. Como $(x, y)V \neq yV$, segue que $x \notin yV$. Sendo assim, temos $y \in xV$, o que implica $y = xq$ com $q \in V$. Note que q não é unidade em V, pois do contrário teríamos $x = yq^{-1} \in yV$, o que seria uma contradição. Como $(V, \mathfrak{m}_V)$ é um anel local e $\mathfrak{m}_V$ é formado por não-unidades, segue $q \in \mathfrak{m}_V$. Daí, pela Proposição A.1, conclui-se que $1 - rq$ é unidade. Por outro lado, $x - ry \in (x - ry)V$ e $x - ry = x - rxq = x(1 - rq)$; sendo $1 - rq$ unidade, multiplicando a equação anterior por $(1 - rq)^{-1}$, obtemos $x \in (x - ry)V$. Daí, $xq \in (x - ry)V$, isto é, $y \in (x - ry)V$. Portanto, $(x, y)V \subseteq (x - ry)V$. A outra inclusão é direta. $\square$

Lema 2.32. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M um R-módulo tal que o $R/\mathfrak{m}$-espaço vetorial $M/\mathfrak{m}M$ tenha dimensão um. Se $z \in M \setminus \mathfrak{m}M$, então $M = (z)$.*

Demonstração. Seja $k = R/\mathfrak{m}$. Temos $M/\mathfrak{m}M = (\overline{w})$ um k-espaço vetorial e $\{\overline{w}\}$ uma base de $M/\mathfrak{m}M$. Considere $z \in M \setminus \mathfrak{m}M$; então $\{\overline{z}\}$ é L.I em $M/\mathfrak{m}M$ e como

$\dim M/\mathfrak{m}M = 1$, segue que $\{\overline{z}\}$ também é uma base de $M/\mathfrak{m}M$. Dessa maneira, da Proposição A.4, resulta $M = (z)$. □

Lema 2.33. *Sejam R um anel, $I \subseteq R$ um ideal e $V_1, \ldots, V_n$ anéis de valorizações discretas. Para $i = 1, \ldots, n$, seja $\mathfrak{m}_i$ o ideal maximal de V_i e assuma que R contém unidades $u_1, \ldots, u_{n-1}$, tais que $\overline{u_i} \neq \overline{u_j}$ em $R/\mathfrak{m}_i \cap R$. Então, existe um elemento $x \in I$ tal que para todo $i = 1, \ldots, n$, temos $xV_i = IV_i$.*

Demonstração. Suponha por indução que existam $x, y \in I$, tais que para todo $i < n$ e $j > 1$, temos $xV_i = IV_i$ e $yV_j = IV_j$. (O caso $n = 1$ segue do Lema 2.31). Se $xV_n = IV_n$, a demonstração estaria concluída. Assim, suponha $xV_n \neq IV_n$. Similarmente, suponha $yV_1 \neq IV_1$. Daí, $yV_1 \neq IV_1 = xV_1$. Isso implica $(x, y)V_1 \neq yV_1$, e então, pelo Lema anterior, segue que para toda unidade $u \in R$, temos $(x - uy)V_1 = (x, y)V_1 = IV_1$ pois $y \in I$ e $IV_1 = xV_1$. Analogamente, $(x - uy)V_n = (x, y)V_n = IV_n$ para toda unidade $u \in R$. Para concluirmos o resultado é suficiente encontrar uma unidade $u \in R$, de modo que para todo $i = 2, \ldots, n - 1$, tem-se $(x - uy)V_i = IV_i$. Provaremos isso na Afirmação 2.
Afirmação 1: Se $(x - uy)V_i \neq IV_i$ então $x - uy \in \mathfrak{m}_i I$.
De fato, se $x - uy \notin \mathfrak{m}_i I = \mathfrak{m}_i IV_i$, isto é, se $x - uy \in IV_i \backslash \mathfrak{m}_i IV_i$, pelo Lema 2.32 obteríamos $IV_i = (x - uy)V_i$, visto que IV_i é um ideal principal.
Afirmação 2: Existe $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $(x - u_j y)V_i = IV_i$ para todo $i = 2, \ldots, n-1$.
Suponha que para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ existe $i_j \in \{2, \ldots, n-1\}$, tal que $(x - u_j y)V_{i_j} \neq IV_{i_j}$. Então, $x - u_j y \in \mathfrak{m}_{i_j} I$ para cada $j = 1, \ldots, n-1$ (vide Afirmação 1). Reordenando índices se necessário, podemos supor que $x - u_1 y \in \mathfrak{m}_2 I, \ldots, x - u_{n-2} y \in \mathfrak{m}_{n-1} I$. Além disso, $x - u_{n-1} y \in \mathfrak{m}_k I$ para algum $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. Mas, $x - u_{n-1} y, x - u_k y \in \mathfrak{m}_k I$ implicaria $(u_{n-1} - u_k)y \in \mathfrak{m}_k I$. Porém, por hipótese, $\overline{u_{n-1}} \neq \overline{u_k}$ em $R/\mathfrak{m}_k \cap R$; daí, $u_{n-1} - u_k \notin \mathfrak{m}_k \cap R$, de maneira que $u_{n-1} - u_k \notin \mathfrak{m}_k$. Logo $u_{n-1} - u_k$ é unidade em V_k e assim $y \in \mathfrak{m}_k I$. Mas, $IV_i = yV_i$ para todo $i = 2, \ldots, n$ de modo que $\mathfrak{m}_k IV_k = y\mathfrak{m}_k$, e assim $y = yr$ para algum $r \in \mathfrak{m}_k$; note que V_k não seria um domínio, pois $y(1 - r) = 0$, $y \neq 0$ e $1 - r \neq 0$ (visto que $r \in \mathfrak{m}_k$). Com isso, concluímos a Afirmação 2. □

2.3.3 Existência de anéis de valorizações

Nesta subseção mostraremos a existência de anéis de valorizações entre um domínio integral R e seu corpo de frações, de modo que todo ideal primo em R é a contração do ideal maximal de algum desses anéis de valorizações. Faremos a prova para o caso em que R é um domínio não-necessariamente Noetheriano e para o caso em que R é um domínio Noetheriano, e veremos que nesta última situação, tais anéis de valorizações serão Noetherianos.

Lema 2.34. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um domínio local, não necessariamente Noetheriano, e seja $K = \mathrm{Frac}(R)$. Então, existe um anel de valorização $(V, \mathfrak{m}_V)$ entre R e K tal que $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{m}$.*

Demonstração. Seja $\sum = \{(T, \mathfrak{m}_T);\ R \subseteq T,\ \mathfrak{m}T \subseteq \mathfrak{m}_T \text{ e } T \subseteq K\ \}$, onde $(T, \mathfrak{m}_T)$ é um domínio local. Esse conjunto é não-vazio, visto que $(R, \mathfrak{m}) \in \sum$. Defina uma relação $\leq$ em $\sum$, como segue:

$$(T, \mathfrak{m}_T) \leq (T', \mathfrak{m}_{T'}), \text{ se } T \subseteq T' \text{ e } \mathfrak{m}_T \subseteq \mathfrak{m}_{T'}.$$

O conjunto $\sum$ com a relação $\leq$ é um conjunto parcialmente ordenado. Aplicando o Lema de Zorn, obtemos que $\sum$ possui um elemento maximal, denotado daqui em diante por $(V, \mathfrak{m}_V)$. *Afirmação 1:* $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{m}$.
De fato, como $(V, \mathfrak{m}_V) \in \sum$ é um elemento maximal, resulta $R \subseteq V$ e $\mathfrak{m}V \subseteq \mathfrak{m}_V$. Logo, $\mathfrak{m}V \cap R \subseteq \mathfrak{m}_V \cap R$. Por outro lado, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}V \cap R \subseteq \mathfrak{m}_V \cap R$ e isso implica $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_V \cap R$. Sendo $\mathfrak{m}_V \cap R$ um ideal próprio e $\mathfrak{m}$ um ideal maximal, concluímos que $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{m}$.

Agora, mostraremos que V é um anel de valorização. Para isso, seja $x \in K$ e seja $\mathfrak{m}_V[x]$ a extensão do ideal maximal $\mathfrak{m}_V$ em $V[x]$. Então, do Lema A.14 obtemos $\mathfrak{m}_V[x] \neq V[x]$ ou $\mathfrak{m}_V[x] \neq V[x^{-1}]$. Sem perda de generalidade, suponha $\mathfrak{m}_V[x] \neq V[x]$. Seja $\mathfrak{m}_{V[x]}$ o ideal maximal de $V[x]$, o qual contém $\mathfrak{m}_V[x]$. Defina $S = (V[x])_{\mathfrak{m}_{V[x]}}$ e $\mathfrak{m}_S = \mathfrak{m}_{V[x]}S$.
Afirmação 2: $(S, \mathfrak{m}_S) \in \sum$.
Com efeito, temos $R \subseteq V \subseteq V[x] \subseteq S$. Além disso, $\mathfrak{m}S \subseteq \mathfrak{m}_S$, visto que $\mathfrak{m}S$ é um ideal próprio em S. E, como $(V, \mathfrak{m}_V) \in \sum$, segue que $V \subseteq K$. Sendo $x \in K$, obtemos $V[x] \subseteq K$. Daí, $S \subseteq K$, e isso implica $(S, \mathfrak{m}_S) \in \sum$.

Por outro lado, pela definição de S, temos $S \supseteq V$ e sendo $(V, \mathfrak{m}_V)$ um elemento maximal de $\sum$, segue $(S, \mathfrak{m}_S) \leq (V, \mathfrak{m}_V)$, o que implica $S \subseteq V$. Portanto, $S = V$. Sendo assim, $x \in V$ e dessa forma V é um anel de valorização. $\square$

Teorema 2.35. (Existência de anéis de valorizações)
Seja R um domínio integral não necessariamente Noetheriano, com $K = \mathrm{Frac}(R)$, e seja

$\mathfrak{p} \subset R$ um ideal primo não-nulo. Então, existe um anel de valorização $(V, \mathfrak{m}_V)$ entre R e K tal que $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{p}$

Demonstração. O anel $(R_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_\mathfrak{p})$ um domínio local. Pelo Lema anterior, existe um anel de valorização V entre $R_\mathfrak{p}$ e $\mathrm{Frac}(R_\mathfrak{p})$ tal que $\mathfrak{m}_V \cap R_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. No entanto, como $R \subseteq R_\mathfrak{p}$ e $\mathrm{Frac}(R_\mathfrak{p}) \subseteq K$, segue que V está entre R e K. Por outro lado, temos $\mathfrak{m}_V \cap R_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}_\mathfrak{p} \cap R$. E isso implica $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{p}$, como queríamos. $\square$

Agora, faremos o caso em que R é um domínio Noetheriano.

Lema 2.36. *Seja R um anel Noetheriano e seja $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de R tal que* $\dim R = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$. *Suponha que $\mathfrak{m} = \langle T \rangle$, onde T é um subconjunto de R, e todo elemento de T é nilpotente em R. Então,* $\dim R = 0$.

Demonstração. Afirmação: Todo elemento de $\mathfrak{m}$ é nilpotente.
De fato, como $\mathfrak{m} = \langle T \rangle$, segue que se $a \in \mathfrak{m}$, então $a = \alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_n s_n$, com $\alpha_i \in R$ e $s_i \in T$. Além disso, cada s_i é nilpotente. Assim, $s_i \in \sqrt{0}$ para cada i, de modo que $a \in \sqrt{0}$. Por essa razão, a é nilpotente.

Da afirmação acima, segue que $\mathfrak{m} = \sqrt{0}$. Pela Proposição A.20, segue que $\mathfrak{m}^r = (0)$. Então, $\dim R = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}^r) = 0$. $\square$

Lema 2.37. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um domínio local Noetheriano e seja $K =$* $\mathrm{Frac}(R)$. *Então, existe um anel de valorização Noetheriano $(V, \mathfrak{m}_V)$ entre R e K tal que $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{m}$.*

Demonstração. Seja $G = gr_\mathfrak{m}(R) = \bigoplus_{n \geq 0} \left(\dfrac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}} \right)$ o anel graduado associado de $\mathfrak{m}$. Pela Proposição A.22, G é um anel Noetheriano.
Afirmação 1: $\left\langle \dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \right\rangle \subseteq G$ é um ideal maximal.
Com efeito, temos $\left\langle \dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \right\rangle = \dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \oplus \dfrac{\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^3} \oplus \ldots$. E assim, $G / \left\langle \dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \right\rangle \simeq R/\mathfrak{m}$. Como $R/\mathfrak{m}$ é corpo, segue que o ideal $\left\langle \dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \right\rangle$ é maximal.
Afirmação 2: Existe um elemento de $\dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \subseteq G$ não-nilpotente.
De fato, se todo elemento de $\dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \subseteq G$ é nilpotente, do lema anterior, concluímos que $\dim(G) = 0$. Isso implica pelo Teorema A.27, que $\dim R = 0$. E, como R é domínio, isso implica que R é corpo. Mas isso contradiz a hipótese de que R tem um ideal maximal não-nulo. Por essa razão, nem todo elemento de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ é nilpotente.

Seja $x \in \mathfrak{m}$ tal que a imagem de x em $\dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$ é não-nilpotente em G e seja $S = R[\frac{\mathfrak{m}}{x}]$. Então S é uma R-álgebra finitamente gerada e sendo R Noetheriano, segue da Proposição A.18 que S é Noetheriano. Se $xS = S$, escreva

$$1 = x\frac{a}{x^n} = \frac{a}{x^{n-1}}$$

onde $a \in \mathfrak{m}^n$ e por essa razão $x^{n-1} \in \mathfrak{m}^n$. Daí, a imagem de x^{n-1} em $\dfrac{\mathfrak{m}^{n-1}}{\mathfrak{m}^n} \subseteq G$ é zero, o que é uma contradição. Portanto, xS é um ideal próprio em S.

Afirmação 3: $xS = \mathfrak{m}S$.

A primeira inclusão é clara, visto que $x \in \mathfrak{m}$. Para a recíproca, seja $b \in \mathfrak{m}S$; então $b = \sum_{i=1}^{p} z_i y_i$ com $z_i \in \mathfrak{m}$ e $y_i \in S$. Logo,

$$b = z_1 y_1 + \ldots + z_p y_p = z_1 \frac{a_1}{x^{n_1}} + \ldots + z_p \frac{a_p}{x^{n_p}}$$

onde $a_i \in \mathfrak{m}^{n_i}$. Com isso,

$$\begin{aligned} b &= \frac{z_1 a_1 x^{n_2} \cdots x^{n_p} + \ldots + z_p a_p x^{n_1} \cdots x^{n_{p-1}}}{x^{n_1} \cdots x^{n_p}} \\ &= \frac{z_1 a_1 x^{n_2} \cdots x^{n_p} + \ldots + z_p a_p x^{n_1} \cdots x^{n_{p-1}}}{x^{n_1 + \ldots + n_p}} \\ &= \frac{z_1 a_1 x^{n_2} \cdots x^{n_p} + \ldots + z_p a_p x^{n_1} \cdots x^{n_{p-1}}}{x^n} \end{aligned}$$

com $n = n_1 + \ldots + n_p$. Dessa maneira, $b = x\dfrac{(z_1 a_1 x^{n_2} \cdots x^{n_p} + \ldots + z_p a_p x^{n_1} \cdots x^{n_{p-1}})}{x^{n+1}}$ onde $z_1 a_1 x^{n_2} \cdots x^{n_p} + \ldots + z_p a_p x^{n_1} \cdots x^{n_{p-1}} \in \mathfrak{m}^{n+1}$. Segue que $b \in xS$, como queríamos.

Seja $\mathfrak{q} \subset S$ um ideal primo minimal de xS. Pelo Teorema A.23, temos $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = 1$. Sendo assim, $\dim(S_{\mathfrak{q}}) = 1$. Tome $T = \overline{S_{\mathfrak{q}}} = (\overline{S})_{\mathfrak{q}}$ e seja $\mathfrak{m}_T$ o ideal maximal de T. Dessa forma, como $\mathfrak{m}_T$ é o único ideal primo de T, pelo Teorema A.16, segue que $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_T \cap S$. Com isso, $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}_T \cap S$, o que implica $\mathfrak{q}T \subseteq (\mathfrak{m}_T \cap S)T \subseteq \mathfrak{m}_T$. Além disso, pelo Teorema de Krull-Akizuki (Teorema A.26), o anel T é Noetheriano e tem dimensão igual a um. Por outro lado, do Corolário A.15, segue que T é integralmente fechado. Assim, o mesmo vale para o anel $T_{\mathfrak{m}_T}$. Da Proposição A.21 resulta que $T_{\mathfrak{m}_T}$ é um anel de valorização, visto que $T_{\mathfrak{m}_T}$ é Noetheriano e tem dimensão igual a um. Tomando $V = T_{\mathfrak{m}_T}$, obtemos que $\mathfrak{m}_V = (\mathfrak{m}_T)_{\mathfrak{m}_T}$ é o ideal maximal de V. E como $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}T \subseteq \mathfrak{m}_T$ e $\mathfrak{m}_T \subseteq \mathfrak{m}_V$, isso acarreta $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}_V$. Mas, $\mathfrak{m}S = xS$ e $xS \subseteq \mathfrak{q}$, visto que $\mathfrak{q}$ é minimal sobre xS e por essa razão $\mathfrak{m}S \subseteq \mathfrak{m}_V$. Isso implica que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_V$, e estando $\mathfrak{m} \subset R$, significa que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_V \cap R$.

A outra inclusão segue do fato de $\mathfrak{m}_V \cap R$ ser um ideal próprio em R e sendo $\mathfrak{m} \subset R$ maximal, $\mathfrak{m}_V \cap R \subseteq \mathfrak{m}$. Portanto, V é um anel de valorização Noetheriano entre R e K, tal que $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{m}$. □

Teorema 2.38. (Existência de anéis de valorizações Noetherianos) *Sejam R um domínio integral Noetheriano, $K = \mathrm{Frac}(R)$ e $\mathfrak{p} \subset R$ um ideal primo não-nulo. Então, existe um anel de valorização Noetheriano $(V, \mathfrak{m}_V)$ entre R e K tal que $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{p}$.*

Demonstração. O anel $(R_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_\mathfrak{p})$ é um domínio local. Em vista disso, segue do lema anterior que existe um anel de valorização Noetheriano V entre $R_\mathfrak{p}$ e $\mathrm{Frac}(R_\mathfrak{p})$, de modo que $\mathfrak{m}_V \cap R_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. No entanto, como $R \subseteq R_\mathfrak{p}$ e $\mathrm{Frac}(R_\mathfrak{p}) \subseteq K$, resulta que V está entre R e K. Por outro lado, temos $\mathfrak{m}_V \cap R_\mathfrak{p} \cap R = \mathfrak{p}_\mathfrak{p} \cap R$. E isso implica $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{p}$. Portanto, V é um anel de valorização Noetheriano entre R e K, tal que $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{m}$. □

Definição 2.39. Sejam R um domínio Noetheriano e V um anel de valorização entre R e $\mathrm{Frac}(R)$. O ideal primo $\mathfrak{m}_V \cap R \subset R$ é chamado de **centro** de V em R, onde $\mathfrak{m}_V$ é o ideal maximal de V.

2.3.4 Valorizações e o fecho integral de ideais

Proposição 2.40. *Seja R um domínio Noetheriano, onde $K = \mathrm{Frac}(R)$. Seja $I \subseteq R$ um ideal e V um anel de valorização entre R e K. Então, $IV = \overline{I}V = \overline{IV}$.*

Demonstração. Como $I \subseteq \overline{I}$, segue que $IV \subseteq \overline{I}V$. Por outro lado, pela Persistência do fecho integral, obtemos $\overline{I}V \subseteq \overline{IV}$. Agora, suponha que $r \in \overline{IV}$ e mostremos que $r \in IV$. Se $r \in \overline{IV}$, então existem $n \geq 1$ e $a_i \in I^iV$ tais que

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

Logo, $a_i = \sum_{j=1}^{k_i} z_j y_j$ com $z_j \in I^i$ e $y_j \in V$. Digamos que $z_j = \sum_i w_{ji}$ e seja $J = (w_{ji})$. Então, $a_i \in J^iV$, o que implica $r \in \overline{JV}$. Como JV é um ideal finitamente gerado de V, resulta do Lema 2.31 que existe um elemento $z \in J$, tal que $zV = JV$. Em vista disso, r é integral sobre zV, isto é, $r \in \overline{zV}$. Sendo z não divisor de zero em R, concluímos da Proposição 2.14 que $\overline{zV} = zV$. Isso implica que $r \in zV = JV \subseteq IV$. Por conseguinte, $\overline{IV} \subseteq IV$. □

Proposição 2.41. *Seja R um domínio Noetheriano e seja $I \subseteq R$ um ideal. Então,*

$$\overline{I} = \bigcap_V IV \cap R,$$

onde V varia sobre todos os anéis de valorizações discreta de $K = \mathrm{Frac}(R)$ que contêm R.

Demonstração. Como $\overline{I} \subseteq \bigcap_V \overline{I}V \cap R$, segue da Proposição 2.40 que $\overline{I} \subseteq \bigcap_V IV \cap R$. Para a outra inclusão, suponha $r \in \bigcap_V IV \cap R$, e seja S o anel $R[\frac{I}{r}] = \left\{\frac{x}{r^n};\, x \in I^n\right\}$, onde $r \neq 0$.
Afirmação 1: $\mathrm{Frac}\left(R[\frac{I}{r}]\right) = K$.
De fato, seja $K' = \mathrm{Frac}\left(R[\frac{I}{r}]\right)$. Tome $a \in K'$; então $a = \dfrac{b}{c}$, com $b, c \in R[\frac{I}{r}]$ e $c \neq 0$. Logo, $a = \frac{\frac{x}{r^n}}{\frac{y}{r^m}} = \dfrac{x}{r^n}\dfrac{r^m}{y}$, onde $x \in I^n$ e $y \in I^m$. Suponha, sem perda de generalidade, que $n < m$, e daí, $a = \dfrac{xr^{m-n}}{y}$. Como tomamos $c = \dfrac{y}{r^m} \neq 0$, segue que $y \neq 0$ e isso implica $a \in \mathrm{Frac}(R)$. Assim, $K' \subseteq K$. Suponha $K' \subsetneq K$ e estando $R \subseteq R[\frac{I}{r}] \subseteq K'$, segue que $R \subseteq K' \subsetneq K$. Com isso, $\mathrm{Frac}(R) \neq K$, o que é uma contradição. Portanto, $K = K'$ e dessa forma $\mathrm{Frac}\left(R[\frac{I}{r}]\right) = K$.

Da Afirmação 1, temos $R \subseteq S \subseteq K$. Como $r \in IV$ quando V está entre R e K, segue que para todo anel de valorização discreta V entre S e K, vale $r \in IV$.
Afirmação 2: Para cada V, vale $\dfrac{I}{r}SV = (1)V$, onde $\dfrac{I}{r}SV$ é a extensão de $\dfrac{I}{r}S$ em V.
De fato, como $r \in IV$, segue que $r \in \overline{IV}$ e, de forma análoga à prova da proposição anterior, existe um ideal finitamente gerado $J \subseteq I$, tal que r é integral sobre JV. Assim, pelo Lema 2.31, existe $j \in J$, tal que $JV = jV$. Logo, r é integral sobre jV. Pela Proposição 2.14, temos $jV = \overline{jV}$, o que implica $r \in jV$. Dessa forma, existe $w \in V$ tal que $r = jw$. Com isso, vale $\dfrac{j}{r}w = 1$ em V, onde $\dfrac{j}{r} \in \dfrac{I}{r}S$, ou seja, $\dfrac{j}{r}w \in \dfrac{I}{r}SV$.

Pelo Teorema 2.38, resulta $\dfrac{I}{r}S = S$. Sendo assim, podemos escrever

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{r^i}, \tag{2.5}$$

onde $a_i \in I^i$. Multiplicando a Equação (2.5) por r^n, obtemos

$$r^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{r^i}r^n = \frac{a_1}{r}r^n + \frac{a_2}{r^2}r^n + \ldots + \frac{a_{n-1}}{r^{n-1}}r^n + \frac{a_n}{r^n}r^n = a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \ldots + a_{n-1}r + a_n.$$

Isso conclui que $r \in \overline{I}$. $\square$

Teorema 2.42. (Critério de valorização)

Considere um ideal I em um anel Noetheriano R e um elemento $r \in R$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $r \in \overline{I}$.

(2) *Para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ e para todo anel de valorização discreta V entre $R/\mathfrak{p}$ e $\kappa(\mathfrak{p})$, temos $r \in IV$.*

Demonstração. A demonstração segue das proposições 2.8 e 2.41. □

Corolário 2.43. *Para quaisquer ideais I e J em um anel Noetheriano R, vale que $\overline{I}\ \overline{J} \subseteq \overline{IJ}$.*

Demonstração. Tome $r \in \overline{I}$ e $s \in \overline{J}$. Para qualquer $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ e qualquer anel de valorização discreta V entre $R/\mathfrak{p}$ e $\kappa(\mathfrak{p})$, segue do Teorema 2.42 que $r \in IV$ e $s \in JV$. Logo, $rs \in IJV$. Portanto, do mesmo teorema temos $rs \in \overline{IJ}$. □

Corolário 2.44. *Sejam R um domínio Noetheriano e $I \subseteq J$ ideais em R, com $I = (a_1, \ldots, a_d) \neq 0$. Então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$(\overline{JI^n} : I^n) = \bigcap_i (\overline{JI^n} : a_i^n) = \overline{J}.$$

Demonstração. Seja $r \in (\overline{JI^n} : I^n)$, então $rI^n \subseteq \overline{JI^n}$. Como $I = (a_1, \ldots, a_d)$, segue que $a_i^n \in I^n$. Dessa maneira, $ra_i^n \subseteq \overline{JI^n}$ e assim, $r \in (\overline{JI^n} : a_i^n)$. Portanto, $(\overline{JI^n} : I^n) \subseteq \bigcap_i (\overline{JI^n} : a_i^n)$. Por outro lado, seja V um anel de valorização discreta tal que $R \subseteq V \subseteq \mathrm{Frac}(R)$. Como $I = (a_1, \ldots, a_d)$ e IV é um ideal em V, resulta do Lema 2.31 que existe $a_i \in I$ tal que $a_iV = IV$. Sendo $r \in \bigcap_i (\overline{JI^n} : a_i^n)$, acarreta $ra_i^nV \subseteq \overline{JI^n}V = JI^nV$, pela Proposição 2.40 e com isso, $ra_i^nV \subseteq JI^nV = Ja_i^nV$. Portanto, $r \in JV$ e pela Proposição 2.41 obtemos $r \in \overline{J}$. Dessa forma, concluímos que $(\overline{JI^n} : I^n) \subseteq \bigcap_i (\overline{JI^n} : a_i^n) \subseteq \overline{J}$. Além disso, o Corolário 2.43 nos dá $\overline{J}\ \overline{I^n} \subseteq \overline{JI^n}$ e sendo $I^n \subseteq \overline{I^n}$, resulta $\overline{J}\ I^n \subseteq \overline{J}\ \overline{I^n} \subseteq \overline{JI^n}$. Por essa razão, $\overline{J} \subseteq (\overline{JI^n} : I^n)$, como queríamos. □

Lema 2.45. *Sejam $(R, \mathfrak{p})$ um anel local Noetheriano e $I \subseteq R$ um ideal. Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/\overline{I^n})$, então $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/\overline{I^{n+1}})$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/\overline{I^n})$. Se $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, então $\mathfrak{p}$ será o único ideal primo de R, de maneira que $\mathrm{Ass}(R/\overline{I^{n+1}}) = \{\mathfrak{p}\}$, e o lema estaria concluído. Assumamos então que $\text{ht}(\mathfrak{p}) > 0$. Temos, $\mathfrak{p} = (\overline{I^n} : x)$ para algum $x \in R$, onde $x \notin \overline{I^n}$. Dessa forma, $\mathfrak{p} \subseteq (\overline{I^{n+1}} : Ix)$ e como $\mathfrak{p}$ maximal, segue que $\mathfrak{p} = (\overline{I^{n+1}} : Ix)$.

Se $Ix \nsubseteq \overline{I^{n+1}}$, então $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R/\overline{I^{n+1}})$. Sendo assim, suponha que $Ix \subseteq \overline{I^{n+1}}$ e mostraremos que, nesse caso, $x \in \overline{I^n}$, o que implicará em uma contradição.

Seja $\mathfrak{q}$ um ideal primo minimal de R. Suponha que $I \subseteq \mathfrak{q}$. Note que $\overline{I^n} \subseteq \mathfrak{q}$, pois dado $w \in \overline{I^n}$, este satisfaz uma equação da forma $w^m + a_1 w^{m-1} + \ldots + a_m = 0$, com $a_i \in I^n \subseteq \mathfrak{q}$. Além disso, como $\mathfrak{q}$ é minimal e $\mathfrak{p}$, por ter altura positiva, não é minimal, segue que $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. Assim, existe $z \in \mathfrak{p}$, tal que $z \notin \mathfrak{q}$. Com isso, $zx \in \overline{I^n} \subseteq \mathfrak{q}$ e sendo $\mathfrak{q}$ primo, resulta $x \in \mathfrak{q}$. Isso implica $x' = 0'$ e portanto $x' \in \overline{(I^n)'} = (0')$, onde x' e $(I^n)'$ são, respectivamente, as imagens de x e (I^n) em $R/\mathfrak{q}$. Assim, da Proposição 2.8, resulta que $x \in \overline{I^n}$, o que é uma contradição. Por outro lado, suponha que $I \nsubseteq \mathfrak{q}$. Como $Ix \subseteq \overline{I^{n+1}}$, pelo critério de persistência do fecho integral, temos $I'x' \subseteq (\overline{I^{n+1}})' \subseteq \overline{(I^{n+1})'}$ onde x', I' e $(\overline{I^{n+1}})'$ denotam, respectivamente, as imagens de x, I e $\overline{I^{n+1}}$ em $R/\mathfrak{q}$. Além disso, desde que $I' \neq (0)$, pelo corolário anterior temos $(\overline{(I^n)'I'} : I') = \overline{(I^n)'}$ e com isso, obtemos $x' \in \overline{(I^n)'}$. O que implica, pela proposição 2.8, que $x \in \overline{I^n}$, que é uma contradição. E assim o resultado está concluído. □

Proposição 2.46. *Seja R um anel Noetheriano e $I \subseteq R$ um ideal. Então, para todo $n \geq 1$, temos* $\text{Ass}(R/\overline{I^n}) \subseteq \text{Ass}(R/\overline{I^{n+1}})$.

Demonstração. Suponha $\text{Ass}(R/\overline{I^n}) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ e seja $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R/\overline{I^n})$. Assim, localizando R em $\mathfrak{p}$, obtemos $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \in \text{Ass}\left(R_\mathfrak{p}/(\overline{I^n})_\mathfrak{p}\right) = \text{Ass}(R_\mathfrak{p}/\overline{I^n_\mathfrak{p}})$ pela Proposição 2.7 e, sendo $(R_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_\mathfrak{p})$ um anel local Noetheriano, segue do lema acima que $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R_\mathfrak{p}/\overline{I^{n+1}_\mathfrak{p}})$. Isso implica, pelo Corolário A.10, que $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R/\overline{I^{n+1}})$. □

Definição 2.47. Sejam R um domínio e v uma valorização em $\text{Frac}(R)$. Por convenção, $v(0) = \infty$. Seja $I \subseteq R$ um ideal não-nulo; definimos

$$v(I) = \min\{v(x);\ x \in I\}.$$

Corolário 2.48. *Considere R um anel Noetheriano, $I \subseteq R$ um ideal e r um elemento de R. Então, $r \in \overline{I}$ se, e somente se, existe um inteiro n tal que para todo inteiro $m > n$, temos $r^m \in I^{m-n}$.*

Demonstração. Suponha que exista um inteiro n tal que para todo inteiro $m > n$, temos $r^m \in I^{m-n}$. Como $I^{m-n} \subseteq R \subseteq R/\mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \text{Min}(R)$, segue que $r^m \in I^{m-n}(R/\mathfrak{p})$.

Considere v uma $\kappa(\mathfrak{p})$-valorização, que é não-negativa em $R/\mathfrak{p}$ e discreta.

Afirmação 1: Se $r^m \in I^{m-n}$, então $v(r^m) \geq v(I^{m-n})$.

Com efeito, $v(I^{m-n}) = \min\{v(x);\, x \in I^{m-n}\ \}$. Se $v(r^m) < v(I^{m-n})$, obtemos $r^m \notin I^{m-n}$, o que é uma contradição. Dessa maneira, se $r^m \in I^{m-n}$, segue $v(r^m) \geq v(I^{m-n})$.

Resulta da afirmação acima que $mv(r) \geq (m-n)v(I)$ e isso implica $v(r) \geq \dfrac{m-n}{m}v(I)$. Como v possui valores inteiros, $v(r) \geq v(I)$.

Afirmação 2: Se $v(r) \geq v(I)$, então $r \in IV$.

De fato, suponha $v(r) \geq v(I)$ e seja $V = \{0\} \cup \{x \in \mathrm{Frac}(V);\, v(x) \geq 0\ \}$. Como IV é um ideal em V, segue que existe um inteiro k tal que $IV = \{y \in \mathrm{Frac}(V);\, v(y) \geq k\ \}$. Assim, $v(IV) \geq k$. Por outro lado, $v(r) \geq v(I) \geq v(IV) \geq k$. Portanto, $r \in IV$. Assim, concluímos pelo Teorema 2.42 que $r \in \overline{I}$.

Reciprocamente, suponha $r \in \overline{I}$ e pelo Corolário 2.11, segue que I é uma redução de $I+(r)$. Assim, existe um inteiro não-negativo n tal que $(I+(r))^{n+1} = I(I+(r))^n$. Por essa razão, para todo $m > n$, temos $(I+(r))^m = (I+(r))^{n+(m-n)} = I^{m-n}(I+(r))^n \subseteq I^{m-n}$. Portanto, $r^m \in I^{m-n}$. □

Definição 2.49. Seja R um anel e $I \subseteq R$ um ideal. A função $\mathrm{ord}_I : R \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ definida por $\mathrm{ord}_I(r) = \sup\ \{m; r \in I^m\}$ é chamada de **ordem** de I.

Lema 2.50. *Sejam R um anel Noetheriano e $I \subseteq R$ um ideal. Para qualquer $x \in R$, tem-se que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{ord}_I(x^n)}{n}$ existe.*

Demonstração. Seja $u = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{ord}_I(x^n)}{n}$ e seja N um inteiro arbitrário estritamente maior que u. Escolha $n_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ tal que $\mathrm{ord}_I(x^{n_0}) > N$. Seja n um inteiro positivo arbitrário. Podemos escrever $n = qn_0 + r$ para algum $q, r \in \mathbb{N}$, com $r < n_0$.

Afirmação: Para todo $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$, vale $\mathrm{ord}_I(x^{i+j}) \geq \mathrm{ord}_I(x^i) + \mathrm{ord}_I(x^j)$.

De fato, sejam $\mathrm{ord}_I(x^i) = n$ e $\mathrm{ord}_I(x^j) = p$. Assim, $x^i \in I^n$ e $x^j \in I^p$ e isso implica $x^{i+j} \in I^{n+p}$. Se supormos $\mathrm{ord}_I(x^{i+j}) < \mathrm{ord}_I(x^i) + \mathrm{ord}_I(x^j)$, teremos $\mathrm{ord}_I(x^{i+j}) < n+p$, acarretando que $x^{i+j} \notin I^{n+p}$, o que é uma contradição. Portanto, para todo $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$ vale $\mathrm{ord}_I(x^{i+j}) \geq \mathrm{ord}_I(x^i) + \mathrm{ord}_I(x^j)$.

De forma análoga, $\mathrm{ord}_I(x^{ij}) \geq i\ \mathrm{ord}_I(x^j)$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{ord}_I(x^n)}{n} = \frac{\mathrm{ord}_I(x^{qn_0+r})}{qn_0+r} &\geq \frac{\mathrm{ord}_I(x^{qn_0})}{qn_0+r} + \frac{\mathrm{ord}_I(x^r)}{qn_0+r} \\
&\geq \frac{q\ \mathrm{ord}_I(x^{n_0})}{qn_0+r} + \frac{\mathrm{ord}_I(x^r)}{qn_0+r} \\
&\geq \frac{q\ \mathrm{ord}_I(x^{n_0})}{qn_0+r} \\
&= \frac{qn_0}{qn_0+r}\frac{\mathrm{ord}_I(x^{n_0})}{n_0} \\
&\geq \frac{qn_0}{qn_0+r}N \geq \frac{qn_0}{n_0(q+1)}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, $\liminf \dfrac{\mathrm{ord}_I(x^n)}{n} \geq N$. Como isso vale para todo N, resulta que o limite existe. □

Corolário 2.51. *Sejam R um anel Noetheriano, I um ideal de R, $r \in R\backslash\{0\}$ e $c \in \mathbb{N}$. Então, $r \in \overline{I^c}$ se, e somente se, $\lim_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{ord}_I(r^m)}{m} \geq c$.*

Demonstração. Suponha que $r \in \overline{I^c}$. Pelo Corolário 2.48, existe um inteiro n tal que para todo $m \geq n$, obtemos $r^m \in (I^c)^{m-n+1}$. Então, $\mathrm{ord}_I(r^m) \geq c(m-n+1)$ e por essa razão $\lim_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{ord}_I(r^m)}{m} \geq \lim_{m\to\infty} \dfrac{c(m-n+1)}{m} = c$.

Reciprocamente, assuma que $\lim_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{ord}_I(r^m)}{m} \geq c$. Para um k positivo arbitrário isso significa que para infinitos m, $\mathrm{ord}_I(r^m) \geq cm - \dfrac{m}{k} < cm$. Então, para infinitos m, temos $r^m \in I^{[cm-\frac{m}{k}]}$. Queremos mostrar que $r \in \overline{I^c}$ e para isso usaremos o Teorema 2.42. Sejam $\mathfrak{p} \subset R$ um ideal primo minimal, V um anel de valorização discreta de modo que $R/\mathfrak{p} \subseteq V \subseteq \kappa(\mathfrak{p})$ e v sua valorização correpondente. Como $r^m \in R$, segue que $r^m \in V$.

Afirmação: Se $r^m \in I^{[cm-\frac{m}{k}]}$, então $v(r^m) \geq v\left(I^{[cm-\frac{m}{k}]}\right)$.
De fato, pela Definição 2.47, segue que $v\left(I^{[cm-\frac{m}{k}]}\right) = \min\left\{v(x);\ x \in I^{[cm-\frac{m}{k}]}\right\}$. Assim, se $v(r^m) < v(I^{[cm-\frac{m}{k}]})$, isso implica $r^m \notin I^{[cm-\frac{m}{k}]}$, o que é uma contradição.

Como $r^m \in I^{[cm-\frac{m}{k}]}$, resulta $v(r^m) \geq v(I^{[cm-\frac{m}{k}]})$ e assim $mv(r) \geq [cm-\frac{m}{k}]v(I) > [cm-\frac{m}{k}-1]v(I)$, o que implica $v(r) > \left(c - \frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right)v(I)$. Como a afirmação acima vale para uma quantidade infinita de inteiros positivos m para cada k, concluímos que $v(r) \geq cv(I)$ para todo v. Sendo $cv(I) = v(I^c)$, segue de um argumento similar ao apresentado na prova do Corolário 2.48 que $r \in I^cV$. Dessa forma, concluímos pelo Teorema 2.42 que $r \in \overline{I^c}$. □

3 Valorização de Rees

No capítulo anterior vimos no Critério de valorização (Teorema 2.42) que o fecho integral de um ideal arbitrário I em um anel Noetheriano R é a interseção das contrações de extensões de I em uma quantidade possivelmente infinita de anéis de valorizações discretas. Neste capítulo mostraremos mais geralmente que existe uma quantidade finita de anéis de valorizações discretas que determinam não somente o fecho integral de I, mas também o fecho integral de todas as potência de I. A essas valorizações daremos o nome de valorizações de Rees.

Este capítulo foi elaborado com base no Capítulo 10 [15], onde o leitor interessado encontrará mais resultados a respeito de valorizações de Rees. Conquanto, tivemos aqui o cuidado de contribuir com mais detalhes nas demonstrações. Fazemos também menção que a definição de valorizações discretas apresentada no livro [15] é mais geral que a definição clássica, encontrada por exemplo no livro de Atiyah [1]. Aqui trabalhamos com a definição clássica.

3.1 Unicidade da valorização de Rees.

Definição 3.1. Sejam R um anel e $I \subseteq R$ um ideal. Se existe uma quantidade finita $V_1, \dots, V_r$ de anéis de valorizações discretas, satisfazendo as propriedades:

(1) Para cada $i = 1, \dots, r$ existe um ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ de R tal que $R/\mathfrak{p} \subseteq V_i \subseteq \kappa(\mathfrak{p})$;

(2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem- se $\overline{I^n} = \bigcap\limits_{i=1}^{r} (I^n V_i \cap R)$;

(3) O conjunto $\{V_1, \dots, V_r\}$ satisfazendo (2) é **minimal**, no sentido que a extração de algum destes V_i tornará (2) inválida.

Então, os anéis $V_1, \dots, V_r$ são chamados de **anéis de valorizações de Rees** de I e as valorizações correspondentes $v_1, \dots, v_r$ são chamadas **valorizações de Rees** de I.

Note que de (1) obtemos que $\mathrm{Frac}(V_i) \simeq \kappa(\mathfrak{p})$, devido a propriedade de minimalidade de corpos de frações.

Notação 3.2. Se $v_1, \dots, v_r$ são valorizações de Rees de I, então o conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$

é denotado por $\mathcal{RV}(I)$. Também usamos $\mathcal{RV}(I)$ para representar o conjunto $\{V_1, \ldots, V_r\}$ dos anéis de valorizações de Rees de I.

Observação 3.3. Se R é um domínio e $I = (0)$ é um ideal em R, qualquer anel de valorização discreta entre R e $\mathrm{Frac}(R)$ é um anel de valorização de Rees de I. Com efeito, seja V um anel de valorização discreta tal que $R \subseteq V \subseteq \mathrm{Frac}(R)$. Sendo R domínio, segue que $\mathfrak{p} = (0)$ é o único ideal primo minimal de R e $R/\mathfrak{p} \simeq R$. Com isso, $\kappa(\mathfrak{p}) = \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{Frac}(R)$ e assim $R/\mathfrak{p} \subseteq V \subseteq \kappa(\mathfrak{p})$. A condição (2) segue da Proposição 2.41, visto que $I^n = (0) = I$; desse modo $\overline{I^n} = \overline{I}$ e por essa razão todo anel de valorização discreta V entre R e $\mathrm{Frac}(R)$ satisfaz a propriedade (2). Portanto, quando $I = (0)$, qualquer conjunto das valorizações de Rees de I não é único.

Por essa razão, nesse capítulo consideraremos apenas ideais não-nulos.

Exemplo 3.4. Sejam R um domínio Noetheriano integralmente fechado e $I = (x)$ um ideal principal. Então, $\{R_{\mathfrak{p}};\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R/I)\}$ é o conjunto de anéis de valorizações de Rees de I.

Note que $x \in R$ é não-divisor de zero, pois caso contrário, sendo R domínio cairíamos na observação anterior.

Para obtermos o resultado desejado, provaremos as afirmações abaixo. Suponha $\mathrm{Min}(R/I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$, pois $\mathrm{Ass}(R/I)$ é finito, visto que R é Noetheriano.

Afirmação 1: $\{R_{\mathfrak{p}_i};\, i = 1, \ldots, s\}$ são anéis de valorizações discretas.

De fato, sendo R é um domínio Noetheriano, $R_{\mathfrak{p}_i}$ também o é. Além disso, $R_{\mathfrak{p}_i}$ é um anel local para todo i. Por outro lado, $\dim R_{\mathfrak{p}_i} = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i)$ para todo i e aplicando o Teorema do ideal principal de Krull (Teorema A.23), obtemos $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) = 1$. Por essa razão, $\dim R_{\mathfrak{p}_i} = 1$. Por outro lado, da Proposição A.17 temos $R_{\mathfrak{p}_i}$ integralmente fechado para todo $i = 1, \ldots, s$. Dessa forma, segue da Proposição A.21 que $R_{\mathfrak{p}_i}$ é anel de valorização discreta para todo i.

Afirmação 2: Para cada $i = 1, \ldots, s$ existe um ideal primo minimal $\mathfrak{p}_i'$ em R tal que $R/\mathfrak{p}_i' \subseteq R_{\mathfrak{p}_i} \subseteq \kappa(\mathfrak{p}_i')$.

Com efeito, sendo R domínio, resulta que (0) é o único ideal primo minimal de R. Assim, considere $\mathfrak{p}_i' = (0)$ para todo i. Com isso, $R/(0) \subseteq R_{\mathfrak{p}_i} \subseteq \mathrm{Frac}(R) = \kappa((0))$ para cada $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Min}(R/I)$.

Afirmação 3: Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\overline{(x^n)} = \bigcap_{i=1}^{s} (x^n R_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$.

Sendo (x^n) um ideal principal em R, gerado por um não-divisor de zero, segue da Proposição 2.14 que ele é integralmente fechado, ou seja, $\overline{(x^n)} = (x^n)$. Por essa razão, mostraremos que $(x^n) = \bigcap_{i=1}^{s} (x^n R_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$. A primeira inclusão é direta. Para a recíproca, seja $r \in \bigcap_{i=1}^{s} (x^n R_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$; então $\dfrac{r}{1} \in x^n R_{\mathfrak{p}_i}$ para todo i. Então, $rR_{\mathfrak{p}_i} \subseteq x^n R_{\mathfrak{p}_i}$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Pela Proposição 2.18 e Lema A.7, segue que $(r) \subseteq (x^n)$, implicando $r \in (x^n)$.

Afirmação 4: O conjunto $\{R_{\mathfrak{p}_i};\, i = 1, \ldots, s\}$ é minimal.

Com efeito, da Afirmação 3, temos $(x^n) = \bigcap_{i=1}^{s} (x^n R_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$. Sendo $x \neq 0$, segue que $x^n \neq 0$ é não-divisor de zero em R. Queremos mostrar que a decomposição acima é uma decomposição primária minimal de (x^n). Como já foi visto, o anel $R_{\mathfrak{p}_i}$ é um anel de valorização discreta para todo $i = 1, \ldots, s$. Dessa forma, o ideal $x^n R_{\mathfrak{p}_i}$ é potência do ideal maximal $(\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i}$ e resulta da Proposição A.9 que $x^n R_{\mathfrak{p}_i}$ é $(\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i}$-primário. Portanto, a decomposição $(x^n) = \bigcap_{i=1}^{s} (x^n R_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$ é primária. Quanto à minimalidade dessa decomposição, ela segue de forma análoga àquela apresentada no item (3) da Proposição 2.21. Dessa forma, $(x^n) = \bigcap_{i=1}^{s} (x^n R_{\mathfrak{p}_i} \cap R)$ é uma decomposição primária minimal de (x^n).

Portanto, o conjunto $\{R_{\mathfrak{p}_i};\, i = 1, \ldots, s\}$ satisfaz as três propriedades da Definição 3.1, e com isso concluímos o exemplo.

Definição 3.5. Uma valorização v correspondendo a um anel de valorização na definição 3.1 é dada apenas no corpo de frações de $R/\mathfrak{p}$ para algum ideal primo $\mathfrak{p}$ minimal de R. Definimos v em todo R como segue. Se $r \in R$, então

$$v(r) := v(\overline{r}), \text{ onde } \overline{r} \in R/\mathfrak{p}.$$

Seja $u \in \mathbb{R}$. Adotamos as seguintes convenções em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$\frac{\infty}{\infty} = \infty,\ \infty + \infty = \infty,\ \frac{u}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{u} = \infty,\ u + \infty = \infty.$$

Lema 3.6. *Suponha $\mathcal{RV}(I) = \{v_1, \ldots, v_r\}$. Seja $r \in R$. Então, $r \in \overline{I^n}$ se, e somente se, $v_i(r) \geq n v_i(I)$ para todo $i = 1, \ldots, r$.*

Demonstração. Seja $r \in \overline{I^n} = \bigcap_{i=1}^{r} (I^n V_i \cap R)$. Para cada $i = 1, \ldots, r$, existe um ideal primo minimal $\mathfrak{p} \subset R$ tal que $R/\mathfrak{p} \subseteq V_i$. Temos $\overline{r} \in I^n V_i$, com $\overline{r} \in R/\mathfrak{p}$. Assim, $\overline{r} = \sum_{j=1}^{s}$

$a_j b_j$ com $a_j \in I^n$ e $b_j \in V_i$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} v_i(r) & = & v_i(\overline{r}) \\ & = & v_i\left(\sum_{j=1}^{s} a_j b_j\right) \\ & \geq & \min\{v_i(a_1 b_1), \ldots, v_i(a_s b_s)\} \\ & = & \min\{v_i(a_j b_j);\ j = 1, \ldots, s\} \\ & = & v_i(I^n) \\ & = & n v_i(I). \end{array}$$

Reciprocamente, suponha $v_i(r) \geq n v_i(I)$ para todo i e mostremos que $r \in I^n V_i \cap R$. Temos $V_i = \{x \in \mathrm{Frac}(V_i);\ v_i(x) \geq 0\} \cup \{0\}$. Como $I^n V_i$ é um ideal em V_i, segue que existe um inteiro k tal que $I^n V_i = \{x \in \mathrm{Frac}(V_i);\ v_i(x) \geq k\}$. Assim, $v_i(I^n V_i) \geq k$. Logo, $v_i(r) \geq v_i(I^n) \geq v_i(I^n V_i \cap R) \geq v_i(I^n V_i) \geq k$. Daí, $v_i(r) \geq k$. Resulta que $r \in I^n V_i \cap R$ para todo i. Portanto, $r \in \overline{I^n}$. $\square$

Observação 3.7. Suponha $\mathcal{RV}(I) = \{v_1, \ldots, v_r\}$. São equivalentes:
(i) $\overline{I^n} = \bigcap_{i=1}^{r} (I^n V_i \cap R)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $r \in \overline{I^n}$ se, e somente se, $v_i(r) \geq n v_i(I)$ para todo $i = 1, \ldots, r$.

Lema 3.8. *Sejam R um anel e I um ideal tal que $I \not\subseteq \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$. Seja $w : R \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ uma função tal que para todo $n \geq 1$, tem-se $\overline{I^n} = \{x \in R; w(x) \geq n\}$, e tal que $w(x^n) = n w(x)$ para todo $x \in R$ e $n \geq 1$. Seja $\mathcal{RV}(I) = \{v_1, \ldots, v_r\}$ um conjunto de valorizações de Rees de I. Então,*

$$w(x) = \min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r\right\}.$$

Demonstração. Defina $w' : R \to \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ por $w'(x) = \min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r\right\}$. Primeiro, mostraremos que w' satisfaz as mesmas propriedades que w.
Afirmação 1: Para qualquer $n \geq 1$, temos $\overline{I^n} = \{x \in R;\ w'(x) \geq n\}$.
De fato, se $x \in \overline{I^n}$, pelo Lema 3.6, $v_i(x) \geq n v_i(I)$ com $i = 1, \ldots, r$. Logo, $\frac{v_i(x)}{v_i(I)} \geq n$ para todo i. Assim, $w'(x) = \min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r\right\} \geq n$. Reciprocamente, suponha que $x \in R$ é tal que $w'(x) = \min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r\right\} \geq n$. Com isso, $v_i(x) \geq n v_i(I)$, implicando pelo Lema 3.6 que $x \in \overline{I^n}$.
Afirmação 2: Para todo $x \in R$ e $n \geq 1$, tem-se $w'(x^n) = n w'(x)$.

Com efeito, seja $x \in R$; então

$$\begin{aligned} w'(x^n) &= \min\left\{\frac{v_i(x^n)}{v_i(I)};\ i=1,\ldots,r\right\} \\ &= \min\left\{\frac{nv_i(x)}{v_i(I)};\ i=1,\ldots,r\right\} \\ &= n\ \min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i=1,\ldots,r\right\} \\ &= n\, w'(x) \end{aligned}$$

Agora mostraremos que $w' = w$, ou seja, que a função w é única. Suponha que $w' \neq w$. Existe $x \in R$ tal que $w'(x) \neq w(x)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $w'(x) < w(x)$. Por definição, $w(x) = \infty$ ou $w(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sendo assim, dividiremos a demonstração em dois casos e chegaremos a uma contradição. O que implicará $w(x) = w'(x)$.

Primeiro caso: $w(x) = \infty$

Neste caso, para todo $k \geq 1$, teremos $\infty = w(x^n) \geq k$. Portanto, $x^n \in \overline{I^k}$ para todo $k \geq 1$. Por outro lado, como $w'(x) < w(x)$, temos $w'(x) < \infty$. O que implica $w'(x) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Com isso, existe um k suficientemente grande tal que $w'(x^n) < k$, resultando que $x^n \notin \overline{I^k}$, o que é uma contradição.

Segundo caso: $w(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Neste caso, $w(x^n) = nw(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Por outro lado, como $w'(x) < w(x)$, resulta que para algum inteiro n suficientemente grande, temos $\frac{1}{n} \leq w(x) - w'(x)$, de modo que $1 \leq n(w(x) - w'(x))$, ou seja, $w'(x^n) \leq w(x^n) - 1$. Daí, seja $k = \lfloor w(x^n) \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a $w(x^n)$. Então, $w(x^n) \geq k$ de modo que $x^n \in \overline{I^k}$. Pela definição de k, $w(x^n) < k+1$. Com isso, $w'(x^n) < k$ e isso implica $x^n \notin \overline{I^k}$, o que é uma contradição.

De forma análoga, mostramos que não ocorre $w(x) < w'(x)$ para algum $x \in R$ e assim $w(x) = w'(x)$ para todo $x \in R$. □

Definição 3.9. Para um ideal I em um anel R, a função $\overline{v}_I : R \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ definida por

$$\overline{v}_I(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{ord}_I(x^n)}{n}$$

é chamada de **função assintótica de Samuel**.

A função assintótica de Samuel é um exemplo de uma função que satisfaz as condições do Lema 3.8. Desse modo, a imagem de $\overline{v}_I$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

Lema 3.10. *Seja $\mathcal{RV}(I)$ um conjunto de valorizações de Rees de I; então*

$$\overline{v}_I(x) = \min\left\{\frac{v(x)}{v(I)};\ v \in \mathcal{RV}(I)\right\}.$$

Demonstração. Devemos mostrar que:

(i) Para todo $n \geq 1$, temos $\overline{I^n} = \{x \in R;\ \overline{v}_I(x) \geq n\}$;

(ii) Para todo $x \in R$ e $n \geq 1$, vale $\overline{v}_I(x^n) = n\ \overline{v}_I(x)$.

Para (i) temos do Corolário 2.51 que $x \in \overline{I^n}$ se, e somente se, $\overline{v}_I(x) \geq n$. Portanto, para todo $n \geq 1$, obtemos $\overline{I^n} = \{x \in R;\ \overline{v}_I(x) \geq n\}$. Quanto à prova do item (ii), fixe $n \in \mathbb{N}$. Temos $\overline{v}_I(x) = \lim_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{ord}_I(x^m)}{m}$ e $\dfrac{\overline{v}_I(x^n)}{n} = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{ord}_I(x^{nm})}{nm}$. Note que $\dfrac{\mathrm{ord}_I(x^{nm})}{nm}$ é uma subsequência de $\dfrac{\mathrm{ord}_I(x^m)}{m}$, logo $\lim_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{ord}_I(x^{nm})}{nm} = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\mathrm{ord}_I(x^m)}{m}$. Portanto, $\overline{v}_I(x^n) = n\ \overline{v}_I(x)$. □

Definição 3.11. Sejam R um anel e $w : R \to \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ uma função. Dizemos que um subconjunto $\mathcal{S} \subseteq R$ é w-**consistente**, se para qualquer $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{S}$, tivermos $w(x_1 \cdots x_m) = \sum_{i=1}^m w(x_i)$.

No próximo resultado, mostraremos que para um ideal $I \subseteq R$ tal que $I \not\subseteq \mathfrak{p}$ para todo ideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$, um conjunto minimal de valorizações determinando a função w é unicamente determinado por w. Isso significa que o conjunto de valorizações de Rees, quando existir, é único.

Teorema 3.12. (Unicidade da valorização de Rees)

Sejam R um anel e $I \subseteq R$ um ideal tal que $I \not\subseteq \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$. Então, o conjunto das valorizações de Rees de I, quando existe, é unicamente determinado, a menos de equivalência de valorizações.

Demonstração. Primeiro faremos uma construção que será utilizada na prova do teorema. Seja $\mathcal{RV}(I) = \{v_1, \ldots, v_r\}$ um conjunto de valorizações de Rees de I. Seja $w : R \to \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ definida por

$$w(x) = \min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r\right\}.$$

Afirmação 1: Para qualquer $x \in R$, o conjunto $\{x^m;\ m \in \mathbb{Z}\} \subseteq R$ é w-consistente.

Sejam $x^{m_1}, \ldots, x^{m_n}$ com $m_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, n$. Então,

$$\begin{aligned}
w(x^{m_1} \cdots x^{m_n}) &= \min \left\{ \frac{v_i(x^{m_1} \cdots x^{m_n})}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r \right\} \\
&= \min \left\{ \frac{v_i(x^{m_1})}{v_i(I)} + \ldots + \frac{v_i(x^{m_n})}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r \right\} \\
&= \min \left\{ m_1 \frac{v_i(x)}{v_i(I)} + \ldots + m_n \frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r \right\} \\
&= \min \left\{ (m_1 + \ldots + m_n) \frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r \right\} \\
&= (m_1 + \ldots + m_n) \min \left\{ \frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r \right\} \\
&= m_1 w(x) + \ldots + m_n w(x) \\
&= w(x^{m_1}) + \ldots + w(x^{m_n}).
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos a Afirmação 1.

Denote por $\sum$ o conjunto parcialmente ordenado por inclusão, dos subconjuntos de R não-vazios e w-consistentes. Observe que $\sum$ é não-vazio pela Afirmação 1. Além disso, note que toda cadeia de elementos de $\sum$ possui um elemento maximal, que é a união destes. Assim, segue do Lema de Zorn que $\sum$ possui um elemento maximal. Agora, para cada $i = 1, \ldots, r$, defina

$$S_i = \left\{ x \in R;\ w(x) = \frac{v_i(x)}{v_i(I)} \right\}.$$

Afirmação 2: O conjunto S_i é não-vazio e w-consistente.
De fato, o conjunto S_i é não vazio, visto que $1 \in S_i$, pois

$$w(1) = \min \left\{ \frac{v_i(1)}{v_i(I)};\ \ i = 1, \ldots, r \right\} = 0 = v_i(1).$$

Mostremos que S_i é w-consistente. Para isso, sejam $x_1, \ldots, x_m \in S_i$. Então,

$$w(x_j) = \frac{v_i(x_j)}{v_i(I)} \ \text{ para todo } \ j = 1, \ldots, m. \tag{3.1}$$

Queremos mostrar que $w(x_1 \cdots x_m) = \sum_{j=1}^m w(x_j)$. Temos

$$\sum_{j=1}^m w(x_j) = \sum_{j=1}^m \frac{v_i(x_j)}{v_i(I)} = \frac{v_i(x_1) + \ldots + v_i(x_m)}{v_i(I)} = \frac{v_i(x_1 \cdots x_m)}{v_i(I)}.$$

Como por definição $w(x) = \min \left\{ \frac{v_s(x)}{v_s(I)};\ s = 1, \ldots, r \right\}$, segue que

$$\sum_{j=1}^m w(x_j) = \frac{v_i(x_1 \cdots x_m)}{v_i(I)} \geq w(x_1 \cdots x_m).$$

Além disso, digamos que $w(x_1 \cdots x_m) = \dfrac{v_s(x_1 \cdots x_m)}{v_s(I)}$ onde $s \in \{1, \ldots, r\}$. Devido a Equação (3.1), resulta

$$\frac{v_i(x_j)}{v_i(I)} \leq \frac{v_s(x_j)}{v_s(I)},$$

para todo $j = 1, \ldots, m$. Assim,

$$\frac{v_i(x_1 \cdots x_m)}{v_i(I)} = \frac{v_i(x_1)}{v_i(I)} + \ldots + \frac{v_i(x_m)}{v_i(I)} \leq \frac{v_s(x_1)}{v_s(I)} + \ldots + \frac{v_s(x_m)}{v_s(I)} = \frac{v_s(x_1 \cdots x_m)}{v_s(I)}.$$

Segue que

$$w(x_1 \cdots x_m) \geq \frac{v_i(x_1 \cdots x_m)}{v_i(I)} = \sum_{j=1}^{m} w(x_j).$$

E assim, obtemos a igualdade. Portanto, $S_i \in \sum$.

Afirmação 3: {conjuntos w-consistentes maximais} $= \{S_1, \ldots, S_r\}$.

Com efeito, seja S um conjunto w-consistente maximal. Se mostrarmos que $S \subseteq S_i$ para algum $i = 1, \ldots, r$, por maximalidade obteremos a primeira inclusão. Suponha, por absurdo, que $S \nsubseteq S_i$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Então, para cada i existe $y_i \in S \backslash S_i$. Como $y_i \notin S_i$, devido a definição de w, temos $w(y_i) < \dfrac{v_i(y_i)}{v_i(I)}$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Além disso, fixado qualquer i, novamente pela definição de w, temos $w(y_j) \leq \dfrac{v_i(y_j)}{v_i(I)}$ para cada $j = 1, \ldots, r$. Seja $y := y_1 \cdots y_r$. Então, como S é w-consistente, obtemos

$$w(y) = w(y_1) + \ldots + w(y_i) + \ldots + w(y_r) < \frac{v_i(y_1)}{v_i(I)} + \ldots + \frac{v_i(y_i)}{v_i(I)} + \ldots + \frac{v_i(y_r)}{v_i(I)} = \frac{v_i(y)}{v_i(I)}.$$

Como a desigualdade acima ocorre para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, concluímos que $w(y) < \min\left\{\dfrac{v_i(y)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r\right\}$, contradizendo a definição de w. Temos, assim, obtido a primeira inclusão. Para obter a outra, note primeiramente que S_i está contido em algum conjunto w-consistente maximal, o qual deve ser algum S_j. Mais adiante veremos que $S_i \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} S_j$, o que obriga $j = i$.

A próxima afirmação mostrará que os S_i são todos distintos.

Afirmação 4: Se $S_j = S_p$ com $j \neq p$, então

$$\min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ \ i = 1, \ldots, j, \ldots, p, \ldots r\right\} = \min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, p, \ldots r\right\}.$$

Faremos apenas o caso $j = 1$ e $p = 2$, isto é, mostraremos que se $S_1 = S_2$ então

$$\min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ \ i = 1, \ldots, r\right\} = \min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ \ i = 2, \ldots, r\right\}.$$

Para isso, sejam $S_1 = \left\{x \in R;\ w(x) = \dfrac{v_1(x)}{v_1(I)}\right\}$ e $S_2 = \left\{x \in R;\ w(x) = \dfrac{v_2(x)}{v_2(I)}\right\}$. Temos

$$\min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)}; i = 2, \ldots, r\right\} \geq \min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)}; i = 1, \ldots, r\right\}.$$

Dessa forma, suponha $\min\left\{\dfrac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 2, \ldots, r\right\} > \min\left\{\dfrac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r\right\} = w(x)$ e teremos $w(x) = \dfrac{v_1(x)}{v_1(I)}$. Daí, $x \in S_1 = S_2$ e isso implica $w(x) = \dfrac{v_2(x)}{v_2(I)}$, o que é uma contradição. Portanto, segue a Afirmação 4.

A partir dessa afirmação concluímos que se $S_j = S_p$ com $j \neq p$, então podemos omitir v_j da expressão de w. Pode-se daí verificar que $\overline{I^n} = \bigcap_{i \neq j}(I^n V_i \cap R)$ para todo n, o que contradiz a propriedade (3) da Definição 3.1. Por essa razão, os S_i são todos distintos. Observe que os conjuntos w-consistentes maximais só dependem de w. Dessa forma, pelas afirmações 3 e 4, concluímos que o número de v_i's é unicamente determinado pelo número de conjuntos w-consistentes maximais.

Afirmação 5: Se $S_r \subseteq S_1 \cup \ldots \cup S_{r-1}$, então para todo $x \in R$, temos

$$w(x) = \min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r-1\right\}. \tag{3.2}$$

Com efeito, temos $w(x) \geq \min\left\{\frac{v_i(x)}{v_i(I)};\ \ i = 1, \ldots, r-1\right\}$. Agora, suponha que $w(x) > \min\left\{\dfrac{v_i(x)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r-1\right\}$; então $w(x) = \dfrac{v_r(x)}{v_r(I)}$. O que implica que $x \in S_r$. Mas como $S_r \subseteq S_1 \cup \ldots \cup S_{r-1}$, resulta que $w(x) = \dfrac{v_j(x)}{v_j(I)}$ para algum $j \in \{1, \ldots, r-1\}$, o que é uma contradição. Temos, assim, concluído a Afirmação 5.

Entretanto, como os v_i's não podem ser omitidos, a contrapositiva da Afirmação 5 nos dá que $S_r \nsubseteq S_1 \cup \ldots \cup S_{r-1}$. De maneira análoga, $S_i \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} S_j$. Com isso, existe $x_i \in S_i \backslash \bigcup_{j \neq i} S_j$. Pela escolha de x_i, temos $w(x_i) = \dfrac{v_i(x_i)}{v_i(I)} \neq \dfrac{v_j(x_i)}{v_j(I)}$ para $j \neq i$. Sendo $w(x_i) = \min\left\{\dfrac{v_i(x_i)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r\right\}$, resulta que $\dfrac{v_j(x_i)}{v_j(I)} > \dfrac{v_i(x_i)}{v_i(I)}$ sempre que $j \neq i$. Por outro lado, como $I \nsubseteq \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ e por hipótese, $\{r \in R : v_i(r) = \infty\} = \mathfrak{p}_i$ para $i = 1, \ldots, r$, segue da Proposição A.2 que existe um elemento $c \in R$ tal que $v_i(c) < \infty$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Assim, para todo inteiro d suficientemente grande, quando $j \neq i$, temos $\left(\dfrac{v_j(x_i)}{v_j(I)} - \dfrac{v_i(x_i)}{v_i(I)}\right) d > \dfrac{v_i(c)}{v_i(I)} - \dfrac{v_j(c)}{v_j(I)}$. Isso significa que $\dfrac{v_j(x_i^d)}{v_j(I)} + \dfrac{v_j(c)}{v_j(I)} > \dfrac{v_i(c)}{v_i(I)} + \dfrac{v_i(x_i^d)}{v_i(I)}$. O que implica $\dfrac{v_j(cx_i^d)}{v_j(I)} > \dfrac{v_i(cx_i^d)}{v_i(I)}$ para todo $j \neq i$. E como $w(cx_i^d) = \min\left\{\dfrac{v_i(cx_i^d)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r\right\}$, acarreta que $w(cx_i^d) = \dfrac{v_i(cx_i^d)}{v_i(I)}$. Portanto,

$cx_i^d \in S_i$.

Afirmação 6: Se $x, y \in S_i$, então $xy \in S_i$.

Com efeito, se $x, y \in S_i$, temos $w(x) = \dfrac{v_i(x)}{v_i(I)}$ e $w(y) = \dfrac{v_i(y)}{v_i(I)}$. Sendo S_i w-consistente, segue que $w(xy) = w(x) + w(y) = \dfrac{v_i(x)}{v_i(I)} + \dfrac{v_i(y)}{v_i(I)} = \dfrac{v_i(xy)}{v_i(I)}$. E assim, deduzimos que $xy \in S_i$.

Afirmação 7: Se $ax_i^d \notin S_i$ para todo d, então $w(a) < \infty = v_i(a)$.

De fato, vimos que se $v_i(a) < \infty$, para todo d suficientemente grande teríamos $ax_i^d \in S_i$. Além disso, suponha que $w(a) = \infty$; então

$$\infty = w(a) = \min\left\{\frac{v_i(a)}{v_i(I)};\ i = 1, \ldots, r\right\},$$

e obteríamos $\infty = w(a) = \dfrac{v_i(a)}{v_i(I)}$. Isso implica $a \in S_i$. Levando em consideração que $x_i^d \in S_i$ para todo d, concluímos da afirmação anterior que $ax_i^d \in S_i$, o que é uma contradição.

Agora, considere o anel $W^{-1}R$, onde $W = R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)} \mathfrak{p}$. Para cada $i = 1, \ldots, r$, considere a função $u_i : W^{-1}R \to \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, definida por:

$$\begin{aligned} u_i\left(\frac{a}{b}\right) &= \begin{cases} w(ax_i^d) - w(bx_i^d), & \text{se } ax_i^d \in S_i \text{ para todo } d \gg 0; \\ \infty, & \text{se } ax_i^d \notin S_i \text{ para infinitos } d. \end{cases} \\ &= \begin{cases} w(ax_i^d) - w(bx_i^d), & \text{se } ax_i^d \in S_i \text{ para todo } d \gg 0; \\ \infty, & \text{se } ax_i^d \notin S_i \text{ para todo } d. \end{cases} \end{aligned}$$

A última igualdade ocorre pois se $ax_i^d \notin S_i$ para algum d, então $ax_i^{d-1} \notin S_i$; caso contrário, como $x_i \in S_i$, pela Afirmação 6, obtemos $ax_i^d \in S_i$, o que é uma contradição.

Note que u_i não depende de d, visto que se $ax_i^d \in S_i$ para todo d suficientemente grande, temos:

$$u_i\left(\frac{a}{b}\right) = w(ax_i^d) - w(bx_i^d) = \frac{v_i(ax_i^d)}{v_i(I)} - \frac{v_i(bx_i^d)}{v_i(I)} = \frac{v_i(a)}{v_i(I)} - \frac{v_i(b)}{v_i(I)}.$$

Agora, mostraremos que u_i independe do representante $\dfrac{a}{b}$. Sejam $\dfrac{a}{b}, \dfrac{a'}{b'} \in W^{-1}R$ tais que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$. Queremos mostrar que $u_i\left(\dfrac{a}{b}\right) = u_i\left(\dfrac{a'}{b'}\right)$. Existe $c \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)} \mathfrak{p}$ tal que $c(ab' - a'b) = 0$.

Afirmação 8: Se $ab' - a'b = 0$, então $u_i\left(\dfrac{a}{b}\right) = u_i\left(\dfrac{a'}{b'}\right)$.

Com efeito, suponha que $ax_i^d \notin S_i$. Por definição, $u_i\left(\dfrac{a}{b}\right) = \infty$. Por outro lado, pela

Afirmação 7, $v_i(a)=\infty$; de onde resulta $v_i(a')=\infty$. De fato, como $ab'=a'b$ e $v_i(a)=\infty$, segue que $\infty = v_i(a)+v_i(b') = v_i(a')+v_i(b)$; e sendo $v_i(b)<\infty$, isso significa que $v_i(a')=\infty$. Pela definição de u_i, teremos $u_i\left(\dfrac{a'}{b'}\right)=\infty$ ou $u_i\left(\dfrac{a'}{b'}\right)=w(a'x_i^d)-w(b'x_i^d)=\dfrac{v_i(a')}{v_i(I)}-\dfrac{v_i(b')}{v_i(I)}=\infty$, já que $v_i(b')<\infty$. Portanto, $u_i\left(\dfrac{a'}{b'}\right)=u_i\left(\dfrac{a}{b}\right)$. Analogamente, teremos $u_i\left(\dfrac{a}{b}\right)=\infty=u_i\left(\dfrac{a'}{b'}\right)$ se $a'x_i^d\notin S_i$ para todo d. Suponha, então, que para todo inteiro d e e suficientemente grandes, $ax_i^d, a'x_i^e\in S_i$. Como $b,b'\notin\bigcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}(R)}\mathfrak{p}$, segue que $v_i(b),v_i(b')<\infty$. Pela Afirmação 7, temos $bx_i^d, b'x_i^e\in S_i$ para todo inteiro d e e suficientemente grandes. Logo,

$$\begin{aligned} w(a'x_i^e)+w(bx_i^d) &= \frac{v_i(a'x_i^e)}{v_i(I)}+\frac{v_i(bx_i^d)}{v_i(I)}\\ &= \frac{v_i(a'bx_i^{e+d})}{v_i(I)}\\ &= \frac{v_i(ab'x_i^{e+d})}{v_i(I)}\\ &= \frac{v_i(ax_i^e)}{v_i(I)}+\frac{v_i(b'x_i^d)}{v_i(I)}\\ &= w(ax_i^e)+w(b'x_i^d). \end{aligned}$$

Portanto, $u_i\left(\dfrac{a'}{b'}\right)=u_i\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

Afirmação 9: Se $c(ab'-a'b)=0$, então $u_i\left(\dfrac{a}{b}\right)=u_i\left(\dfrac{a'}{b'}\right)$.

De fato, temos $u_i\left(\dfrac{a}{b}\right)=u_i\left(\dfrac{ca}{cb}\right)$ e analogamente $u_i\left(\dfrac{a'}{b'}\right)=u_i\left(\dfrac{ca'}{cb'}\right)$. Por outro lado,

$$(ca)(cb')-(cb)(ca')=c^2(ab'-a'b)=cc(ab'-a'b)=0.$$

Daí, pela afirmação anterior, concluímos que $u_i\left(\dfrac{ca}{cb}\right)=u_i\left(\dfrac{ca'}{cb'}\right)$. Portanto, $u_i\left(\dfrac{a}{b}\right)=u_i\left(\dfrac{a'}{b'}\right)$. Observe que u_i foi construída a partir de um conjunto w-consistente maximal, de modo que depende apenas de w.

Além disso, note que u_i satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} (1)\ u_i(\alpha+\beta) &\geq \min\{u_i(\alpha),u_i(\beta)\},\\ (2)\ u_i(\alpha\beta) &= u_i(\alpha)+u_i(\beta), \end{aligned}$$

para todo $\alpha,\beta\in W^{-1}R$.

Seja $P_i=\{r\in R;\ u_i(r)=\infty\ \}$.

Afirmação 10: $P_i=\mathfrak{p}_i:=\{r\in R; v_i(r)=\infty\}$.

De fato, suponha que $r \in R$ e $u_i(r) = \infty$, e analisemos dois casos. Se $rx_i^d \notin S_i$ para todo d, da Afirmação 7 obtemos $r \in \mathfrak{p}_i$. Se $rx_i^d \in S_i$ para d suficientemente grande, então $\infty = u_i\left(\dfrac{r}{1}\right) = w(rx_i^d) - w(x_i^d) = \dfrac{v_i(r)}{v_i(I)}$, donde $v_i(r) = \infty$. Reciprocamente, suponha que $v_i(r) = \infty$. Se $rx_i^d \notin S_i$ para todo d, então por definição, $u_i\left(\dfrac{r}{1}\right) = \infty$. Se $rx_i^d \in S_i$ para d suficientemente grande, então $u_i\left(\dfrac{r}{1}\right) = w(rx_i^d) - w(x_i^d) = \dfrac{v_i(r)}{v_i(I)} = \infty$.

Agora definiremos uma $\kappa(P_i)$-valorização, denotada por u_i', equivalente a v_i. De fato, seja $\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}} \in \kappa(P_i)^*$; então $\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}} \neq \dfrac{\overline{0}}{\overline{1}}$, o que implica $a \notin P_i$, e portanto, $u_i(a) < \infty$. Por definição, para todo inteiro positivo d suficientemente grande, $ax_i^d \in S_i$. Pela mesma razão, $bx_i^d \in S_i$ para d suficientemente grande. Definimos

$$u_i'\left(\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right) := u_i\left(\frac{a}{1}\right) - u_i\left(\frac{b}{1}\right).$$

Observe que

$$u_i'\left(\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right) = u_i\left(\frac{a}{1}\right) - u_i\left(\frac{b}{1}\right) = w(ax_i^d) - w(bx_i^d) = \frac{v_i(a)}{v_i(I)} - \frac{v_i(b)}{v_i(I)} = \frac{v_i(\overline{a}) - v_i(\overline{b})}{v_i(I)} = \frac{v_i\left(\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}}\right)}{v_i(I)},$$

onde o último termo independe do representante de $\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}} \in k(P_i)$, de modo que u_i' está bem definida. Assim como u_i, note que u_i' foi construída a partir de um conjunto w-consistente maximal, de modo que depende somente de w. Fazendo-se uso das propriedades (1) e (2) concluímos que u_i' é uma $\kappa(P_i)$-valorização.

Desde que $u_i'(r) = \dfrac{v_i(r)}{v_i(I)}$ para todo $r \in \kappa(P_i)^* = \kappa(\mathfrak{p}_i)^*$, temos: $R_{u_i'} = R_{v_i}$, onde $R_{u_i'}$ é o anel de valorização de u_i' e R_{v_i} é o anel de valorização de v_i. E mais, como u_i' depende somente de w, o mesmo sucede a R_{v_i}. Além disso, sendo $v_i(I) = \lambda$ uma constante positiva e $u_i'(r)\lambda = v_i(r)$ para todo $r \in \kappa(P_i)^*$, resulta que u_i' e v_i são equivalentes, e com isso, concluímos que v_i depende apenas de w.

Agora, suponha que existam dois conjuntos $\mathcal{RV}(I) = \{v_1, \ldots, v_r\} = \{w_1, \ldots, w_s\}$ de valorizações de Rees de I. Defina $w(x) = \min\left\{\dfrac{v_i(x)}{v_i(I)}; \, i = 1, \ldots, r\right\}$ e $w'(x) = \min\left\{\dfrac{w_j(x)}{w_j(I)}; \, j = 1, \ldots, s\right\}$. Pelo Lema 3.8, segue que $w(x) = w'(x)$ para todo $x \in R$, ou seja, a função w independe das valorizações de Rees de I. Além disso, vimos que o número de $v_i's$ é unicamente determinado pelo número de conjuntos w-consistentes maximais; donde segue que $r = s$. E mais, sabemos que cada v_i é equivalente a uma certa valorização u_i'. Fazendo a mesma construção acima com $w_1, \ldots, w_s$ no lugar de $v_1, \ldots, v_r$, obteremos que cada w_j é equivalente a u_i' (a menos de ordenação). Concluímos, então, que cada v_i é equivalente a w_j (a menos de ordenação). $\square$

3.2 Construção de uma valorização de Rees

Nesta seção construiremos as valorizações de Rees e veremos que em um anel Noetheriano R, supondo que o ideal $I \subseteq R$ seja gerado por $a_1, \ldots, a_d$, obteremos essas valorizações ao localizarmos para todo $i = 1, \ldots, d$, o fecho integral do *blowup* $R[\frac{I}{a_i}]$ em um ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\overline{R[\frac{I}{a_i}]}$ que contém a_i e cuja altura é igual a um. O próximo lema ajudará a provar a irredundância dessa construção. Ressaltamos que o fecho integral de $R[\frac{I}{a_i}]$ é tomado em $\mathrm{Q}(R)$ (o qual coincide com $\mathrm{Frac}(R)$ se R é um domínio).

Lema 3.13. *Sejam R um domínio Noetheriano, $I \subseteq R$ um ideal não-nulo, $a, b \neq 0$ em I e V um anel de valorização discreta tal que $V = \overline{R[\frac{I}{b}]}_{\mathfrak{p}}$ e $\mathfrak{p} \subset \overline{R[\frac{I}{b}]}$ é um ideal primo contendo b. Assuma que $aV = IV$. Então, $V = \overline{R[\frac{I}{a}]}_{\mathfrak{p}}$ onde $\mathfrak{p} \subset \overline{R[\frac{I}{a}]}$ é um ideal primo contendo a de altura um.*

Demonstração. Seja $R[\frac{I}{b}] = \left\{ \dfrac{x}{b^n};\ n \in \mathbb{Z}_+ \text{ e } x \in I^n \right\}$. Denotaremos $R[\frac{I}{b}] = S$. Considere $W = \left\{ \dfrac{a^m}{b^m};\ m \geq 0 \right\}$. Denotaremos $\overline{R[\frac{I}{b}]}_{\frac{a}{b}} = W^{-1}\overline{R[\frac{I}{b}]}$ e $\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}} = W^{-1}\mathfrak{p}$.
Afirmamos que $V = \left(\overline{R[\frac{I}{b}]}_{\frac{a}{b}}\right)_{\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}}}$ e $\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}} \subset \left(\overline{R[\frac{I}{b}]}\right)_{\frac{a}{b}}$ é um ideal primo de altura um. Para isso, mostraremos as seguintes afirmações.
Afirmação 1: $bS = IS$.
Com efeito, a primeira inclusão segue do fato de $b \in I$. Já para a inclusão contrária, seja $y \in I$ e $y\dfrac{x}{b^n} \in IS$ com $x \in I^n$; então $\dfrac{yx}{b^n} = \dfrac{byx}{b^{n+1}} \in bS$ já que $yx \in I^{n+1}$.
Afirmação 2: $bV = IV$.
De fato, a primeira inclusão da afirmação é válida, visto que, $b \in I$. Para a inclusão recíproca, note que $bV = b(\overline{S}_{\mathfrak{p}}) = (b\overline{S})_{\mathfrak{p}}$ e que $IV = I(\overline{S}_{\mathfrak{p}}) = (I\overline{S})_{\mathfrak{p}}$ onde $\mathfrak{p} \subset \overline{S}$ é um ideal primo. Mostraremos que $(I\overline{S})_{\mathfrak{p}} \subseteq (b\overline{S})_{\mathfrak{p}}$. Um elemento gerador de $(I\overline{S})_{\mathfrak{p}}$ é da forma $\dfrac{i}{1}$, com $i \in I \subseteq IS = bS \subseteq b\overline{S}$. Daí, $\dfrac{i}{1} \in (b\overline{S})_{\mathfrak{p}}$.

Além disso, note que $\dfrac{a}{b}$ é unidade em V, pois como $bV = IV = aV$, segue que $V = \dfrac{a}{b}V$. Sabendo que $1 \in V$, concluímos que $\dfrac{a}{b}$ é unidade em V. Dessa maneira, decorre do Lema A.8 que $V = \left(W^{-1}\overline{R[\frac{I}{b}]}\right)_{W^{-1}\mathfrak{p}}$, visto que $\dfrac{a}{b} \notin \mathfrak{p}$ (pois $\dfrac{a}{b}$ é unidade em

V). Portanto, $V = \left(\overline{R[\frac{I}{b}]_{\frac{a}{b}}}\right)_{\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}}}$.

Afirmação 4: $\text{ht}\left(\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}}\right) = 1$

De fato, sendo $V = \left(\overline{R[\frac{I}{b}]}\right)_{\mathfrak{p}}$ um anel de valorização discreta, segue que $\dim\left(\overline{R[\frac{I}{b}]}\right)_{\mathfrak{p}} = 1$, o que implica $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. E sendo assim, obtemos $\text{ht}(\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}}) = 1$.

Agora, mostraremos que $\left(\overline{R[\frac{I}{b}]_{\frac{a}{b}}}\right)_{\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}}} = \left(\overline{R[\frac{I}{a}]_{\frac{a}{b}}}\right)_{\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}}}$. Note que, devido a Proposição A.13, precisamos mostrar apenas que $R[\frac{I}{b}]_{\frac{a}{b}} = R[\frac{I}{a}]_{\frac{a}{b}}$. Para tal, seja $y = \frac{\frac{x}{b^n}}{\frac{a^m}{b^m}} \in R[\frac{I}{b}]_{\frac{a}{b}}$ com $x \in I^n$. Suponha, sem perda de generalidade, que $n \leq m$; daí $y = \dfrac{x}{b^n}\dfrac{b^m}{a^m} = \dfrac{xb^{m-n}}{a^m}$ onde $xb^{m-n} \in I^m$. Logo, $y \in R[\frac{I}{a}] \subseteq R[\frac{I}{a}]_{\frac{a}{b}}$. Analogamente, se mostra a inclusão oposta. Assim, $\overline{R[\frac{I}{b}]}_{\frac{a}{b}} = \overline{R[\frac{I}{a}]}_{\frac{a}{b}}$ e localizando em $\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}}$, advém $\left(\overline{R[\frac{I}{b}]_{\frac{a}{b}}}\right)_{\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}}} = \left(\overline{R[\frac{I}{a}]_{\frac{a}{b}}}\right)_{\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}}}$.

Dessa forma, mostramos que $V = \left(\overline{R[\frac{I}{a}]_{\frac{a}{b}}}\right)_{\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}}}$. E sendo $W = \left\{\dfrac{a^m}{b^m};\, m \geq 0\right\}$, com $W \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, segue do Lema A.8 que $V = \left(\overline{R[\frac{I}{a}]}\right)_{\mathfrak{p}}$. Como o ideal $\mathfrak{p}_{\frac{a}{b}}$ tem altura um, resulta que $\text{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. Além disso, $a \in \mathfrak{p}$, pois $a = b \cdot \dfrac{a}{b}$, onde $b \in \mathfrak{p}$. Com isso concluímos o resultado. $\square$

A seguir, provaremos o Teorema de Existência de valorizações de Rees. Esse teorema consiste no principal resultado deste trabalho. Exibiremos primeiro o caso em que R é um domínio Noetheriano e em seguida generalizaremos para um anel Noetheriano arbitrário. O primeiro caso encerrar-se-á fazendo-se uso da Proposição 3.15.

Teorema 3.14. (**Existência de valorizações de Rees em domínios Noetherianos**) *Sejam R um domínio Noetheriano e $I = (a_1, \ldots, a_d)$ um ideal em R tal que para cada $i = 1, \ldots, d$, temos $S_i = R[\frac{I}{a_i}]$, onde $\overline{S_i}$ é o fecho integral de S_i. Seja T o conjunto de todos os $(\overline{S_i})_{\mathfrak{p}}$, quando $\mathfrak{p}$ varia sobre os ideais primos em $\overline{S_i}$ minimais de $a_i\overline{S_i}$ e i varia de 1 a d. Então, T é o conjunto dos anéis de valorizações de Rees de I. Em particular, para todo n,*

$$\overline{I^n} = \bigcap_{i=1}^{d}\left(\overline{I^n\overline{S_i}} \cap R\right) = \bigcap_{i=1}^{d}\left(a_i^n\overline{S_i} \cap R\right) = \bigcap_{i=1}^{d}\left(\bigcap_{\mathfrak{p}}\left(a_i^n(\overline{S_i})_{\mathfrak{p}}\right) \cap R\right).$$

Demonstração. Estamos supondo $I \neq 0$; então para todo $i = 1, \ldots, d$, de forma análoga ao lema anterior, temos

$$IS_i = a_iS_i. \tag{3.3}$$

De acordo com a Observação A.24, o anel $R[It]$ é graduado, onde

$$(R[It]_{a_it})_0 = \left\{\frac{r}{s};\ r \text{ e } s \text{ são homogêneos em } R[It] \text{ e } \deg(r) = \deg(s)\right\}$$

. *Afirmação 1:* $S_i = (R[It]_{a_it})_0$, onde t é uma variável de grau um sobre o anel R de grau zero e $R[It]_{a_it}$ é a localização da álgebra de Rees $R[It]$ em $S = \{(a_it)^n;\ n \geq 0\ \}$.
De fato, seja $\frac{r}{s} \in (R[It]_{a_it})_0$, onde r, s são elementos homogêneos; digamos que $s = a_i^n t^n$ e $r = yt^n$, com $y \in I^n$. Logo, $\frac{r}{s} = \frac{yt^n}{a_i^n t^n} = \frac{y}{a_i^n} \in S_i$. Reciprocamente, seja $\frac{x}{a_i^n} \in S_i$, onde $x \in I^n$. Temos $\frac{x}{a_i^n} = \frac{xt^n}{a_i^n t^n} \in (R[It]_{a_it})_0$.
Afirmação 2: $\overline{S_i} = \bigcup_{m\geq 0} \dfrac{\overline{I^m\overline{R}}}{a_i^m}$ para todo i.
Com efeito, seja $y \in \overline{S_i} = \overline{R[\frac{I}{a_i}]}$; então temos uma equação integral da forma

$$y^n + \frac{b_1}{a_i^{r_1}}y^{n-1} + \frac{b_2}{a_i^{r_2}}y^{n-2} + \ldots + \frac{b_j}{a_i^{r_j}}y^{n-j} + \ldots + \frac{b_n}{a_i^{r_n}} = 0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $b_j \in I^{r_j}$ com $j = 1, \ldots, n$. Multiplicando e dividindo por potências de a_i, podemos assumir que $m := r_1 = \ldots = r_n$ e $b_j \in I^m$. Ao multiplicarmos a equação acima por $(a_i^m)^n$, obtemos

$$(a_i^m y)^n + a_i^{mn-m}b_1y^{n-1} + a_i^{mn-m}b_2y^{n-2} + \ldots + a_i^{mn-m}b_jy^{n-j} + \ldots + a_i^{mn-m}b_n = 0,$$

de modo que $(a_i^m y)^n + b_1(a_i^m y)^{n-1} + a_i^m b_2(a_i^m y)^{n-2} + \ldots + a_i^{mj-m}b_j(a_i^m y)^{n-j} + \ldots + a_i^{mn-m}b_n = 0$, onde $a_i^{mj-m}b_j \in (I^m)^j$. Isto implica que $a_i^m y \in \overline{I^m} \subseteq \overline{I^m\overline{R}}$, de forma que $y \in \dfrac{\overline{I^m\overline{R}}}{a_i^m}$.
Reciprocamente, primeiro mostremos que $\bigcup_m \dfrac{I^m\overline{R}}{a_i^m} \subseteq \overline{R[\frac{I}{a_i}]}$ para todo m; é suficiente mostrar apenas o caso $m = 1$. Sejam, então, $b \in I$ e $r \in \overline{R}$. Podemos escrever $r^n + c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} \ldots + c_n = 0$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $c_j \in R$ com $j = 1, \ldots, n$. Multiplicando por $\left(\frac{b}{a_i}\right)^n$ temos:

$$\left(\frac{br}{a_i}\right)^n + \frac{bc_1}{a_i}\left(\frac{br}{a_i}\right)^{n-1} + \frac{b^2c_2}{a_i^2}\left(\frac{br}{a_i}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{b^nc_n}{a_i^n} = 0,$$

onde $\dfrac{b^jc_j}{a_i^j} \in R[\frac{I}{a_i}]$. Logo, $\dfrac{br}{a_i} \in \overline{R[\frac{I}{a_i}]}$. Agora mostremos que $\dfrac{\overline{I^m\overline{R}}}{a_i^m} \subseteq \overline{R[\frac{I}{a_i}]}$ para todo m.
Seja $z \in \overline{I^m\overline{R}}$. Podemos escrever $z^q + d_1z^{q-1} + d_2z^{q-2} + \ldots + d_q = 0$, onde $q \in \mathbb{N}$ e $d_j \in (I^m)^j\overline{R}$ com $j = 1, \ldots, q$. Dividindo por $(a_i^m)^q$ acarreta

$$\left(\frac{z}{a_i^m}\right)^q + \frac{d_1}{a_i^m}\left(\frac{z}{a_i^m}\right)^{q-1} + \frac{d_2}{(a_i^m)^2}\left(\frac{z}{a_i^m}\right)^{q-2} + \ldots + \frac{d_q}{(a_i^m)^q} = 0,$$

onde $\dfrac{d_j}{(a_i^m)^j} \in \dfrac{\overline{(I^m)^j R}}{(a_i^m)^j} \subseteq \overline{R[\frac{I}{a_i}]}$. Portanto, $\dfrac{z}{a_i^m} \in \overline{\overline{R[\frac{I}{a_i}]}} = \overline{R[\frac{I}{a_i}]}$. E assim, concluímos a Afirmação 2.

Afirmação 3: $\overline{I^n} = \bigcap_i \, (a_i^n \overline{S_i} \cap R)$.

De fato, fixado $n \in \mathbb{N}$, a Afirmação 1 provê que $\dfrac{\overline{I^n \overline{R}}}{a_i^n} \subseteq \overline{S_i}$ para todo i. Com isso, $\overline{I^n} \subseteq \overline{I^n \overline{R}} \subseteq a_i^n \overline{S_i}$. Portanto, $\overline{I^n} \subseteq a_i^n \overline{S_i} \cap R$. Para a recíproca, seja $r \in \bigcap_i \, (a_i^n \overline{S_i} \cap R)$. Como $\overline{S_i} = \bigcup_{m \geq 0} \dfrac{\overline{I^m \overline{R}}}{a_i^m}$, resulta que existe um inteiro $m \geq n$ tal que para cada i, temos $r = \dfrac{a_i^n b}{a_i^m}$ para algum $b \in \overline{I^m \overline{R}}$. Então, $r a_i^m \in a_i^n \overline{I^m \overline{R}}$ e isso implica que $r a_i^{m-n} \in \overline{I^m \overline{R}}$ para todo i. Pelo Corolário 2.44, (tomando $J = I^n \overline{R}$), conseguimos

$$r \in \bigcap_i \left(\overline{I^n \overline{R} I^{m-n} \overline{R}} : a_i^{m-n} \right) = \overline{I^n \overline{R}}.$$

A Proposição 2.15 nos dá $\overline{I^n \overline{R}} \cap R = \overline{I^n}$, de modo que $r \in \overline{I^n \overline{R}} \cap R = \overline{I^n}$. Dessa forma, segue a Afirmação 3.

Agora, observe que sendo R Noetheriano, S_i também o é. De fato, sendo $I = (a_1, \ldots, a_d)$, obtemos $R[It] = R[a_1 t, \ldots, a_d t]$, ou seja, $R[It]$ é uma R-álgebra finitamente gerada. Segue do Teorema da Base de Hilbert (Teorema A.19) que $R[It]$ é Noetheriano. Portanto, a localização $R[It]_{a_i t}$ também é um anel Noetheriano, e assim, pela Afirmação 1 e pela Proposição A.22, S_i é Noetheriano. Devido a Mori-Nagata (Teorema A.28), segue que $\overline{S_i}$ é um domínio de Krull.

Afirmação 4: $(\overline{S_i})_{\mathfrak{p}}$ é um anel de valorização discreta para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(\overline{S_i}/a_i\overline{S_i})$.

Com efeito, sendo $a_i \neq 0$ e $\overline{S_i}$ um domínio, segue que a_i é não-divisor de zero. Dessa forma, do Teorema do ideal principal de Krull (Teorema A.23), resulta que $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(\overline{S_i}/a_i\overline{S_i})$ e da definição de domínio de Krull, concluímos que $(\overline{S_i})_{\mathfrak{p}}$ um domínio Noetheriano integralmente fechado para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(\overline{S_i}/a_i\overline{S_i})$. Portanto, da Proposição A.21 obtemos que $(\overline{S_i})_{\mathfrak{p}}$ é um anel de valorização discreta para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(\overline{S_i}/a_i\overline{S_i})$. Denote $T_i = \left\{ (\overline{S_i})_{\mathfrak{p}};\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(\overline{S_i}/a_i\overline{S_i}) \right\}$.

Afirmação 5: T_i é um conjunto finito.

De fato, como $\overline{S_i}$ é um domínio de Krull e $a_i \neq 0$, segue da Definição 2.19 que os $a_i' s$ pertencem no máximo à uma quantidade finita de ideais primos de altura um. Como todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(\overline{S_i}/a_i\overline{S_i})$ contém a_i, segue que T_i é um conjunto finito.

Para melhorar a notação, usaremos V para denotar os anéis de valorizações $(\overline{S_i})_{\mathfrak{p}}$. Agora, da Equação (3.3) conseguimos $I^n \overline{S_i} = I^n S_i \overline{S_i} = a_i^n S_i \overline{S_i} = a_i^n \overline{S_i}$. Daí, pela Proposição 2.21, obtemos que

$$I^n\overline{S_i} = a_i^n\overline{S_i} = \bigcap_{V\in T_i}(a_i^nV\cap\overline{S_i}) \tag{3.4}$$

é uma decomposição primária minimal de $a_i^n\overline{S_i}$.

Da Afirmação 2, vale

$$\begin{aligned}\overline{I^n} &= \textstyle\bigcap_i(a_i^n\overline{S_i}\cap R)\\ &= \textstyle\bigcap_i\left((\bigcap_{V\in T_i}a_i^nV\cap\overline{S_i})\cap R\right)\\ &= \textstyle\bigcap_i\left(\bigcap_{V\in T_i}a_i^nV\cap R\right)\\ &= \textstyle\bigcap_i\left(\bigcap_{V\in T_i}I^nV\cap R\right).\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\overline{I^n} = \bigcap_i\left(\bigcap_{V\in T_i}I^nV\cap R\right). \tag{3.5}$$

Observe que tal igualdade é válida para qualquer ideal não-nulo $I = (a_1, ..., a_d)$ em um domínio R não necessariamente Noetheriano, mas tal que $\overline{S_i} := \overline{R[\frac{I}{a_i}]}$ seja um domínio de Krull para cada i. Para ver isto, basta seguir todos os passos acima, desconsiderando-se o parágrafo anterior à Afirmação 4. Usaremos esta observação mais adiante.

Como R é domínio, o único ideal primo minimal de R é $\mathfrak{p} = (0)$. Assim, $R/\mathfrak{p} = R$ e $\kappa(\mathfrak{p}) = \mathrm{Frac}(R)$. Dessa forma, concluímos que o conjunto $T = \bigcup_i T_i$ satisfaz as duas primeiras propriedades da definição de valorização de Rees.

Agora, provaremos a terceira propriedade, isto é, todo anel de valorização em T é irredundante. Para isso, seja V_0 um anel de valorização em T. Sem perda de generalidade, suponha que $V_0 \in T_1$. Logo, $V_0 = (\overline{S_1})_\mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\overline{S_1}/a_1\overline{S_1})$. Vimos na Equação (3.4) que

$$a_1\overline{S_1} = \bigcap_{V\in T_1}(a_1V\cap\overline{S_1}) = (a_1V_0\cap\overline{S_1})\bigcap\left(\bigcap_{V\in T_1\setminus\{V_0\}}(a_1V\cap\overline{S_1})\right) \tag{3.6}$$

é uma decomposição primária minimal de $a_1\overline{S_1}$. Com isso, temos

$$\bigcap_{V\in T_1\setminus\{V_0\}}(a_1V\cap\overline{S_1}) \nsubseteq a_1V_0\cap\overline{S_1}. \tag{3.7}$$

Logo, pelo Lema 2.22 existe $r \in \bigcap_{V\in T_1\setminus\{V_0\}}(a_1V\cap\overline{S_1})$ tal que $r \notin \sqrt{a_1V_0\cap\overline{S_1}}$. Por outro lado, $a_1V_0\cap\overline{S_1} = a_1(\overline{S_1})_\mathfrak{p}\cap\overline{S_1}$ e $((\overline{S_1})_\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}_\mathfrak{p})$ é um anel local onde $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}) = 1$ e a_1

é não-divisor de zero em $(\overline{S_1})_{\mathfrak{p}}$. Daí, pelo Lema A.25 segue que $\sqrt{a_1(\overline{S_1})_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$. Dessa forma, $\sqrt{a_1(\overline{S_1})_{\mathfrak{p}} \cap \overline{S_1}} = \sqrt{a_1(\overline{S_1})_{\mathfrak{p}}} \cap \overline{S_1} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \cap \overline{S_1} = \mathfrak{p}$. Logo, $\sqrt{a_1 V_0 \cap \overline{S_1}} = \mathfrak{p}$. Sendo assim, temos $r \notin \mathfrak{p}$. Daí, o elemento $\frac{r}{1}$ é unidade em V_0 e segue que $rV_0 = V_0$. Escreva $r = \frac{s}{a_1^m}$ para algum inteiro m com $s \in \overline{I^m\overline{R}}$, pois $r \in \overline{S_1} = \bigcup_{m\geq 0} \frac{\overline{I^m\overline{R}}}{a_1^m}$.

Seja $V \in T$. Se $V = V_0$, temos $s^nV_0 = r^n a_1^{mn} V_0 = a_1^{mn} r^n V_0$ e como $r^n V_0 = V_0$, segue que $s^n V_0 = a_1^{mn} V_0 = I^{mn} V_0$.

Afirmação 6: $I^{mn}V_0 \nsubseteq I^{mn+1}V_0$.

Com efeito, se $I^{mn}V_0 = I^{mn+1}V_0 = I^{mn}V_0 I V_0$, então pelo Lema de Nakayama (Corolário A.3), teríamos $I^{mn}V_0 = 0$. Mas $a_i^{mn} \in I^{mn}V_0$, logo $a_i^{mn} = 0$, de modo que $a_i = 0$, para todo i e então $I = 0$, o que é uma contradição, visto que estamos supondo $I \neq 0$.

Dessa forma, concluímos que $s^nV_0 \nsubseteq I^{mn+1}V_0$. Logo, $s^n \notin I^{mn+1}V_0$. Iremos agora mostrar que $s^nV \subseteq I^{mn+1}V$ para todo $V \in T\backslash\{V_0\}$ e n suficientemente grande, ou seja, $s^n \in I^{mn+1}V$ para n suficientemente grande.

Afirmação 7: Se $V \in T\backslash\{V_0\}$ é tal que $V \supseteq \overline{S_1}$, então $V \in T_1$.

De fato, $V = \left(\overline{R[\frac{I}{a_i}]}\right)_{\mathfrak{p}}$ para algum i e algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}\left(\overline{S_i}/a_i\overline{S_i}\right)$. Além disso, $a_1 V = IV$, pois se $x \in I$, então $x = a_1 \cdot \frac{x}{a_1} \in a_1\overline{S_1} \subseteq a_1 V$. Portanto, do lema anterior segue que $V = \left(\overline{R[\frac{I}{a_1}]}\right)_{\mathfrak{p}}$ onde $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ e $a_1 \in \mathfrak{p}$. Logo, $V = (\overline{S_1})_{\mathfrak{p}} \in T_1$.

Como $r \in \bigcap_{V\in T_1\backslash\{V_0\}} a_1V \cap \overline{S_1}$, temos $r \in a_1V$. Assim, $sV = ra_1^mV \subseteq a_1^{m+1}V$. Portanto, $s^nV = r^na_1^{mn}V = r^{n-1}ra_1^{mn}V \subseteq r^{n-1}a_1^{mn+1}V \subseteq I^{mn+1}V$ para todo $V \in T_1\backslash\{V_0\}$. Agora, seja $V \in T\backslash T_1$; a contrapositiva da afirmação anterior nos dá que $V \not\supseteq \overline{S_1}$.

Afirmação 8: $a_1V \subsetneq IV$.

De fato, suponha que $a_1V = IV$; então do lema anterior $V = (\overline{S_1})_{\mathfrak{p}}$ para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(\overline{S_1}/a_1\overline{S_1})$, e daí $V \supseteq \overline{S_1}$, o que é uma contradição.

Afirmação 9: Para todo n suficientemente grande temos $a_1^nV \subseteq I^{n+1}V$.

Com efeito usando a Afirmação 8, seja $x \in IV$ tal que $x \notin a_1V$. Como V é uma valorização discreta, segue que todos os seus ideais são primários. Em particular, desde que $x \cdot \frac{a_1}{x} = a_1 \in a_1V$, resulta que $\frac{a_1^n}{x^n} \in a_1V$ para algum n. Logo, $a_1^nV \subseteq a_1x^nV \subseteq I^{n+1}V$ para n suficientemente grande.

Com isso, obtemos $s^nV = r^na_1^{mn}V \subseteq r^nI^{mn+1}V \subseteq I^{mn+1}V$. Portanto, $s^nV \subseteq$

$I^{mn+1}V$ para todo $V \in (T \backslash T_1) \cup (T_1 \backslash \{V_0\}) = T \backslash \{V_0\}$ e todo n suficientemente grande. E isso implica que $s^n \in I^{mn+1}V$ para todo $V \in T \backslash \{V_0\}$. Como $s^n \in \overline{R}$, pois $s^n \in \overline{I^{mn}\overline{R}} \subseteq \overline{R}$, acarreta que $s^n \in \bigcap_{V \in T \backslash \{V_0\}} I^{mn+1}V \cap \overline{R}$, embora $s^n \notin I^{mn+1}V_0$. Sendo assim, $\bigcap_{V \in T \backslash \{V_0\}} I^{mn+1}V \cap \overline{R} \nsubseteq I^{mn+1}V_0 \cap \overline{R}$. Tomando $t = mn + 1$, temos $\bigcap_{V \in T \backslash \{V_0\}} I^tV \cap \overline{R} \nsubseteq I^tV_0 \cap \overline{R}$. Assim, $\bigcap_{V \in T \backslash \{V_0\}} I^tV \cap \overline{R} \neq \bigcap_{V \in T} I^tV \cap \overline{R}$. Seja $T^* = \bigcup_i T_i^*$, onde $T_i^* = \left\{ \left(\overline{R[\frac{I\overline{R}}{a_i}]}\right)_{\mathfrak{p}} ;\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\overline{S_i^*}/a_i\overline{S_i^*}) \right\}$ e $S_i^* = R[\frac{I\overline{R}}{a_i}]$.

Afirmação 10: $T^* = T$.

De fato, seja $T_i = \left\{ \left(\overline{R[\frac{I}{a_i}]}\right)_{\mathfrak{p}} ;\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\overline{S_i}/a_i\overline{S_i}) \right\}$, de modo que $T = \bigcup_i T_i$, onde $S_i = R[\frac{I}{a_i}]$. Para obter $T = T^*$ é suficiente mostrar que $\overline{S_i} = \overline{S_i^*}$, isto é, $\overline{R[\frac{I}{a_i}]} = \overline{R[\frac{I\overline{R}}{a_i}]}$. Para isso, fazemos uso da igualdade $\overline{S_i} = \bigcup_{m \geq 0} \dfrac{\overline{I^m\overline{R}}}{a_i^m}$. Aplicando esta igualdade ao anel $\overline{R}$ e ao ideal $I\overline{R}$, obtemos $\overline{S_i^*} = \bigcup_{m \geq 0} \dfrac{\overline{(I^m\overline{R})\overline{\overline{R}}}}{a_i^m} = \displaystyle\bigcup_{m \geq 0} \dfrac{\overline{I^m\overline{R}}}{a_i^m}$. Logo, $\overline{S_i} = \overline{S_i^*}$ e segue a Afirmação 10.

Como $\overline{S_i^*} = \overline{S_i}$ é um domínio de Krull, resulta da observação posterior à igualdade (3.5), que

$$\overline{I^n\overline{R}} = \bigcap_{V \in T^*} (I^n\overline{R}V \cap \overline{R}) = \bigcap_{V \in T} (I^n\overline{R}V \cap \overline{R}) = \bigcap_{V \in T} (I^nV \cap \overline{R}).$$

Assim, o item (i) da Proposição 3.15 é satisfeito.

Temos obtido mais acima que dado qualquer $V_0 \in T$, existe um inteiro t tal que $\bigcap_{V \in T} I^tV \cap \overline{R} = \overline{I^t\overline{R}} \subsetneq \bigcap_{V \in T \backslash \{V_0\}} I^tV \cap \overline{R}$. Mostraremos agora que o item (ii) da Proposição 3.15 é satisfeito. De fato, seja $U \subsetneq T$. Suponha que $U = T \backslash \{V_0, V_1, \ldots, V_u\}$. Para cada $j = 0, \ldots, u$, existe um inteiro t_j tal que $\overline{I^{t_j}\overline{R}} \subsetneq \bigcap_{V \in T \backslash \{V_j\}} I^{t_j}V \cap \overline{R}$. Seja $t := \max\{t_j\}$. Então, $\overline{I^t\overline{R}} \subsetneq \bigcap_{V \in T \backslash \{V_j\}} I^{t_j}V \cap \overline{R} \subseteq \bigcap_{V \in U} I^{t_j}V \cap \overline{R}$ para cada j. Segue que $\overline{I^t\overline{R}} \subseteq (\bigcap_{V \in U} I^{t_0}V \cap \overline{R}) \bigcap \ldots \bigcap (\bigcap_{V \in U} I^{t_u}V \cap \overline{R}) = \bigcap_{V \in U} I^tV \cap \overline{R}$. A última inclusão é própria pois $t = t_j$ para algum $j \in \{0, \ldots, u\}$.

Portanto, os itens (i) e (ii) da Proposição 3.15 são satisfeitos, o que implicará da mesma (tomando $T' = T \backslash \{V_0\}$) que qualquer anel $V_0 \in T$ é irredundante no conjunto de valorizações de Rees de I. E com isso concluimos a demonstração do teorema. $\square$

Proposição 3.15. *Seja R um domínio Noetheriano tal que* $\mathrm{Frac}(R) = K$. *Sejam $I \subseteq R$ um ideal não-nulo e T um conjunto de anéis Noetherianos de K-valorizações satisfazendo:*

(i) *Para todo $n \geq 1$, $\overline{I^n\overline{R}} = \bigcap_{V \in T} (I^nV \cap \overline{R})$;*

(ii) Para todo $U \subsetneq T$, existe um inteiro n tal que $\overline{I^n\overline{R}} \neq \bigcap_{V \in U} (I^nV \cap \overline{R})$.

Então T satisfaz as mesmas propriedades também em R, ou seja:

(I) Para todo $n \geq 1$, temos $\overline{I^n} = \bigcap_{V \in T} (I^nV \cap R)$;

(II) Se $T' \subsetneq T$, existe um inteiro n tal que $\overline{I^n} \neq \bigcap_{V \in T'} (I^nV \cap R)$.

Demonstração. Para o item (I) considere $S = \overline{R}$ na Proposição 2.15 e com isso teremos $\overline{I^n} = \overline{I^n\overline{R}} \cap R = \big((\cap_{V \in T} I^nV \cap \overline{R}) \cap R\big) = \bigcap_{V \in T} (I^nV \cap R)$ para todo n.

Da hipótese (ii), escolhendo $U = T \backslash \{V_0\}$, para cada $V_0 \in T$ existem $n \geq 1$ e $r \in \overline{R}$ tais que $r \in \cap_{V \neq V_0}(I^nV \cap \overline{R})$, mas $r \notin \cap_{V \in T}(I^nV \cap \overline{R})$. Digamos que $R[r] = R\alpha_1 + R\alpha_2 + \cdots + R\alpha_t$, onde $\alpha_i \in R[r] \subseteq Q(R)$ (Proposicão A.12). Então, $R[r] = R\dfrac{x_1}{y_1} + R\dfrac{x_2}{y_2} + \cdots + R\dfrac{x_t}{y_t}$, onde $y_i \neq 0$ e $x_i, y_i \in R$. Tome $c = y_1y_2 \cdot \cdots \cdot y_t \neq 0$; daí $cR[r] \subseteq R$. Seja v_0 uma valorização de valores reais correspondendo a V_0. Como $r \notin \overline{I^n}$ e $r \in \bigcap_{V \neq V_0} I^nV$, temos $v_0(r) < nv_0(I)$. Assim, $t := nv_0(I) - v_0(r)$ é positivo e existe m suficientemente grande tal que $v_0(c) < tm$. Então

$$v_0(cr^m) = v_0(c) + v_0(r^m) < tm + v_0(r^m) = mnv_0(I).$$

Isso implica, pelo Lema 3.6, que

$$cr^m \notin \overline{I^{mn}} = \bigcap_{V \in T} (I^{mn}V \cap R). \tag{3.8}$$

Desde que $r \in \bigcap_{V \in T \backslash \{V_0\}} I^nV$, conseguimos $cr^m \in \bigcap_{V \in T \backslash \{V_0\}} I^{mn}V$. Por outro lado, $cr^m \in cR[r] \subseteq R$ e assim, $cr^m \in \bigcap_{V \in T \backslash \{V_0\}} I^{mn}V \cap R$. Em vista disso e de (3.8), resulta que $\overline{I^{mn}} = \bigcap_{V \in T} (I^{mn}V \cap R) \subsetneq \bigcap_{V \in T \backslash \{V_0\}} (I^{mn}V \cap R)$. Portanto, qualquer $V_0 \in T$ é irredundante. Repare que temos obtido o item (II) para o caso particular $T' = V \backslash \{V_0\}$. Façamos o caso geral. Seja $T' \subsetneq T$. Suponha que $T' = T \backslash \{V_0, V_1, \ldots, V_u\}$. Para cada $j = 0, \ldots, u$, existe um inteiro t_j tal que $\overline{I^{t_j}} \subsetneq \bigcap_{V \in T \backslash \{V_j\}} I^{t_j}V \cap R$. Seja $t := \max\{t_j\}$. Então, $\overline{I^t} \subsetneq \bigcap_{V \in T \backslash \{V_j\}} I^{t_j}V \cap R \subseteq \bigcap_{V \in T'} I^{t_j}V \cap R$ para cada j. Segue que $\overline{I^t} \subseteq (\bigcap_{V \in T'} I^{t_0}V \cap R) \bigcap \ldots \bigcap (\bigcap_{V \in T'} I^{t_u}V \cap R) = \bigcap_{V \in T'} I^tV \cap R$. A última inclusão é própria pois $t = t_j$ para algum $j \in \{0, \ldots, u\}$. $\square$

Observação 3.16. Suponha $\mathcal{RV}(I) = \{v_1, \ldots, v_r\}$. Então, da propriedade (2) da Definição 3.1, temos $\overline{I^n} = \bigcap_{i=1}^{r} I^nV_i \cap R$. Pela propriedade (3) da mesma definição resulta que o conjunto $\{V_1, \ldots, V_r\}$ satisfazendo esta decomposição é minimal. Dessa forma, fixado qualquer j, temos $\bigcap_{i \neq j} I^nV_i \cap R \nsubseteq I^nV_j \cap R$ para algum $n \geq 1$. E isso equivale a dizer que existe $r \in \bigcap_{i\neq j} I^nV_i \cap R$ tal que $r \notin \overline{I^n}$. Dessa maneira, $v_i(r) \geq nv_i(I)$ para todo $i \neq j$ e $v_j(r) < nv_j(r)$.

Agora, apresentaremos a versão geral do Teorema de Existência de valorizações de Rees.

Teorema 3.17. (Existência de valorizações de Rees em anéis Noetherianos) *Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal em R. Então:*
(a) O ideal I tem um conjunto de valorização de Rees;
(b) $\mathcal{RV}(I) = \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)} \mathcal{RV}(I(R/\mathfrak{p}))$.

Demonstração. Faremos a prova dos itens (a) e (b) simultaneamente. Suponha $\mathrm{Min}(R) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t\}$. Como $R/\mathfrak{p}_i$ é domínio para todo i, segue do Teorema 3.14 que existe o conjunto de valorizações de Rees de $I(R/\mathfrak{p}_i)$ para todo $i = 1, \dots, t$. Dessa forma, suponha $\mathcal{RV}(I(R/\mathfrak{p}_i)) = \{V_{i1}, \dots, V_{in_i}\}$, com $i = 1, \dots, t$, e mostremos que $\mathcal{RV}(I) = \bigcup_{i=1}^t \mathcal{RV}(I(R/\mathfrak{p}_i))$. Para isso, verificaremos que as propriedades da Definição 3.1 são satisfeitas para o ideal $I \subseteq R$.

Afirmação 1: Para todo $i = 1, \dots, t$ e todo $j = 1, \dots, n_i$, temos $R/\mathfrak{p}_i \subseteq V_{ij} \subseteq \kappa(\mathfrak{p}_i)$.
De fato, como $\mathcal{RV}(I(R/\mathfrak{p}_i)) = \{V_{i1}, \dots, V_{in_i}\}$, resulta que $(R/\mathfrak{p}_i)/(\overline{0}) \subseteq V_{ij} \subseteq \kappa((\overline{0}))$ para todo i, j, visto que $\mathrm{Min}(R/\mathfrak{p}_i) = \{\overline{0}\}$ para todo i. Assim, $R/\mathfrak{p}_i \subseteq V_{ij} \subseteq \kappa(\mathfrak{p}_i)$ para todo $i = 1, \dots, t$ e $j = 1, \dots, n_i$.

Afirmação 2: $\overline{I^n} = (I^nV_{11} \cap R) \bigcap \dots \bigcap (I^nV_{1n_1} \cap R) \bigcap \dots \bigcap (I^nV_{t1} \cap R) \bigcap \dots \bigcap (I^nV_{tn_t} \cap R)$ para todo $n \geq 1$.
Com efeito, fixe $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1, ..., t\}$, e sejam $x \in \overline{I^n}$ e x' a imagem de x em $R/\mathfrak{p}_i$. Da Proposição 2.8, temos $x' \in \overline{I^n(R/\mathfrak{p}_i)}$ para todo i. Logo, $x' \in I^n(R/\mathfrak{p}_i)V_{ij} \cap (R/\mathfrak{p}_i)$ para todo j e assim, $x' \in I^nV_{ij} \cap R/\mathfrak{p}_i$, ou seja, $x \in I^nV_{ij} \cap R$. Como i foi tomado arbitrariamente, conclui-se, assim, a primeira inclusão da Afirmação 2. Para a inclusão recíproca, fixe i e retroceda os passos.

Agora, mostraremos que o conjunto

$$\bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)} \mathcal{RV}(I(R/\mathfrak{p})) = \{V_{11}, \dots, V_{1n_1}, \dots, V_{t_1}, \dots, V_{tn_t}\}$$

satisfazendo a afirmação acima é minimal e para isso, usaremos a Observação 3.16. Denote $T_\mathfrak{p} := \mathcal{RV}(I(R/\mathfrak{p}))$ onde $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$. Queremos mostrar que $T := \bigcup_{i=1}^t T_{\mathfrak{p}_i}$ satisfaz a terceira propriedade da definição de valorizações de Rees de I. Sejam $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(R)$ e

$v \in T_{\mathfrak{q}} = \mathcal{RV}(I(R/\mathfrak{q}))$. Usando a observação anterior, existem $r \in R$ e $n \geq 1$ tais que $w(r) \geq nw(I)$ para todo $w \in T_{\mathfrak{q}}\backslash\{v\}$ e $r \notin \overline{I^n(R/\mathfrak{q})}$ (isto é, $v(r) < nv(I)$).

Afirmação 3: Para todo $s \in \{1, \dots, t\}$, temos $\bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i \not\subseteq \bigcup_{j=s+1}^{t} \mathfrak{p}_j$.

De fato, se $L := \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i \subseteq \bigcup_{j=s+1}^{t} \mathfrak{p}_j$. Isso implica pela Proposição A.2 que $L \subseteq \mathfrak{p}_j$ para algum j. Logo, $\bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_j$, o que implica, pela mesma proposição, que $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_j$ para algum i, o que é um absurdo, visto que se trata de primos minimais.

Segue da Afirmação 3 que existe $r' \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R);\ r\notin\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ tal que $r' \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R);\ r\in\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$. Como $v(r) < nv(I)$, resulta $v(r) < \infty$ e assim $r \notin \mathfrak{q}$ (pois $v(r) = \infty$ para todo $r \in \mathfrak{q}$). Daí, $r' \in \mathfrak{q}$ e assim $v(r') = w(r') = \infty$ para todo $w \in T_q\backslash\{v\}$.

Afirmação 4: $r + r' \notin \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$.

Com efeito, seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$. Suponha por absurdo que $r + r' \in \mathfrak{p}$. Então, se $r \in \mathfrak{p}$, segue que $r' \in \mathfrak{p}$. Isto é um absurdo, visto que $r' \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R);\ r\in\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$. Por outro lado, se $r \notin \mathfrak{p}$, isso implica $r' \in \mathfrak{p}$ (pois $r' \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R);\ r\notin\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$), e então $r \in \mathfrak{p}$, o que também é um absurdo.

Afirmação 5: $w(r + r') \geq nw(I)$ para todo $w \in T_{\mathfrak{q}}\backslash\{v\}$ e $v(r + r') < nv(I)$.

Com efeito, $w(r + r') \geq \min\{w(r), w(r')\} = w(r) \geq nw(I)$, pois $w(r') = \infty$. Por outro lado, como $v(r') = w(r') = \infty$ para todo $w \in T_{\mathfrak{q}}\backslash\{v\}$, segue do Lema 3.6 que $r' \in \overline{I^n(R/\mathfrak{q})}$. Logo, $r + r' \notin \overline{I^n(R/\mathfrak{q})}$ (pois do contrário, teriámos $r \in \overline{I^n(R/\mathfrak{q})}$). Isso implica $v(r + r') < nv(I)$.

Seja $J := \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R);\ \mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}} \mathfrak{p}$ e seja $s \in J\backslash\mathfrak{q}$. Da Afirmação 5, resulta que $\dfrac{w(r + r')}{w(I)} \geq n > \dfrac{v(r + r')}{v(I)}$. Por outro lado, como $s \notin \mathfrak{q}$, acarreta $v(s) < \infty$ e $w(s) < \infty$ para todo $w \in T_q\backslash\{v\}$, logo $\dfrac{v(s)}{v(I)} - \dfrac{w(s)}{w(I)} + 1 < \infty$ para todo $w \in T_q\backslash\{v\}$. Existe, então, um inteiro positivo k tal que para todo $w \in T_{\mathfrak{q}}\backslash\{v\}$, temos

$$\frac{v(s)}{v(I)} - \frac{w(s)}{w(I)} + 1 < k\left(\frac{w(r + r')}{w(I)} - \frac{v(r + r')}{v(I)}\right).$$

Como $s \in J$, segue que $w(s) = \infty$ para todo $w \in \bigcup_{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}} T_{\mathfrak{p}}$. Assim, para todo $w \in \bigcup_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{p}}\backslash\{v\}$, temos $\dfrac{v(s)}{v(I)} - \dfrac{w(s)}{w(I)} + 1 < k\left(\dfrac{w(r + r')}{w(I)} - \dfrac{v(r + r')}{v(I)}\right)$. Daí, $\dfrac{v(s(r + r')^k)}{v(I)} + 1 < \dfrac{w(s(r + r')^k)}{w(I)}$. Defina, $m = \left\lfloor \dfrac{v(s(r + r')^k)}{v(I)} \right\rfloor$. Com isso, $m + 1 \leq \dfrac{w(s(r + r')^k)}{w(I)}$ e dessa forma,

$$w\left(s(r + r')^k\right) \geq (m + 1)v(I) \text{ para todo } w \in \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Min}(R)} T_{\mathfrak{p}}\backslash\{v\}. \tag{3.9}$$

Por outro lado, pela definição de m, segue que $m + 1 > \dfrac{v(s(r + r')^k)}{v(I)}$. Por essa razão,

$v(s(r+r')^k) < (m+1)v(I)$ e isso implica

$$s\left((r+r')^k\right) \notin \overline{I^{m+1}}. \tag{3.10}$$

Das equações (3.9) e (3.10), concluímos que v é irredundante. $\square$

Sejam R um anel Noetheriano e $I \subseteq R$ um ideal. Chamaremos de $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_{V_i} \cap R$ os centros de valorizações de V_i em R, onde $\mathfrak{m}_{V_i}$ é o ideal maximal de V_i, com $i = 1, \ldots, r$ e $\mathcal{RV}(I) = \{V_1, \ldots, V_r\}$.

Lema 3.18. *Sejam R um anel Noetheriano e $I \subseteq R$ um ideal. Seja $I = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i$ uma decomposição primária de I tal que $\mathfrak{q}_i$ não pode ser removido para algum $i \in \{1, \ldots, s\}$. Se $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ for um ideal maximal, então $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass}(R/I)$.*

Demonstração. Seja

$$I = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i \tag{3.11}$$

uma decomposição primária de I; mostraremos que se $\mathfrak{q}_1$ não pode ser removido de (3.11), então $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass}(R/I)$. Suponha que $\mathfrak{p}_1 \notin \operatorname{Ass}(R/I)$.

Afirmação: Se $\mathfrak{p}_1 \notin \operatorname{Ass}(R/I)$, então $\mathfrak{q}_1 \nsubseteq D = \{a \in R;\ \overline{a} \text{ é um divisor de zero em } R/I\}$. De fato, se $\mathfrak{q}_1 \subseteq D = \{a \in R;\ \overline{a} \text{ é um divisor de zero em } R/I\} = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/I)} \mathfrak{p}$, teremos $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/I)$. Logo, $\mathfrak{p}_1 = \sqrt{\mathfrak{q}_1} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ e sendo $\mathfrak{p}_1$ maximal, segue que $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$. Isso implica que $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Ass}(R/I)$, o que é uma contradição.

Agora, considere $z \in \mathfrak{q}_1$, isto é, $z \notin D$. Então $z(\mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r) \subseteq \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r = I$. Tome $y \in \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$; daí $zy \in I$ e isso que implica $\overline{zy} = \overline{0}$ em R/I. Como $z \notin D$, segue que $\overline{y} = \overline{0}$ em R/I e assim $y \in I$. Por essa razão, $\mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r \subseteq \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r \subseteq \mathfrak{q}_1$, e isso implica que $\mathfrak{q}_1$ pode ser removido de (3.11). Portanto, segue o resultado. $\square$

Lema 3.19. *Sejam R um anel Noetheriano e $I \subseteq R$ um ideal. Seja*

$$I = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i \tag{3.12}$$

uma decomposição primária de I. Então, $\mathfrak{q}_1$ não pode ser removido de (3.12) se, e somente se, $(I : \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r) \subseteq \mathfrak{p}_1$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $(I : \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r) \nsubseteq \mathfrak{p}_1$. Assim, existe $s \in (I : q_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r)$ tal que $s \notin \mathfrak{p}_1 = \sqrt{\mathfrak{q}_1}$. Logo, $s(\mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r) \subseteq I \subseteq \mathfrak{q}_1$ e sendo $\mathfrak{q}_1$ primário, temos $\mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r \subseteq \mathfrak{q}_1$. Dessa forma, $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$. Portanto, $\mathfrak{q}_1$ pode ser removido e segue o resultado.

($\Leftarrow$) Suponha que $\mathfrak{q}_1$ possa ser removido, isto é, $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}_2 \cap \mathfrak{q}_3 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$. Isso implica $(I : \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r) = (1) \nsubseteq \mathfrak{p}_1$. Dessa forma, $(I : \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r) \nsubseteq \mathfrak{p}_1$, como queríamos. □

Lema 3.20. *Sejam R um anel Noetheriano e $I \subseteq R$ um ideal. Se $I = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{q}_i$ é uma decomposição primária de I tal que algum $\mathfrak{q}_i$ não pode ser removido, então $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}(R/I)$.*

Demonstração. Suponha

$$I = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{q}_i \tag{3.13}$$

e que $\mathfrak{q}_1$ não pode ser removido de (3.13). Assim, do lema anterior $(I : \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r) \subseteq \mathfrak{p}_1$. Localizando essa inclusão em $\mathfrak{p}_1$, obtemos: $(I_{\mathfrak{p}_1} : (\mathfrak{q}_2)_{\mathfrak{p}_1} \cap \ldots \cap (\mathfrak{q}_r)_{\mathfrak{p}_1}) \subseteq (\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{p}_1}$, onde $(\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{p}_1} = \sqrt{(\mathfrak{q}_1)_{\mathfrak{p}_1}}$. Pelo lema anterior $(\mathfrak{q}_1)_{\mathfrak{p}_1}$ não pode ser removido de $I_{\mathfrak{p}_1} = (\mathfrak{q}_1)_{\mathfrak{p}_1} \cap \ldots \cap (\mathfrak{q}_r)_{\mathfrak{p}_1}$. Sendo $(\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{p}_1}$ um ideal maximal, resulta do Lema 3.18 que $(\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{p}_1} \in \mathrm{Ass}(R_{\mathfrak{p}_1}/I_{\mathfrak{p}_1})$, o que implica pela Proposição A.11 que $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Ass}(R/I)$. □

A próxima proposição constata que os centros de valorizações de Rees são exatamente os primos associados de $\overline{I^n}$, quando n varia.

Proposição 3.21. *Sejam R um anel Noetheriano e $I \subseteq R$ um ideal não-nulo. Então,*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ass}(R/\overline{I^n}) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}, \text{ onde } \mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_{V_i} \cap R \text{ e } i = 1, \ldots, r.$$

Demonstração. Sejam $\{V_1, \ldots, V_r\}$ os anéis de valorizações de Rees de I. Da condição (2) da Definição 3.1, temos

$$\overline{I^n} = \bigcap_{i=1}^{r} (I^n V_i \cap R)$$

Como $I^n V_i$ é um ideal em V_i e este é um anel local, cujo ideal maximal é $\mathfrak{m}_{V_i}$, segue que $I^n V_i$ é uma potência de $\mathfrak{m}_{V_i}$ para todo i. Segue da Proposição A.9 que $I^n V_i$ é $\mathfrak{m}_{V_i}$-primário. Dessa forma, o ideal $I^n V_i \cap R$ é $\mathfrak{m}_{V_i} \cap R$-primário para todo i. Daí,

$$\overline{I^n} = (I^n V_1 \cap R) \cap \ldots \cap (I^n V_r \cap R) \tag{3.14}$$

é uma decomposição primária. Temos, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m}_{V_1} \cap R = \sqrt{(I^nV_1 \cap R)}, \ldots, \mathfrak{p}_r = \mathfrak{m}_{V_r} \cap R = \sqrt{(I^nV_r \cap R)}$. Assim, os primos associados de $\overline{I^n}$ estão em $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$. De fato, reordenando índices se necessário, suponha que

$$\overline{I^n} = (I^nV_1 \cap R) \cap \ldots \cap (I^nV_j \cap R), \text{ onde } j \leq r,$$

é uma decomposição primária minimal de $\overline{I^n}$. Portanto, $\mathrm{Ass}(R/\overline{I^n}) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_j\} \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$. Faremos a recíproca apenas para o caso $i = 1$, isto é, mostraremos que $\mathfrak{p}_1 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ass}(R/\overline{I^n})$. Da propriedade (3) da Definição 3.1, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^nV_1 \cap R$ não pode ser removido da decomposição primária (3.14) de $\overline{I^n}$. Segue do Lema 3.20 que $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Ass}(R/\overline{I^n})$. □

Exemplo 3.22. Sejam $R = k[x, y, z]$ o anel de polinômios nas indeterminadas x, y, z sobre o corpo k e $I = (x, y)$. Queremos encontrar $\mathcal{RV}(I)$. Do Teorema 3.14, temos $\mathcal{RV}(I) = \bigcup_{i=1}^{2} T_i$, onde $T_i = \left\{(\overline{S_i})_{\mathfrak{p}};\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\overline{S_i}/a_i\overline{S_i})\right\}$ e $S_i = R[\frac{I}{a_i}]$, com $i = 1, 2$, $a_1 = x$ e $a_2 = y$.

Afirmação 1: $R[\frac{I}{x}] = k\left[x, y, z, \dfrac{y}{x}\right]$.

De fato, sabemos que $R[\frac{I}{x}] = \left\{\dfrac{a}{x^n};\ a \in I^n \text{ com } n \geq 0\right\}$. Veja que $\dfrac{a}{x^0} = a$, onde $a \in I^0 = R = k[x, y, z]$. Além disso, note que $\dfrac{I}{x} \subseteq k\left[x, y, z, \dfrac{y}{x}\right]$; donde segue que $R[\frac{I}{x}] \subseteq k\left[x, y, z, \dfrac{y}{x}\right]$. Para a inclusão contrária, basta ver que $\dfrac{y}{x} \in R[\frac{I}{x}]$, pois $y \in I$, e $x = \dfrac{x}{1} = \dfrac{x}{x^0}$. Similarmente, $y, z \in R[\frac{I}{x}]$. Concluímos, então, a Afirmação 1.

A partir do Teorema dos Isomorfimos, mostramos que $k\left[x, y, z, \dfrac{y}{x}\right] \simeq \dfrac{k[x, y, z, w]}{(y - xw)} \simeq k[x, xw, z, w] = k[x, z, w]$ e pela Proposição 2.2 obtemos que $k[x, z, w]$ é integralmente fechado. Sendo assim, S_1 é integralmente fechado, isto é, $S_1 = \overline{S_1}$. Fazendo uma construção análoga, mostramos que $S_2 = R[\frac{I}{y}] \simeq k[y, z, w]$, que é integralmente fechado pela mesma proposição. Com isso, $S_2 = \overline{S_2}$.

Afirmação 2: $\mathrm{Min}(S_1/xS_1) = \{(x, y)\}$.

Com efeito, seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(S_1/xS_1)$. Por um lado, $x \in \mathfrak{p}$, pois $\mathfrak{p} \supseteq xS_1$ e por outro, $y = x \cdot \dfrac{y}{x} \in \mathfrak{p}$, pois $x \in \mathfrak{p}$ e $\dfrac{y}{x} \in S_1$. Assim, $(x, y) \subseteq \mathfrak{p}$. Agora, veja que (x, y) é um ideal primo em S_1, visto que $\dfrac{S_1}{(x, y)} = \dfrac{k\left[x, y, z, \frac{y}{x}\right]}{(x, y)} \simeq k[z]$, o qual é um domínio. Logo, (x, y) é um ideal primo, contendo xS_1. Segue que $(x, y) = \mathfrak{p}$.

Dessa forma, concluímos que $T_1 = \{(S_1)_{\mathfrak{p}};\ \mathfrak{p} = (x, y)\}$.

Afirmação 3: $\mathrm{Min}(S_2/yS_2) = \{(x, y)\}$.

De fato, seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(S_2/yS_2)$. De forma análoga à Afirmação 2, mostramos que $(x,y) \subseteq \mathfrak{p}$. Por outro lado, temos que $\dfrac{S_2}{(x,y)} = \dfrac{k\left[x,y,z,\dfrac{x}{y}\right]}{(x,y)} \simeq k[z]$. Por essa razão, (x,y) é um ideal primo em S_2, contendo y. Segue que $(x,y) = \mathfrak{p}$.

Concluímos, assim, que $T_2 = \{(S_2)_{\mathfrak{p}};\ \mathfrak{p} = (x,y)\}$.

Afirmação 4: $(S_1)_{\mathfrak{p}} = (S_2)_{\mathfrak{p}}$, com $\mathfrak{p} = (x,y)$.

Com efeito, mostremos que $S_1 \subseteq (S_2)_{\mathfrak{p}}$; donde segue que $(S_1)_{\mathfrak{p}} \subseteq (S_2)_{\mathfrak{p}}$. Para isso, basta ver que $x = \dfrac{x}{1}, y = \dfrac{y}{1}, z = \dfrac{z}{1}$ e $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{y}{y}}{\frac{x}{y}} \in (S_2)_{\mathfrak{p}}$. Similarmente, $(S_2)_{\mathfrak{p}} \subseteq (S_1)_{\mathfrak{p}}$.

Portanto, $\mathcal{RV}(I) = \{V\}$, onde $V = (S_1)_{\mathfrak{p}} = (S_2)_{\mathfrak{p}}$, com $\mathfrak{p} = (x,y)$.

Exemplo 3.23. Sejam $R = k[x,y]$ um anel de polinômios nas indeterminadas x, y sobre o corpo k e $I = (x^2, y^2, xy)$. Queremos encontrar $\mathcal{RV}(I)$. Do Teorema 3.14, temos $\mathcal{RV}(I) = \bigcup_{i=1}^{3} T_i$, onde $T_i = \left\{(\overline{S_i})_{\mathfrak{p}};\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\overline{S_i}/a_i\overline{S_i})\right\}$ e $S_i = R[\frac{I}{a_i}]$, com $i = 1,2,3$, $a_1 = x^2$, $a_2 = y^2$ e $a_3 = xy$. Sejam $S_1 = R[\frac{I}{x^2}]$, $S_2 = R[\frac{I}{y^2}]$ e $S_3 = R[\frac{I}{xy}]$.

Afirmação 1: $R[\frac{I}{x^2}] = k\left[x,y,\dfrac{xy}{x^2},\dfrac{y^2}{x^2}\right]$.

De fato, sabemos que $R[\frac{I}{x^2}] = \left\{\dfrac{a}{(x^2)^n}; a \in I^n\right\}$. Veja que $\dfrac{a}{x^0} = a$, onde $a \in I^0 = R = k[x,y]$. Além disso, note que $\dfrac{I}{x^2} \subseteq k\left[x,y,\dfrac{xy}{x^2},\dfrac{y^2}{x^2}\right]$; donde segue que $R[\frac{I}{x^2}] \subseteq k\left[x,y,\dfrac{xy}{x^2},\dfrac{y^2}{x^2}\right]$. Para a inclusão contrária, basta ver que $\dfrac{y^2}{x^2}, \dfrac{xy}{x^2} \in R[\frac{I}{x^2}]$, pois $y^2, xy \in I$, e $x = \dfrac{x}{1} = \dfrac{x}{(x^2)^0}$. Similarmente, $y \in R[\frac{I}{x^2}]$. Concluímos, então, a Afirmação 1.

Note que $k\left[x,y,\dfrac{xy}{x^2},\dfrac{y^2}{x^2}\right] = k\left[x,y,\dfrac{y}{x}\right]$. Além disso, a partir do Teorema dos Isomorfimos, mostramos que $k\left[x,y,\dfrac{y}{x}\right] \simeq \dfrac{k[x,y,w]}{(y-xw)} \simeq k[x,w]$, que é integralmente fechado pela Proposição 2.2. Sendo assim, S_1 é integralmente fechado, isto é, $S_1 = \overline{S_1}$. Fazendo uma construção análoga, mostramos que $S_2 = R[\frac{I}{y^2}] = k\left[x,y,\dfrac{x^2}{y^2},\dfrac{xy}{y^2}\right] = k\left[x,y,\dfrac{x}{y}\right] \simeq \dfrac{k[x,y,w]}{(x-yw)} \simeq k[y,w]$, que é integralmente fechado pela mesma proposição. Por outro lado, $S_3 = R[\frac{I}{xy}] = k\left[x,y,\dfrac{x^2}{xy},\dfrac{y^2}{xy}\right] = k\left[x,y,\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x}\right] \simeq k[x,y]_{\frac{x}{y}}$. Este último é integralmente fechado, pois como $k[x,y] = \overline{k[x,y]}$, segue da Proposição A.13 que $k[x,y]_{\frac{x}{y}} = \left(\overline{k[x,y]}\right)_{\frac{x}{y}} = \left(\overline{k[x,y]_{\frac{x}{y}}}\right)$. Portanto, S_1, S_2 e S_3 são integralmente fechados.

Afirmação 2: $\mathrm{Min}(S_1/x^2S_1) = \{(x,y)\}$.

Com efeito, seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(S_1/x^2S_1)$. Por um lado, $x \in \mathfrak{p}$, pois $\mathfrak{p} \supseteq x^2S_1$ e por outro,

$y = x \cdot \dfrac{y}{x} \in \mathfrak{p}$, pois $x \in \mathfrak{p}$ e $\dfrac{y}{x} \in S_1$. Assim, $(x, y) \subseteq \mathfrak{p}$. Agora, veja que (x, y) é um ideal maximal em S_1, visto que $\dfrac{S_1}{(x,y)} = \dfrac{k\left[x, y, \frac{y}{x}\right]}{(x,y)} \simeq k$. Segue que $(x, y) = \mathfrak{p}$.

Dessa forma, concluímos que $T_1 = \{(S_1)_\mathfrak{p};\ \mathfrak{p} = (x, y)\}$. Similarmente, obtemos que $\mathrm{Min}(S_2/y^2S_2) = \{(x, y)\}$ e assim $T_2 = \{(S_2)_\mathfrak{p};\ \mathfrak{p} = (x, y)\}$.

Afirmação 3: $\mathrm{Min}\,(S_3/xyS_3) = \{(x, y)\}$

De fato, seja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(S_3/xyS_3)$. Como $\mathfrak{p} \supseteq xyS_3$, segue que $x \in \mathfrak{p}$ ou $y \in \mathfrak{p}$. Se $x \in \mathfrak{p}$, então $y \in \mathfrak{p}$, pois $y = x \cdot \dfrac{y}{x}$, onde $x \in \mathfrak{p}$ e $\dfrac{y}{x} \in S_3$. Analogamente, $x \in \mathfrak{p}$ se $y \in \mathfrak{p}$. Logo, $(x, y) \subseteq \mathfrak{p}$. Além disso, note que (x, y) é um ideal maximal em S_3, pois $\dfrac{S_3}{(x,y)} = \dfrac{k\left[x, y, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right]}{(x,y)} \simeq k$. Segue que $(x, y) = \mathfrak{p}$.

Dessa forma, $T_3 = \{(S_3)_\mathfrak{p};\ \mathfrak{p} = (x, y)\}$. Portanto, $\mathcal{RV}(I) = \{V_1, V_2, V_3\}$, onde $V_i = (S_i)_\mathfrak{p}$ com $\mathfrak{p} = (x, y)$ e $i = 1, 2, 3$.

Os anéis de valorização de Rees do ideal I (obtidos no Teorema 3.14) dependem dos geradores $a_1, \ldots, a_d$ de I e também de primos minimais. A seguinte proposição mostra que, sob certas hipóteses mais fortes, tais anéis dependem apenas de um único elemento $a \in I$.

Observação 3.24. A hipótese na seguinte proposição sobre ideais primos ocorre, por exemplo, se o anel R contiver um corpo infinito K. De fato, nesse caso, dado qualquer inteiro r e qualquer coleção $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ de ideais primos em R, sejam $u_1, \ldots, u_{r-1} \in K$, não-nulos e distintos entre si. Note, então, que $\overline{u_i} \neq \overline{u_j}$ em cada $R/\mathfrak{p}_k$ com $k = 1, \ldots, r$, pois se $\overline{u_i} = \overline{u_j}$ em $R/\mathfrak{p}_k$, então $u_i - u_j \in \mathfrak{p}_k$ e visto que $u_i - u_j \in K$, isso implicaria que $u_i - u_j$ é unidade, o que é um absurdo.

Proposição 3.25. *Seja R um domínio Noetheriano. Assuma que para qualquer inteiro r e qualquer coleção $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ de ideais primos em R, existam $u_1, \ldots, u_{r-1}$ unidades em R tais que $\overline{u_i} \neq \overline{u_j}$ em cada $R/\mathfrak{p}_k$, com $k = 1, \ldots, r$. Seja $I \subsetneq R$ um ideal não- nulo. Então, existe um elemento $a \in I$ tal que $\mathcal{RV}(I) = \{\overline{S}_\mathfrak{p};\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\overline{S}/a\overline{S})\}$, onde $S = R[\frac{I}{a}]$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{RV}(I) = \{V_1, \ldots, V_r\}$ e seja $B = \left\{\overline{S}_\mathfrak{p};\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\overline{S}/a\overline{S})\right\}$ com $S = R[\frac{I}{a}]$. Queremos mostrar que $\mathcal{RV}(I) = B$. Pelo Lema 2.33, existe um elemento $a \in I$ tal que, para todo $i = 1, \ldots, r$, temos $aV_i = IV_i$. Logo, $S \subseteq \overline{S} \subseteq V_i$ para cada i. Além disso, do Lema 3.13, segue que $V_i = \overline{(R[\frac{I}{a}])_\mathfrak{p}}$ onde $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ e $\mathfrak{p} \supseteq a$. Sendo $\overline{R[\frac{I}{a}]}$

um domínio, resulta $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\overline{S}/a\overline{S})$. E com isso, $V_i \in B$ para cada i. Para a recíproca, suponha $I = (a_1, \ldots, a_d)$. Visto que $a \in I$, temos $I = (a, a_1, \ldots, a_d)$. Do Teorema 3.14, concluímos que $\overline{S}_{\mathfrak{p}} \in R\mathcal{V}(I)$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\overline{S}/a\overline{S})$. $\square$

Apêndice

Neste capítulo apresentaremos resultados que foram utilizados ao longo do texto, sendo que as demonstrações não explicitadas serão referenciadas utilizando [1], [5] e [6].

Proposição A.1. *Se* $x \in \mathfrak{R}$*, então* $1 - xy$ *é uma unidade em* R *para todo* $y \in R$*.*

Demonstração. Veja [1, Proposition 1.9]. □

Proposição A.2. (i) *Sejam* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ *ideais primos em* R *e seja* $I \subseteq R$ *um ideal tal que* $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$*. Então,* $I \subseteq \mathfrak{p}_i$ *para algum* i*;*
(ii) *Sejam* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\mathfrak{n}$ *ideais em* R *e seja* $\mathfrak{p} \supseteq \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ *um ideal primo. Então,* $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ *para algum* i*. Se* $\mathfrak{p} = \cap\, \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$*, então* $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ *para algum* i*.*

Demonstração. Veja [1, Proposition 1.11]. □

Corolário A.3. (Lema de Nakayama)
Sejam M *um* R*-módulo finitamente gerado e* $I \subseteq R$ *um ideal tal que* $I \subseteq \mathfrak{R}$*. Então* $IM = M$ *implica que* $M = 0$*.*

Demonstração. Veja [1, Proposition 2.6]. □

Proposição A.4. *Sejam* $x_i (1 \leq i \leq n)$ *elementos de* M*, cujas imagens em* $M/\mathfrak{m}M$ *formam uma base desse* $R/\mathfrak{m}$*-espaço vetorial. Então,* $M = (x_i)$*.*

Demonstração. Veja [1, Proposition 2.8]. □

Corolário A.5. *Seja* $\mathfrak{p} \subset R$ *um ideal primo. Então, os ideais primos do anel local* $R_\mathfrak{p}$ *estão em correspondência biunívoca com os ideais primos de* R *contidos em* $\mathfrak{p}$*.*

Demonstração. Veja [1, Corollary 3.13]. □

Lema A.6. *Sejam* R *um anel,* S *um subconjunto multiplicativo de* R *e* $I \subseteq R$ *um ideal. Então,* $S^{-1}I = \left\{ \frac{x}{s};\ x \in I \ \text{ e } \ s \in S \right\}$*.*

Demonstração. Suponha que $y \in S^{-1}I = \left\{\sum \frac{a_i}{s_i};\ a_i \in I,\ s_i \in S\right\}$; então $y = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i}$ onde $a_i \in I$ e $s_i \in S$. Logo,

$$y = \frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} + \ldots + \frac{a_n}{s_n} = \frac{a_1 s_2 s_3 s_n + a_2 s_1 s_3 \ldots s_n + \ldots + a_n s_1 s_2 \ldots s_{n-1}}{s_1 s_2 \ldots s_n}.$$

Denotando $x = a_1 s_2 s_3 \ldots s_n + a_2 s_1 s_3 \ldots s_n + \ldots + a_n s_1 s_2 \ldots s_{n-1}$ e $s = s_1 s_2 \ldots s_n$, temos $y = \frac{x}{s}$ com $x \in I$ e $s \in S$. Reciprocamente, seja $\frac{x}{s} = \frac{x}{1}\frac{1}{s}$ com $x \in I$ e $s \in S$; assim, $\frac{x}{s} \in S^{-1}I$. $\square$

Lema A.7. *Sejam I e J ideais do anel Noetheriano R. Se $J_{\mathfrak{p}} \subseteq I_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/I)$, então $J \subseteq I$.*

Demonstração. Suponha que $\operatorname{Ass}(R/I) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ e seja $I = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$ uma decomposição primária de I onde $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ com $i = 1, \ldots, r$. Suponha que $x \in J$; então $\frac{x}{1} \in (J)_{\mathfrak{p}_i} \subseteq (I)_{\mathfrak{p}_i}$. Logo $\frac{x}{1} = \frac{a_i}{s_i}$ com $a_i \in I$ e $s_i \notin \mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Existe, então, $u_i \in R - \mathfrak{p}_i$ tal que $x u_i s_i = u_i a_i \in I \subseteq \mathfrak{q}_i$. Pondo $t_i = u_i s_i$, temos $x t_i \in \mathfrak{q}_i$, $\forall i$. Sendo $\mathfrak{q}_i$ primário para todo i e $t_i \notin \mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$, segue que $x \in \mathfrak{q}_i$ para todo i e isso implica $x \in I$. $\square$

Lema A.8. *Sejam R um domínio integral, $S \subseteq R$ um subconjunto multiplicativo fechado e $\mathfrak{p} \subset R$ um ideal primo com $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$. Então, $R_{\mathfrak{p}} = (S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$.*

Demonstração. Seja $\frac{a}{t} \in R_{\mathfrak{p}}$, com $a \in R$ e $t \notin \mathfrak{p}$. Então, $\frac{a}{t} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{t}{1}} \in (S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$, onde $\frac{t}{1} \notin S^{-1}\mathfrak{p}$, pois $t \notin \mathfrak{p}$. Reciprocamente, seja $y = \frac{\frac{a}{s_1}}{\frac{t}{s_2}} \in (S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$ com $\frac{t}{s_2} \notin S^{-1}\mathfrak{p}$, (isto é, $t \notin \mathfrak{p}$). Dessa forma, $y = \frac{a}{s_1}\frac{s_2}{t} = \frac{a s_2}{s_1 t}$, com $a s_2 \in R$ e $s_1 t \notin \mathfrak{p}$. Segue que $y \in R_{\mathfrak{p}}$. $\square$

Proposição A.9. *As potências de um ideal maximal $\mathfrak{m} \subset R$ são $\mathfrak{m}$-primárias.*

Demonstração. Veja [1, Proposition 4.2]. $\square$

Corolário A.10. *Se R é um anel Noetheriano, M é um R-módulo e $\mathfrak{p} \subset R$ um ideal primo, então*

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M) \textit{ se, e somente se, } \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}(M_{\mathfrak{p}}).$$

Demonstração. Veja [5, Theorem 6.2]. $\square$

Proposição A.11. *Sejam S um subconjunto multiplicativo de R e $I \subseteq R$ um ideal decomponível. Seja $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ uma decomposição primária minimal de I. Seja $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ e suponha que os $\mathfrak{q}_i's$ sejam numerados, tais que S intersecta $\mathfrak{p}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{p}_n$, mas não intersecta $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$. Então,*

$$S^{-1}R = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}\mathfrak{q}_i$$

é uma decomposição primária minimal.

Demonstração. Veja [1, Proposition 4.9]. □

Proposição A.12. *Seja S um anel e R um subanel de S $(1 \in R)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $x \in S$ é integral sobre R;

(ii) $R[x]$ é um R-módulo finitamente gerado.

Demonstração. Veja [1, Proposition 5.1]. □

Proposição A.13. *Sejam $R \subseteq S$ anéis e $\overline{R}$ o fecho integral de R em S. Seja W um subconjunto multiplicativo fechado de R. Então, $\overline{W^{-1}R} = W^{-1}\overline{R}$.*

Demonstração. Veja [1, Proposition 5.12]. □

Lema A.14. *Seja R um domínio integral e seja $K = \mathrm{Frac}(R)$. Sejam $x \in K$ um elemento não-nulo, $R[x]$ um subanel de K gerado por x sobre R e $\mathfrak{m}[x]$ a extensão de $\mathfrak{m}$ em $R[x]$. Então,*

$$m[x] \neq R[x] \text{ ou } \mathfrak{m}[x] \neq R[x^{-1}].$$

Demonstração. Veja [1, Lemma 5.20]. □

Corolário A.15. *Seja $R \subseteq S$ anéis e seja $\overline{R}$ o fecho integral de R em S. Então, $\overline{R}$ é integralmente fechado.*

Demonstração. Veja [1, Corollary 5.5]. □

Teorema A.16. *Seja $R \subseteq S$ anéis. Suponha que S é integral sobre R e que $\mathfrak{p} \subset R$ é um ideal primo. Então, existe um ideal primo $\mathfrak{q} \subset S$, tal que $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$.*

Demonstração. Veja [1, Theorem 5.10]. □

Proposição A.17. *Seja R um domínio integral. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) R é integralmente fechado;

(ii) $R_{\mathfrak{p}}$ é integralmente fechado para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de R.

Demonstração. Veja [1, Proposition 5.13]. □

Proposição A.18. *Seja R um subanel de S. Suponha que R seja Noetheriano e que S seja um R-módulo finitamente gerado. Então, S é Noetheriano (como anel).*

Demonstração. Veja [1, Proposition 7.2]. □

Teorema A.19. (Teorema da Base de Hilbert)

Se R é um anel Noetheriano, então o anel de polinômios $R[x]$ é Noetheriano.

Demonstração. Veja [1, Proposition 7.5]. □

Proposição A.20. *Em um anel Noetheriano R, todo ideal I contém uma potência do seu radical.*

Demonstração. Veja [1, Proposition 7.14]. □

Proposição A.21. *Seja R um domínio local Noetheriano de dimensão um, e seja $\mathfrak{m}$ seu ideal maximal. Então, são equivalentes:*

(i) R é um anel de valorização discreta;

(ii) R é integralmente fechado;

(iii) Todo ideal não-nulo $I \subseteq R$ é uma potência de $\mathfrak{m}$.

Demonstração. Veja [1, Proposition 9.2]. □

Proposição A.22. *Seja R um anel graduado. São equivalentes:*

(i) R é um anel Noetheriano;

(ii) R_0 é Noetheriano e R é finitamente gerado como uma R_0-álgebra.

Demonstração. Veja [1, Proposition 10.7]. □

Teorema A.23. (Teorema do ideal principal de Krull)
Sejam R um anel Noetheriano e x um elemento de R que não é divisor de zero e nem unidade. Então, $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ *para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(R/(x))$.

Demonstração. Veja [1, Corollary 11.7]. □

Observação A.24. Seja R um anel graduado e seja $S \subseteq R$ um subconjunto multiplicativo cujos elementos são todos homogêneos. Então, a localização $S^{-1}R$ também é um anel graduado tal que para cada n,

$$(S^{-1}R)_n = \left\{ \frac{r}{s};\ r \text{ e } s \text{ são homogêneos em } R \text{ e } \deg(r) - \deg(s) = n \right\}.$$

Lema A.25. *Se* $(R, \mathfrak{m})$ *é um domínio local com* $0 \neq x \in \mathfrak{m}$ *e* $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) = 1$, *então* $\sqrt{(x)} = \mathfrak{m}$.

Demonstração. Temos que $\sqrt{(x)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq (x)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}(R/(x))} \mathfrak{p}$.
Afirmação 1: $\mathfrak{m} \in \operatorname{Min}(R/(x))$.
De fato, $\mathfrak{m} \supseteq (x)$, e por outro lado, se existe um ideal primo $\mathfrak{p}' \subset R$, tal que $(0) \subsetneq (x) \subseteq \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{m}$, resulta que $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) > 1$, o que é uma contradição. Portanto, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Min}(R/(x))$. Do fato do ideal $\mathfrak{m}$ ser maximal e $\mathfrak{m} \in \operatorname{Min}(R/(x))$, implica que $\sqrt{(x)} = \mathfrak{m}$. □

Teorema A.26. (Teorema de Krull-Akizuki)
Seja R um domínio Noetheriano de dimensão um com corpo de frações igual a K. Seja T uma extensão algébrica finita de K e S um anel tal que $R \subseteq S \subseteq T$. Então, S é um anel Noetheriano de dimensão um.

Demonstração. Veja [5, Theorem 11.7]. □

Teorema A.27. *Seja* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local e seja* $G = gr_{\mathfrak{m}}(R)$. *Então,* $\dim G = \dim R$.

Demonstração. Veja [5, Theorem 15.7]. □

Teorema A.28. (Mori-Nagata)
O fecho integral $\overline{R}$ *de um domínio Noetheriano* R *em* $\operatorname{Frac}(R)$ *é um domínio de Krull.*

Demonstração. Veja [6, Proposition 6]. □

Referências

[1] ATIYAH, Michael F.; MACDONALD, Ian G. **Introduction to Commutative Algebra**, Addison-Wesley, 1969.

[2] FILHO, Daniel C. de Morais. **Manual de Redação Matemática**, Rio de Janeiro: SBM, 2018.

[3] FOSSUM, R. M. Krull Domains. In: **The Divisor Class Group of a Krull Domain**. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol 74. Springer, Berlin, Heidelberg, 1973.

[4] MARLEY, Thomas. **Graded rings and modules**, lecture notes, University of Nebraska-Lincoln: Department of Mathematics, 1993.

[5] MATSUMURA, Hideyuki. **Commutative Ring Theory**, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1986.

[6] NISHIMURA, Jun-ichi. Note on integral closures of a noetherian integral domain. **J. Math. Kyoto Univ.** 16**, no.** 1, p. 117 – 122, 1976.

[7] NORTHCOTT, Douglas; REES, David. Reductions of ideals in local rings. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,** 50, p. 145−158, 1954.

[8] O'CONNOR, Jonh J.; ROBERTSON, Edmund F.. David Rees. **The MacTutor History of Mathematics of Archive**, Out. de 2013. Disponível em: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rees_David.html>. Acesso em: 07 de Mar. de 2020.

[9] PROFESSOR David Rees. **The Telegraph**, 20 de Ago. de 2013. Disponível em: <https://www.telegraph.co.uk/news/obituaries/10255561/Professor-David-Rees.html>. Acesso em: 07 de Mar. de 2020.

[10] REES, David. On semi-groups. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,** 36, p. 387 – 400, 1940.

[11] REES, David. Valuations associated with a local ring. I. **Proc. London Math. Soc.** (3) 5, p. 107–128, 1955.

[12] REES, David. Valuations associated with ideals. **Proc. London Math. Soc. (3) 6**, p. 161–174, 1956.

[13] REES, David. Valuations associated with ideals II. **J. London Math. Soc. (31)**, p. 221–228, 1956.

[14] SHARP, Rodney. David Rees Obituary. **The Guardian**, 29 Ago. de 2013. Disponível em: <https://www.theguardian.com/education/2013/aug/29/david-rees>. Acesso em: 07 de Mar. de 2020.

[15] SWANSON, Irena; HUNEKE, Craig. **Integral Closure of Ideals, Rings and Modules**, London Mathematical Society, 2006.

[16] SWANSON, Irena. Rees Valuations. In: FONTANA, Marco; KABBAJ, Salah-Eddine; OLDERDING, Bruce; SWANSON, Irena. (eds) **Commutative Algebra Noetherian and Non-Noetherian Perspectives**. Springer, New York, NY, 2011.

[17] Stacks project authors. 10 Commutative Algebra. **The Project Stark**. Disponível em: <https://stacks.math.columbia.edu/tag/00A0>. Acesso em: 07 de Mar. de 2020.

Índice Remissivo