Universidade Federal do Maranhão - UFMA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT

Dissertação de Mestrado

Marcus Vinícius Sousa

UMA CARACTERIZAÇÃO DE POTENCIAIS HIPERBÓLICOS PARA MAPAS RACIONAIS

São Luís - MA

2020

Marcus Vinícius Sousa

CARACTERIZAÇÃO DE POTENCIAIS HIPERBÓLICOS PARA MAPAS RACIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva.

São Luís - MA

2020

Marcus Vinícius Sousa

UMA CARACTERIZAÇÃO DE POTENCIAIS HIPERBÓLICOS PARA MAPAS RACIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Giovane Ferreira Silva(Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dra. Vanessa Ribeiro Ramos
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Marlon César Santos
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

Agradecimentos

Ao finalizar este trabalho, agradeço especialmente:

- Primeiramente a minha família, em especial, a minha mãe, Maria do Socorro Sousa e minha irmã, Dandhara Victória, pelo apoio durante toda a minha vida .
- Ao professor Giovane Ferreira Silva pela orientação .
- Aos professores do Programa de Mestrado em Matemática da UFMA.
- Aos meus amigos Marisa Lemos, Jadiel Carlos, Jadevilson Cruz, Carlos Filipe, Jeifersor Lima, Joseleno Bruno, Júnior Lima, Hugo Silas, Ediomar Da Silva, Anderson Rayol, Beatriz e Arnando, pelo companheirismo.
- Finalmente, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES-pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos propriedades de potenciais hiperbólicos. Consideramos mapas $f : X \to X$ de grau $n \geq 2$ com X sendo espaço métrico compacto. Caracterizamos os potenciais Hölder contínuos φ que possuem a seguinte propriedade $\sup \varphi < P(f, \varphi)$.

Palavras-chave: Teoria Ergódica, Formalismo Termodinâmico, Sistemas Dinâmicos Complexos, Sistemas Hiperbólicos Não-Uniformemente .

Abstract

In this work we study properties of hyperbolic potentials.We consider maps $f : X \to X$ of degree $n \geq 2$ with X being compact metric space.We characterize the continuous Hölder potentials φ that have the following property $\sup \varphi < P(f, \varphi)$.

Keywords: Ergodic Theory, Thermodynamic Formalism, Complex Dynamic systems, Hyperbolic Systems not Uniformly. .

Notação

Índice .

- 2^X- família de todos os subconjuntos;
- $C^{0,\alpha}(X)$-espaços da funções Hölder contínuas;
- $J(f)$ -Conjunto de Julia;
- $\overline{\mathbb{C}}$- Esfera de Riemann
- $\mathcal{M}(X)$ - espaço das medidas;
- $\mathcal{M}_1(X)$ - espaço das medidas de probabilidade;
- $\mathcal{M}_f(X)$ - espaço das medidas invariantes de probabilidade;
- $\mathcal{M}_e(X)$ - espaço das medidas ergódicas de probabilidade;
- $\varepsilon(f,\varphi)$- conjunto de estados de equilíbrio;
- $\chi_\mu(f)$- expoente de Lyapunov;
- δ_x- medida de Dirac;
- $H_\mu(\mathcal{P})$-entropia de uma partição;
- $h_\mu(f)$-entropia métrica;
- $h_{top}(f)$- entropia topológica;
- $h(f,\alpha)$-entropia com respeito a uma cobertura;
- $h_\mu(f,\mathcal{P})$-entropia com respeito a uma partição;
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$- soma de partições;
- $\mathcal{P}^n$- iterado de uma partição

Sumário

1 Introdução **12**

2 Preliminares **14**

2.1 Alguns Resultados de Teoria Ergódica 14

2.1.1 Resultados de Medida e Integração 14

2.1.2 Transformações contínuas de espaço métrico compacto 16

2.1.3 Topologia Fraca * 17

2.1.4 Medidas Invariantes para Transformações contínuas 17

2.1.5 Existência de Medidas Invariantes 18

2.1.6 Sequência Subaditiva 19

2.1.7 Entropia de uma Partição 20

2.1.8 Entropia de um Sistema Dinâmico 21

2.1.9 Entropia Topológica 21

2.1.10 Expoente de Lyapunov 23

2.1.11 Decaimento Exponecial de Correlações 23

3 Potenciais hiperbólicos de um sistema dinâmico topológico **27**

3.1 Potenciais Hiperbólicos 27

3.1.1 Lema Chave 35

3.2 Sistema de Funções Iteradas 41

3.2.1 Espaço simbólico 41

3.2.2 Conjuntos de Expansão uniforme e Pressão Topológica 43

3.2.3 Construindo o SFI 46

3.3 Teorema Principal 52

Apêndice **58**

A.1 Dinâmica Complexa 58

A.1.1 Esfera de Riemann 58

A.1.2 Variações da condição de Collet-Eckmann 60

Referências Bibliográficas **62**

1 Introdução

Um dos grandes objetivos da Teoria ergódica é compreender o comportamento de sistemas determinísticos e probabilísticos olhando para as medidas invariantes pelo sistema.

Utilizando ideias emprestadas da física estatística gibbsiana, estabeleceu-se princípios para a escolha de medidas invariantes. Tais conceitos deram origem ao que chamamos de Formalismo Termodinâmico. Em seus trabalhos pioneiros, Sinai, Ruelle e Bowen deram uma descrição completa do formalismo termodinâmico de um difeomorfismo uniformemente hiperbólico atuando em uma variedade compacta e um potencial Hölder contínuo, veja [[4, 24, 25]]. Houve várias extensões desses resultados no cenário além do hiperbólico, o não uniformemente hiperbólico, para variedades de dimensão qualquer abordando a unicidade dos estados de equilíbrio que são medidas Gibbs não lacunar ou fracamente Gibbs[[2, 18, 23, 27]] e Gibbs sequencial no contexto simbólico[[13]]. No contexto de dimensão 1, houve também várias extensões desses resultados para aplicações reais ou complexos, [10, 11, 15, 20]. Geralmente, a falta de hiperbolicidade uniforme é compensada por uma hipótese extra sobre o potencial.

Nesta dissertação, abordamos os resultados contidos no artigo [16] que dá uma contribuição ao Formalismo Termodinâmico caracterizando os potencias definidos no Julia $J(f)$ de aplicações racionais f de grau pelo menos igual a 2 que possuem unicidade de seus estados de equilíbrio. Tais potencias são chamados de potenciais hiperbólicos nos quais são caracterizados por uma propriedade algébrica. Mais precisamente, consideramos uma função contínua f sobre um espaço métrico X, e vamos relacionar está função com certos potencias contínuos φ. Mais precisamente, a função $f : X \to X$ é um mapa racional sobre a esfera de Riemann de grau $n \geq 2$ e potenciais Hölder contínuos $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tais que $\sup_{z \in X} \varphi(z) < P(f, \varphi)$, onde $P(f, \varphi)$ denota a pressão topológica. O principal resultado desta dissertação é a demonstração do Teorema (3.20). Para demonstração deste teorema, o principal resultado a ser usado é o Lema (3.18), que é um resultado bem técnico que possuem uma demonstração de certa forma bem rigorosa.

Inicialmente, precisamos recordar alguns resultados de Teoria Ergódica, Teoria da Medida e Análise Funcional para o entendimento melhor do texto. Para mais detalhes, veja [19, 28]. No capítulo 2, exibiremos estes resultados, que são fundamentais para o desenvolvimento das ideias dos capítulos seguintes.

No capítulo 3, dedicamos ao estudo sobre potenciais hiperbólicos, abordando algumas de suas propriedades que valem para aplicações contínuas sobre um espaço métrico compacto X. Ademais, nós caracterizaremos estes potenciais Hölder contínuos, através da Proposição (3.3).

Após essas considerações gerais, dedicamos a prova do caso especial do Lema Chave, onde então a medida μ é suportada em uma órbita periódica; o enunciado deste caso é dado pela Proposição (3.6) . A prova, no caso geral, é baseada em algumas ideias do caso periódico, mas é mais elaborada, pois, necessitamos da construção de um Sistema de Funções Iteradas adequado gerado pelo mapa racional. A prova é exibida logo em seguida ao caso periódico.

O Teorema Principal é provado assumindo o um Lema que crucial no qual grande parte da dissertação é voltado à sua demonstração. Há dois casos, cujas demonstrações são distintas: o caso em que a medida está suportada em uma órbita periódica e o caso geral, que é baseado na construção de um "Sistema Iterado de Funções gerado pela aplicação racional f e um resultado que diz que: se f é um endomorfismo analítico da esfera de Riemann de grau $n \geq 2$ e ψ um potencial Hölder contínuo satisfazendo $\sup_{J(f)} \psi < P(f, \psi)$. Portanto, existe um único estado de equilíbrio estado μ de f para o potencial φ.

Por fim, concluiremos com o apêndice de um breve resumo de Dinâmica Complexa. Este é dedicado, a apresentação do conjunto de Julia $J(f)$, e suas propriedades. Além disso, apresentamos a definição das variações da condição Collet-Eckmann e o Teorema da Distorção de Koebe.

2 Preliminares

Neste capítulo nos dedicamos em recordar alguns resultados de Teoria ergódica, Teoria da Medida e da Análise Funcional que são necessários para compreensão de conceitos do próximo capítulo. Nossas referências para este capítulo são [9], [3], [17], [19], [22] e [28], onde demonstrações podem ser encontradas.

2.1 Alguns Resultados de Teoria Ergódica

2.1.1 Resultados de Medida e Integração

Definição 2.1. Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma família de subconjunto de X. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **álgebra** se forem válidas as seguintes condições:

1. $X \in \mathcal{A}$;
2. Se $A \in \mathcal{A}$ então $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
3. Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Diremos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra se a condição 3 puder ser generalizada para uniões enumeráveis: se $(A_n)_n$ é uma sequência de elementos de $\mathcal{A}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ também um elemento de $\mathcal{A}$. Denominamos de espaço mensurável um par $(X, \mathcal{A})$ onde $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de X.

Definição 2.2. Uma medida num espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ que satisfaz:

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i)$ para quaisquer $A_i \in \mathcal{A}$ disjuntos dois a dois.

A tripla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é chamada espaço medida. Quando vale $\mu(X) < \infty$ dizemos que μ é uma medida finita e se $\mu(X) = 1$ dizemos que μ é uma probabilidade. Neste último caso, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de probabilidade.

Definição 2.3. Dizemos que uma propriedade é válida em μ-quase todo ponto se é válida em X exceto, possivelmente, num conjunto de medida nula. Dizemos também que a propriedade vale para quase todo ponto $x \in X$.

Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Uma transformação $f : X \to X$ é dita mensurável se $f^{-1}(X) \in \mathcal{X}$ para todo $X \in \mathcal{X}$.

Definição 2.4. Dizemos que f uma transformação mensurável preserva a medida μ, ou, equivalente, μ é dita medida f-invariante, se $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo conjunto mensurável $A \subset X$.

Definição 2.5. Dizemos que uma medida μ invariante é ergódica, se para todo $A \in \mathcal{X}$, $f^{-1}(A) = A$ a menos de medida nula implica que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

A álgebra gerada (respectivamente σ-álgebra gerada) por uma classe $\mathcal{B}$ de subconjuntos de um conjunto X define-se como a menor álgebra (respectivamente σ-álgebra) de X que contém $\mathcal{B}$. Note que tal álgebra (respectivamente *sigma*-álgebra) existe sempre, pois $P(\mathcal{X})$ é uma σ-álgebra e a intersecção de uma família de álgebras (respectivamente σ-álgebras) é ainda uma álgebra (resp. σ-álgebra).

Exemplo 2.6. Se X é um espa$\gg$co topológico, denominamos de σ-álgebra de Borel a σ-álgebra gerada pelos abertos de X. Designaremos os elementos desta σ-álgebra por borelianos.

Definição 2.7. Sejam $f : X \to \mathbb{C}$ uma função mensurável em X e $1 \leq p < \infty$. Definimos $\|f\|_p = \left[\int |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$. Assim, também defini-se $L^p\left(X, \mathcal{X}, \mu\right) = \{f : X \to \mathbb{C}$ é mensurável e $\|f\|_p < \infty\}$.

Lema 2.8. *São equivalentes os seguintes resultados:*

1. *f uma transformação mensurável que preserva a medida μ;*

2. *Para cada $\varphi \in L^1(X, \mathcal{X}, \mu)$, tem-se $\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu$.*

Teorema 2.9. (Birkhoff) *Seja $f : X \to X$ uma transformação preservando uma medida probabilidade μ. Dada uma função $\varphi : X \to \mathbb{R} \in L^1(X, \mathcal{X}, \mu)$, existe o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^n(x) =: \varphi_f(x)$ em μ-quase todo ponto $x \in X$. Além disso, se μ ergódica e f-invariante, vale que $\varphi_f(x) = \int \varphi d\mu$ em μ-quase todo ponto $x \in X$.*

2.1.2 Transformações contínuas de espaço métrico compacto

Denotamos por $\mathcal{M}_1(X)$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade Borel em $(X, \mathcal{X})$. Consideremos de X um espaço métrico compacto e f sendo uma transformação contínua. Denotamos $f : X \to X$, o espaço $\mathcal{M}_f(X)$ de todas as medidas de probabilidade que são invariantes por f.

Chamamos potencial em X a qualquer função contínua $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$.Para cada $n \geq 1$, definimos $S_n\varphi : X \to \mathbb{R}$ por $S_n\varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j$. Além disso, dado qualquer conjunto não vazio $Y \subset X$, denotamos $\sup_{z\in Y} S_n(z) = \{S_n(\varphi)(z) : z \in Y\}$.

Proposição 2.10. *O espaço $\mathcal{M}(X)$ é convexo, ou seja, se $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(X)$ e $0 \leq \alpha \leq 1$ então $\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \in \mathcal{M}(X)$.*

Denotaremos por $C(X)$ o espaço das funções contínuas e limitadas de X em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Definimos a norma uniforme de $\varphi \in C(X)$ por $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in X}|\varphi(x)|$.

Seja $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ uma medida de probabilidade de Borel, tem-se que μ induz um funcional linear não negativo normalizado em $C(X)$ por $f \mapsto \int f d\mu$. A seguir recordarmos a definição de operador linear.

Definição 2.11. Considere os espaços vetoriais X e Y. Um operador linear é uma aplicação $I : X' \subset X \to Y$, em que X' é um subespaço vetorial e $I(x+\lambda y) = I(x)+\lambda I(y)$, para todos $x, y \in X'$ e todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Um operador linear $I : C(X) \to \mathbb{R}$ diz-se positivo se $I(f) > 0$ para toda função f positiva em todo ponto. O Teorema seguinte afirma que as integrais são os únicos operadores lineares positivos no espaço das funções contínuas.

Teorema 2.12. (Riez-Markov)

Seja $I : C(X) \to \mathbb{R}$ qualquer operador positivo. Então existe uma única medida boreliana finita em μ em X tal que $I(f) = \int f d\mu$ para todo $f \in C(X)$. Além disso, μ é uma probabilidade se, e somente se $I(1) = 1$.

2.1.3 Topologia Fraca *

Consideremos X um espaço métrico compacto. Vamos introduzir uma topologia importante no conjunto $\mathcal{M}_1(X)$ probabilidades sobre os borelianos de X, chamada topologia fraca*, que será útil para verificar o **Teorema da existência de medidas invariantes** (2.19). Para isso, precisamos primeiro analisar o conjunto $\mathcal{M}_1(X)$ e sua compacidade.

A definição a seguir diz que duas medidas estão próximas se suas integrais estão próximas para muitas funções contínuas.

Definição 2.13. Dados um número $\epsilon > 0$, uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ e um conjunto finito $\Theta = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ de funções contínuas $\varphi_j : X \to \mathbb{R}$. Seja

$$V(\mu, \Theta, \epsilon) = \{\mu \in \mathcal{M}_1(X); \left| \int \varphi_j d\nu - \int \varphi_j d\mu \right| \text{ onde } 1 \leq j \leq n\}.$$

A topologia fraca * é definida estipulando que os conjuntos $V(\mu, \Theta, \epsilon)$, com Θ e ϵ variáveis, constituem uma base de vizinhanças da medida μ.

Será muito importante ter uma noção de convergência em $\mathcal{M}_1(X)$; isso é dito convergir na topologia fraca*. O lema seguinte ajudará a compreender melhor o significado da topologia fraca* .

Lema 2.14. *Uma sequência de probabilidades (μ_n) converge em $\mathcal{M}_1(X)$ para uma $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ se, e somente se $\int \varphi d\mu_n \to \int \varphi d\mu$ para toda função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$.*

Teorema 2.15. *O espaço $\mathcal{M}_1(X)$ munido da topologia fraca* é compacto.*

2.1.4 Medidas Invariantes para Transformações contínuas

Sejam X um espaço métrico compacto equipado com a σ-álgebra de Borel, $f : X \to X$ contínua e mensurável. A transformação f induz um mapa no conjunto $\mathcal{M}_1(X)$ de medidas de probabilidade Borel, $f_* : \mathcal{M}_1(X) \to \mathcal{M}_1(X)$ definido por

$$(f_*\mu)(X) = \mu(f^{-1}(X)).$$

O seguinte lema diz como integrar com respeito $f_*\mu$.

Lema 2.16. *Sejam μ uma medida e $\varphi \in L^1(\mu)$. Então*

$$\int \varphi d(f_*\mu) = \int \varphi \circ f d\mu.$$

Proposição 2.17. *A aplicação $f_* : \mathcal{M}_1(X) \to \mathcal{M}_1(X)$ é contínua relativamente à topologia fraca*.*

Exemplo 2.18. Seja X um conjunto e consideremos a σ-álgebra $\mathcal{X} = 2^X$. Dado qualquer $x \in X$, consideremos a função $\delta_x : 2^X \to \{0,1\}$ dada por:

$$\delta_x(X) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \notin X; \\ 1 & \text{se} \quad x \in X. \end{cases}$$

Esta medida δ_x é conhecida como a medida de Dirac no ponto x.

Seja χ_A a função característica A, então

$$\int \chi_A d\delta_x = \begin{cases} 0 & se \quad x \notin A; \\ 1 & se \quad x \in A. \end{cases}$$

Suponha que $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$ e que, os conjuntos A_j sejam disjuntos dois a dois. Então $\int \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} d\delta_x = a_j$, onde j escolhido de modo que $x \in A_j$. Agora, se $f : X \to \mathbb{R}$. Ao escolher uma sequência crescente de funções simples, vemos que $\int f d\delta_x = f(x)$.

2.1.5 Existência de Medidas Invariantes

Dado um mapa contínuo $f : X \to X$ em espaço métrico compacto, vamos apresentar o Teorema (2.19), que garante a existência de medidas invariantes .

Teorema 2.19. *Seja $f : X \to X$ um mapa contínuo de um espaço métrico compacto. Então, existe pelo menos uma medida de probabilidade f-invariante.*

Precisaremos das seguintes propriedades adicionais de $\mathcal{M}_f(X)$.

Teorema 2.20. *Seja $f : X \to X$ um mapa contínuo no espaço métrico compacto. Então $\mathcal{M}_f(X)$ é compacto na topologia fraca* e é um subconjunto convexo de $\mathcal{M}_1(X)$.*

Proposição 2.21. *Toda sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}_1(X)$ admite uma subsequência que é convergente na topologia fraca**

Lema 2.22. *Dada uma medida $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$, então todo ponto de acumulação de uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do tipo:*

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f^j * \nu$$

é uma probabilidade invariante por f.

Definição 2.23. Uma função $\varphi : X \to \mathbb{C}$ ou $(\mathbb{R})$ é dita α-Hölder contínua com um expoente $(0 < \alpha \leq 1)$ se, e somente se, existe $C > 0$ tal que $\mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid \leq C\rho(x,y)^\alpha$ para todo $x, y \in X$.

O espaço das funções α-Hölder contínuas é denotado por $C^{0,\alpha}(X)$. Assim, tem-se

$$C^{0,\alpha}(X) = \left\{\varphi \in C(X) : \sup_{x\neq y} \frac{\mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid}{\rho(x,y)^\alpha} < \infty\right\}.$$

Consideramos em $C^{0,\alpha}(X)$ a norma $\|\varphi\|_{C^{0,\alpha}} = \|\varphi\|_\alpha + \|\varphi\|_\infty$, onde $\|\varphi\|_\alpha := \sup_{x\neq y} \frac{\mid \varphi(x) - \varphi(y) \mid}{\rho(x,y)^\alpha}$. Em particular, quando $\alpha = 1$ o espaço $C^{0,1}(X)$ possui como elementos as chamados de funções Lipschitz.

2.1.6 Sequência Subaditiva

Definição 2.24. Dizemos que uma sequência $(a_n)_n$ em $[-\infty, \infty)$ é *subaditiva* se vale

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n \text{ para todo } m, n \geq 1.$$

Agora, vemos que segue da definição acima, o seguinte o fato:

$$\begin{aligned} a_n &\leq \underbrace{a_1 + ... + a_1}_{n \quad parcelas} \\ &= na_1, \end{aligned}$$

e portanto $\dfrac{a_n}{n} \leq a_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, resulta que

$$\sup_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} = \max_{n\geq 1} \frac{a_n}{n} = a_1.$$

Definição 2.25. Dizemos que uma sequência de funções $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ é subaditiva com respeito a uma transformação $f : X \to X$, se

$$\varphi_{m+n} \leq \varphi_m + \varphi_n \circ f^m \text{ para todo } m,\, n \geq 1.$$

Definição 2.26. A sequência $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ diz-se *aditiva* se vale a igualdade em $\varphi_{m+n} = \varphi_m + \varphi_n \circ f^m$ para todo m, $n \geq 1$.

Exemplo 2.27. Toda soma orbital $\varphi_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^n(x)$ constitui uma sequência *aditiva* .

Lema 2.28. (Lema da Subaditividade) *Se $(a_n)_n$ é uma sequência subaditiva então*

$$\lim \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n} \in [-\infty, a_1].$$

2.1.7 Entropia de uma Partição

Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que uma família finita ou enumerável de subconjuntos mensuráveis $\mathcal{P}$ é uma partição se estes conjuntos são dois a dois disjuntos e sua união tem medida total. Escrevemos $\mathcal{P}(x)$ para o elemento que contém $x \in X$. Definimos a soma de duas partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ por $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P_i \cap Q_j \mid P_i \in \mathcal{P}, Q_j \in \mathcal{Q}\}$.

Seja $I_{\mathcal{P}} : X \to \mathbb{R}$ por $I_{\mathcal{P}}(x) = -\log \mu(\mathcal{P}(x))$. Agora, definimos a entropia $\mathcal{P}$ como $H_\mu(\mathcal{P}) = \displaystyle\int I_{\mathcal{P}} d\mu = \sum_{P \in \mathcal{P}} -\mu(P) \log \mu(P)$, onde convenciona-se que $0 \log 0 = 0$ e log é o logaritmo natural.

Dada qualquer família enumerável de partições $\mathcal{P}_n$, definimos $\displaystyle\bigvee_n \mathcal{P}_n = \left\{ \bigcap_n P_n : P_n \in \mathcal{P}_n \right\}$.

2.1.8 Entropia de um Sistema Dinâmico

Nesta subseção, iremos considerar $f : X \to X$ mensurável que preserva uma probabilidade μ. Definimos $\mathcal{P}^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}\mathcal{P}$ para todo $n \geq 1$. Vemos que $\mathcal{P}^n(x) = \mathcal{P}(x) \cap f^{-1}\mathcal{P}(f(x)) \cap \ldots f^{-(n-1)}\mathcal{P}(f^{n-1}(x))$, e que $\mathcal{P}^n < \mathcal{P}^{n+1}$ para todo $n \geq 1$, portanto $H_\mu(\mathcal{P}^n)$ é não decrescente.

Considerando a sequência $(H_\mu(\mathcal{P}^n))_{n\in\mathbb{N}}$, temos que $H_\mu(\mathcal{P}^{m+n}) \leq H_\mu(\mathcal{P}^m) + H_\mu(\mathcal{P}^n)$, para todos $m, n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(H_\mu(\mathcal{P}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ é subaditiva. Assim, definimos a entropia de f com respeito à medida μ e partição $\mathcal{P}$ como o limite existe por subaditiva, segue que

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n).$$

Finalmente, definimos a entropia métrica $h_\mu(f)$ por $h_\mu(f) = \sup\{h_\mu(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P}$ partição com $H_\mu(f) < \infty\}$.

Lema 2.29. *Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto, então $h_\mu(f^n) = nh_\mu(f)$ para cada inteiro $n \geq 1$.*

2.1.9 Entropia Topológica

Considere α uma cobertura de X. Definimos $N(\alpha)$, o número da cobertura α, como a menor cardinalidade possível de uma subcobertura de α. A entropia de α de α é o número $H(\alpha) = \log N(\alpha)$.

Da mesma forma, que fizemos para partições, dadas duas coberturas α e β de X, podemos definir uma nova cobertura $\alpha \vee \beta$ de X por $\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha \text{ e } B \in \beta\}$. Se α é uma cobertura aberta X então $f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(A) : A \in \alpha\}$ também é uma cobertura aberta.

Lema 2.30. *1. $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.*

2. $H(\alpha^{m+n}) \leq H(\alpha^m) + H(\alpha^n)$ para todos $m, n \geq 1$, ou seja, $H(\alpha^n)$ é subaditiva.

Como consequência do Lema (2.30), o limite $h(f, \alpha) = \lim_{n\to\infty} H(\alpha^n) = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} H(\alpha^n)$ sempre existe. Este limite é chamado entropia de f com respeito à cobertura α. Finalmente, definimos a entropia topológica de f por $h_{top}(f) = \sup\{h(f,\alpha) : \alpha$ é a cobertura aberta finita de $X\}$.

Definição 2.31. ***(Pressão)*** . Dado um potencial contínuo $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Chamamos ao número

$$P(f,\varphi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f(X)} \left(h_\mu(f) + \int \varphi d\mu \right),$$

de pressão Topológica de φ e quando a medida μ atinge o supremo é chamada de medida de estado equilíbrio para o potencial φ.

Em particular, quando $\varphi \equiv 0$, temos $h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f) : \mu \in \mathcal{M}_f(X)\}$.

Denotamos por $\varepsilon(f,\varphi)$ conjunto dos *estados de equilíbrio.*

Proposição 2.32. *Suponha que $h_{top}(f) < \infty$. Então o conjunto dos estados equilíbrio para qualquer potencial $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é um subconjunto convexo de $\mathcal{M}_f(X)$. Além disso, uma probabilidade invariante μ está em $\varepsilon(f,\varphi)$ se, e somente se, quase toda componente ergódica de μ está em $\varepsilon(f,\varphi)$.*

Corolário 2.33. *Se $\varepsilon(f,\varphi)$ é não vazio então ele contém probabilidades invariantes ergódicas. Além disso, os elementos extremais do convexo $\varepsilon(f,\varphi)$ são precisamente as medidas ergódicas contidas nele.*

Lema 2.34. *Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua num espaço métrico e seja φ um potencial em X. Então $P(f^n, S_n(\varphi)) = nP(f,\varphi)$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Note, para cada $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$, temos que $\displaystyle\int S_n(\varphi)d\mu = n\int \varphi d\mu$, e pelo lema (2.29), vale que $h_\mu(f^n) = nh_\mu(f)$ para todo $n \geq 1$. Assim, da definição de pressão resulta que

$$\begin{aligned} P(f^n, S_n(\varphi)) &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f(X)} \left(h_\mu(f^n) + \int S_n(\varphi)d\mu \right) \\ &= n \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f(X)} \left(h_\mu(f) + \int \varphi d\mu \right) \\ &= nP(f,\varphi). \end{aligned}$$

Isto prova o lema.

□

2.1.10 Expoente de Lyapunov

Sejam $f : X \to X$ um mapa de classe C^1 num espaço métrico compacto e μ medida de probabilidade f-invariante ergódica em X. Sendo $\ln \mid f' \mid \in L^1_\mu$. Então, pelo Teorema (2.9), para μ- quase todo ponto $x \in X$, existe

$$\begin{aligned} \chi_\mu(f) : &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \mid f'(f^j)(x) \mid \\ &= \int \ln \mid f' \mid d\mu. \end{aligned}$$

Dizemos que $\chi_\mu(f)$ é o expoente de Lyapunov característico de f associado a μ. Isto é, a taxa de crescimento assintótica da derivada. De fato, observe que pela regra da cadeia, temos

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln |f'(f^j)(x)| = \frac{1}{n} \prod_{j=0}^{n-1} |f'(f^j)(x)| = \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x)|$$

.

Portanto, pela definição de limite, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que para todos $n \geq N$ tem-se $\chi_\mu(f) - \epsilon \leq \frac{1}{n} \ln \mid (f^n)'(x) \mid \leq \chi_\mu(f) + \epsilon$. Assim, tomando a exponencial, segue-se $\exp(n(\chi_\mu(f) - \epsilon)) \leq \mid (f^n)'(x) \mid \leq \exp(n(\chi_\mu(f) + \epsilon))$.

Teorema 2.35. (Desigualdade de Ruelle) *Seja $f \in C(X)$, então $h_\mu(f) \leq 2 \int \max\{0, \chi_\mu(f)\}\, d\mu$ Se μ for uma medida ergódica, então $h_\mu(f) \leq 2 \max\{0, \chi_\mu(f)\}$.*

2.1.11 Decaimento Exponecial de Correlações

Consideramos $\varphi : X \to \mathbb{R}$ função limitada, mensurável e $\psi : X :\to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua, onde X é um espaço métrico compacto.

Definição 2.36. Seja f uma transformação $f : X \to X$ preservando uma medida μ. Dizemos que o sistema (f, μ) é um misturador, se dados quaisquer conjunto mensuráveis A, $B \subset X$ então:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B). \tag{2.1}$$

Proposição 2.37. *Sejam* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *um espaço de medida,* $f : X \to X$ *uma transformação preservando a medida* μ *e* $\mathcal{Y}$ *uma álgebra que gera* X*. Se para todos* A*,* $B \in \mathcal{Y}$ *vale* $\lim_{n\to\infty} \mu(f^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$*, então* μ *é misturadora.*

Proposição 2.38. *Uma medida* μ *é misturadora se, e somente se, para* φ*,* $\psi \in L^2(\mu)$ *vale*

$$\int \varphi \circ f^n d\mu \to \int \varphi d\mu \int \psi d\mu. \tag{2.2}$$

Definição 2.39. ***(Decaimento Exponencial de Correlações)***

Seja $\mathcal{F}$ uma classe de funções equipada com uma norma $\|\cdot\|$. Dizemos que $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$ tem *decaimento exponencial de correlações*, ou exponencial misturadora em $\mathcal{F}$ se existe uma constante $C > 0$ e $\rho \in (0, 1)$, e de modo que

$$\left| \int (\varphi \circ f^n) - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \right| \leq C\|\varphi\|_\infty \|\psi\|_{Lip} \rho^n.$$

Definição 2.40. ***(Potenciais Cohomólogos)*** . Dizemos que dois potenciais $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ são *cohomólogos* se existe alguma função $h : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi = \psi + h \circ f - h.$$

Proposição 2.41. *Seja* $f : X \to X$ *uma transformação contínua num espaço topológico compacto. Se* $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ *são potenciais cohomólogos então* $P(f, \varphi) = P(f, \psi)$*.*

Demonstração. Inicialmente, dada $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$, temos que:

$$\begin{aligned} \int \varphi d\mu = &= \int \psi + h \circ f - h d\mu \\ &= \int \psi d\mu + \int h \circ f d\mu - \int h d\mu \\ &= \int \psi d\mu + \int h d(f_* \mu) - \int h d\mu \\ &= \psi d\mu + \int h d\mu - \int h d\mu \\ &= \int \psi d\mu. \end{aligned}$$

Agora, por definição de $P(f, \varphi)$, vemos que

$$\begin{aligned} P(f,\varphi) &= \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\left(h_\mu(f)+\int\varphi d\mu\right) \\ &= \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\left(h_\mu(f)+\int\psi d\mu\right) \\ &= P(f,\psi). \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

□

Proposição 2.42. *Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua num espaço topológico compacto. Se φ, $\psi : X \to \mathbb{R}$ são potenciais cohomólogos então $\varepsilon(f,\varphi) = \varepsilon(f,\psi)$.*

Demonstração. De fato, se $\mu \in \varepsilon(f,\varphi)$, resulta que

$$\begin{aligned} h_\mu(f)+\int\varphi d\mu &= h_\mu(f)+\int\psi d\mu \\ &= P(f,\psi) \\ &= P(f,\varphi). \end{aligned}$$

Portanto, para cada dois potenciais contínuos φ,ψ que cohomólogos, concluímos que $\varepsilon(f,\varphi) = \varepsilon(f,\psi)$. Isto conclui a demostração.

□

Neste caso, para cada probabilidade invariante μ em X, tem-se $\displaystyle\int\varphi d\mu = \int\psi d\mu$; isto implica que $P(f,\varphi) = P(f,\psi)$ e que os estados de equilíbrio de f para os potenciais φ e ψ coincidem.

Lema 2.43. *Os potenciais φ e $\dfrac{1}{n}S_n(\varphi) : X \to \mathbb{R}$ são cohomólogos.*

Demonstração. Com efeito, basta tomar $h = \dfrac{-1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-2}(n-1-j)\varphi\circ f^j$,

então

$$h - h\circ f = \frac{-1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\varphi\circ f^j + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-2}\varphi\circ f^{j+1},$$

segue que

$$\frac{1}{n}S_n(\varphi) = \varphi + h - h\circ f.$$

ou seja, os estados de equilíbrio de φ, ψ coincidem, e portanto pela propriedade (3) ψ é hiperbólico se, e somente se φ é hiperbólico.

$\square$

3 Potenciais hiperbólicos de um sistema dinâmico topológico

Neste capítulo, apresentamos a definição de potenciais hiperbólico dada pela pelo artigo [16], reunimos várias propriedades que são válidas para mapas em um espaço métrico compacto X. [19], [22] e [28] e [16].

3.1 Potenciais Hiperbólicos

Definição 3.1. ***(Potencial Hiperbólico)*** . Dizemos que um potencial Hölder contínuo $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é hiperbólico para f no conjunto $X' \subset X$, se existir um número inteiro $n \geq 1$ tal que $\sup\limits_{X} S_n(\varphi)(x) < P(f^n, S_n(\varphi))$ é satisfeita para todo $x \in X'$.

Lema 3.2. *Seja $f : X \to X$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto e seja φ um potencial em X. Então, o potencial φ é hiperbólico para f se, somente se, existe um inteiro $n \geq 1$ tal que*

$$\sup_{X} \frac{1}{n} S_n(\varphi) < P(f, \varphi).$$

Demonstração. De fato, como para cada inteiro $n \geq 1$ e todo potencial φ, pelo Lema (2.34) tem-se

$$P(f^n, S_n(\varphi)) = nP(f, \varphi).$$

Sendo φ hiperbólico, resulta que

$$\begin{aligned} \sup_{z \in X} S_n(\varphi)(z) &< P(f^n, S_n(\varphi)) \\ &= nP(f, \varphi), \end{aligned}$$

Desta forma , equivalentemente, tem-se $\sup\limits_{z \in X} \frac{1}{n} S_n(\varphi)(z) < P(f, \varphi)$, para todo $n \geq 1$. Portanto,

$$\sup_{X} \frac{1}{n} S_n(\varphi) < P(f, \varphi),$$

como desejávamos mostrar.

□

Proposição 3.3. *Sejam X um espaço métrico compacto e $f : X \to X$ uma transformação contínua. Então, para cada potencial contínuo $\varphi : X \to \mathbb{R}$, temos que:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sup_X \frac{1}{n} S_n(\varphi) &= \inf_{n\geq 1} \left(\sup_X \frac{1}{n} S_n(\varphi) \right) \\ &= \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)} \int \varphi d\mu \\ &\leq P(f,\varphi) \quad . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Além disso, as seguintes propriedades são equivalentes.

1. O potencial φ é hiperbólico para f.
2. $\displaystyle\sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)} \int \varphi d\mu < P(f,\varphi)$.
3. A entropia métrica para cada estado de equilíbrio de f para o potencial φ é estritamente positivo.
4. Existe um potencial contínuo ψ *cohomólgos* para φ tal que
$$\sup_X \psi < P(f,\psi).$$
.
5. Todo potencial contínuo cohomólogo ao potencial φ é hiperbólico para f.

Demonstração. A afirmação da desigualdade em (3.1) segue imediatamente da Definição (2.31) de $P(f,\varphi)$: como $h_\mu(f) \geq 0$ e μ_0 é uma medida de probabilidade invariante então

$$P(f,\varphi) \geq h_\nu(f) + \sup_{\nu\in\mathcal{M}_f(X)} \int \varphi d\nu \geq \sup_{\nu\in\mathcal{M}_f(X)} \int \varphi d\nu$$

para toda função contínua φ. Portanto, $P(f,\varphi) \geq \displaystyle\sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)} \int \varphi d\nu$.

Agora, vamos provar as igualdades em (3.1).

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_X \frac{1}{n}S_n\varphi &= \inf_{n\geq 1}\left(\sup_X \frac{1}{n}S_n(\varphi)\right)\\ &= \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int \varphi d\mu.\end{aligned}$$

Observe que f^n preserva a medida μ, então $\int \varphi d\mu = \int \varphi\circ f^n d\mu$, para cada inteiro $n\geq 1$ e para toda $\mu\in\mathcal{M}_f(X)$, concluímos que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{n}S_n(\varphi)d\mu &= \int \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\circ f^k d\mu\\ \frac{1}{n}\int \varphi d\mu + ... + \int \varphi\circ f^{n-1}d\mu &= \int \varphi d\mu.\end{aligned}$$

Como $\sup_X \frac{1}{n}S_n(\varphi) \geq \frac{1}{n}S_n(\varphi)(x)$, resulta que

$$\begin{aligned}\int \varphi d\mu &= \int \frac{1}{n}S_n(\varphi)(x)d\mu\\ &\leq \int \sup_X \frac{1}{n}S_n(\varphi)d\mu = \sup_X \frac{1}{n}S_n(X).\end{aligned}$$

Da compacidade de $\mathcal{M}_f(X)$ e continuidade da aplicação $\mu \longmapsto \int \varphi d\mu$ na topologia fraca*, resulta que o supremo é atingido por alguma $\nu\in\mathcal{M}_f(X)$, tal que

$$\int \varphi d\nu = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int \varphi d\mu.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int \varphi d\mu &= \int \varphi d\nu\\ &= \int \frac{1}{n}S_n(\varphi)d\nu\\ &\leq \sup_X \frac{1}{n}S_n(\varphi),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int \varphi d\mu \leq \sup_X \frac{1}{n}S_n(\varphi).$$

Portanto, $\sup_X \frac{1}{n}S_n(\varphi)$ é uma cota superior para $\sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int \varphi d\mu$.

Por outro lado, tomando o ínfimo, temos que:

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,f)}\int\varphi d\mu\leq\inf_{n\geq 1}\left(\sup_X\frac{1}{n}S_n(\varphi)\right). \tag{3.2}$$

Resta provar que

$$\inf_{n\geq 1}\left(\sup_X\frac{1}{n}S_n(\varphi)\right)\leq\sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int\varphi d\mu.$$

Para isso, mostraremos que

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_X\frac{1}{n}S_n(\varphi)\leq\sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,f)}\int\varphi d\mu.$$

De fato, note que $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_X\frac{1}{n}S_n(\varphi)\leq\limsup\limits_{n\to\infty}\sup\limits_X\frac{1}{n}S_n(\varphi)$, e a sequência $\sup\limits_X S_n(\varphi)$ é subaditiva (2.27), então existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_X\frac{1}{n}S_n(\varphi)=\inf\limits_{n\geq 1}\left(\sup\limits_X\frac{1}{n}S_n(\varphi)\right)$.

Inicialmente, como $\frac{1}{n}S_n(\varphi):X\to\mathbb{R}$ é uma função contínua real em um espaço métrico compacto X, então existe $x_n\in X$ $\frac{1}{n}S_n(\varphi)$ tal que $\frac{1}{n}S_n(\varphi)(x_n)=\sup\limits_X\frac{1}{n}S_n(\varphi)$. Agora, defina a medida $\mu_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x_n)}$, onde $\delta_{f^j(x_n)}$ é a probabilidade delta de Dirac no ponto $f(x_n)$. ,

$$\begin{aligned}\int\varphi d\mu_n &= \int\varphi d\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x_n)}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int\varphi d\delta_{f^j(x_n)}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ f^j(x_n)\\ &= \frac{1}{n}S_n(\varphi)(x_n)\\ &= \sup_X\frac{1}{n}S_n(\varphi).\end{aligned}$$

Assim, podemos escolher uma subsequência $(n)_{m\in\mathbb{N}}\to\infty$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_X\frac{1}{n}Sn(\varphi) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{n_m}S_{n_m}(\varphi)(x_{n_m}).$$

Por outro lado, a compacidade $\mathcal{M}_1(X)$ garante que existe ponto de acumulação $\mu\in\mathcal{M}_1(X)$ de $(\mu_n)_n$, e pelo Lema (2.22), resulta que $\mu\in\mathcal{M}_f(X)$. Assuma que uma subsequência μ_{n_m} converge para alguma probabilidade μ na topologia fraca*. Então, temos que:

$$
\begin{aligned}
\inf_{n>1}\left(\sup_X \frac{1}{n}S_n(\varphi)\right) &= \lim_{n\to\infty}\sup_X \frac{1}{n}S_n(\varphi)\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\sup\sup_X \frac{1}{n}S_n(\varphi)\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{n_m}S_{n_m}(\varphi)(x_{n_m})\\
&= \lim_{m\to\infty}\int \varphi d\mu_{n_m}\\
&= \int \varphi d\mu\\
&\leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int \varphi d\mu.
\end{aligned}
$$

Finalmente, juntando esta última desigualdade com a relação (3.2), obtemos a prova das igualdades em (3.1), como queríamos demonstrar.

Agora, vamos provar as seguintes implicações da proposição (3.3):

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & 5 \\
3 \arrow[r, Leftrightarrow] & 2 \arrow[r, Rightarrow] & 4 \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

(1) $\Leftrightarrow$ (2):Inicialmente, da igualdade $\inf_{n\geq 1}\left(\sup_X \frac{1}{n}S_n(\varphi)\right) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int \varphi d\mu$ em (3.1), e sendo φ é um potencial hiperbólico para f, então existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$
\begin{aligned}
P(f,\varphi) > \sup_X \frac{1}{n_0}S_{n_0}(\varphi) &\geq \inf_{n\geq 1}\left(\sup_X \frac{1}{n_0}S_{n_0}(\varphi)\right)\\
&= \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int \varphi d\mu.
\end{aligned}
$$

Isto mostra que (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) :Suponha, por hipótese, o potencial φ hiperbólico e $P(f,\varphi) - \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int \varphi d\mu > 0$. Logo, se $\nu \in \varepsilon(f,\varphi)$ então, temos que:

$$
h_\nu(f) + \int \varphi d\nu = P(f,\varphi)\ .
$$

Como vale a desigualdade $\sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int\varphi d\mu \geq \int\varphi d\nu$, resulta que

$$\begin{aligned} h_\nu(f) &= P(f,\varphi) - \int\varphi d\nu \\ &\geq P(f,\varphi) - \sup_{\nu\in\mathcal{M}_f(X)}\int\varphi d\nu \\ &> 0. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que (2) $\Rightarrow$ (3).

Agora, prova que (3) $\Rightarrow$ (2) : suponhamos, por contradição, que exista alguma $\mu\in\varepsilon(f,\varphi)$ tal que

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(X)}\int d\mu = P(f,\varphi),$$

para o potencial φ.
Como a função $\mu\mapsto\int\varphi d\mu$ é contínua e $\mathcal{M}_f(X)$ é compacto, relativamente à topologia fraca *, o que implica que o supremo é atingido por alguma medida de probabilidade invariante, então existe $\mu_0\in\mathcal{M}_f(X)$ tal que

$$\int\varphi d\mu_0 = P(f,\varphi)$$

para todo potencial φ.

Da Definição de $P(f,\varphi)$, e do fato de $h_{\mu_0}(f)>0$, obtemos que:

$$\begin{aligned} P(f,\varphi) &= \int\varphi d\mu_0 \\ &\leq h_{\mu_0}(f) + \int d\mu_0 \\ &\leq P(f,\varphi). \end{aligned}$$

Logo μ_0 é estado de equilíbrio, portanto $h_{\mu_0}(f)=0$, o que contradiz a hipótese. Isto prova que (3) $\Rightarrow$ (2).

Até agora mostramos que as propriedades (1), (2) e (3) são equivalentes. Para completar a prova da Proposição, primeiro vamos provar a Proposição (**??**), que diz uma vez que para cada potencial ψ cohomólogo a φ os estados de equilíbrio de f para oa potenciais φ e ψ coincidentes. Pela propriedade (3) o potencial ψ é hiperbólico se e somente se φ é hiperbólico. Obtemos como consequência direta deste fato a implicação (4) $\Rightarrow$ (1) e a equivalência entre (5) e (1).

Iremos provar que (4) $\Rightarrow$ (1) : devemos mostrar que se existem dois potencias ditos cohomólogos φ, ψ e se $\sup_X \psi < P(f, \psi)$, então φ é hiperbólico. Assim, pelo Lema (2.43), tome o potencial contínuo $\psi = \dfrac{1}{n} S_n(\varphi)$, que é cohomólogo ao potencial φ, e da Proposição (2.41), segue-se $P(f, \varphi) = P(f, \psi)$, então:

$$\begin{aligned} \sup_X \psi &= \sup_X \frac{1}{n} S_n(\varphi) \\ &< P(f, \psi) \\ &= P(f, \varphi) \end{aligned}$$

Portanto, $\sup_X \dfrac{1}{n} S_n(\varphi) < P(f, \varphi)$ .Isto completa a prova de (4) $\Rightarrow$ (1).

Finalmente, observe que a implicação (2) $\Rightarrow$ (4) é consequência direta da segunda igualdade em (3.1), e do fato que para cada número inteiro $n \geq 1$ a função $\frac{1}{n} S_n(n)(\varphi)$ é cohomólogo à φ. A prova deste fato é feita no Lema (2.43).

(2) $\Rightarrow$ (4): Da implicação (1) $\Leftrightarrow$ (2), vemos que φ é hiperbólico, ou seja, vale que $\sup_X \dfrac{1}{n} S_n(\varphi) < P(f, \varphi)$, pela Proposição (2.41), tem-se $P(f, \varphi) = P(f, \dfrac{1}{n} S_n(\varphi))$, porque o potencial contínuo $\dfrac{1}{n} S_n(\varphi)$ é cohomólogo para φ. Portanto, tem-se $\sup_X \dfrac{1}{n} S_n(\varphi) < P(f, \dfrac{1}{n} S_n(\varphi))$.

(1) $\Leftrightarrow$ (5)

Seja ψ um potencial contínuo cohomólogo para φ, então

$$P(f, \varphi) = P(f, \psi),$$

daí segue , se μ é um estado de equilíbrio de f para potencial φ, então

$$\begin{aligned} h_\mu(f) + \int \varphi d\mu = P(f, \varphi) \\ = P(f, \psi), \end{aligned}$$

ou seja, os estados de equilíbrio de φ, ψ coincidem, e portanto pela propriedade (3) ψ é hiperbólico se, e somente se φ é hiperbólico. $\square$

Corolário 3.4. *Sejam $f : X \to X$ um mapa contínuo e X um espaço métrico.Então, existe um potencial hiperbólico para f se, e somente se a $h_{top}(f) > 0$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Consideremos o potencial hiperbólico $\varphi : X \to \mathbb{R}$ para f. Pela Proposição (3.3), segue da propriedade (3), que $h_\mu(f) > 0$ para cada $\mu \in \varepsilon(f, \varphi)$.

Agora, do princípio variacional (3.20), resulta que

$$h_{top}(f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f(X)} h_\mu(f) > 0.$$

Como queríamos demonstrar.

($\Leftarrow$) Seja $h_{top}(f) > 0$ e considere o caso particular $\varphi = 0$, temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \sup \varphi \\ &< h_{top}(f) \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}_f(X)} h_\mu(f) \\ &= P(f, \varphi). \end{aligned}$$

Observação 3.5. Quando a $h_{top}(f) > 0$ então para todo potencial hiperbólico φ, a desigualdade $\sup_X S_n(\varphi)(x) < P(f^n, S_n(\varphi))$ falha para $n = 1$. Ou seja, para $n = 1$ e $h_{top}(f) > 0$, resulta que

$$\sup_X \varphi(x) \geq P(f, \varphi).$$

Com efeito, para encontrar tal φ, considere aplicação contínua $h : X \to \mathbb{R}$ e $x \in X$ um ponto que não fixo de f, de modo que $h(x) - h(f(x)) > h_{top}(f)$. Então o potencial

$\varphi := h - h \circ f$ é cohomólogo ao potencial 0. Então pela proposição (2.41), temos que:

$$\begin{aligned} P(f, \varphi) &= P(f, 0) \\ &= h_{top}(f) \\ &< h(x) - h(f(x)) \\ &\leq \sup \varphi(x). \end{aligned}$$

Logo, $\sup \varphi(x) \geq P(f, \varphi)$.

Observe que existem potenciais hiperbólicos para os quais essas condições falham $n = 1$.

$\square$

3.1.1 Lema Chave

Esta subseção é dedicada a provar o caso especial do Lema Chave(3.18), em que a medida μ é suportada em uma órbita periódica; este resultado do Lema chave é declarado como Proposição (3.6) abaixo. A prova no caso não periódico é baseada em algumas das mesmas ideias do caso periódico, mas é mais elaborada.

Proposição 3.6. *Sejam f um mapa racional de grau $n \geq 2$, $\varphi : J(f) \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder contínuo e seja $t \geq 0$. Então, para cada $n \geq 1$ e para cada ponto repulsor periódico z_0 de f de período n, temos que:*

$$P(f, \varphi - t \ln \mid f' \mid) \quad > \quad \frac{1}{n} S_n(\varphi)(z_0) - t \ln \mid (f^n)'(z_0) \mid . \tag{3.3}$$

Demonstração. Como $\mid (f^n(z_0))' \mid = \lambda_0 > 1$, segue do Teorema da Função Inversa que existem vizinhanças conexas $U(z_0)$ e $V(z_0)$ de modo que f é uma aplicação univalente de $U(z_0)$ sobre $V(z_0)$. Em particular, dado um mapa racional f com um ponto fixo repulsor z_0, a inversa local $\phi := (f^n)^{-1}$ existe e define uma função analítica sobre $V(z_0)$, com o ponto fixo atrator em z_0, cujo o multiplicador é $\mid \lambda_0^{-1} \mid$.

De fato, $\phi(z_0) = \phi(f^n(z_0)) = z_0$. Agora, aplicando o teorema da função inversa, resulta que $\mid (\phi)'(z_0) \mid = [\mid f'(\phi(z_0)) \mid]^{-1} = \mid f'(z_0) \mid^{-1} = \mid \lambda_0 \mid^{-1}$. Escolhemos $\rho > 0$ suficientemente pequeno, fixamos z_0 e de modo que $\phi : B(z_0, \rho) \to \overline{\mathbb{C}}$.

Como a bola aberta $B(z_0, \rho)$ é convexa. Logo, pelo Teorema da Desigualdade Valor Médio, tem-se

$$\begin{aligned} \mid \phi(z_1) - z_0 \mid &= \mid \phi(z_1) - \phi(z_0) \mid \\ &\leq \mid \lambda_0 \mid^{-1} \mid z_1 - z_0 \mid \\ &< \mid z_1 - z_0 \mid < \theta. \end{aligned}$$

Consequentemente, para $z_1 \neq z_0 \in B(z_0, \rho)$, com $| z_1 - z_0 | < \theta$, tem-se $\phi(z_1) \in B(z_0, \theta)$. Observe que $\phi^2(z_1) = \phi(\phi(z_1))$, então $| \phi^2(z_1) - \phi^2(z_0) | \leq (\lambda_0^{-1})^2 \mid z_1 - z_0 \mid$, segue que $\phi^2(z_1) \in B(z_0, \theta)$. Por indução, aplicando a desigualdade N vezes. Obtemos para $N \geq 1$

$$| \phi^N(z_1) - \phi^N(z_0) | \leq (\lambda_0^{-1})^N \mid z_1 - z_0 \mid.$$

Portanto, resulta que $\phi^N(z_1) \to z_0$ quando $N \to \infty$.

Sem perda de generalidade, se necessário, podemos reduzir ρ, e supor que $\phi\left(\overline{B(z_0, \rho)}\right) \subseteq B(z_0, \rho)$.

Desde que $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ ponto periódico repulsor de f cuja órbita negativa não contenha pontos críticos. Como $\bigcup_{n\geq 1} f^n(B(z_0, \frac{\rho}{2}))$ evita no máximo 2 pontos de $\overline{\mathbb{C}}$, vemos que existem $z_1 \in B(z_0, \frac{\rho}{2})$ e $z_1 \neq z_0$, e existe $N \geq 1$ tais que $f^N(z_1) = z_0$. Podemos supor, se necessário, um número N suficientemente grande, na qual a componente conexa U_1 de $f^{-N}(B(z_0, \rho))$ contêm z_1 e $U_1 \subseteq B(z_0, \frac{\rho}{2})$, é fechada e $U_0 \cap U_1 = \varnothing$, onde $U_0 := \phi^N(B(z_0, \rho))$.

Agora, tomando N ainda maior, se necessário, também assumimos que f^N não contenha pontos críticos em $U_1 \backslash \{z_1\}$. Denote $U = U_0 \cup U_1$, $\quad \hat{f} := f^N|_U : U \to B(z_0, \rho)$ e $\hat{\varphi} = \dfrac{1}{N} S_N(\varphi)$. Observe que $\hat{f}$ mapeia cada um dos conjuntos U_0 e U_1 propriamente sobre $B(z_0, \rho)$ e que $\hat{f}$ não tem pontos críticos, exceto talvez para $z = z_1$.

Para um número inteiro $k \geq 1$, considere o potencial $\psi : J(f) \to \mathbb{R}$, e um ponto $x \in U$ no domínio de $\hat{f}$. Assim, vamos definir $\hat{S}_k(x) = \psi(x) + \psi \circ \hat{f}(x) + ... + \psi \circ \hat{f}^{k-1}(x)$, e o conjunto $\hat{K} := \{x \in U : \text{para todo } k \geq 1, \text{ o mapa } \hat{f}^k \text{ é definida em } x\}$.

$$\begin{aligned}
NP(f, \varphi - t \ln | f' |) &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}(J(f))} \left(N h_\mu(f) + N \int \varphi - t \ln | f' | \, d\mu \right) \\
&= \sup_{\mu \in \mathcal{M}(J(f))} \left(h_\mu(f^N) + \int S_N(\varphi) - t \ln | (f^N)' | \, d\mu \right) \\
&= P(f^N, S_N(\varphi) - t \ln | (f^N)' |) \\
&\geq \sup_{\mu \in \mathcal{M}(J(f))} \left(h_\mu(f^N|_U) + \int \frac{1}{N} S_N(\varphi) - t \ln | (f^N|_U)' | \, d\mu \right) \\
&= P(\hat{f}|_{\hat{K}}, \hat{\varphi} - t \ln | \hat{f}' |).
\end{aligned}$$

Então, tem-se $P(f, \varphi - t \ln | f' |) \geq \dfrac{1}{N} P(\hat{f}|_{\hat{K}}, \hat{\varphi} - t \ln | \hat{f}' |)$. Agora, para provar o Lema, é suficiente mostrar que

$$P(\hat{f}|_{\hat{K}}, \hat{\varphi}) - t \ln | \hat{f}' |) > \hat{\varphi}(z_0) - t \ln | \hat{f}'(z_0) |.$$

Para fazer isso, considere o mapa do itinerário. Observe que $\{0,1\}^{\mathbb{N}\cup\{0\}} = \{(\iota(z)_0, \iota(z)_1, \iota(z)_2, \iota(z)_3, \cdots); \iota(z)_j \in \{0,1\}\}$.O espaço $\{0,1\}^{\mathbb{N}\cup\{0\}}$ é formado por sequências de $0'$ s e $1'$s que são infinitas.

$$\begin{aligned} \iota : \hat{K} &\rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}\cup\{0\}} \\ z &\mapsto \iota(z)_0\iota(z)_1\cdots \end{aligned}$$

de tal maneira que para cada $j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ temos que

$$\hat{f}^j(z) \in U_{\iota(z)_j}.$$

Para cada número $k \geq 0$ e cada sequência $a_0, \cdots, a_k \in \{0,1\}$, temos que $K(a_0\cdots a_k) := \{z \in \hat{K} : \text{para todo } j \in \{0,\cdots,k\} \text{ temos que } \iota(z)_j = a_j\}$.

Pela escolha de ϕ, conclui-se que existe uma constante $\hat{S} > 0$ tal que para cada número inteiro $k \geq 1$ e cada ponto x em $K\underbrace{(0\ldots0)}_{k}$ temos que $\mid \hat{S}_k(\hat{\varphi})(x) - k\hat{\varphi}(z_0) \mid < \hat{S}$.

Tomando $\hat{S}$ maior, se necessário, assumimos que para cada ponto x em U temos que $\mid \hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(z_0) \mid < \hat{S}$.

Nós temos dois casos

Caso 1. Para $t = 0$, então, devemos provar a desigualdade $P(\hat{f}|_{\hat{K}}, \hat{\varphi})) > \hat{\varphi}(z_0)$.

Inicialmente, como $\hat{f}$ não possui pontos críticos, exceto talvez z_1, e $\hat{f}(z_1) = z_0$, onde z_0 é fixado por $\hat{f}$, segue que $\hat{f}$ é semi-hiperbólico no sentido [6] .

Assim, para cada número inteiro $k \geq 1$, toda sequência $a_0, \cdots, a_k \in \{0,1\}$ o diâmetro de cada componente conexa de $K(a_0, ..., a_k)$ é exponencial pequeno em k.Isso implica que para cada $x_0 \in \hat{K}$, tem-se

$$P(\hat{f}|_{\hat{K}}, \hat{\varphi}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{x\in\hat{f}^{-n}(x_0)} \exp(\hat{S}_n(\hat{\varphi})(x)),$$

veja, por exemplo, [7],o Lema 4.2 .

Agora, fixe um ponto $x_0 \in \hat{K}$. Então, iremos obter o raio de convergência R da série de potências na variável s,

$$\Xi(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{x \in \hat{f}^{-n}(x_0)} \exp(\hat{S}_n(\hat{\varphi})(x)) \right) s^n, \tag{3.4}$$

a fórmula de Hadamard permite obter o valor do raio de convergência da série em (3.4):

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sup \left(\sum_{x \in \hat{f}^{-n}(x_0)} \exp(\hat{S}_n(\hat{\varphi})(x)) \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Assim, tomando o logaritmo natural, tem-se

$$\begin{aligned} \ln R^{-1} &= \ln \left(\lim_{n\to\infty} \sup \left(\sum_{x \in \hat{f}^{-n}(x_0)} \exp(\hat{S}_n(\hat{\varphi})(x)) \right)^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup \ln \left(\sum_{x \in \hat{f}^{-n}(x_0)} \exp(\hat{S}_n(\hat{\varphi})(x)) \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln \left(\sum_{x \in \hat{f}^{-n}(x_0)} \exp(\hat{S}_n(\hat{\varphi})(x)) \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\sum_{x \in \hat{f}^{-n}(x_0)} \exp(\hat{S}_n(\hat{\varphi})(x)) \right) \end{aligned}$$

.

Logo, tomando a exponencial, em ambos os membros desta última equação, vemos que $R = \exp(-P(\hat{f}|_{\hat{K}}, \hat{\varphi}))$.

Portanto, precisamos apenas mostrar que $R < \exp(-\hat{\varphi}(z_0))$. Para fazer isso, observe primeiro que, uma vez que $\hat{f}$ é definida para cada número inteiro $k \geq 0$ e toda sequência $a_0, \cdots, a_k \in \{0, 1\}$, então existe um ponto de $\hat{f}(x_0) \in K(a_0 \cdots a_k)$.

Agora, devemos provar que para cada número inteiro $k \geq 1$, toda sequência $a_0, \cdots, a_k \in \{0, 1\}$ com $a_0 = 1$ e cada ponto $x \in K(a_0 \cdots a_k)$ tem-se

$$\hat{S}_{k+1}(\hat{\varphi})(x) \geq (k+1)\hat{\varphi}(z_0) - 2(a_0 + \cdots + a_k)\hat{S}. \tag{3.5}$$

Para provar essa desigualdade, e pondo $\ell := a_0 + \cdots + a_k$ e seja $i_1 = 0 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq k$ todos os inteiros $i \in \{0, \cdots, k\}$ tal que $a_i = 1$. Além disso, define-se $i_{\ell+1} = k + 1$. Então, pela escolha de $\hat{S}$, seguem as seguintes desigualdades:

$$\hat{S}_k(\hat{\varphi})(x) \geq k\hat{\varphi}(z_0) - \hat{S} \text{ e } \hat{\varphi}(x) \geq \hat{\varphi}(z_0) - \hat{S},$$

para cada $j \in \{1, \cdots, \ell\}$. Logo, resulta que

$$\hat{S}_{i_2 - i_1}(\hat{f^{i_1}}(x)) \geq (i_2 - i_1)\hat{\varphi}(z_0) - 2\hat{S}.$$

$$\hat{S}_{i_3 - i_2}(\hat{f^{i_2}}(x)) \geq (i_3 - i_2)\hat{\varphi}(z_0) - 2\hat{S}.$$

$$\vdots$$

$$\hat{S}_{i_{j+1} - i_j}(\hat{f^{i_j}}(x)) \geq (i_{j+1} - i_j)\hat{\varphi}(z_0) - 2\hat{S}$$

$$\vdots$$

$$\hat{S}_{i_\ell - i_{\ell-1}}(\hat{f^{i_{\ell-1}}}(x)) \geq (i_\ell - i_{\ell-1})\hat{\varphi}(z_0) - 2\hat{S}.$$

$$.$$

Somando em $j \in \{1, .., \ell\}$, obtemos (3.5).

Para provar a desigualdade $R < \exp(-\hat{\varphi}(z_0))$. Vamos definir a seguinte série de potências na variável s:

$$\Phi(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \exp(k\hat{\varphi}(z_0) - 2\hat{S})s^k.$$

Tendo em vista a desigualdade (3.5), verifica-se por indução que

$$\exp[n(k\hat{\varphi}(z_0) - 2\hat{S})] \leq \sum_{x \in \hat{f}^{-n}(x_0)} \exp(\hat{S}_n(\hat{\varphi})(x)),$$

ou seja, cada um dos coeficientes da série

$$\Phi(s) + \Phi(s)^2 + \Phi(s)^3 + ...$$

é menor ou igual ao coeficiente correspondente de $\Xi(s)$.

Por outro lado, calcula-se o raio R' da série $\Phi(s)$ usando o Critério da razão, obtemos o seguinte valor

$$R' = \lim_{K\to\infty} \frac{\exp\left(k\hat{\varphi}(z_0) - 2\hat{S}\right)}{\exp\left((k+1)\hat{\varphi}(z_0) - 2\hat{S}\right)} = \exp\left(-\hat{\varphi}(z_0)\right).$$

Logo, o raio de convergência de Φ é igual a $\exp(-\hat{\varphi}(z_0))$, então

$$\lim_{s\to\exp(-\hat{\varphi})^-} \Phi(s) = \lim_{s\to\exp(-\hat{\varphi})^-} \sum_{k=1}^{\infty} \exp(k\hat{\varphi}(z_0) - 2\hat{S})s^k = +\infty$$

e, portanto, existe $s_0 \in (0, \exp(-\hat{\varphi}(z_0)))$ tal que $\Phi(s_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(k\hat{\varphi}(z_0) - 2\hat{S})s_0^k \geq 1$. Concluímos então, que o raio de convergência R do Ξ é menor ou igual a s_0. Assim, tem-se $\exp(-P(\hat{f}|_{\hat{K}}, \hat{\varphi})) \leq R \leq s_0 < \exp(-\hat{\varphi}(z_0))$ e, portanto $P(\hat{f}|_{\hat{K}}, \hat{\varphi}) > \hat{\varphi}$, como queríamos.

Caso 2. Para $t > 0$ e z_1 não é um ponto crítico de $\hat{f}$, então o potencial $\ln \mid \hat{f} \mid$ é limitado e Hölder contínua, então este caso segue do Caso 1 aplicado o Hölder contínuo $\hat{\varphi} - t\ln \mid \hat{f} \mid$, ao invés de $\hat{\varphi}$. Assim, suponhamos que, z_1 é um ponto crítico de $\hat{f}$. Denotamos por $d \geq 2$ o grau local de $\hat{f}$ em z_1. Sejam p_1 um ponto fixo de $\hat{f}$ em U_1 e para cada número inteiro $k \geq 2$, p_k um ponto fixo de $\hat{f^k}$, contido em $K(\underbrace{0...0}_{k-1}1)$. Por definição de $\hat{S}$, para cada $k \geq 1$, tem-se

$$\hat{S}(p_k) \geq k\hat{\varphi}(z_0) - 2\hat{S}.$$

Em particular, temos que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \inf S_k(\hat{\varphi})(p_k) \geq \hat{\varphi}(z_0)$. Por outro lado, um cálculo direto mostra $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln \left| \left(\hat{f^k}\right)' (p_k) \right| = \int \ln|(f^k)'|d\mu = \frac{1}{d} \ln \mid \hat{f}'(z_0) \mid$. Donde resulta que, para um k suficientemente grande

$$\begin{aligned} P(\hat{f^k}|_K, \hat{\varphi} - t\ln \mid \hat{f^k} \mid) &\geq \tfrac{1}{k}\hat{S}_k(p_k) - t\frac{1}{k}\ln|(f)'(p_k) \\ &> \hat{\varphi}(z_0) - t\ln|\hat{f}'(z_0)|. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração.

$\square$

3.2 Sistema de Funções Iteradas

Nesta seção, apresentamos a prova do Lema (3.18) assumindo a existência de um "sistema de funções iteradas"adequado, gerado por mapa racional. Enunciamos esse fato como Proposição (3.15).Assim, depois enunciar a Proposição (3.15). A prova Lemma (3.18) é fornecida, após alguns preparativos e considerações.

3.2.1 Espaço simbólico

Definição 3.7. ***(Espaço simbólico)***

Seja $\sum := \{1, 2, ...\}^{\mathbb{N}} := \{1, 2, ...\} \times \{1, 2, ...\} \times \cdots$, o espaço de todas as palavras (ou símbolos) infinitas no alfabeto $\mathbb{N}$. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\sum_n := \{1, 2, ...\}^n = \{a_1, a_2, \ldots a_n; a_i \in \mathbb{N}\} \text{ e } \sum^* := \bigcup_{n \geq 1} \sum_n.$$

Observação 3.8. Uma palavra infinita em $\sum := \{1, 2, ...\}^{\mathbb{N}}$ é uma sequência infinita.

Dado um número inteiro $n \geq 1$ e uma sequência $\ell_1 \cdots \ell_n$ em $\sum_n$. Dizemos que o comprimento de $\ell_1 \cdots \ell_n$ é n, e é denotado por $\mid \ell_1 \cdots \ell_n \mid$.

Definição 3.9. ***(Sistema de Funções Iteradas (SFI))*** . Uma sequência infinita $(\phi_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ de mapas holomorfos de termos distintos dois a dois é dito um Sistema de Funções Iteradas ***(SFI)*** se, existem $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ e $\rho > 0$, tal que para cada $\ell \geq 1$ o mapa ϕ_ℓ é definido em $B(z_0, \rho)$ com imagens $B(z_0, \frac{\rho}{2})$. Assim, para cada inteiro $n \geq 1$ e cada palavra de comprimento n,

$$\ell_1 \cdot \ell_2 \cdot ... \cdot \ell_n \in \sum_n.$$

Vamos definir, o mapa $\phi_{\ell_1 \cdot ... \cdot \ell_n} := \phi_{\ell_1} \circ ... \circ \phi_{\ell_n}$.

Definição 3.10. ***((SFI) Livre)*** . Dizemos que um (***SFI***) é livre se, para cada par de palavras distintas finitas $\underline{\ell}$, $\underline{\ell'} \in \sum^*$ são levados em mapas respectivamente $\phi_{\underline{\ell}}$ e $\phi_{\underline{\ell'}}$ são distintos.

Definição 3.11. *((SFI) Gerado)*. Dado um mapa racional f de grau $n \geq 2$. Um ***(SFI)*** é dito gerado por f, se existe uma sequência de números inteiros positivos $(m_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ tal que para ℓ o mapa $f^{m\ell} \circ \phi = Id$ em $B(z_0, \rho)$. Neste caso, dizemos que ϕ_ℓ é o ramo inverso de f^{ml} definido em $B(z_0, \rho)$ e z_0 para $\phi_\ell(z_0)$.

Definição 3.12. *(**Hiperbólica**)* Dizemos $(m_\ell)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequencial temporal de f se, para cada $n \geq 1$ e cada palavra(sucessão) finita $\ell_1 \cdot ... \cdot \ell_n \in \sum_n$, pondo

$$m_{\ell_1 \cdot ... \cdot \ell_n} := m_{\ell_1} + ... + m_{\ell_n}.$$

Além disso, dizemos que (ϕ_ℓ) é hiperbólica em relação à f, se existem uma constante $C > 0$ e $\lambda > 1$ tal que para todo $z \in B(z_0, \rho)$, $\ell \in \sum^*$ e $j \in 1, ..., m_{\underline{\ell'}} \in \{1, ..., m_{\underline{\ell}}\}$, tem-se

$$| (f^j)'(f^{m_{\underline{\ell}-j}}(\phi_\ell(z))) | \geq C\lambda^j.$$

Definição 3.13. Dado um ponto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ e um inteiro $n \geq 1$. Dizemos que uma pré-imagem é não-ramificada de z por f^n, quando um ponto $y \in f^{-n}(z)$ e $(f^n)'(y) \neq 0$.

Definição 3.14. Dizemos que z é excepcional, quando tiver no máximo um número finito de pré-imagens não-ramificadas. Um ponto excepcional pode ter no máximo 4 pré-imagens não-ramificadas.

Proposição 3.15. *Sejam f um mapa racional de grau $n \geq 2$, $\rho_0 > 0$, onde é dado pelo Teorema da Distorção de Koebe(A.15), $\varphi : J(f) \to \mathbb{R}$ um potencial contínuo Hölder e definindo $\psi := \varphi - t \ln | f' |$ para $t \geq 0$. Seja μ uma medida de probabilidade ergódica que não cobre um ponto excepcional e cujo o expoente de Lyapunov é $\chi_\mu(f) > 0$. Então, existem $C > 0$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, $\rho \in (0, \rho_0)$ e um sistema **SFI** livre $(\phi_l)_{l=1}^{\infty}$ gerado por f, que é definido em $B(z_0, \rho)$, é hiperbólico em relação a f e tal que, se denotarmos a $(m_l)_{\ell=1}^{\infty}$ a sequência temporal, então para todo inteiro $\ell \geq 1$, tem-se*

$$S_{m_\ell}(\psi)(\phi_\ell(z_0)) \quad \geq \quad m_\ell \int \psi d\mu - C. \tag{3.6}$$

Lema 3.16. (Distorção Limitada de um *SFI* Hiperbólico) . *Sejam f um mapa racional de grau $n \geq 2$, $\rho_0 > 0$ dado por Teorema da Distorção de Koebe (A.15), $\varphi : J(f) \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder contínuo e defina*

$$\psi = \varphi - t\ ln \mid f' \mid t \geq 0.$$

*Além disso, se $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, $\rho \in (0, \rho_0)$, sejam $(\phi_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ um **(SFI)** gerado por f definido em $B(z_0, \rho)$ e $(m_\ell)_{\ell}^{\infty}$ a sequência temporal. Se $(\phi_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ é hiperbólico em relação à f, então existe $C_0 > 0$ tal que para cada $\underline{\ell} \in \sum^*$ e $\xi, \xi' \in B(z_0, \frac{\rho}{2})$*

$$\mid S_{m_{\underline{\ell}}}(\psi)(\phi_{\underline{\ell}}(\xi)) - S_{m_{\underline{\ell}}}(\psi)(\phi_{\underline{\ell}}(\xi')) \mid \ \leq \ C_0. \tag{3.7}$$

3.2.2 Conjuntos de Expansão uniforme e Pressão Topológica

Sejam f um mapa racional de grau $n \geq 2$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, $\rho > 0$ e se $(\phi)_{\ell=1}^{\infty}$ um ***(SFI)*** gerado por f definido em $B(z_0, \rho)$ com a sequência $(m_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ temporal . Então, para cada $N \geq 1$, definimos $\widetilde{\sum_N} := \{\underline{\ell} \in \sum^* : m_{\underline{\ell}} = N\}$ e

$$U_N = \bigcup_{\underline{\ell} \in \widetilde{\sum_N}} \phi_{\underline{\ell}}(B(z_0), \rho). \tag{3.8}$$

Além disso, defini-se $F := f^N : U_N \to B(z_0, \rho)$, de modo que para cada $\underline{\ell} \in \widetilde{\sum_N}$ o mapa $F \circ \phi_{\underline{\ell}} = Id$ é a identidade em $B(z_0, \rho)$. Observe que o conjunto

$$\widetilde{K_N} := \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{\underline{\ell^1}, \ldots, \underline{\ell^n} \in \widetilde{\sum_n}} \phi_{\underline{\ell^1}} \circ \ldots \circ \phi_{\underline{\ell^j}}(B(z_0, \rho))$$

é um conjunto Cantor contido em $J(f)$ e $F|_{\widetilde{K_N}}$ é uniformemente expansora. Quando $(\phi_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ é livre, segue que, para cada par de palavras distintas $\underline{\ell}$ e $\underline{\ell'}$ em $\widetilde{\sum_N}$ os mapas $\phi_{\underline{\ell}}$ e $\phi_{\underline{\ell'}}$ são ramos inversos distintos de F definida em $B(z_0, \rho)$.

Em particular, os conjuntos $\phi_{\underline{\ell}}(B(z_0, \rho))$ e $\phi_{\underline{\ell'}}(B(z_0), \rho)$ são disjuntos. Segue que, para cada potencial contínuo $\varphi : \widetilde{K_N} \to \mathbb{R}$ a pressão topológica de $F|_{\widetilde{K_N}}$ em relação ao $S_N(\varphi)$, para cada $\zeta \in B(z_{0,\rho})$ é dada por

$$P(F, S_N(\varphi)) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \ln \sum_{\underline{\ell^1}, \ldots, \underline{\ell^n} \in \widetilde{\sum_N}} \exp(S_{nN}(\varphi)(\phi_{\underline{\ell^1}} \circ \ldots \circ \phi_{\underline{\ell^n}}(\zeta))).$$

Lema 3.17. *Sejam f um mapa racional de grau $n \geq 2$, $\varphi : J(f) \to \mathbb{R}$ um potencial Hölder contínuo e $t \geq 0$. Além disso, se $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, $\rho > 0$ e $(\phi_\ell)_\ell^\infty$ é um (**SFI**) livre gerado por f definido em $B(z_0, \rho)$, que é hiperbólico em relação à f definido em $B(z_0, \frac{\rho}{2})$ e para cada inteiro $N \geq 1$ seja $\widetilde{\sum_N}$ e $\widetilde{K_N}$ como dada acima e definirmos*

$$\widetilde{\Lambda_n} := \sum_{\underline{\ell} \in \widetilde{\sum_N}} \exp\left(S_N(\varphi)\left(\phi_{\underline{\ell}}(\zeta)\right)\right) \left|\left(f^N\right)'\left(\phi_{\underline{\ell}}(\zeta)\right)\right|^{-t}.$$

$$\textit{Então, tem-se } P(f, \varphi - t\ln \mid f' \mid) \geq \lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N} \ln \widetilde{\Lambda_N}.$$

Demonstração. Considere $\psi = \varphi - t \ln \mid f' \mid$. Seja C_0 a constante dada pelo Lema (3.16), então para cada número inteiro $N \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
P(f, \psi) &= \tfrac{1}{N} P(f^N, S_N(\psi)) \geq \tfrac{1}{N} P\left(f^N \mid_{\widetilde{K_N}}, S_N(\psi)\right) \\
&= \tfrac{1}{N} \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{N} \ln \sum_{\underline{\ell^1}, \ldots, \underline{\ell^n} \in \widetilde{\sum_N}} \exp[S_N(\psi)\left(\phi_{\underline{\ell^1}} \circ \ldots \circ \phi_{\underline{\ell^n}}(\zeta)\right) \\
&+ S_N(\psi)\left(\phi_{\underline{\ell^2}} \circ \ldots \circ \phi_{\underline{\ell^n}}(\zeta)\right) + \ldots + S_N(\psi)(\phi_{\underline{\ell^n}}(\zeta))] \\
&\geq \tfrac{1}{N} \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{N} \ln \sum_{\underline{l} \in \widetilde{\sum_N}} \exp\left[N\left(S_N(\psi)\left(\phi_{\underline{l}}(\zeta)\right) - C_0\right)\right] \\
&= \frac{-C_0}{N} + \frac{1}{N} \ln \widetilde{\Lambda_N}.
\end{aligned}$$

Obtemos a desigualdade desejada quando $N \to \infty$.

□

Lema 3.18. (Lema Chave) *Sejam f um mapa racional de grau $n \geq 2$ e $\mu \in \mathcal{M}_f(J(f))$ ergódica cujo expoente de Lyapunov $\chi_\mu(f) > 0$. Então para todo potencial Hölder contínuo $\varphi : J(f) \to \mathbb{R}$ e para cada $t \geq 0$, temos que :*

$$P(f, \varphi - t\ln \mid f' \mid) > \int \varphi d\mu - t\chi_\mu(f).$$

Demonstração. Seja μ uma medida de probabilidade invariante ergódica em $J(f)$, cujo o expoente Lyapunov é estritamente positivo, e $\varphi : J(f) \to \mathbb{R}$ um potencial contínuo da Hölder definindo $\psi := \varphi - t \ln \mid f' \mid$ para $t \geq 0$. No caso em que μ é suportado em uma órbita periódica de f, a desigualdade desejada é dada pela Proposição (3.6).

Portanto, a partir de agora, vamos supor que a medida μ não é suportada em órbita periódica. Em particular, μ não cobre um ponto excepcional de f e, portanto, satisfaz a

Proposição (3.15).

Sejam $C > 0$, $z_0 \in J(f)$, $\rho > 0$ e desde que $(\phi_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ ser o ***(SFI)*** livre gerado por f definido em $B(z_0, \rho)$, que é hiperbólico em relação à f, dado por Proposição (3.15). Escolha um ponto não periódico $\varsigma \in B(z_0, \frac{\rho}{2})$, para cada número inteiro $n \geq 1$ e $\tilde{\Lambda}$ como no Lema (3.17).

Então pelo Lema (3.17) implica que o raio de convergência R da série de potências na variável é definida por $\Xi(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\Lambda}_n S^n = \sum_{\underline{\ell} \in \sum^*} \left(\exp\left(S_{m_{\underline{\ell}}}(\psi)\left(\phi_{\underline{\ell}}\right)\right)\right)^{S^{m_{\underline{\ell}}}}$ satisfaz

$$R := \left(\lim_{n\to\infty} \sup \widetilde{\Lambda_n}^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} \geq \exp(-P(f,\psi)).$$

Portanto, para provar o Lema (3.18), basta provar que R é estritamente menor do que $\exp\left(-\int \psi d\mu\right)$.

Para provar isso, sejam $C_0 > 0$ dado por Lema (3.16) e a $(m_\ell)_\ell^\infty$ a sequência temporal de $(\phi)_{\ell=1}^{\infty}$. Da Proposição (3.15) e do Lema (3.16), para cada inteiro $\ell \geq 1$, segue que

$$\exp\left(S_{m_\ell}(\psi)(\phi_\ell(\zeta))\right) \geq \exp\left(-(C_0 + C)\right)\exp\left(m_\ell \int \psi d\mu\right).$$

Então, para cada $\underline{\ell} \in \sum^*$, tem-se

$$\exp\left(S_{m_\ell}(\psi)(\phi_\ell(\zeta))\right) \quad \geq \quad exp\left(- \mid \underline{\ell} \mid (C_0 + C)\right)\exp\left(m_{\underline{\ell}} \int \psi d\mu\right). \tag{3.9}$$

Portanto, se definirmos a série de potências Φ na variável s, por

$$\Phi(s) := \sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left(-C_0 - C_0 + m_\ell \int \psi d\mu\right)^{S^{m_\ell}},$$

então por (3.9) cada um dos coeficientes das séries de potência s

$$\Phi(s) + \Phi(s)^2 + \Phi(s)^3 + ... \tag{3.10}$$

é menor ou igual ao coeficiente correspondente da séries Ξ. Mas o raio de convergência de Φ é igual a $\exp\left(-\int \psi d\mu\right)$ e, portanto, $\lim\limits_{s \to \exp(-\int \psi d\mu)^-} \Phi(s) = \infty$. Então, $s_0 \in \left(0, \exp\left(-\int \psi d\mu\right)\right)$ tal que $\Phi(s_0) \geq 1$ e, assim, o raio de convergência R de Ξ é menor ou igual a s_0. Por isso, tem-se

$$\exp\left(-P(f,\psi)\right) \leq R \leq s_0 < \exp\left(-\int \psi d\mu\right) \text{ e}$$

$$P(f,\psi) > \int \psi d\mu,$$

como queríamos.

□

3.2.3 Construindo o SFI

Nesta seção, provaremos a Proposição (3.15) e, portanto, concluímos a prova do Lema Chave e do Teorema Principal. Usaremos o seguinte Lema (3.19).

Lema 3.19. *Sejam f um mapa racional de grau $n \geq 2$ e $(z_n)_n^\infty$ uma sequência em $J(f)$ tal que para cada número inteiro $n \geq 0$ tem-se $f(z_{n+1}) = z_n$. Sejam $\rho > 0$, $M \geq 1$ um número inteiro e $(n_\ell)_{\ell=1}^\infty$ uma sequência estritamente de números inteiros, tal que para cada número inteiro $\ell \geq 1$ tem-se $n_{\ell+1} \geq n_\ell + M$ e as seguintes propriedades. Existe um ponto x_ℓ de $B(z_0, \frac{\rho}{2})$ em $f^{-N}(z_\ell)$ diferente de $z_{n_\ell+M}$ e um ramo inverso ϕ_ℓ de $f^{n_\ell+M}$ definido em $B(z_0,\rho)$ e com imagens em $B(z_0, \frac{\rho}{2})$, de tal modo que $\phi_\ell(z_0) = x_\ell$. Então o SFI $(\phi)_{\ell=1}^\infty$ assim definido é livre.*

Demonstração. Observe primeiro que as hipóteses implicam que, para cada inteiro $n \geq 1$ existe um ramo inverso $\tilde{\phi}_n$ de f^n definido em $B(z_{0,\rho})$ e tal que $\tilde{\phi}_n(z_0) = z_n$.

Sejam $k, k' \geq 1$ um número inteiro, se $\underline{\ell} := \ell_1 ... \ell_k$ e $\underline{\ell'} := \ell'_1 ... \ell'_{k'}$ são palavras diferentes em $\sum^*$. Para provar que os mapas $\phi_{\underline{\ell}}$ e $\phi_{\underline{\ell'}}$ são diferentes, podemos assumir, sem perda de generalidade que $\ell'_{k'} \geq \ell_k + 1$. Definindo $N := n_{\ell_1} + ... + n_{\ell_k} + kM$, tem-se

$$f^{N-n_{\ell_k}-M} \circ \phi_{\underline{l}}(z_0) = \phi_{\ell_k}(k_0) = x_{\ell_k}.$$

Por outro lado, a hipótese de que para cada $\ell \geq 1$ tem-se $n_{\ell+1} - n_\ell \geq M$ implica

$$f^{N-n_{\ell_k}-M} \circ \phi_{\ell'}(z_0) = f_{n_{\ell'_{k'}}-n_{\ell_k}} \circ \phi_{\ell'_{k'}}(z_0) = \tilde{\phi}_{n_{\ell_k}+M(z_0)} = z_{n_{\ell_k}+M}.$$

Como por hipótese, os pontos x_{ℓ_k} e $z_{n_{\ell_k}+M}$ são diferentes, segue-se os pontos $\phi_{\underline{\ell}'}(z_0)$ e $\phi_{\underline{\ell}}(z_0)$, e daí os mapas $\phi_{\underline{\ell}}$ e $\phi_{\ell'}$, são diferentes.

□

Agora, exibimos a prova da Proposição (3.15).

Demonstração. Denotamos por Z o espaço de todas as sequências $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ em $J(f)$ tal que para cada número inteiro $n \geq 0$ tem-se $f(z_{n+1}) = z_n$. Definimos o limite inverso de $f : J(f) \to J(f)$ como o mapa invertível $F : Z \to Z$ que mapeia um ponto $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ em Z para a sequência $(z'_n)_{n=0}^{\infty}$ definido por $z'_0 = f(z_0)$ e para cada número inteiro $n \geq 1$ por $z'_n = z_{n-1}$. Denotamos $\Pi : Z \to J(f)$ a projeção dada por $\Pi : ((z_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = z_0$, e de modo que $f \circ \Pi = \Pi \circ F$.

Seja ν a única medida em Z que é invariante por F e para que $\Pi * \nu = \mu$. Se μ é ergódica, então a medida ν também é ergódica para F e F^{-1}. Assim, por ([22], Teorema 10.2.3), existe um subconjunto de Z de medida completa em relação a ν, tal que para cada ponto $\underline{z} = (z_n)_{n=0}^{\infty}$ neste conjunto existe $r(z) > 0$ tal que para cada $n \geq 1$ existe um ramo inverso $\tilde{\phi}$ de f^n definida em $B(z_0, r(\underline{z})) = B(\Pi(\underline{z}), r(\underline{z}))$, tal que $\tilde{\phi}_n(z_0) = z_n = \Pi(F^{-n}(\underline{z}))$. Fixe $\underline{z} = (z_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que, além disso, seja genérico para ν e F^{-1} no sentido do Teorema Ergódico de Birkhoff, para que tenhamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{z_j} = \mu$$

na topologia fraca*.Além disso, assumimos que ela satisfaz a conclusão do Teorema Ergódico de Birkhoff para a função $\ln \mid f' \mid \circ \Pi$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \mid f' \mid \circ \Pi(F^{-j}(\underline{z})) = \chi_\mu(f); \tag{3.11}$$

e essa

$$\lim_{m\to\infty} \sup \sum_{j=0}^{m-1} \left(\psi \circ \Pi(F^{-j}((z_n)_{n=0}^{\infty})) - \int \psi d\mu \geq 0 \right),$$

veja ([21]), Lema 8.3). Reduzindo $r(\underline{z})$ se necessário, assumimos que $r(\underline{z}) < \rho_0$. Então, pelo Teorema da Distorção de Koebe, existem constantes $C_0 > 0$ e $\lambda_0 > 1$ tal que para cada $\zeta \in B(z_0, \frac{r(\underline{z})}{2})$ e todo número inteiro $n \geq 1$ tem-se

$$| (f^n)'(\tilde{\phi}_n(\zeta)) | \geq C_0 \lambda_0^n \tag{3.12}$$

Em particular, o diâmetro de $\tilde{\phi}_n(B(z_0, \frac{r(\underline{z})}{2}))$ converge para 0 quando $n \to \infty$. Por outro lado, há uma sequência estritamente crescente de números inteiros positivos $(n_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ tal que para todos ℓ tem-se

$$S_{n_\ell}(\psi)(z_{n_\ell}) \geq n_\ell \int \psi d\mu - 1$$

e tal que a sequência $((z_{n_\ell+j})_{\ell=1}^{\infty})$ converge em Z algum ponto $(y_n)_{n=0}^{\infty}$. Agora, a prova é dividida em dois casos, de acordo com o ponto limite $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma órbita periódica de F pontos excepcionais de f ou não.

Caso 1. $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ não é órbita periódica de F de pontos excepcionais de f. Começamos a definir um número inteiro $N \geq 0$ do seguinte modo. Se y_0 é um ponto não excepcional, tomamos $N = 0$. Se y_0 é um ponto excepcional, então nossa hipótese implica que $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ não é uma órbita periódica; então existe um número inteiro $N \geq 1$ tal que y_N não é excepcional. Em todos os casos y_N é um ponto não excepcional. Então, existe um número inteiro $M' \geq 1$ e uma pré-imagem não ramificada w_0' de y_N por $f^{M'}$ que não está na órbita direta do ponto crítico de f. Pela exatidão topológica de f em $J(f)$ existe um inteiro $M \geq M' + 1$ de modo que existem pontos diferentes w_0 e w_1 de $B(z_0, \frac{r(\underline{z})}{4})$ em $f^{-(M-M')}(w_0')$. Daí resulta que

$$f^M(w_0) = f^M(w_1) = y_N$$

e essa f^M é localmente injetiva em ambos, $z = w_0$ e $z = w_1$. Então existe $\hat{\rho} > 0$ e um ramo inverso Ψ_0 (respectivamente Ψ_1) de f^M definido em $B(y_N, \hat{\rho})$, tomando imagens em $B(z_0, \frac{r(\underline{z})}{4})$ e tal que $\Psi_0(y_N) = w_0$ (respectivamente $\Psi_1(y_N) = w_1$). Substituindo $(n_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ por uma subsequência, se necessário, assumimos que para todo número inteiro $\ell \geq 1$ tem-se

$$\left(\sup_{B(y_N,\frac{\hat{\rho}}{2})} \mid \Psi_0' \mid\right)^{-1} C_0 \lambda_0^{n_\ell+N} \geq \lambda_0^{\frac{(n_\ell+N+M)}{2}}, \tag{3.13}$$

$n_{\ell+1} \geq n_\ell + M$ e

$$\tilde{\phi}_{n_\ell+N}(B(z_0,\tfrac{r(\underline{z})}{2})) \subset B(y_N,\tfrac{\hat{\rho}}{2});$$

em particular ambas as composições, $\Psi_0 \circ \tilde{\phi}_{n_\ell+N}$ e $\Psi_1 \circ \tilde{\phi}_{n_{\ell+N}}$ são definidos em $B(z_0, \frac{r(\underline{z})}{2})$ e tomando imagens em $B(z_0, \frac{r(\underline{z})}{4})$. Por construção, para cada inteiro $\ell \geq 1$ os pontos $\Psi_0 \circ \tilde{\phi}_{n_\ell+N}(z_0)$ e $\Psi_1 \circ \tilde{\phi}_{n_{\ell+N}}(z_0)$ são diferentes.

Substituindo $(n_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ por uma subsequência e troca w_0 e w_1 se necessário, podemos assumir que para cada inteiro ℓ o ponto

$$x_\ell := \Psi_0 \circ \tilde{\phi}_{n_\ell+N}(z_0) = \Psi_0(z_{n_\ell+N}) \in f^{-M}(z_{n_\ell+N})$$

é diferente de $z_{n_\ell+N+M}$ e defina

$$\phi_\ell := \Psi_0 \circ \tilde{\phi}_{n_\ell+N}|_{B(z_0,\rho)}.$$

Observe que $(\phi_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ é um **SFI** definido em $B(z_0, r(\underline{z}))$ que é gerado por f e cuja sequência temporal é

$$(m_\ell)_{\ell=1}^{\infty} := (n_\ell)_{\ell=1}^{\infty}.$$

Lema (3.19) com $\rho = \frac{r(\underline{z})}{2}$ e com $(n_\ell)_\ell^{\infty}$ substituído por $(n_\ell + N)_{\ell=1}^{\infty}$, implica que o ***SFI*** $(\phi)_{\ell=1}^{\infty}$ é livre. Para provar isso $(\phi)_{\ell=1}^{\infty}$ é hiperbólico em relação a f, note que (3.13) implica que para cada número inteiro $\ell \geq 1$ e cada $\zeta \in B(z_{0,\rho})$

$$\mid (f^{m\ell})'(\phi_\ell(\zeta)) \mid \geq \lambda_0^{\frac{m\ell}{2}}.$$

Juntamente com (3.12), o que implica **SFI** $(\phi_\ell)_{\ell=1}^{+\infty}$ é hiperbólico em relação a f; omitimos os detalhes padrão. Resta provar, definindo

$$C_1 := -\inf_{J(f)} \psi = -\inf_{J(f)} \varphi + t \sup_{J(f)} \ln \mid f' \mid < +\infty,$$

então

$$\begin{aligned} S_{m_\ell}(\psi)(\phi_\ell(z_0)) &= S_{N+M}(\psi)(\phi_\ell(z_0)) + S_{n_\ell}(\psi)(\tilde{\phi}_{n_\ell}(z_0)) \\ &\geq -(N+M)C_1 + n_\ell \psi d\mu - 1. \\ &= m_\ell \int \psi d\mu - 1 - (N+M)\left(C_1 + \int \psi d\mu\right). \end{aligned}$$

Isso prova (3.6) com $C = 1 + (N+M)\left(C_1 + \int \psi d\mu\right)$ e completa a prova da proposição nesse caso.

Caso 2. $(y_n)_{n=0}^{+\infty}$ é uma órbita periódica de F de pontos excepcionais de f. Desde o ponto $\underline{z}$ é genérico para ν e F^{-1} e desde que por hipótese μ não é suportado em uma órbita periódica excepcional, segue-se que $\underline{z}$ não é uma órbita periódica de F de pontos excepcionais de f; em particular, é diferente de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.Juntamente com o fato de que para cada número inteiro $n \geq 1$ existe um ramo inverso de f^n definido em $B(z_0, r(\underline{z}))$ e mapeando z_0 para z_n, a saber por $\tilde{\phi}$, isso implica que $B(z_0, r(\underline{z}))$ não contém nenhum ponto excepcional. Em particular, $\tilde{\phi}(B(z_0, r(\underline{z})))$ não contém y_0.

Pela exatidão topológica de f em $J(f)$ existe um número inteiro $M \geq 1$ de tal forma que exista um ponto w_0 de $B(z_0, \frac{r(\underline{z})}{8})$ em $f^{-M}(y_0)$. Desde que y_0 é por hipótese um ponto excepcional, $z = w_0$ é ponto crítico de f^M. Seja $\hat{\rho} > 0$ escolhemos suficientemente pequeno para que o componente de conexa W de $f^{-M}(B(y_0, \hat{\rho}))$ contendo w_0 está contido em $B(z_0, \frac{r(\underline{z})}{8})$ e tal que o único ponto crítico de f^M em W é $z = w_0$. Substituindo $(n_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ por uma subsequência, se necessário, assumimos que para todo número inteiro $\ell \geq 1$ tem-se $n_{\ell+1} \geq n_\ell + M$ e

$$\tilde{\phi}_{n_\ell}(B(z_0, \tfrac{r(\underline{z})}{2})) \subset B(y_0, \hat{\rho}).$$

Desde pelo acima $z_{n_\ell} \neq y_0$ e $f^M : W \to B(y_0, \hat{\rho})$ é de grau $n \geq 2$, segue-se que existem pelo menos dois pontos de W em

$$f^{-M}(z_{n_\ell}) = f^{-M}(\tilde{\phi}_{n_\ell}(z_0));$$

Seja x_ℓ um desses pontos diferentes de $z_{n_\ell+M}$. Por outro lado, o fato de que

$\tilde{\phi}_{n_\ell}(B(z_0, \frac{r(z)}{2}))$ está contido em $B(y_0, \hat{\rho})$ e contém y_0, que existe um ramo inverso de $f^{n_\ell+M}$ definida em $B(z_0, \frac{r(z)}{2})$, obtendo imagens em $B(z_0, \frac{r(z)}{8})$ e que mapeia z_0 para x_ℓ; Denotamos por ϕ_ℓ a restrição desse ramo inverso a $B(z_0, \frac{r(z)}{4})$, então pela construção ϕ_ℓ tem uma extensão univalente para $B(z_0, \frac{r(z)}{4})$ que é gerado por f e tem $(m_\ell)_{\ell=1}^{\infty} := (n_\ell + M)_{\ell=1}^{\infty}$ como sequência temporal.

Lema (3.19) com $\rho = \frac{r(z)}{4}$, o que implica ***(SFI)*** é livre . A prova da Proposição (3.15) é semelhante ao Caso 1. Resta provar que, após a substituição $(n_\ell)_{\ell\geq 1}^{\infty}$ por uma subsequência, se necessário, o **SFI** é hiperbólico em relação a f.

Para fazer isso, $D \geq 2$ é o grau local de f^M em W_0, seja $p \geq 1$ seja o período mínimo do ponto excepcional y_0 e defina $L := \sup_{\overline{\mathbb{C}}} \mid (f^p)' \mid$. Note que podemos reduzir $\hat{\rho}$ substituindo $(n_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$ por subsequência; fazendo isso, se necessário, assumimos que, para cada $j \in \{1, \cdots, p-1\}$ o conjunto $f^j(B(y_0, \hat{\rho}))$ é disjunto de $B(y_0, \hat{\rho})$, isso para cada $n \in \{0, \cdots, p-1\}$ o ponto z_n não está contido em $B(y_0, \hat{\rho})$,que

$$L^{2\mu(B(y_0,\hat{\rho}))(D-1)/D} < \lambda_0^{\frac{1}{3}} \tag{3.14}$$

e que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que para cada ponto $z \in B(y_0, \hat{\rho})$ e cada ponto x de W em f^{-M} tem-se $\mid (f^M)'(x) \mid \geq C_2 \operatorname{dist}(z, y_0)^{(D-1)/D}$.

Dado um número inteiro $\ell \geq 1$, seja T_ℓ o maior número inteiro $T \geq 1$ tal que para todos $j \in \{0, \cdots, T-1\}$ tem-se $f^{jp}(z_{n_\ell}) \in B(y_0, \hat{\rho})$; por nossa escolha de $\hat{\rho}$

segue que $pT_\ell \leq n_\ell$. Desde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{z_n} = \mu,$$

para todo número inteiro suficientemente grande $\ell \geq 1$ tem-se,

$$T_\ell \leq 2\mu(B(z_0, \rho))n_\ell. \tag{3.15}$$

Substituindo $(n_\ell)_\ell^\infty$ por uma subsequência, se necessário, assumimos que isso vale para cada inteiro $\ell \geq 1$. Então, pela definição de L para todo inteiro $\ell \geq 1$ tem-se

$$\text{dist } (z_{n_\ell}, y_0) \geq L^{-T_\ell}\hat{\rho}.$$

Pondo $C_3 := C_2\hat{\rho}^{(D-1)/D}$, resulta de (3.15) e então por (3.14), vemos que

$$\begin{aligned} \mid (f^M) &\geq C_2 dist(Z_{n_\ell}, y_0) \\ &\geq C_3 L^{-T_\ell(D-1)/D} \\ &\geq C_3 \left(L^{2\mu(B(y_0,\hat{\rho}))(D-1)/D}\right)^{-n_\ell} \\ &\geq C_3 \lambda_0^{\frac{-n_\ell}{3}}. \end{aligned}$$

Temos, portanto, por definição de C_0 e λ_0,

$$\mid (f^{m_\ell})'(\phi_\ell(z_0)) \mid = \mid (f^{n_\ell})'(z_{n_\ell}) \mid \cdot \mid (f^M)'(x_\ell) \mid \geq C_0 C_3 \lambda_0^{2\frac{n_\ell}{3}}.$$

Desde ϕ_ℓ tenha uma extensão univalente para $B(z_0, \dfrac{r(z)}{2})$, pelo Teorema de Distorção de Koebe existe uma constante $C_4 > 0$ independente de ℓ de modo que para cada $\zeta \in B(z_0, \frac{r(z)}{4})$ tem-se

$$\mid (f^{m\ell})'(\phi_\ell(\zeta)) \geq C_4 \lambda_0^{2\frac{n_\ell}{3}}.$$

Então, substituindo $(n)_\ell^\infty$ por uma subsequência, se necessário, temos para cada inteiro $\ell \geq 1$ e para todo $\zeta \in B(z_0, \frac{r(z)}{4})$, vemos que

$$\mid (f^{m\ell})'(\phi_\ell)(\zeta)) \mid \geq \lambda_0^{\frac{n_\ell}{3}}.$$

junto com (3.12), que implica que o *SFI* $(\phi)_\ell^\infty$ é hiperbólico em relação à f e para todo ζ e termina a prova da proposição. □

3.3 Teorema Principal

Teorema 3.20. (Teorema Principal) *.Sejam um mapa racional f de grau $n \geq 2$ e um potencial Hölder contínuo $\varphi : J(f) \to \mathbb{R}$, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *O potencial φ é hiperbólico;*

2. *O expoente de Lyapunov de cada estado de equilíbrio do potencial φ é estritamente positivo.*

   Além disso, se estas condições são satisfeitas, então:

3. *Existe um único estado de equilíbrio estado μ de f para o potencial φ. Além disso, a entropia métrica $h_\mu(f) > 0$ e μ exponencial misturadora.*

Demonstração. $(1) \Rightarrow (2)$: Para isto, como φ é hiperbólico e $\mu \in \varepsilon(f, \varphi)$. Segue da Propriedade (3) da Proposição (3.3) que $h_\mu(f) > 0$, e da Desigualdade Ruelle (2.35), temos que:

$$\max\{2\chi_\mu(f), 0\} \geq h_\mu(f) > 0.$$

Portanto, $\chi_\mu(f) > 0$ como queríamos provar.

$(2) \Rightarrow (1)$: Suponhamos, por contradição, que existe um potencial não hiperbólico φ, de modo que os expoentes Lyapunov de seus estados de equilíbrios são estritamente positivos. Então, da Proposição (3.3) e propriedade (3), existe $\mu_0 \in \varepsilon(f, \varphi)$ tal que $h_{\mu_0}(f) = 0$, então $P(f, \varphi) = \displaystyle\int \varphi d\mu_0$. Do contrário, se $h_{\mu_0}(f) > 0$, resultaria no potencial φ hiperbólico, porque $(3) \Leftrightarrow (1)$.

Da hipótese, para cada $\mu_0 \in \varepsilon(f, \varphi)$ e $\chi_{\mu_0}(f) > 0$. Assim, como μ_0 é uma probabilidade invariante e está em $\varepsilon(f, \varphi)$, se necessário, substitua μ_0 por suas componentes ergódicas. Então, em virtude de (2.32) e (2.33), podemos assumir μ_0 ergódica.

Agora, vamos aplicar o Lema (3.18) para $t = 0$ e $\mu = \mu_0$, e daí obtemos que:

$$P(f, \varphi) > \int \varphi d\mu_0.$$

O que contradiz a igualdade $P(f, \varphi) = \displaystyle\int \varphi d\mu_0$. Portanto φ deve ser hiperbólico.

Para finalizar a demonstração, iremos provar:

$(1) \Rightarrow (3)$: Por hipótese, φ é um potencial hiperbólico, então existe $n \geq 1$ tal que o potencial Hölder contínuo $\psi := \dfrac{1}{n} S_n(\varphi)$ satisfaz:

$$\sup_{J(f)} \psi < P(f, \varphi).$$

Além disso, como ψ φ são cohomólogo, e conforme a Proposição (2.41), tem-se $P(f,\varphi) = P(f,\psi)$, e se $\mu \in \varepsilon(f,\varphi)$, da Proposição (2.42), segue que $\varepsilon(f,\varphi) = \varepsilon(f,\psi)$.

Isto conclui que $\sup_{J(f)} \psi < P(f,\psi)$. Da propriedade (3), Proposição (3.3), tem-se $h_\mu(f) > 0$.

Como f é um endomorfismo analítico da esfera de Riemann de grau $n \geq 2$ e ψ um potencial Hölder contínuo satisfazendo $\sup_{J(f)} \psi < P(f,\psi)$. Portanto, existe um único estado de equilíbrio estado μ de f para o potencial φ. Usamos como referência [11].

Agora, vamos aplicar o Teorema (A.4), então μ exponencial misturadora. Isto conclui a prova de $(1) \Rightarrow (3)$:

$(3) \Rightarrow (1)$ por hipótese, μ é estado de equilíbrio de para o potencial φ e a entropia métrica $h_\mu(f) > 0$, então segue da Proposição (3.3) e do item (3) que o potencial φ é hiperbólico, pois (3) $\Leftrightarrow$ (1)

$\square$

Consideramos um mapa racional f de tal forma que o expoente Lyapunov de toda medida de probabilidade invariante no conjunto Julia é estritamente positivo, a parte 2 *do Teorema Principal (3.20) é automaticamente satisfeita para cada potencial contínuo de Hölder φ. Portanto, o corolário a seguir é uma consequência imediata do Teorema Principal (3.20).*

Corolário 3.21. *Seja f um mapa racional de grau $n \geq 2$ tal que o $\chi_\mu(f) > 0$, onde $\mu \in \mathcal{M}_f(J(f))$. Então, para todo potencial Hölder Contínuo $\varphi : J(f) \to \mathbb{R}$ as propriedades* 1 , 2 *e* 3 *do Teorema Principal (3.20) são válidas.*

Assim, obtemos o seguinte corolário como uma consequência direta do anterior.

Corolário 3.22. *Seja f um mapa racional de grau $n \geq 2$ satisfazendo a condição Topological Collet-Eckman. Então, para todo potencial Hölder contínuo $\varphi : J(f) \to \mathbb{R}$ as propriedades* 1, 2 *e* 3 *do Teorema Principal 3.20 são verificadas.*

A existência e unicidade do estado de equilíbrio, foi mostrada [[7], Teorema A].

Obtemos o resultado a seguir como consequência direta do Lema Chave (3.18). Primeiramente, definimos

$\chi_{\inf}(f) := \inf\{\chi_\mu(f) : \mu$ *medida de probabilidade invariante em* $J(f)\}$*, então para cada* $t \geq 0$*, temos que:*$P(f, -t\ln \mid f' \mid) \geq -t\chi_{\inf}$.

Dizemos que $t_+ := \sup\{t \geq 0 : P(f, -t\ln \mid f' \mid) > -t\chi_{\inf}\}$ *o ponto livre de* f*. Quando o ponto livre* t_+ *é finito, é estritamente positivo e, por definição, para cada* $t \in [t_+, +\infty)$ *temos que* $P(f, -t\ln \mid f' \mid) = -t\chi_{\inf}$*; então a função* $t \mapsto P(f, -t\ln \mid f' \mid)$ *não pode ser real analítica em* $t = t_+$.

Corolário 3.23. *Seja* f *um mapa racional satisfazendo a condição Topológica Collet-Eckmann e* t_+ *é finito. Então as seguintes propriedades são válidas:*

1. Para cada medida $\mu \in \mathcal{M}_f(J(f))$ temos que $\chi_\mu(f) > \chi_{\inf}(f)$.
2. Para cada $t \in (t_+, +\infty)$ não há estado de equilíbrio de f para o potencial $-t\ln \mid f' \mid$.
3. Existe no máximo um estado de equilíbrio de f para o potencial $-t\ln \mid f' \mid$.Se tais medidas existirem, então as medidas de entropia métrica $h_\mu(f) > 0$ e função pressão $t \mapsto P(f, -t\ln|f'|)$ não é diferenciável em $t = t_+$.

Demonstração. Inicialmente, da definição de t_+, tem-se $P(f, -t\ln|f'|) > -t\chi_{\inf}$ para todo $t \geq 0$. Daí, segue que $P(f, -t\ln|f'|) = -t\chi_{\inf}$ para todo $t \in [t_+, +\infty)$, porque da definição $t \leq t_+$. Agora, iremos aplicar o Lema (3.18), para provar este Corolário: assim, para o potencial o $\varphi = 0$ e $t = t_+$, então obtemos $P(f, -t_+\ln|f'|) > -t_+\chi_\mu(f)$.

Por outro lado, dada qualquer $\mu \in \mathcal{M}_f(J(f))$, tem-se $-t_+\chi_{\inf}(f) = P(f, -t_+\ln|f'|) > -t_+\chi_\mu$. Concluímos que $\chi_\mu(f) > \chi_{\inf}(f)$. Isto completa a prova do item (1).

Para provar o item (2): sejam $t \in (t_+, +\infty)$ e $\mu \in \mathcal{M}_f(J(f))$. Então da parte (1), temos que $\chi_\mu(f) > \chi_{\inf}(f)$. Assim, segue que $t - t_+ > 0$ e

$$
\begin{aligned}
h_\mu(f) + \int -t\ln|f'|d\mu &= h_\mu(f) - t\chi_\mu(f) \\
&= h_\mu(f) - t_+\chi_f(f) + t_+\chi_\mu(f) - t\chi_\mu(f) \\
&= h_\mu(f) - t\chi_\mu(f) - (t-t_+)\chi_\mu(f) \\
&= h_\mu(f) - t_+\int \ln\mid f'\mid d\mu - (t-t_+)\chi_\mu(f) \\
&\leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}_f(J(f))}\left(h_\mu(f) + \int -t_+\ln|f'|d\mu\right) - (t-t_+)\chi_\mu(f) \\
&= P(f, -t_+\ln|f'|) - (t-t_+)\chi_\mu(f) \\
&= -t_+\chi_{\inf}(f) - (t-t_+)\chi_\mu(f) \\
&< -t_+\chi_{\inf}(f) - (t-t_+)\chi_{\inf}(f) \\
&= -t\chi_{\inf}(f) \\
&\leq P(f, -t\ln|f'|).
\end{aligned}
$$

Isto conclui que μ não é estado equilíbrio de f para o potencial $-t\ln\mid f'\mid$.

Resta provar o item (3): uma vez que, por definição da condição Topológica Collet-Eckmam, o expoente Lyapunov de cada medida de probabilidade invariante em $J(f)$ é estritamente positivo, e por ([12], Corolário 11) existe no máximo um um estado de equilíbrio para o potencial $-t_+\ln\mid f'\mid$, veja também [14]. Se existir a medida μ, então temos que:

$$
\begin{aligned}
h_\mu(f) &= P(f, -t\ln\mid f'\mid) + t_+\chi_\mu(f) \\
&= t_+\chi_{\inf}(f) - t_+\chi_\mu(f) \\
&= t_+(\chi_\mu(f) - \chi_{\inf}(f)). \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, para cada t temos que:

$$
\begin{aligned}
P(f, t\ln\mid f'\mid) &\geq h_\mu(f) - t\chi_\mu(f) \\
&= P(f, -t_+\ln\mid f'\mid) - (t-t_+)\chi_\mu(f).
\end{aligned}
$$

Como $t \to (t_+)^-$ então temos que :

$$
\frac{P(f, -t\ln\mid f'\mid) - P(f, -t_+\ln\mid f'\mid)}{t-t_+}) \leq -\chi_\mu(f).
$$

Agora, iremos calcular a derivada parcial de $P(f, -t\ln\mid f'\mid)$, em relação a t, no ponto t_+.

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial t}P(f,-t_+\ln\mid f'\mid) = \limsup_{t\to(t_+)^-}\frac{P(f,-t\ln\mid f'\mid)-P(f,-t_+\ln\mid f'\mid)}{t-t_+}) &\leq -\chi_\mu(f)\\
\lim\sup_{t\to(t_+)^-}\frac{-(t-t_+)\chi_\mu(f)}{t-t_+} &\leq -\chi_\mu(f)\\
&< -\chi_{\inf}(f).
\end{aligned}$$

Por outro lado, de acordo com a definição de derivada temos:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial t}P(f,-t\ln\mid f'\mid) &= \lim_{t\to(t_+)^+}\frac{P(f,-t\ln\mid f'\mid)-P(f,-t_+\ln\mid f'\mid)}{t-t_+}\\
&= \lim_{t\to(t_+)^+}\frac{P(f,-t\ln\mid f'\mid)-(h_\mu(f)-t_+\chi_\mu(f))}{t-t_+}\\
&= \lim_{t\to(t_+)^+}\frac{-t\chi_{\inf}(f)-t_+(\chi_\mu(f)-\chi_{\inf}(f))+t_+\chi_\mu(f)}{t-t_+}\\
&= \lim_{t\to(t_+)^+}\frac{-t\chi_{\inf}(f)+t_+\chi_{\inf}(f)-t_+\chi_\mu(f)+t_+\chi_\mu(f)}{t-t_+}\\
&= \lim_{t\to(t_+)^+}\frac{-(t-t_+)\chi_{\inf}(f)}{t-t_+}\\
&= -\chi_{\inf}(f)\\
&> -\chi_\mu(f).
\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{\partial}{\partial t}P(f,-t\ln\mid f'\mid)$ não é contínua em t_+, resulta que a função

$$t\mapsto P(f,-t\ln\mid f'\mid)$$

não é diferenciável em t_+. Isto completa a demonstração do Corolário (3.23).

$\square$

Apêndice

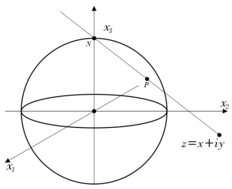
Para este apêndice consultamos as seguintes referências [8], [5] e [26].

A.1 Dinâmica Complexa

A.1.1 Esfera de Riemann

No espaço $\mathbb{R}^3$ com coordenadas (x_1, x_2, x_3) podemos considerar a esfera unitária $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\}.$$



Seja $N(0, 0, 1)$ o polo norte de $\mathbb{S}^2$ e identifique o plano $\mathbb{C}$ com o plano $\mathbb{C}$ com plano $\{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, que intercepta $\mathbb{S}^2$ ao longo do equador $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Assim, sendo cada número complexo $z = x + iy$ está identificado ao ponto $(x_1, x_2, 0)$. Agora, para cada $z \in \mathbb{C}$ considere a reta em $\mathbb{R}^3$ que passa por z e por N. Essa reta intercepta a esfera em exatamente um $P \neq N$ (veja a figura acima). Observe que, se $|z| < 1$ então P está no hemisfério sul, se $|z| = 1$ então $P = z$ e, se o $|z| > 1$ então P está no hemisfério norte. Fazendo $z \to \infty$ temos que o P tende a N e, com isso em mente chamamos N de ponto no infinito, $\{\infty\}$, e identificamos $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ com

$\mathbb{S}^2$. tal como dado, $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ é chamado de esfera de Riemann.

Definição A.1. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto. Dizemos que uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é analítica, se para todo $z_0 \in U$, existe uma série de potências $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n(z_0)w^n$, com o raio de convergência $\rho > 0$, tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^n$ para todo $z \in U$ tal que $|z - z_0| < \rho$.

Definição A.2. ***(Função Univalente)*** Uma função $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$, U sendo um subconjunto aberto do plano complexo é dita univalente quando esta for analítica e injetiva em U.

Definição A.3. Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ dada por $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios não-nulos. Dizemos que f é uma **aplicação racional**.

Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ uma mapa racional de grau $n \geq 2$. Denotamos f^n a n-ésima composta $f \circ f \circ \cdots \circ f$.

Teorema A.4. *Sejam $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ um mapa racional de grau $n \geq 2$, $\phi : J(f) \to \mathbb{R}$ função mensurável limitada e $\varphi : J(f) \to \mathbb{R}$ α-Hölder contínua. Então eixte uma constante $C > 0$ tal que para todo inteiro $n \geq 1$:*

$$\left| \int (\phi \circ f^n) - \int \phi d\mu \int \varphi d\mu \right| \leq C \|\phi\|_\infty \|\varphi\|_{Lip} \rho^n.$$

Este Teorema dado como Corolário 12 [15], onde $\rho < 1$ é dado pelo Teorema 10 deste mesmo artigo.

Definição A.5. Sejam U um conjunto aberto em $\overline{\mathbb{C}}$ e $f_k : U \to \overline{\mathbb{C}}$ uma sequência de funções analíticas. Dizemos que a família f_k é normal em U se toda sequência de funções de f_k possui uma subsequência que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de U.

Definição A.6. Seja $z \in \overline{\mathbb{C}}$:

- z é dito ponto fixo de f se $f(z) = z$.
- z é dito ponto periódico f se exite um inteiro $N \geq 1$ tal que $f^N(z) = z$.
- O menor inteiro N tal que $f^N(z)$ é dito período de z.

Definição A.7. Seja z um ponto periódico N e $(f^N)'(z) = \lambda$. O ponto z é dito :

- super atrator se $\lambda = 0$
- atrator se $0 \leq \lambda < 1$
- repulsor se $|\lambda| > 1$

Teorema A.8. *Seja f_k uma família de funções analíticas num domínio aberto U. Se f_k não é uma família, então para todo $w \in \overline{\mathbb{C}}$, com no máximo uma exceção, temos $f_k(z) = w$ para algum $z \in U$ e algum k.*

Definição A.9. Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Definimos o conjunto de Julia $J(f)$ por

$$J(f) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \text{a família } \{f^n\}_{n\geq 0} \text{ não é normal } \}.$$

Teorema A.10. *O conjunto de Julia $J(f)$ é um conjunto :*

- *$J(f)$ é completamente invariante, isto é, $f^{-1}(J(f)) = J(f) = f(J(f))$. Segue-se que $J(f^N) = J(f)$, para todo $N \geq 0$.*
- *$J(f)$ é um conjunto perfeito.*
- *$J(f)$ é compacto.*
- *$J(f)$ é não vazio.*

Proposição A.11. *Se $z \in J(f)$. Se U é uma vizinhança de z então o conjunto $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup\limits_{N\geq 0} f^N(U)$ contém no máximo 2 pontos. Estes pontos são ditos excepcionais.*

Proposição A.12. *Seja U um aberto de $J(f)$, então existe $N \geq 1$ tal que $f^N(U) = J(f)$.*

A.1.2 Variações da condição de Collet-Eckmann

Para esta subsecção usamos [1].

Definição A.13. ***(CE).*** Dizemos que uma função racional satisfaz a condição de Collet-Eckmann se existem constantes K, $Q > 1$ e $C > 0$ tais que para cada número inteiro positivo n e cada ponto crítico c pertencente ou de acumulação em conjunto Julia, temos $|(F^n)(F^K c| \geq CQ^n$.

Definição A.14. ***(Condição topológica de Collet-Eckmann).***Dizemos que uma função racional satisfaz a condição topológica de Collet-Eckmann (TCE), se existem $M \geq 0$ e $P \geq 1$, $r > 0$tal que para cada $x \in J(f)$, existe uma sequência de números inteiros crescentes $\{n_j\}$ com $n_j \leq P_j$ e

$$\#\{0 \leq i < n_j : 0 \leq < n_j ; \text{Com}_{f^j(x)} f^{-(n_j - i)}(B(f^{n_j}(x), r)) \} \leq M,$$

onde $\mathrm{Com}_z V$ denota para $z \in V$ a componente de V contendo z.

Teorema A.15. (Teorema da Distorção de Koebe) *Para cada mapa racional de grau $n \geq 2$ existem uma constante $\rho_0 > 0$ e $K > 1$, tal que possua a seguinte propriedade. Seja $n \geq 1$ um inteiro, x um ponto em $\overline{\mathbb{C}}$ e $\rho \in (0, \rho_0)$, de modo que f^n mapeia uma vizinhança de x univalentemente sobre $B(f^n(x), \rho)$. Então, para cada par de pontos z e z' na componente conexa de $f^{-n}(B(f^n(x), \frac{\rho}{2}))$ contendo x, temos que :*

$$K^{-1} \leq \frac{\mid (f^n)'(z) \mid}{\mid (f^n)'(z') \mid} \leq K. \tag{A.1}$$

Para deduzir esse resultado do Teorema clássico da Distorção de Koebe, fixe uma órbita periódica O de período $n \geq 3$ e escolha um $\rho_0 > 0$ suficientemente pequeno, para que em cada ponto z_0 em $\overline{\mathbb{C}}$ a $B(z_0, \rho_0)$ contenha no máximo um ponto de O.

Assim, para todo $\rho \in (0, \rho_0)$, para cada inteiro $n \geq 1$ e cada componente conexa de W de $f^{-n}(B(z_0, \rho))$ contém no máximo um ponto de O, então

$$\dim(\overline{\mathbb{C}} \backslash W) = \{\dim(O \backslash \{z\} : z \in O)\} > 0.$$

Após uma mudança de coordenadas que é uma isometria em relação à métrica esférica, assumimos que ∞ é em O, mas não em W. Então W está contido em $\overline{\mathbb{C}}$ e a métrica esférica no componente conexa W' de $f^{-n}(B(z_0, \frac{\rho}{2}))$ contido em W é comparável à métrica euclidiana até um fator multiplicativo que depende apenas

$$\min\{\dim(O \backslash \{z\}) : z \in O\}$$

Da mesma forma, em uma coordenada tal que $B(z_0, \rho) \subset \overline{\mathbb{C}}$, a métrica euclidiana em $B(z_0, \dfrac{\rho}{2})$ é comparável ao esférico até um multiplicativo até um fator que depende apenas ρ_0.Portanto, a afirmação acima é uma conseqüência direta do Teorema Clássico da Distorção de Koebe.

Referências Bibliográficas

[1] dinâmica simbólica e condições de collet-eckmann. *International Mathematics Research Notices*, 2.000.

[2] P. Varandas A. Castro. Equilibrium states for non-uniformly expanding maps: decay of correlations and strong stability,. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 30:225–249, 2013.

[3] José Ferreira Alves. Análise funcional. *Notas da cadeira de Análise do 4o ano da licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências*, 2002.

[4] R Bowen. Equilibrium states and the ergodic theory of anosov diffeomorphisms. *Lecture Notes in Mathematics*, 470, 1975.

[5] Lennart Carleson and Theodore W Gamelin. *Complex dynamics*. Springer Science & Business Media, 2013.

[6] Lennart Carleson, Peter W Jones, and Jean-Christophe Yoccoz. Julia and john. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 25(1):1–30, 1994.

[7] Henri Comman and Juan Rivera-Letelier. Large deviation principles for non-uniformly hyperbolic rational maps. *arXiv preprint arXiv:0812.4761*, 2008.

[8] PR Da Silva. *Regularidade dos Conjuntos de Julia*. PhD thesis, Dissertaçao de Mestrado, UFRGS, 1990.

[9] César R De Oliveira. *Introdução à análise funcional*. Impa, 2001.

[10] Manfred Denker, Feliks Przytycki, and Mariusz Urbański. On the transfer operator for rational functions on the riemann sphere. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 16(2):255–266, 1996.

[11] Manfred Denker and Mariusz Urbanski. Ergodic theory of equilibrium states for rational maps. *Nonlinearity*, 4(1):103, 1991.

[12] Neil Dobbs. Measures with positive lyapunov exponent and conformal measures in rational dynamics. *arXiv preprint arXiv:0804.3753*, 2008.

[13] G. Ferreira and G. Oliveira. Sequential gibbs measures and factor maps. *J Stat Phys*, 172:833–853, 2018.

[14] Vincent Guedj. Propriétés ergodiques des applications rationnelles. *arXiv*, pages math–0611302, 2006.

[15] Nicolai Haydn. Convergence of the transfer operator for rational maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 19(3):657–669, 1999.

[16] Irene Inoquio-Renteria and Juan Rivera-Letelier. A characterization of hyperbolic potentials of rational maps. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 43(1):99–127, 2012.

[17] Carlos Isnard. *Introdução à medida e integração.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[18] K. Oliveira and M. Viana. Thermodynamical formalism for robust classes of potentials and non-uniformly hyperbolic maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 28:501–533, 2008.

[19] Krerley Oliveira and Marcelo Viana. Fundamentos da teoria ergódica. *IMPA, Brazil*, pages 3–12, 2014.

[20] Feliks Przytycki. On the perron-frobenius-ruelle operator for rational maps on the riemann sphere and for hölder continuous functions. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 20(2):95–125, 1990.

[21] Feliks Przytycki and Juan Rivera-Letelier. Nice inducing schemes and the thermodynamics of rational maps. *Communications in mathematical physics*, 301(3):661–707, 2011.

[22] Feliks Przytycki and Mariusz Urbański. *Conformal fractals: ergodic theory methods*, volume 371. Cambridge University Press, 2010.

[23] Vanessa Ramos and Marcelo Viana. Equilibrium states for hyperbolic potentials. *Nonlinearity*, 30(2):825–847, jan 2017.

[24] D Ruelle. A measure associated with axiom-a attractors. *Amer. J. Math*, 98(3):619–654, 1976.

[25] Ja.G. Sinai. Gibbs measures in ergodic theory. *Uspehi Mat. Nauk*, 27(4):21–64, 1972.

[26] Marcio Gomes Soares. *Cálculo em uma variável complexa*. Impa, 2012.

[27] P. Varandas and M. Viana. Existence, uniqueness and stability of equilibrium states for non-uniformly expanding maps. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 27(2):555 – 593, 2010.

[28] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79. Springer Science & Business Media, 2000.