



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PPGMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ROCLILSON ABREU DA SILVA

**Polinômios ortogonais no círculo unitário associados a um par  
de sequências reais**

São Luís - MA

2020

ROCLILSON ABREU DA SILVA

**Polinômios ortogonais no círculo unitário associados a um par  
de sequências reais**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Jairo Santos da Silva

São Luís - MA

2020

ROCLILSON ABREU DA SILVA

**Polinômios ortogonais no círculo unitário associados a um par  
de sequências reais**

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática  
da Universidade Federal do Maranhão como  
requisito parcial para obtenção do título de  
Mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Jairo Santos Silva (Orientador)  
Universidade Federal do Maranhão -UFMA

---

Prof. Dr. Daniel Oliveira Veronese (Avaliador Externo)  
Universidade Federal do Triângulo Mineiro -UFTM

---

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo (Avaliador Interno)  
Universidade Federal do Maranhão -UFMA

*À minha amada vó, Maria Terezi-  
nha Lima de Abreu (in memoriam),  
cujo caráter e bondade continuam  
servindo-me de inspiração dia após  
dia, dedico*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por capacitar-me com vida e saúde, nunca me permitindo desistir dos meus sonhos nas horas mais difíceis e por sempre está por perto conduzindo-me no caminho da justiça e da verdade.

Aos meus irmãos Leonardo, Kleyton, Werderson, Nayla e Yolanda por partilharem comigo as boas memórias do tempo de criação, por serem meus primeiros amigos e pelo respeito e carinho que depositam em mim. A minha mãe Sandra Patrícia por ter me educado com zelo e firmeza, praticamente só, não medindo esforços para me ver bem e feliz. A minha querida avó Maria Terezinha (in memoriam) pelo enorme coração bondoso e altruísta que tanto atrevo-me a copiar, mesmo sabendo ser em vão. Aos meus tios e primos e demais parentes que, direta ou indiretamente, fazem parte da minha história.

Em particular, à minha tia Albertina Dias pela incansável missão de instigarme sempre a ser uma pessoa melhor e capaz, dando-me condições de desenvolver minhas potencialidades intelectuais e sociais, sendo uma conselheira amiga e afetuosa em qualquer circunstância.

À minha namorada e companheira Alice Juliana por compreender os momentos de minha ausência, por sempre cuidar de mim estando perto ou longe e por sempre me apoiar em minha busca por meus sonhos.

Aos meus amigos de longas datas como Victor Hugor, Ednilson Barros, Alan Sousa, Antônio Max (in memoriam), Dona Antônia (in memoriam), Dona Nilzete, Dona Maria do Lázaro, Dona Lenir, Lívia, Selles Gustavo, Leandro Reis, Ederson Dassler, Michael, prof. Nildo Alves, prof. Deley, prof. Dominginhos e prof. Ramon.

Aos amigos de graduação Venício Calássio, João Victor, João de Deus, Ytalo Yandro, Rubens Sampaio, Lício Medeiros e Whyds Rodrigues.

À todos os meus amigos de pós-graduação, em especial, a Claudomiro Aguiar, a Denilson Nobre, a Bruno Pereira, a Jeiferson e a Rafael Soares, pelo dia-a-dia no mestrado.

Aos meus amigos de convívio em São Luís, em particular, a Marcos Lima Dias,

a Antônio Alves e a Jonisberg pela paciência, amizade e ajuda prestadas nesses dois anos de mestrado.

À Universidade Federal do Maranhão e ao Departamento de Matemática por disponibilizarem estrutura material, como por exemplo, salas de aula, bibliotecas e computadores, bem como recursos humanos, para realização deste trabalho. A todos os professores do programa de Pós-Graduação, em especial, para prof. Marcos Antonio, prof. Ivaldo Nunes, prof. Pedro Apoliano, profa. Sandra, profa. Vanessa, prof. Marão e prof. Giovane.

De Forma mais do que especial, ao meu orientador e amigo prof. Dr. Jairo Santos Da Silva pela paciência e dedicação em ensinar-me ricas lições, desde o início deste trabalho, que vão além das aulas de orientações; mais ainda, pela motivação e liberdade de pensamento direcionadas a mim.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, foram importantes para realização desta dissertação.

Em suma, à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual o presente trabalho não seria possível.

*A matemática, vista corretamente,  
possui não apenas verdade, mas  
também suprema beleza*

*(Bertrand Russell)*

## RESUMO

Na teoria dos polinômios ortogonais no círculo unitário, um dos principais resultados é o conhecido *Teorema de Verblunsky*, no qual, para qualquer sequência de números complexos, com módulo menor do que um, sempre é possível relacionar uma medida de probabilidade não trivial no círculo unitário e, conseqüentemente, obter sua associada sequência de polinômios ortogonais (e vice-versa). Com base nesse resultado, e na teoria das sequências encadeadas positivas, mostra-se, nesse trabalho, que é possível obter uma caracterização para esses polinômios ortogonais no círculo unitário em termos, agora, de um par de sequências reais, onde uma delas é uma sequência encadeada positiva.

**Palavras-chave:** Medidas não triviais. Polinômios ortogonais no círculo unitário. Coeficientes de Verblunsky. Sequências encadeadas. Par de sequências reais.

## ABSTRACT

In the theory of orthogonal polynomials on the unit circle, one of the main results is the well-known Verblunsky Theorem, in which, for any sequence of complex numbers, with modulus less than one, it is always possible to relate a nontrivial probability measure on the unit circle and , consequently, obtain its associated sequence of orthogonal polynomials (and vice versa). Based on this result, and on the theory of positive chain sequences, this work shows that it is possible to obtain a characterization for these orthogonal polynomials on the unit circle in terms, now, of a pair of real sequences, where one of them is a positive chain sequence.

**Keywords:** Nontrivial measures. Orthogonal polynomials on the unit circle. Verblunsky coefficients. Chain sequences. Pair of real sequences.

# NOTAÇÕES

As notações estão dispostas em alfabeto grego, alfabeto romano e não alfabético.

## Alfabeto Grego

$\alpha_n$  coeficientes de Verblunsky associados a uma medida no círculo unitário; veja o Teorema 1.6

$\bar{\alpha}_n$  conjugado de  $\alpha_n$ ; veja Seção 2.1

$\beta_n$  constante complexa na relação de recorrência de três termos; veja Teorema 1.2

$\gamma$  distribuição, ou medida (positiva); veja Definição 1.3

$\Gamma$  função Gama de Euler; veja Seção 2.3

$\delta$  salto na medida  $\mu$ ; veja Seção 2.2

$\delta_{m,n}$  delta de Kronecker; veja (1.1)

$\Delta_n$  determinante de Teopltitz; veja Seção 1.2

$\eta$  ponto de aumento da distribuição  $\gamma$ ; veja Definição 1.2

$\kappa_n$  constante de normalização dada por  $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \kappa_n^{-2} = \int_{\mathcal{C}} |S_n(z)|^2 d\mu(z) = \|S_n(z)\|^2$ ; veja Definição 1.7

$\lambda_n$  expoente no polinômio de Gegenbauer; veja Subseção 1.1.1

$\mu, \tilde{\mu}$  medidas no círculo unitário; veja Teorema 2.3

$\mu(\{z_0\})$  medida do ponto puro  $z_0$ ; veja Seção 1.2

$\mu_n$  momento (trigonométrico) associado à medida  $\mu$ ; veja Definição 1.3

$\nu_n$  momento dado em função de  $\mu_n$ ; veja Lema 2.2

$\rho_n$  constante de normalização no caso real; veja Teorema 1.2

$\tau_n(w)$  números complexos associados à medida  $\mu$  no círculo unitário; veja Seção 2.1

## Alfabeto Romano

$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  seqüências de números reais associada à  $\mu$ ; veja Teorema 2.2

$\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$  par de seqüências reais associado à medida  $\mu$ ; veja Teorema 2.5

$\mathbb{C}$  corpo dos números complexos  $\mathcal{C}$  círculo unitário; veja Definição 1.2

$C_n$  termo aproximante; veja Seção 1.3

${}_2F_1(a; b; c; z)$  função hipergeométrica; veja Seção 2.3  
 $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  sequência encadeada positiva; veja Definição 1.12  
 $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  sequência de parâmetro para  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ ; veja Definição 1.12  
 $\mathcal{G}_n^\lambda$  polinômio de Gegenbauer; veja Subseção 1.1.1  
 $H_n$  determinante de Hankel de ordem  $n + 1$ ; veja Seção 1.1  
 $\mathcal{I}m(z)$  parte imaginária de complexo  $z$ ; veja Subseção 2.1.1  
 $\mathcal{J}_n^{(\alpha, \beta)}$  polinômios de Jacobi; veja Subseção 1.1.1  
 $K_n(z; w)$  polinômio núcleo CD; veja Seção 2.1  
 $\mathcal{L}$  funcional linear; veja Seção 1.2  
 $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$  sequência de parâmetros minimais da sequência  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ ; veja Definição 1.13  
 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  sequência de parâmetros maximais da sequência  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ ; veja Definição 1.14  
 $\mathbb{N}$  conjunto dos números naturais  
 $P$  partição do intervalo  $[a, b]$ ; veja Definição 1.1  
 $\mathbb{P}$  espaço vetorial dos polinômios; veja Seção 1.2  
 $P_n$  sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida no intervalo  $(a, b)$ ; veja Seção 1.1  
 $\mathbb{P}_n$  espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo  $n$ ; veja Seção 1.2  
 $P_n(w; z)$  polinômios núcleo mônico associado à medida  $\mu$ ; veja (2.6)  
 $\mathcal{R}e(z)$  parte real do complexo  $z$ ; veja Subseção 2.1.1  
 $R_n(z)$  polinômio associado a uma medida no círculo unitário; veja (2.24) e Teorema 2.2  
 $\text{supp}(\gamma)$  suporte para a função  $\gamma$ ; veja Definição 1.2  
 $S_n(z)$  polinômios de Szegő associado uma medida no círculo unitário; veja Observação 1.2  
 $S_n^*(z)$  polinômio recíproco de  $S_n(z)$ ; veja Definição 1.9  
 $S_n(w, z)$  polinômio para-ortogonal associado a uma medida no círculo unitário; veja Definição 1.10  
 $T_n$  matriz de Toeplitz; veja Seção 1.2  
 $\mathcal{T}_n$  polinômio de Chebyshev; veja Subseção 1.1.1  
 $\tilde{T}_n$  transformação de Joukowski; veja Seção 1.2  
 $v(\gamma; P)$  variação limitada; veja Definição 1.1

$V(\gamma)$  variação total; veja Definição 1.1

$x_{n,j}$  zeros dos polinômios  $P_n = P_{n,j}$  no intervalo  $(a, b)$ ; veja Seção 1.1

$|z|$  módulo do número complexo  $z$

$\bar{z}$  conjugado do número complexo  $z$

### **Não Alfabético**

$\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$  produto interno associado a uma medida  $\gamma$  no intervalo  $(a, b)$ ; veja Definição 1.4

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  produto interno associado a uma medida não trivial com suporte no círculo unitário; veja (1.8)

$\longrightarrow$  convergência pontual

$\Rightarrow$  sinal de implicação

$\square$  indica o fim da demonstração

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>1 PRELIMINARES</b>	<b>18</b>
1.1 Polinômios ortogonais reais . . . . .	18
1.1.1 Exemplos de polinômios ortogonais reais clássicos . . . . .	23
1.2 Polinômios ortogonais no círculo unitário (OPUC) . . . . .	24
1.3 Frações contínuas . . . . .	31
1.4 Sequências encadeadas positivas . . . . .	34
<b>2 UMA CARACTERIZAÇÃO PARA OPUC A PARTIR DE UM PAR DE SEQUÊNCIAS REAIS</b>	<b>37</b>
2.1 Polinômios núcleos CD e sequências encadeadas . . . . .	37
2.1.1 Relação de recorrência de três termos para os polinômios $R_n(z)$ . . . . .	43
2.2 Coeficientes de Verblunsky via par de sequências reais . . . . .	47
2.2.1 Caracterização para pontos puros de medidas e um resultado tipo Favard . . . . .	57
2.3 Um exemplo . . . . .	64
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>72</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>75</b>

# INTRODUÇÃO

Os polinômios ortogonais se tornaram essenciais no desenvolvimento de várias conceitos em matemática como, por exemplo, no estudo das equações diferenciais de segunda ordem, em frações contínuas, na teoria das aproximações de funções, em estabilidade numérica e processamento de sinais, entre outros tópicos. Isso se deve ao fato de que esses polinômios apresentam características bem peculiares. No caso particular dos polinômios ortogonais na reta real, por exemplo, uma dessas características principais é que, toda sequência de polinômios ortogonais, digamos  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ , obedece a uma relação de recorrência de três termos da seguinte forma:

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x),$$

em que  $P_{-1}(x) = 0$  e  $P_0(x) = 1$  com  $c_n, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \geq 0$ . Além disso, sabe-se também que seus zeros são todos reais, distintos e pertencem ao seu intervalo de ortogonalidade (veja, por exemplo, [6]). A título de exemplo, podemos citar os polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, de Laguerre e de Hermite (veja [2], Capítulo 1).

Além dos polinômios ortogonais na reta real, uma classe de polinômios ortogonais, particularmente interessante, é a dos polinômios ortogonais no círculo unitário (do inglês, OPUC). Com relação a estes, de acordo com Simon [14], sempre que for dada uma medida positiva não-trivial (que pode também ser uma medida de probabilidade)  $\mu(z) = \mu(e^{i\theta})$  no círculo unitário  $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , existe uma OPUC mônica associada,  $\{S_n(z)\}$ , satisfazendo

$$\int_{\mathcal{C}} \bar{z}^j S_n(z) d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{ij\theta} S_n(e^{i\theta}) d\mu(z) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad n \geq 1,$$

onde os polinômios  $S_n(z)$  tem grau exatamente  $n$ . Além disso, os polinômios ortogonais no círculo unitário (também chamados de polinômios de Szegő) gozam das seguintes propriedades:

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_{n-1}^*(z),$$

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z)\alpha_{n-1}S_n^*,$$

onde  $\bar{\alpha}_{n-1} := -S_n(0)$  e  $S_n^* := z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$ . Os números complexos  $\alpha_n$  são chamados de *coeficientes de Verblunsky*, segundo Simon [15], e  $S_n^*$  é chamado *polinômio recíproco* de  $S_n$ . Com essas equações, vê-se que os polinômios ortogonais no círculo unitário nem sempre satisfazem a uma relação de recorrência de três termos.

Relacionado aos polinômios de Szegő,  $S_n(z)$ , tem-se a introdução dos *polinômios para-ortogonais* definidos, segundo Jones et al. [11], por:

$$S_{n+1}(z) - w_n S_{n+1}^*(z),$$

em que  $\{w_n\}_{n=0}^\infty$  é uma sequência de números complexos cumprindo,  $|w_n| = 1$ .

Outro conceito indispensável na teoria de polinômios ortogonais é o conceito de *sequência encadeada positiva*. Precisamente, uma sequência  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é dita sequência encadeada positiva se existe uma outra sequência  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  de modo que:

- (i)  $0 \leq g_0 < 1$ ,  $0 < g_n < 1$ ,  $n \geq 1$ ,
- (ii)  $d_n = (1 - g_{n-1})g_n$ ,  $n \geq 1$ .

Como se ver em Chihara [5], a sequência  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  é chamada uma sequência de parâmetros para a sequência  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ . Além disso, tem-se também que essa sequência não é única e, por isso, mostra-se que  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  possui sequências de parâmetros minimal,  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ , e maximal,  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ .

O primeiro objetivo da presente dissertação é mostrar que, os polinômios complexos,  $R_n(z)$ , definidos por

$$R_n(z) = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} [1 - \tau_j \alpha_j]}{\prod_{j=0}^{n-1} [1 - \mathcal{R}e(\tau_j \alpha_j)]} P_n(1; z),$$

onde  $P_n(1; z)$  são polinômios núcleos mônicos (veja, [14]), cumprem a seguinte relação de recorrência de três termos:

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n=1})z + (1 - ic_{n-1})]R_n(z) - 4d_{n+1}R_{n-1}(z),$$

com  $R_0(z) = 1$  e  $R_1 = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$ , onde o par  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty; \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  é formado por sequências reais.

Em seguida, extraíndo-se da sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=0}^\infty$  uma sequência de parâmetros minimal  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ , formamos um novo par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty;$

$\{g_n\}_{n=1}^\infty\}$  a partir do qual mostra-se que, existe uma única sequência de coeficientes de Verblunsky  $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$  associada.

Portanto, como para qualquer sequência de coeficientes de Verblunsky  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ , existe uma única medida,  $\mu$ , de probabilidade não trivial no círculo unitário (veja, [14]), resulta que podemos caracterizar tal medida através do par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty; \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ . Em síntese, esse é o principal objetivo do presente trabalho, ou seja, mostrar que dado um par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty; \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, então, associada a este par, existe uma única medida  $\mu$  de probabilidade no círculo unitário  $\mathcal{C}$ , e reciprocamente.

A partir da medida  $\mu$  defini-se também a família de medidas  $\mu^{(t)}$  com salto  $t$  ( $0 \leq t < 1$ ) em  $z = 1$ . Com isso, mostra-se que  $P_n^{(t)}(1; z) = P_n(1; z)$ ,  $\tau_n^{(t)} = \tau_n$ ,  $n \geq 0$ , e

$$\frac{(\kappa_n^{(t)})^{-2}}{1-t} [1 - \tau_n \alpha_n^{(t)}] = \frac{(\kappa_n)^{-2}}{1-\delta} [1 - \tau_n \alpha_n], \quad n \geq 0.$$

Conseqüentemente,  $R_n^{(t)}(z) = R_n(z)$ ,  $c_n^{(t)} = c_n$  e  $d_{n+1}^{(t)} = d_{n+1} := d_{1,n}$ . Além disso, com relação aos pontos puros da medida  $\mu$  no círculo unitário  $\mathcal{C}$ , mostrar-se-á que os mesmos podem ser caracterizados pela série

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[ \prod_{j=0}^n \frac{|1 - w \tau_{j-1}(w) \alpha_{j-1}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}|^2} \right] = \lambda(w),$$

onde o seu comprimento de massa  $t$  é dado por  $t = [1 + \lambda(w)]^{-1}$ .

Por fim, será fornecido um exemplo concreto que ilustra aplicações para os principais resultados discutidos nesta dissertação, onde a medida, assim como seus respectivos coeficientes de Verblunsky, e o par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty; \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, serão dados explicitamente.

A presente dissertação resulta, essencialmente, de um estudo sobre o artigo intitulado “*Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences*” de Costa, Felix e Sri Ranga [7], e os principais resultados aqui discutidos estão dispostos em dois capítulos descritos como segue.

No Capítulo 1, apresenta-se, inicialmente, os resultados mais relevantes sobre a teoria de polinômios ortogonais na reta real. Este estudo será baseado, por exemplo, no texto de Chihara [5] (veja também Ismail [10]). Em seguida, aborda-se os polinômios ortogonais e para-ortogonais no círculo unitário, seguindo-se textos consagrados como

Chihara [7], Simon [14, 15], Szegő [18] e Ismail [10], por exemplo. Finalmente, também é fornecido, nesse capítulo, os conceitos de frações contínuas e sequências encadeadas positivas.

No capítulo 2, primeiramente, mostra-se que certos polinômios complexos, dados em função de um par de sequências reais, onde uma delas é encadeada positiva, satisfazem a uma relação de recorrência de três termos. Após isto, chega-se a conclusão que tal par de sequência reais determina, unicamente, uma sequência de coeficientes de Verblunsky. Com isso, apoiados no *Teorema de Verblunsky* (veja, [14]), é fornecido o resultado mais substancial deste trabalho no qual, uma medida  $\mu$  no círculo unitário é completamente caracterizada pelo par de sequência reais supracitado. À guisa dos resultados estabelecidos, vê-se que os pontos puros da medida em questão são determinados pela sequência de parâmetro maximal da sequência encadeada positiva.

# 1 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresenta-se resultados básicos sobre a teoria dos polinômios ortogonais e sequências encadeadas positivas no caso real, preparando terreno para o próximo capítulo onde será falado, especificamente, sobre polinômios, no círculo unitário, obtidos a partir de um par de sequências reais. Nessa exposição, os lemas e teoremas utilizados não conterão demonstrações, apenas alguns comentários e observações quando pertinentes. Para um estudo mais rigoroso sobre os assuntos que serão aqui discutidos, indica-se, por exemplo, o texto clássico de Chihara [5] (veja também Ismail [10]).

## 1.1 Polinômios ortogonais reais

Nesta seção discuti-se as propriedades mais interessantes envolvendo polinômios ortogonais na reta real. Tais propriedades são essenciais para a compreensão das seções seguintes e do restante do texto. Para tanto, inicia-se dando a noção da integral de Riemann-Stieltjes, com a qual, os pilares dessa teoria se tornam mais firmes.

**Definição 1.1.** Uma função  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é de *variação limitada* se existe uma constante  $M > 0$  tal que para qualquer partição  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  de  $[a, b]$  temos

$$v(\gamma; P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leq M$$

A *variação total* de  $\gamma$ ,  $V(\gamma)$ , é definida por

$$V(\gamma) = \sup \{v(\gamma; P); P [a, b]\}$$

Note que  $V(\gamma) \leq M \leq \infty$ . Além disso, se  $\gamma$  é real e não decrescente, então tem variação limitada dada por  $V(\gamma) = \gamma(b) - \gamma(a)$ .

**Teorema 1.1.** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  de variação limitada e suponha que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  seja contínua. então existe um número complexo  $I$  tal que para qualquer  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que quando  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$  é uma partição de  $[a, b]$  com

$\|P\| = \max \{(t_k - t_{k-1}); 1 \leq k \leq n\} < \delta$  tem-se

$$\left| I - \sum_{k=1}^n f(\tau_k) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \epsilon$$

para qualquer escolha do ponto  $\tau_k$ ,  $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$ .

O número  $I$  é chamado a *integral de Riemann-Stieljes* de  $f$  com respeito a  $\gamma$  sobre  $[a, b]$ , e é definido por

$$I := \int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(x) d\gamma(x)$$

Essa integral goza das mesmas propriedades da integral de Riemann. Para mais detalhes sobre a definição e demais propriedades das integrais de Riemann-Stieljes, indicamos ao leitor as referências [3, 6].

**Definição 1.2.** Um *ponto de aumento* da função  $\gamma$  é todo ponto  $\eta$  que cumpre a condição  $\gamma(\eta + \epsilon) - \gamma(\eta - \epsilon) > 0$ , para todo  $\epsilon > 0$ . O conjunto desses pontos,

$$\text{supp}(\gamma) = \{\eta \in (a, b) \mid \gamma(\eta + \epsilon) - \gamma(\eta - \epsilon) > 0, \text{ para todo } \epsilon > 0\},$$

é chamado o *suporte* de  $\gamma$ .

Segundo Chihara [14], o conjunto  $\text{supp}(\gamma)$  é chamado o *espectro* de  $\gamma$ . Os pontos de aumento de  $\gamma$  são chamados de *pontos espectrais*.

**Definição 1.3.** Se  $\gamma$  tem suporte infinito e as integrais de Riemann-Stieljes

$$\mu_n := \int_a^b x^n d\gamma(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

existem, dizemos que  $\gamma$  é uma *distribuição* ou *medida* (positiva) no intervalo  $(a, b)$ .

Neste caso, o conjunto  $\text{supp}(\gamma)$  sendo infinito permite caracterizar essa medida  $\gamma$  como sendo uma medida *não trivial*.

Os números  $\mu_k$  são chamadas os *momentos* de  $\gamma$  de ordem  $k$ . Quando o intervalo  $(a, b)$  é limitado, os momentos  $\mu_k$  sempre existem. Por outro lado, se  $(a, b)$  for ilimitado nem sempre isso ocorre, pois a integral acima pode não convergir. Quando  $\mu_0 = 1$  dizemos que  $\gamma$  é uma *medida de probabilidade*. Além disso, se a medida  $\gamma$  é definida em um intervalo  $(-a, a)$ ,  $0 < a \leq \infty$ , e satisfaz  $d\gamma(x) = -d\gamma(-x)$ , diz-se que  $\gamma$  é uma *medida simétrica*

Supondo que  $\gamma$  é uma medida positiva em um intervalo  $(a, b)$  e que  $f(x) \geq 0$ , para  $x \in \text{supp}(\gamma)$ , a Definição 1.3 nos permite escrever

$$\int_a^b f(x) d\gamma(x) \geq 0,$$

já que  $\gamma$  tem infinitos pontos de aumento. Sendo assim, pode-se definir naturalmente o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$ , pondo:

$$\langle f, g \rangle_\gamma := \int_a^b f(x)g(x) d\gamma(x),$$

onde  $f$  e  $g$  são funções contínuas definidas em  $(a, b)$ .

De posse dessa observação, e notando que polinômios são funções contínuas, tem-se a seguinte definição para *sequências de polinômios ortogonais na reta real*:

**Definição 1.4.** Dizemos que uma sequência de polinômios  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é ortogonal, com relação à medida  $\gamma$  no intervalo  $(a, b)$ , quando  $P_n$  tem grau exatamente  $n$  e

$$\langle P_m, P_n \rangle_\gamma = \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n \\ \rho_n \neq 0, & \text{para } m = n \end{cases}.$$

Considerando o delta de Kronecker, dado por

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n, \end{cases} \quad (1.1)$$

observe que podemos rescrever a definição acima sob a forma

$$\langle P_m, P_n \rangle_\gamma = \int_a^b P_m(x)P_n(x) d\gamma(x) = \rho_n \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Quando  $\rho_n = 1$ ,  $n \geq 0$ , a sequência de polinômios obtida é chamada *sequência de polinômios ortonormais* com relação à medida  $\gamma$  e é denotada por  $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ . Além disso, se a medida  $\gamma$ , em relação a qual os polinômios ortogonais  $P_n$ ,  $n \geq 0$ , estão associados, for simétrica, então os polinômios  $P_n$ ,  $n \geq 0$ , são ditos *polinômios ortogonais simétricos*.

Relembrando as propriedades de ortogonalidade da Álgebra Linear (veja, por exemplo, [13]), vê-se que a sequência  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ , dada na Definição 1.4, forma uma base infinita para o espaço vetorial dos polinômios  $\mathbb{P}$ . Em particular, os polinômios  $P_0, P_1, \dots, P_n$  constituem uma base finita para o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo  $n$ ,  $\mathbb{P}_n$ .

**Observação 1.1.** Por simplicidade, substitui-se algumas vezes a expressão “*sequência de polinômios ortogonais*” pela sigla “*SPO*” visando, assim, ser menos repetitivo e promover uma leitura mais rápida e agradável. Além disso, considera-se que essas SPO’s sejam mônicas, ou seja, que o coeficiente do termo de maior grau de cada polinômio  $P_n$  seja igual 1 visando simplificar algumas notações e resultados.

Com a sequência de momentos reais  $\{\mu_n\}_n^\infty$  forma-se a matriz de ordem  $n + 1$  (chamada *matriz de Hankel*) que define o *determinante de Hankel*

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Sobre esse determinante sabe-se que, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma SPO, com relação a uma medida positiva  $\gamma$ , é que  $H_n \neq 0$ . Uma demonstração mais geral desse fato, com relação a um funcional linear positivo-definido  $\mathcal{L}$ , pode ser encontrada em Chihara [5]. Outro fato essencial que caracteriza as SPO’s,  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ , é que seus polinômios  $P_n(x)$  satisfazem uma *relação de recorrência de três termos*. Com mais precisão, tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.** Sejam  $\gamma$  uma medida positiva e  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  uma SPO mônica. Então existem constantes  $\alpha_n$  e  $\beta_n \neq 0$  tais que

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})P_n(x) - \beta_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

com  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x - \alpha$  e

$$\alpha_{n+1} = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle_\psi}{\rho_n}, \quad n \geq 0, \quad e \quad \beta_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

*Demonstração.* Consulte Chihara [5] ou Simon [14]. □

Como será visto, mais adiante, o Teorema 1.2 não permanece válido caso a sequência de polinômios  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  seja complexa; em particular, para as sequências no círculo unitário. Contudo, é verdade que o teorema acima tem recíproca e é conhecida como *Teorema de Favard*, dado como segue.

**Teorema 1.3.** (Favard) Sejam  $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$  seqüências de números reais arbitrários, onde  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  e  $\beta_{n+1} > 0$  para  $n \geq 1$ . Então se  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é uma seqüência de polinômios mônicos satisfazendo a relação de recorrência de três termos

$$P_n(x) = (x - \alpha_n)P_{n-1}(x) - \beta_n P_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

com  $P_0(x) = 1$  e  $P_1(x) = x - \alpha_1$ , resulta que existe uma medida  $\gamma$  tal que a seqüência de polinômios  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é ortogonal em relação a esta medida.

*Demonstração.* Veja Simon [14] ou Szegő [18]. □

Uma consequência dos Teoremas 1.2 e 1.3 é a *Identidade de Christoffel-Darboux*:

**Teorema 1.4.** (Identidade de Christoffel-Darboux) Se  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é uma seqüência SPO em relação a uma medida positiva  $\gamma$ , então

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{k+1}} = (\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{n+1})^{-1} \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y}, \quad (1.3)$$

onde  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n+1, \dots$  são os coeficientes que aparecem na relação de recorrência dada em (1.2).

*Demonstração.* Veja, por exemplo, Chihara [5]. □

Como aplicação da identidade de Christoffel-Darboux, obtém-se

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{k+1}} = (\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{n+1})^{-1} \frac{P_n(x)(P_{n+1}(x) - P_{n+1}(y)) - P_{n+1}(x)(P_n(x) - P_n(y))}{x - y}$$

somando-se e subtraindo-se  $P_{n+1}(x)P_n(x)$  no numerador do lado direito da equação (1.3).

Logo, quando  $y \rightarrow x$  resulta

$$\sum_{k=0}^n \frac{(P_k(x))^2}{\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{k+1}} = \left[ \frac{P_n(x)(P_{n+1}(x))' - P_{n+1}(x)(P_n(x))'}{\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{k+1}} \right] > 0,$$

donde se conclui que

$$P_n(x)(P_{n+1}(x))' - P_{n+1}(x)(P_n(x))' > 0. \quad (1.4)$$

Através da desigualdade (1.4) pode-se mostrar que os zeros de  $P_n(x)$  e  $P_{n+1}(x)$  se alternam em ordem crescente; ou seja, que

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} < \cdots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1},$$

onde  $x_{n,j}$  são os zeros de  $P_n(x)$  e  $x_{n+1,j}$  são os zeros de  $P_{n+1}(x)$ , para  $j = 1, \dots, n$ . Essa importante propriedade satisfeita pelos zeros de polinômios ortogonais é chamada de *propriedade de entrelaçamento de zeros*. Ademais, mostra-se também que esses zeros são todos reais, distintos e estão no intervalo de ortogonalidade  $(a, b)$  (veja, por exemplo, [5, 18]).

### 1.1.1 Exemplos de polinômios ortogonais reais clássicos

Dos vários exemplos de polinômios ortogonais na reta real, destaca-se aqui apenas alguns dos mais conhecidos, alguns dos chamados *polinômios ortogonais clássicos* descritos nos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.3 dados a seguir.

**Exemplo 1.1. (Polinômios de Chebyshev)** Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie,  $\mathcal{T}_n$ , ortogonais com relação à medida  $d\gamma(x) = (1-x)^{-1/2}dx$  em  $(-1, 1)$  são definidos por

$$\mathcal{T}_n(x) = \cos(n\theta), \quad n \geq 0,$$

onde  $x = \cos\theta$ , com  $\theta \in (0, \pi)$ . A relação de recorrência de três termos para esses polinômios é dada por

$$\mathcal{T}_{n+1}(x) = 2x\mathcal{T}_n(x) - \mathcal{T}_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com  $\mathcal{T}_0(x) = 1$  e  $\mathcal{T}_1(x) = x$ . Além do mais, tem-se

$$\langle \mathcal{T}_n, \mathcal{T}_m \rangle_\gamma = \int_{-1}^1 \mathcal{T}_n(x)\mathcal{T}_m(x)(1-x^2)^{-1/2}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

**Exemplo 1.2. (Polinômios de Jacobi)** Os polinômios de Jacobi,  $\mathcal{J}_n^{(\alpha, \beta)}$ , com  $\alpha, \beta > -1$ , que pela Fórmula de Rodrigues são definidos por

$$\mathcal{J}_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] \quad (1.5)$$

são ortogonais no intervalo  $(-1, 1)$  com respeito à medida  $d\gamma(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx$ .

O coeficiente do termo de maior grau de  $\mathcal{J}_n^{(\alpha, \beta)}$  é dado por

$$a_{n,n}^{(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}{2^n n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)},$$

onde  $\Gamma$  denota a função Gama de Euler (veja, por exemplo, [2]). Para esses polinômios em sua forma mônica, a relação de recorrência de três termos pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) &= \left( x - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta + 2)(2n + \alpha + \beta)} \right) \mathcal{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &\quad - \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta - 1)} \mathcal{J}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{J}_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$  e  $\mathcal{J}_1^{(\alpha,\beta)}(x) = x - (\beta - \alpha)/(\alpha + \beta + 2)$ .

Além disso, tem-se

$$\langle \mathcal{J}_n^{(\alpha,\beta)}, \mathcal{J}_n^{(\alpha,\beta)} \rangle_\gamma = \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1} n! \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(2n + \alpha + \beta + 2) \Gamma(2n + \alpha + \beta + 1)}.$$

**Exemplo 1.3. Polinômios de Gegenbauer:** Considerando  $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$  nos polinômios de Jacobi definidos em (1.5), obtêm-se os polinômios de Gegenbauer (ou *ultra-esféricos*),  $\mathcal{G}_n^{(\lambda)}$ , que satisfazem, em sua forma mônica, à seguinte fórmula de recorrência de três termos:

$$\mathcal{G}_{n+1}^{(\lambda)}(x) = x \mathcal{G}_n^{(\lambda)}(x) - \frac{n(2\lambda + n + 1)}{4(\lambda + n)(\lambda + n + 1)} \mathcal{G}_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.6)$$

sendo que  $\mathcal{G}_0^{(\lambda)}(x) = 1$  e  $\mathcal{G}_1^{(\lambda)}(x) = x$ . Esses polinômios são ortogonais, no intervalo  $(-1, 1)$ , em relação à medida  $d\gamma(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2} dx$ ,  $\lambda > -1/2$ .

Para mais exemplos de polinômios ortogonais reais, bem como de outros polinômios clássicos, indicamos os textos disponíveis em [2, 5, 14].

## 1.2 Polinômios ortogonais no círculo unitário (OPUC)

Segundo Costa, Felix e Sri Ranga [7], os polinômios ortogonais no círculo unitário (chamados abreviadamente, OPUC) foram introduzidos por Gabor Szegő em meados da primeira metade do século XX, através da seguinte transformação de Joukowsky:

$$\tilde{T}_n(x) = 2^{-1}(z^n + z^{-n}), \quad n \geq 1,$$

onde  $x = 2^{-1}(z + z^{-1})$  desde que se considere  $z = e^{i\theta}$ , com  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Como será visto, esses polinômios não satisfazem a uma relação de recorrência do tipo (1.2), e são completamente determinados por uma única sequência de números complexos. Além disso, seus zeros estão todos situados no disco unitário aberto  $|z| < 1$ .

Antes de se estabelecer os resultados mais gerais sobre a teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário, serão feitas algumas ponderações com respeito a alguns objetos e conceitos que precisam ser apresentados.

**Definição 1.5.** Uma medida,  $\mu$ , positiva no círculo unitário

$$\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

é uma função real, limitada e não decrescente com suporte infinito sobre  $\mathcal{C}$ . Seus momentos (trigonométricos) são definidos por

$$\mu_m = \int_{\mathcal{C}} z^{-m} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\mu(e^{i\theta}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.7)$$

Segundo a terminologia adotada em Simon [14], a medida  $\mu$  é chamada *medida não trivial* se o seu suporte é um conjunto infinito ao passo que é dita uma *medida de probabilidade* se  $\mu(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} d\mu(z) = \mu_0 = 1$ .

Segue direto da definição acima que  $\bar{\mu}_{-m} = \mu_m$  e que a medida  $\mu(e^{i\theta})$  induz uma outra medida  $\mu(\theta)$  com suporte infinito em  $[0, 2\pi]$ . Além disso, diz-se que  $z_0 \in \mathbb{C}$  é um *ponto puro* (ou *ponto de massa*) de  $\mu$ , se a medida desse ponto é positiva, isto é,  $\mu(\{z_0\}) > 0$ . Um ponto puro,  $z_0$ , é chamado *isolado* (ou *discreto*) se, e somente se, existe um conjunto aberto,  $A$ , em torno de  $z_0$ , tal que  $\mu(A \setminus \{z_0\}) = 0$ . Mais detalhes sobre medidas suportadas no círculo unitário  $\mathcal{C}$  e possíveis pontos puros para estas medida podem ser encontrados, por exemplo, em Simon [14].

Com a medida  $\mu$  pode-se definir o seguinte funcional linear

$$\mathcal{L}[z^m] := \int_{\mathcal{C}} z^m d\mu(z) = \mu_{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

a partir do qual, é possível escrever

$$\mathcal{L}[p] = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) d\mu(\theta) > 0,$$

onde  $p$  é um polinômio tal que  $p(e^{i\theta}) \geq 0$ , mas não identicamente nulo em  $[0, 2\pi]$ . Com isso, como foi feito para o caso dos polinômios ortogonais na reta real, pode-se definir o seguinte produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ :

$$\langle p, q \rangle := \mathcal{L}[p(z)\overline{q(z)}] = \int_{\mathcal{C}} p(z)\overline{q(z)} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})} d\mu(\theta), \quad (1.8)$$

onde os polinômios  $p$  e  $q$  são definidos no círculo unitário  $\mathcal{C}$  com relação à medida  $\mu$ .

Agora, com respeito à sequência de momentos  $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ , defini-se a *matriz de Toeplitz*,  $T_n := [\mu_{i-j}]$ , cujo determinante é dado por:

$$\Delta_{-1} := 1 \quad \text{e} \quad \Delta_n := \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (1.9)$$

Uma consequência das informações que temos sobre  $\mathcal{L}$  e  $\Delta_n$  é dada pela definição abaixo.

**Definição 1.6.** Um funcional linear  $\mathcal{L}$ , com  $\mathcal{L}[z^{-m}] = \mu_m$ , é dito *positivo-definido* se  $\Delta_n > 0$ ,  $n \geq 0$ , e *quase-definido* se  $\Delta_n \neq 0$ ,  $n \geq 0$

Outro fato corrente na literatura sobre a sequência  $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$  é que a mesma é dita hermitiana se  $\mu_n = \overline{\mu_{-n}}$ , com  $n \geq 0$ , e é dita hermitiana positiva-definida se  $\Delta_n > 0$ ,  $n \geq 0$ . Lembremos que  $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$  ser hermitiana equivale a afirmar que  $T_n = \overline{T_n^t}$ .

De posse da definição anterior mais o produto interno dado em (1.8) resulta que:

**Definição 1.7.** Para um funcional linear  $\mathcal{L}$  positivo-definido (ou quase-definido), a sequência de polinômios  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação a  $\mathcal{L}$  se

$$\langle S_n, S_m \rangle = \mathcal{L}[S_n(z)\overline{S_m(z)}] = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \kappa_n^{-2} \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (1.10)$$

**Observação 1.2.** Os polinômios ortogonais no círculo unitário, serão aqui denotados por “ $S_n$ ” em homenagem a G. Szegő, introdutor dessa teoria no círculo unitário (veja, [18]); além disso, considera-se, aqui, tais polinômios em sua forma mônica.

Observe que trocando-se  $S_m$  por um polinômio qualquer  $\pi_m$  de grau  $m \leq n$ , obtém-se também que:

$$\langle S_n, \pi_m \rangle = \mathcal{L}[S_n(z)\overline{\pi_m(z)}] = \begin{cases} 0, & \text{se } m \leq n \\ \kappa_n^* \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (1.11)$$

Se  $\mu$  é uma medida positiva com suporte em  $\mathcal{C}$ , considerando-se o delta de Kronecker definido em (1.1) e o produto interno dado em(1.11), obtém-se uma associação entre os polinômios  $S_n$  e a medida  $\mu$  envolvida, como sugere a próxima definição.

**Definição 1.8.** Sejam  $\{S_n\}_{n=0}^\infty$  uma seqüência e  $\mu(z)$  uma medida com suporte no círculo unitário  $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Dizemos que  $\{S_n\}_{n=0}^\infty$  é uma SPO com relação a medida  $\mu(z)$  se cada polinômio  $S_n$  tem grau  $n$  e

$$\int_{\mathcal{C}} S_n(z) \overline{S_m(z)} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} S_n(e^{i\theta}) \overline{S_m(e^{i\theta})} d\mu(e^{im\theta}) = \kappa_n^{-2} \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, \dots,$$

onde  $\kappa_n^{-2} = \|S_n\|^2 = \int_{\mathcal{C}} |S_n(z)|^2 d\mu(z) \neq 0$  e os respectivos polinômios ortornormais em  $\mathcal{C}$  são dados por  $s_n(z) = \kappa_n S_n(z)$ ,  $n \geq 0$ .

Agora, seja  $S_n(z) := \sum_{k=0}^n b_{k,n} z^k$  com  $b_{k,n} \in \mathbb{C}$ ,  $b_{n,n} = 1$  e  $n \geq 0$ . Logo, de (1.10) (veja também (1.11)), tem-se

$$\langle S_n, z^m \rangle = \mathcal{L} \left[ S_n(z) \frac{1}{z^m} \right] = \sum_{k=0}^n b_{k,n} \mu_{m-k} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \leq n \\ \tilde{\kappa}_n \neq 0, & \text{se } m = n, \end{cases}$$

que convertido em notação de matriz (fazendo-se  $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ) fica

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_1 & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{0,n} \\ b_{1,n} \\ \vdots \\ b_{n-1,n} \\ b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{\kappa}_n \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Logo, pela *Regra de Cramer*, obtém-se

$$b_{n,n} = \frac{\tilde{\kappa}_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n}$$

ou seja,

$$\tilde{\kappa}_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \quad (\text{pois } b_{n,n} = 1).$$

Portanto tem-se,

$$\langle S_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \dots, n-1 \\ \Delta_n / \Delta_{n-1}, & \text{se } m = n \end{cases} \quad (1.13)$$

Observe também que substituindo-se a última linha do sistema dado em (1.12) por  $S_n(z) = \sum_{k=0}^n b_{k,n} z^k$ , é possível obter um novo sistema linear a partir do qual calculando-se  $b_{n,n}$  de forma análoga ao processo anterior, permite escrever o polinômio  $S_n$  da seguinte

maneira:

$$S_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}. \quad (1.14)$$

Note que como estamos supondo  $\mathcal{L}$  positivo-definido, resulta da Definição 1.6 que os determinantes de Toeplitz,  $\Delta_n$ , cumprem  $\Delta_n > 0$ ,  $n \geq 0$ . Assim, o processo descrito acima mostra a existência e unicidade dos polinômios ortogonais no círculo unitário, além, é claro, de apresentar uma maneira de construí-los a partir da sequência de momentos  $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ .

Outros polinômios que terão destaque na teoria dos polinômios de Szegő,  $S_n$ , são os assim chamados polinômios recíprocos de  $S_n$ , definidos como se segue.

**Definição 1.9.** Sendo  $S_n(z)$  um polinômio no círculo unitário, de grau no máximo  $n$ , definimos o seu *polinômio recíproco* por

$$S_n^*(z) := z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}.$$

Como é de se esperar, o polinômio recíproco de qualquer polinômio ortogonal no círculo unitário mantém propriedades de ortogonalidade semelhantes às apresentadas pelos ortogonais. Para elucidar o que está se falando observe que, combinando as definições de polinômio recíproco e do funcional linear  $\mathcal{L}$ , e usando ainda a igualdade em (1.13), pode-se escrever

$$\langle S_n^*, z^m \rangle = \begin{cases} \Delta_n / \Delta_{n-1}, & \text{se } m = 0 \\ 0, & \text{se } m = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.15)$$

Esse fato, particular sobre os polinômios  $S_n^*$ , desempenhará papel relevante mais adiante.

Uma das diferenças marcantes entre os polinômios ortogonais reais e complexos é, justamente, que estes últimos não satisfazem uma relação de recorrência de três termos como no caso real dada em (1.2). Todavia, os polinômios ortogonais no círculo unitários satisfazem algumas relações bem úteis dentro desta teoria, a saber:

**Teorema 1.5.** Os polinômios ortogonais no círculo unitário mônicos,  $S_n(z)$ , satisfazem

às seguintes recorrências:

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}zS_{n-1}(z) \quad (1.16)$$

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2)zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_n^*(z), \quad (1.17)$$

onde  $S_0(z) = S_0^*(z) = 1$  e  $\bar{\alpha}_{n-1} := -S_n(0)$ .

*Demonstração.* Consulte, por exemplo, a referência [17].  $\square$

Os coeficientes  $\alpha_n$  são conhecidos na literatura como *coeficientes de reflexão*, mas alguns autores os chamam também de *coeficientes Verblunsky, de Szego, de Schur e de Geronimus*, como consta em Simon [14]. Sobre tais coeficientes sabe-se que, para  $n \geq 1$ , eles cumprem

$$\bar{\alpha}_{n-1} = \frac{\langle zS_{n-1}, 1 \rangle}{\langle S_{n-1}^*, 1 \rangle}, \quad (1.18)$$

e

$$1 - |\alpha_{n-1}|^2 = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} > 0, \quad (1.19)$$

de onde obtém-se que  $|\alpha_{n-1}| < 1$ , para todo  $n \geq 1$ . De fato, substituindo-se (1.16) em (1.17), chega-se em

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}S_{n-1}^*(z). \quad (1.20)$$

Então, fazendo-se o produto interno  $\langle S_n(z), 1 \rangle$  resulta

$$\langle S_n(z), 1 \rangle = \langle zS_{n-1}(z), 1 \rangle - \bar{\alpha}_{n-1} \langle S_{n-1}^*(z), 1 \rangle$$

e como  $\langle S_n(z), 1 \rangle = 0$ , obtém (1.18). Agora, para obter-se (1.19), inicialmente, faz-se o produto interno de  $z^n$  por (1.17), obtendo-se

$$\langle S_n(z), z^n \rangle = (1 - |\bar{\alpha}_{n-1}|^2) \langle zS_{n-1}(z), z^n \rangle - \bar{\alpha}_{n-1} \langle S_n^*(z), z^n \rangle. \quad (1.21)$$

Em seguida, como de (1.13) e (1.15) tem-se, respectivamente,  $\langle S_n(z), z^n \rangle = \Delta_n/\Delta_{n-1}$  e  $\langle S_n^*(z), z^n \rangle = 0$ , e como  $\langle zS_{n-1}(z), z^n \rangle = \langle S_{n-1}(z), z^{n-1} \rangle$ , então a igualdade em (1.21) corresponde a  $\Delta_n/\Delta_{n-1} = (1 - |\bar{\alpha}_{n-1}|^2)\Delta_{n-1}/\Delta_{n-2}$ , e isso é equivalente ao que se queria provar.

**Observação 1.3.** Dada uma medida de probabilidade não trivial  $\mu$  suportada no círculo unitário  $\mathcal{C}$ , então associada a esta medida, mostrou-se, do que foi exposto anteriormente, que existe uma única sequência de números complexos  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ , tais que  $|\alpha_n| < 1$ ,  $n \geq 0$ .

O próximo resultado é a recíproca do que fizemos até aqui, e é conhecido na literatura como *Teorema de Verblunsky* (ou Teorema de Favard para o círculo unitário).

**Teorema 1.6.** (*Verblunsky*) Dada uma sequência arbitrária de números complexos  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ , com  $|\alpha_n| < 1$ ,  $n \geq 0$ , então associada a esta sequência, existe uma única medida de probabilidade não trivial  $\mu$ , suportada no círculo unitário, tal que os polinômios  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  gerados por (1.17) (ou por (1.20)) são os respectivos polinômios mônicos de Szego.

*Demonstração.* Veja Simon [14]. □

Com relação às raízes dos polinômios  $S_n$  temos o seguinte resultado.

**Teorema 1.7.** Os zeros dos polinômios de Szegő  $S_n$ ,  $n \geq 1$ , estão todos no disco unitário aberto  $|z| < 1$ .

*Demonstração.* Veja, por exemplo, [17]. □

**Exemplo 1.4.** Seja  $\omega_0$  a medida de Lebesgue definida, como uma medida de probabilidade, por

$$d\omega_0(z) = (2\pi iz)^{-1} dz, \quad z \in \mathcal{C}.$$

A medida  $\omega_0$  é suportada no círculo unitário  $\mathcal{C}$  e um cálculo simples mostra que os momentos trigonométricos, definidos em (1.7), são dados por  $\mu_n^{(\omega_0)} = \delta_{0,n}$ ,  $n \geq 0$ , sendo  $\delta_{0,n}$  o delta de Kronecker, definido em (1.1).

Dessa forma, a partir de (1.9) e (1.14), os polinômios ortogonais no círculo unitário,  $S_n^{(\omega_0)}$ , com relação a  $\omega_0$ , são dados por  $S_n^{(\omega_0)}(z) = z^n$ ,  $n \geq 0$ . Consequentemente, os coeficientes de Verblunsky associados à medida de Lebesgue  $\omega_0$  podem ser explicitamente fornecidos, a saber

$$\alpha_n^{(\omega_0)} = -\overline{S_{n+1}^{(\omega_0)}(0)} = 0, \quad n \geq 0.$$

Observe ainda que os zeros,  $z_{n,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , dos polinômios  $S_n^{(\omega_0)}(z) = z^n$ ,  $n \geq 1$ , são de multiplicidade  $n$  e todos iguais a zero. Este exemplo é chamado no texto Simon [14], como o “caso livre”.

Uma importante classe de polinômios relacionada com os polinômios ortogonais no círculo unitário, é a dos *polinômios para-ortogonais*. Segundo Jones, Njastade e Thron

[11], esses polinômios podem ser definidos por

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z),$$

onde  $w_n \in \mathbb{C}$  é tal que  $|w_n| = 1$  e  $\{S_n(z)\}_{n=0}^\infty$  são os polinômios de Szegő dados em relação a medida  $\mu$  e satisfazendo o produto interno (1.11). Com isso, considerando-se a ortogonalidade do polinômio recíproco dada em (1.15), observa-se que:

$$\begin{aligned} \langle S_n(w, z), 1 \rangle &= \langle S_n(z), 1 \rangle + w_n \langle S_n^*(z), 1 \rangle \neq 0, \\ \langle S_n(w, z), z^m \rangle &= \langle S_n(z), z^m \rangle + w_n \langle S_n^*(z), z^m \rangle = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \\ \langle S_n(w, z), z^n \rangle &= \langle S_n(z), z^n \rangle + w_n \langle S_n^*(z), z^n \rangle \neq 0, \end{aligned}$$

de onde pode-se ver uma diferença em relação aos polinômios de Szegő expressa pela primeira das últimas três expressões, o que motiva a apresentar-se a próxima definição.

**Definição 1.10.** Dizemos que uma sequência de polinômios  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  é uma *sequência de polinômios para-ortogonais* com relação a uma medida  $\mu$  se cada  $X_n$ , com  $n \geq 0$ , tem grau  $n$  e cumpre a condição:

$$\begin{aligned} \langle X_n, 1 \rangle &\neq 0 \\ \langle X_n, z^m \rangle &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \\ \langle X_n, z^n \rangle &\neq 0. \end{aligned}$$

Além da propriedade  $\langle X_n, 1 \rangle \neq 0$ , esses polinômios se caracterizam também por possuírem apenas zeros simples e localizados sobre o disco unitário  $\mathcal{C}$ , o que não ocorre com os polinômios  $S_n(z)$ . Essas características serão exploradas no capítulo seguinte. Para um tratamento mais detalhado sobre tais polinômios, pedimos ao leitor que consulte a referência supracitada [11].

### 1.3 Frações contínuas

Nesta seção serão apresentados os conceitos mais relevantes para este trabalho sobre a teoria de frações contínuas. Tais frações, como poderá ser visto no próximo capítulo, também estão relacionadas com a teoria de polinômios ortogonais .

Para quaisquer seqüências de números complexos  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ , uma seqüência definida por

$$C_0 = b_0, \quad C_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \quad C_2 = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}}, \quad \dots \quad (1.22)$$

é chamada de *fração contínua*. As frações contínuas podem ser finitas ou infinitas e o termo geral (ou aproximante) dessa seqüência é definido como

$$C_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}} \quad (1.23)$$

e sobre este, a fração contínua pode convergir ou divergir, conforme indica a definição abaixo.

**Definição 1.11.** A fração contínua (1.22) converge para um valor  $K$  (finito) se no máximo um número finito dos  $C_n$ , dado em (1.23), é indefinido e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = K.$$

Caso contrário, diz-se que a fração contínua diverge.

**Exemplo 1.5.** Considerando a fração contínua

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

é possível verificar que seu limite é o *número de ouro* dado por  $c = (1 + \sqrt{5})/2$ .

Adotando a notação mais simples para o termo geral (1.23), dada por

$$C_n = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n}{|b_n|}, \quad (1.24)$$

resulta, pela definição acima, que

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots = K,$$

caso a dada fração contínua convirja para  $K$ . Além disso, escrevendo

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0, & B_0 &= 1 \\ A_1 &= b_0 b_1 + a_1, & B_1 &= b_1 \\ A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2, \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

em (1.24), segue que  $A_2 = b_2A_1 + a_2A_0$  e  $B_2 = b_2B_1 + a_2B_0$ , e mais geralmente, por indução, chega-se a *fórmula de Wall*:

$$A_n = b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2} \quad \text{e} \quad B_n = b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2}, \quad (1.25)$$

desde que  $A_{-1} = 1$ ,  $A_0 = b_0$ ,  $B_{-1} = 0$ ,  $B_0 = 1$  e  $b_n \neq 0$ . Os números  $A_n$  e  $B_n$  são chamados, respectivamente, de *numerador parcial e denominador parcial* de  $C_n$ , e é imediato que  $C_n = A_n/B_n$ .

Observe agora que ao multiplicarmos a primeira igualdade em (1.25) por  $B_{n-1}$  e a segunda por  $A_{n-1}$ , obtém-se

$$A_nB_{n-1} - B_nA_{n-1} = -a_n[A_{n-1}B_{n-2} - B_{n-1}A_{n-2}],$$

e, conseqüentemente,

$$A_nB_{n-1} - B_nA_{n-1} = (-1)^{n+1}a_1a_2 \cdots a_n, \quad n \geq 1. \quad (1.26)$$

O resultado obtido em (1.26) é conhecido como *fórmula do determinante* (veja, Wall [19]) e é muito utilizado na teoria de frações contínuas. A partir dessa fórmula do determinante, obtém-se, ainda,

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}a_1a_2 \cdots a_n}{B_{n-1}B_n}.$$

Mas, sendo  $A_0/B_0 = b_0$ , somando-se sobre  $n$ , resulta que

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}a_1a_2 \cdots a_k}{B_{k-1}B_k}$$

desde que  $b_i \neq 0$  e  $B_i \neq 0$ , com  $1 \leq i \leq n$ .

Os próximos resultados são conseqüências do que acaba de ser feito e cujas demonstrações podem ser vistas, por exemplo, no texto de Andrade e Bracciali [1].

**Lema 1.1.** *Se  $m_0 = 0$ , então o  $n$ -ésimo denominador parcial da fração contínua*

$$1 - \frac{1}{|} - \frac{(1 - m_0)m_1}{|} - \frac{(1 - m_1)m_2}{|} - \dots$$

é

$$B_n = (1 - m_0)(1 - m_1) \cdots (1 - m_{n-1}).$$

**Lema 1.2.** *Seja  $\gamma_n = (1 - m_{n-1})m_n$  onde  $m_0 = 0$ ,  $0 < m_n < 1$   $n \geq 1$ . Então a fração contínua*

$$1 - \frac{\gamma_1}{|1|} - \frac{\gamma_2}{|1|} - \frac{\gamma_3}{|1|} - \dots$$

*converge para  $(1 + L)^{-1}$  onde*

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{(1 - m_1)(1 - m_2) \cdots (1 - m_n)}.$$

## 1.4 Sequências encadeadas positivas

A teoria sobre *sequências encadeadas* foi introduzida por Wall [19], sendo bem difundida também por Chihara [5] e outros autores, principalmente no que se refere às suas conexões com o estudo dos polinômios ortogonais associados a medidas suportadas na reta real. O estudo dessas sequências na teoria de polinômios ortogonais associados a medidas com suporte no círculo unitário também é de grande relevância, e por se tratar de um tema que será muito utilizado no decorrer deste trabalho, apresenta-se, a seguir, algumas definições, exemplos e propriedades associadas a sequências encadeadas positivas. Para um estudo mais minucioso e possíveis demonstrações, sugere-se, por exemplo, o texto de Chihara [5].

**Definição 1.12.** Uma sequência  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  é dita uma *sequência encadeada positiva* se existe uma outra sequência  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  tal que

- (i)  $0 \leq g_0 < 1$ ,  $0 < g_n < 1$ ,  $n \geq 1$ ,
- (ii)  $d_n = (1 - g_{n-1})g_n$ ,  $n \geq 1$ .

Nessa definição, a sequência  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  é chamada uma *sequência de parâmetros* para a sequência  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ ; o termo  $g_0$  é chamado *parâmetro inicial*.

Segundo Chihara [5], a definição acima é um pouco mais restritiva do que a definição original de sequências encadeadas introduzidas por Wall [19], na qual o item (i) acima era dado da seguinte forma:

$$(i') \quad 0 \leq g_n \leq 1, \quad n \geq 0.$$

Essa pequena diferença motiva a introdução do adjetivo “positivas” na definição acima.

**Exemplo 1.6.** A sequência constante  $\{d_n\}_{n=1}^\infty = \{1/4\}$  é encadeada positiva, com sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^\infty = \{1/2\}$ , por exemplo. Já a sequência constante  $\{d_n\}_{n=1}^\infty = \{a\}$ , com  $0 < a \leq 1/4$ , é encadeada positiva com sequências de parâmetros

$$\{g_n\}_{n=0}^\infty = \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} \right\} \quad \text{e} \quad \{h_n\}_{n=0}^\infty = \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} \right\}$$

O Exemplo 1.6 ilustra que, em geral, as sequências de parâmetros não são únicas. Em verdade, dada uma sequência encadeada positiva, pode-se mostrar que a mesma possui uma infinidade de sequências de parâmetros, como mostra os dois próximos resultados fornecidos em Chihara [5]:

**Teorema 1.8.** Seja  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva e sejam  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  e  $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ , ambas, suas sequências de parâmetros. Então,

$$g_n < h_n, \quad n \geq 1, \quad \text{se, e somente se,} \quad g_0 < h_0.$$

**Teorema 1.9.** Seja  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva. Se  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  tem uma sequência de parâmetro  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  tal que  $g_0 > 0$ , então para cada  $h_0$  tal que  $0 \leq h_0 < g_0$ , existe uma correspondente sequência de parâmetros  $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ .

Como esses dois teoremas denunciam, as sequências de parâmetro não somente existem em número infinito, mas também podem ser comparadas entre si. Em termos mais precisos, tem-se as definições abaixo.

**Definição 1.13.** Seja  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva. Uma sequência de parâmetros  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é chamada uma *sequência minimal de parâmetros* para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  se  $m_0 = 0$ .

Um breve exemplo dessa definição pode ser visto voltando-se à primeira sequência encadeada dada no Exemplo 1.6, isto é,  $\{d_n\}_{n=1}^\infty = \{1/4\}$ . Como pode ser verificado facilmente, tal sequência encadeada positiva tem sequência minimal de parâmetros dada por  $\{m_n\}_{n=0}^\infty = \{n/[2(n+1)]\}$ .

**Definição 1.14.** Seja  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva. Uma sequência  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  é chamada uma *sequência maximal de parâmetros* para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  se  $M_n > g_n$  ( $n \geq 0$ ), para qualquer outra sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  de  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ .

Novamente recorrendo ao Exemplo 1.6, observa-se que, a sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}$ , com  $0 < a \leq 1/4$ , tem sequência maximal de parâmetros dada por

$$\{g_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} \right\}.$$

Para ver isto com mais clareza, sugerimos ao leitor que considere o seguinte resultado demonstrado em Chihara [5]:

**Teorema 1.10.** Para que  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  seja uma sequência maximal de parâmetros de uma sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma condição necessária e suficiente é que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1 M_2 \cdots M_n}{(1 - M_1)(1 - M_2) \cdots (1 - M_n)} = \infty.$$

Comparando esta última expressão com aquela do Lema 1.2, nota-se que a coincidência exhibe uma íntima relação entre sequências encadeadas positivas e frações contínuas. Assim como na igualdade do Lema 1.2, a que acaba de ser fornecida no Teorema 1.10 é também devida Wall (veja, [5]), e é conhecida como *critério de Wall*.

Como consequência dos Teoremas 1.8 e 1.9 pode-se afirmar que toda sequência encadeada positiva possui uma sequência de parâmetros  $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$  tal que  $m_0 = 0$  e  $m_n < g_n$ ,  $n \geq 1$ , para qualquer outra sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Ou seja, *toda sequência encadeada positiva possui uma sequência minimal de parâmetros*. Além disso, o Teorema 1.8 também garante o seguinte resultado sobre sequências maximais:

**Teorema 1.11.** Toda sequência encadeada positiva tem uma sequência maximal de parâmetros.

A demonstração de todos os resultados apresentados nesta seção, podem também ser encontradas em [10, 14, 18].

## 2 UMA CARACTERIZAÇÃO PARA OPUC A PARTIR DE UM PAR DE SEQUÊNCIAS REAIS

Szegő mostrou que polinômios ortogonais reais no círculo unitário podem ser mapeados para polinômios ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$  por meio da transformação  $2x = z + z^{-1}$ . Nos anos 80 e 90 Delsarte e Genin [8] mostraram que polinômios ortogonais reais no círculo unitário podem ser mapeados para polinômios ortogonais simétricos no intervalo  $[-1, 1]$  usando a transformação  $2x = z^{1/2} + z^{-1/2}$ . Neste capítulo, apresenta-se resultados que estendem aqueles apresentados por Delsarte e Genin, agora, para todos os polinômios ortogonais no círculo unitário e não apenas os OPUC reais. Neste caso, a transformação apresentada mapeia para funções em  $[-1, 1]$  que podem ser vistas como extensões de polinômios ortogonais simétricos em  $[-1, 1]$  satisfazendo uma relação de recorrência três termos com coeficientes reais  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  também é uma sequência de encadeada positiva.

Os resultados aqui estabelecidos, fornecem uma caracterização para polinômios ortogonais no círculo unitário em termos do par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência de encadeada positiva. Além disso, também é fornecida, nesse capítulo, uma caracterização para que um ponto  $w$  ( $|w| = 1$ ) seja um ponto puro da medida envolvida.

### 2.1 Polinômios núcleos CD e sequências encadeadas

Foi visto no capítulo anterior que polinômios ortogonais reais satisfazem a uma relação de recorrência de três termos do tipo (1.2) mas que, em geral, isso não ocorre para polinômios ortogonais no círculo unitário  $S_n$ . Um resultado bem importante para os objetivos do presente capítulo, e que será provado nesta seção, é que dado um par de sequências reais, onde uma dessas sequências é uma sequência encadeada positiva, é

possível determinar de modo único uma sequência de polinômios, associados aos ortogonais  $S_n$ , os assim chamados *polinômios núcleos CD*, satisfazendo também uma relação de recorrência de três termos. Para tanto, será assumido que a medida  $\mu$  utilizada seja uma medida de probabilidade, e que  $\{s_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  seja a sequência de polinômios ortonormais associada à medida  $\mu$ , onde  $s_n = \kappa_n S_n$ ,  $n \geq 0$ , com  $\kappa_n$  sendo a constante de normalização e  $S_n$  pertencendo a sequência de polinômios ortogonais mônica  $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ , com suporte no círculo unitário, associada à medida  $\mu$ . Além disso, considera-se os coeficientes de Verblunsky

$$\bar{\alpha}_n = -S_{n+1}(0), \quad n \geq 0,$$

e as relações provenientes de (1.16) e (1.20), que, por comodidade, serão enumeradas aqui como:

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} z S_{n-1}(z), \quad (2.1)$$

$$S_n(z) = z S_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} S_{n-1}^*(z). \quad (2.2)$$

onde  $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$  e  $|\alpha_n| < 1$ ,  $n \geq 0$ .

Seja agora

$$\tau_n(w) := \frac{S_n(w)}{S_n^*(w)}, \quad n \geq 0, \quad (2.3)$$

de modo que  $w \in \mathbb{C}$  é tal que  $|w| = 1$ . Note que, neste caso,  $|w| = 1$  implica em  $|\tau_n(w)| = 1$  para todo  $n \geq 0$ . De fato, sendo  $|w| = 1$ , tem-se  $w\bar{w} = 1$  e, conseqüentemente, para  $n \geq 0$ ,

$$|\tau_n(w)| = \frac{|S_n(w)|}{|S_n^*(w)|} = \frac{|S_n(w)|}{|w^n \overline{S_n(1/\bar{w})}|} = \frac{|S_n(w)|}{|w|^n |S_n(w)|} = 1. \quad (2.4)$$

A fórmula de Christoffel-Darbuox, de ordem  $n \geq 0$ , associada com a sequência  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  é dada por (veja, [14]):

$$K_n(z; w) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{s_j(w)} s_j(z) = \frac{\overline{s_{n+1}^*(w)} s_{n+1}^*(z) - \overline{s_{n+1}(w)} s_{n+1}(z)}{1 - \bar{w}z}. \quad (2.5)$$

Segundo Simon [14],  $K_n(z; w)$  é chamado *polinômio núcleo CD*, onde CD é uma referência ao termo “Christoffel-Darbuox”.

Considere também a sequência  $\{P_n(w; z)\}$  de polinômios em  $z$  definida por

$$P_n(w; z) = \frac{\kappa_{n+1}^{-2} \bar{w}}{S_{n+1}(w)} \frac{K_n(z; w)}{1 + \tau_{n+1}(w) \alpha_n}, \quad n \geq 0. \quad (2.6)$$

É possível verificar facilmente que  $P_n(w; z)$  é um polinômio mônico de grau  $n$  em  $z$  escrito da seguinte forma:

$$P_n(w; z) = \frac{1}{z - w} \frac{S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}(w)S_{n+1}^*(z)}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n}. \quad (2.7)$$

Com efeito, de (2.5) e (2.6) pode-se escrever

$$\begin{aligned} P_n(w; z) &= \frac{\bar{w}}{\kappa_{n+1}^2 \overline{S_{n+1}(w)}} \frac{\overline{s_{n+1}^*(w) s_{n+1}^*(z)} - \overline{s_{n+1}(w) s_{n+1}(z)}}{1 - \bar{w}z} \frac{1}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n} \\ &= \frac{1/w}{\kappa_{n+1}^2 \overline{S_{n+1}(w)}} \frac{\kappa_{n+1}^2 \overline{S_{n+1}^*(w) S_{n+1}^*(z)} - \kappa_{n+1}^2 \overline{S_{n+1}(w) S_{n+1}(z)}}{1/w(w - z)} \frac{1}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n} \\ &= \frac{S_{n+1}(z) - \frac{\overline{S_{n+1}^*(z)}}{\overline{S_{n+1}(w)}} S_{n+1}^*(z)}{(z - w)(1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n)} = \frac{1}{z - w} \frac{S_{n+1}(z) - \frac{1}{\tau_{n+1}(w)} S_{n+1}^*(z)}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n} \\ &= \frac{1}{z - w} \frac{S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}(w) S_{n+1}^*(z)}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n}, \end{aligned}$$

já que, a partir de (2.4), tem-se  $\tau_{n+1}(w) \overline{\tau_{n+1}(w)} = 1$ .

Outro resultado que será utilizado na demonstração de teoremas desta seção, é que  $\tau_n(w)$ , definido em (2.3), também pode ser obtido recursivamente a partir dos coeficientes de Verblunsky  $\alpha_n$ . Precisamente, tem-se

$$\tau_{n+1}(w) = \frac{w\tau_n(w) - \bar{\alpha}_n}{1 - w\tau_n(w)\alpha_n}, \quad w\tau_n(w) = \frac{\tau_{n+1}(w) + \bar{\alpha}_n}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n}, \quad n \geq 0. \quad (2.8)$$

Tais igualdades, seguem, diretamente, das equações (2.1) e (2.2) e da expressão para  $\tau_n(w)$ , dada em (2.3). De fato, substituindo-se (2.1) e (2.2) em (2.3), obtém-se

$$\tau_{n+1}(w) = \frac{wS_n(w) - \bar{\alpha}_n S_n^*(w)}{S_n^*(w) - \alpha_n w S_n(w)} = \frac{S_n^*(w) \left[ w \frac{S_n(w)}{S_n^*(w)} - \bar{\alpha}_n \right]}{S_n^*(w) \left[ 1 - \alpha_n w \frac{S_n(w)}{S_n^*(w)} \right]} = \frac{w\tau_n(w) - \bar{\alpha}_n}{1 - \alpha_n w \tau_n(w)}.$$

de onde, com uma simples manipulação, chega-se a segunda igualdade em (2.8), isto é,

$$w\tau_n(w) = \frac{\tau_{n+1}(w) + \bar{\alpha}_n}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n}. \quad (2.9)$$

A partir disso, concluí-se que

$$[1 - w\tau_n(w)\alpha_n][1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n] = 1 - |\alpha_n|^2, \quad n \geq 0. \quad (2.10)$$

De fato, usando (2.9), tem-se

$$\begin{aligned} [1 - w\tau_n(w)\alpha_n][1 + \tau_{n+1}(w)\alpha] &= \left[ 1 - \frac{\tau_{n+1}(w) + \bar{\alpha}_n}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n} \alpha_n \right] [1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n] \\ &= 1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n - [\tau_{n+1}(w) + \bar{\alpha}_n] \alpha_n \\ &= 1 - \bar{\alpha}_n \alpha_n \\ &= 1 - |\alpha_n|^2. \end{aligned}$$

Agora, considerando-se (2.1), (2.2) e (2.9) é possível reescrever os polinômios núcleos,  $P_n(w; z)$ , dados em (2.7), da seguinte forma:

$$P_n(w; z) = \frac{1}{z-w} [zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z)], \quad n \geq 0. \quad (2.11)$$

De fato,

$$\begin{aligned} P_n(w; z) &= \frac{1}{z-w} \frac{S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}(w)S_{n+1}^*(z)}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n} \\ &= \frac{1}{z-w} \frac{[zS_n(z) - \bar{\alpha}_n S_n^*(z)] - \tau_{n+1}(w)[S_n^*(z) - \alpha_n zS_n(z)]}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n} \\ &= \frac{1}{z-w} \frac{zS_n(z)[1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n] - S_n^*(z)[\tau_{n+1}(w) + \bar{\alpha}_n]}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n} \\ &= \frac{1}{z-w} [zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z)]. \end{aligned}$$

Observe que na passagem da primeira para a segunda igualdade na sequência de igualdades acima foram utilizadas as expressões em (2.1) e (2.2), ao passo que na passagem para a última igualdade utilizou-se da expressão em (2.9).

O teorema abaixo mostra que os polinômios núcleos mônicos,  $P_n(w; z)$ , satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Tal resultado será de fundamental importância para obtenção dos principais objetivos desse capítulo.

**Teorema 2.1.** A sequência de polinômios núcleos mônicos  $\{P_n(w; z)\}$  satisfaz a fórmula de recorrência de três termos

$$P_{n+1}(w; z) = [z + b_{n+1}(w)]P_n(w; z) - a_{n+1}(w)zP_{n-1}(w; z), \quad n \geq 1 \quad (2.12)$$

com  $P_0(w; z) = 1$  e  $P_1(w; z) = z + b_1(w)$ , onde

$$b_n(w) = \frac{\tau_n(w)}{\tau_{n-1}(w)}, \quad a_{n+1}(w) = [1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}][1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n}]w, \quad n \geq 1. \quad (2.13)$$

*Demonstração.* Seja  $\tilde{p}_{n+1}(z)$  um polinômio de grau  $n+1$ ,  $n \geq 1$ , dado por

$$\tilde{p}_{n+1}(z) = P_{n+1}(w; z) + u_n[1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}]zP_{n-1}(w; z), \quad (2.14)$$

onde  $u_n$  é uma constante. Logo, multiplicando esse polinômio por  $z-w$  e usando (2.7) e (2.11), obtém-se

$$(z-w)\tilde{p}_{n+1}(w; z) = [zS_{n+1}(z) - w\tau_{n+1}(w)S_{n+1}^*(z)] + u_n z [S_n(z) - \tau_n(w)S_n^*(z)]$$

Agora, pelas igualdades (2.1) e (2.2) resulta que

$$\begin{aligned}
(z-w)\tilde{p}_{n+1}(w; z) &= \{z[zS_n(z) - \bar{\alpha}_n S_n^*(z)] - w\tau_{n+1}(w)[S_n^*(z) - \alpha_n zS_n(z)]\} \\
&\quad + u_n zS_n(z) - u_n z\tau_n(w)S_n^*(z) \\
&= z\{zS_n(z) - [\tau_n(w)u_n + \bar{\alpha}_n]S_n^*(z)\} \\
&\quad + u_n zS_n(z) - w\tau_{n+1}(w)S_n^*(z) + \alpha_n w zS_n(z)\tau_{n+1}(w) \\
&= z\{zS_n(z) - [\tau_n(w)u_n + \bar{\alpha}_n]S_n^*(z)\} \\
&\quad + [u_n + w\tau_{n+1}(w)\alpha_n] \left[ zS_n(z) - \frac{w\tau_{n+1}(w)}{u_n + w\tau_{n+1}(w)\alpha_n} S_n^*(z) \right]. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Definindo-se, então,  $u_n := [1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n}]w$  e levando-se em consideração que  $|w| = 1$  (o que acarreta  $|\tau_n(w)| = 1$ , como mostrado em (2.4)), chega-se, sem dificuldade, em

$$\tau_n(w)u_n + \bar{\alpha}_n = w\tau_n(w) \quad \text{e} \quad u_n + w\tau_{n+1}(w)\alpha_n = \frac{\tau_{n+1}(w)}{\tau_n(w)}$$

e, conseqüentemente, obtém-se

$$\begin{aligned}
z\{zS_n(z) - [\tau_n(w)u_n + \bar{\alpha}_n]S_n^*(z)\} &= z[zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z)], \\
[u_n + w\tau_{n+1}(w)\alpha_n] \left[ zS_n(z) - \frac{w\tau_{n+1}(w)}{u_n + w\tau_{n+1}(w)\alpha_n} S_n^*(z) \right] &= \frac{\tau_{n+1}(w)}{\tau_n(w)} [zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z)].
\end{aligned}$$

Com isso, a igualdade em (2.15) pode ser reescrita como

$$(z-w)\tilde{p}_{n+1}(w; z) = z[zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z)] + \frac{\tau_{n+1}(w)}{\tau_n(w)} [zS_n(z) - w\tau_n(w)S_n^*(z)]$$

ou, equivalentemente, usando-se (2.11),

$$\tilde{p}_{n+1}(w; z) = \left[ z + \frac{\tau_{n+1}(w)}{\tau_n(w)} \right] P_n(w; z) = [z + b_{n+1}(w)] P_n(w; z), \quad (2.16)$$

onde  $b_n(w) = \tau_n(w)/\tau_{n-1}(w)$ ,  $n \geq 1$ .

Finalmente, uma vez que  $u_n = [1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n}]w$ , tomando-se  $a_{n+1}(w)$  como em (2.13), e substituindo-se (2.16) em (2.14), chega-se ao resultado desejado em (2.12), o que conclui a prova do teorema.  $\square$

Os coeficientes  $a_n(w)$  e  $b_n(w)$ , dados no Teorema 2.1, podem ser reescritos, usando (2.8) e (2.10), como:

$$b_n(w) = \frac{1 - \overline{w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}}}{1 - w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}} w = \frac{1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}}{1 + \overline{\tau_n(w)\alpha_{n-1}}} w, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1}(w) &= \frac{1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n}}{1 - w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}}(1 - |\alpha_{n-1}|^2)w, \quad n \geq 1 \\
&= \frac{1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}}{1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n}(1 - |\alpha_n|^2)w.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

De fato, como  $a_{n+1}(w) = [1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}][1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n}]w$ , (2.18) é uma consequência imediata de (2.10). Agora em relação a  $b_n(w)$ , usando (2.13) e a primeira equação em (2.8), tem-se, inicialmente, que

$$b_n(w) = \frac{\tau_n(w)}{\tau_{n-1}(w)} = \frac{\frac{w\tau_{n-1}(w) - \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}}}{\tau_{n-1}(w)} = \frac{w\tau_{n-1}(w) - \bar{\alpha}_{n-1}}{\tau_{n-1}(w)[1 - w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}]} \tag{2.19}$$

Ora, mas sendo  $|w| = 1$  (o que acarreta  $1 = |w|^2 = w\bar{w}$ ), segue-se por (2.4) que  $1 = |\tau_{n-1}(w)|^2 = \overline{\tau_{n-1}(w)\tau_{n-1}(w)}$ ,  $n \geq 1$ . Consequentemente, a igualdade em (2.19) pode ser reescrita como

$$b_n(w) = \frac{\overline{\tau_{n-1}(w)}[w\tau_{n-1}(w) - \bar{\alpha}_{n-1}]}{1 - w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}} = \frac{w - \overline{\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}}}{1 - w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}} = \frac{1 - \overline{w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}}}{1 - w\tau_{n-1}(w)\alpha_{n-1}}w,$$

o que fornece a primeira igualdade em (2.17). Por outro lado, usando novamente (2.13) e, agora, a segunda equação em (2.8), tem-se

$$\begin{aligned}
b_n(w) &= \frac{\tau_n(w)}{\tau_{n-1}(w)} = \frac{\tau_n(w)}{\frac{\tau_n(w) + \bar{\alpha}_{n-1}}{w[1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}]}} \\
&= \frac{w\tau_n(w)[1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}]}{\tau_n(w) + \bar{\alpha}_{n-1}} = \frac{w[1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}]}{\tau_n(w)[\tau_n(w) + \bar{\alpha}_{n-1}]} \\
&= \frac{1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}}{1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}}w,
\end{aligned}$$

e isto corresponde à segunda igualdade em (2.17).

Apoiados nos resultados a que se chegou a respeito dos polinômios  $P_n(w; z)$ , serão introduzidos, agora, uma classe de polinômios complexos, denotados por  $R_n(z)$ , que, como será visto, também satisfazem a uma relação de recorrência de três termos e serão fundamentais no que se segue no restante deste capítulo. Para tanto, será assumido que  $w = 1$  de modo que as novas sequências consideradas passam a ser  $\{P_n(1; z)\}_{n=0}^\infty$ .

Assim, do Teorema 2.1, obtém-se

$$P_{n+1}(1; z) = [z + b_{n+1}]P_n(1; z) - a_{n+1}P_{n+1}(1; z), \quad n \geq 1 \tag{2.20}$$

com  $P_0(1; z) = 1$  e  $P_1(1; z) = z + b_1$ , onde

$$b_n = \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}, \quad a_{n+1} = [1 + \tau_n\alpha_{n-1}][1 - \overline{\tau_n\alpha_n}], \quad n \geq 1. \tag{2.21}$$

Neste caso, adotou-se a notação  $a_j(1) = a_j$ ,  $j \geq 2$ ,  $b_j(1) = b_j$ ,  $j \geq 1$ , e  $\tau_j(1) = \tau_j$ ,  $j \geq 0$ . Além disso, a partir de (2.17) e (2.18), tem-se

$$b_n = \frac{1 - \overline{\tau_{n-1}\alpha_{n-1}}}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}} = \frac{1 + \tau_n\alpha_{n-1}}{1 + \overline{\tau_n\alpha_{n-1}}}, \quad n \geq 1, \quad (2.22)$$

$$a_{n+1} = \frac{1 - \overline{\tau_n\alpha_n}}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n_1}}(1 - |\alpha_{n-1}|^2) = \frac{1 + \tau_n\alpha\alpha_{n-1}}{1 + \overline{\tau_{n+1}\alpha_n}}(1 - |\alpha_n|^2), \quad n \geq 1. \quad (2.23)$$

Considere agora os polinômios  $R_n(z)$ , de grau  $n$ , definidos por  $R_0(z) = P_0(1; z)$  e

$$R_n(z) = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} [1 - \tau_j\alpha_j]}{\prod_{j=0}^{n-1} [1 - \mathcal{R}e(\tau_j\alpha_j)]} P_n(1; z), \quad n \geq 1. \quad (2.24)$$

Pelo que já foi visto para os polinômios  $P_n(w; z)$ , por essa definição, os polinômios  $R_n(z)$  gozam da propriedade de possuírem  $n$  zeros simples em  $|z| = 1$ , todos distintos de 1. Além disso, a próxima subseção mostrará que estes polinômios satisfazem uma interessante relação de recorrência de três termos cujos coeficientes que aparecem naquela relação são um par de seqüências reais, onde uma delas é também uma seqüência encadeada positiva.

### 2.1.1 Relação de recorrência de três termos para os polinômios

$$R_n(z)$$

**Teorema 2.2.** A seqüência de polinômios  $\{R_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  satisfaz a relação de recorrência de três termos

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com  $R_0(z) = 1$  e  $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$ , onde as seqüências reais  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$  são dadas por

$$c_n = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}, \quad n \geq 1,$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{4} \frac{[1 - |\tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2][1 - \tau_n\alpha_n]^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})][1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)]}, \quad n \geq 1.$$

Além do mais,  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ , onde  $d_{1,n} = d_{n+1}$ , é uma seqüência encadeada positiva com seqüência de parâmetros  $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$  expressa por

$$g_{1,n} = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)]}, \quad n \geq 0.$$

*Demonstração.* Inicialmente, considere a sequência de polinômios  $\{\tilde{R}_n\}_{n=0}^\infty$  definida por

$$\tilde{R}_n(z) = [1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}][1 - \tau_{n-2}\alpha_{n-2}] \cdots [1 - \tau_0\alpha_0]P_n(1; z), \quad n \geq 1, \quad (2.25)$$

em que  $\tilde{R}_0(z) = P_0(1; z) = R_0(z)$ . Em seguida, observe que levando-se em consideração a igualdade (2.20), e a primeira das igualdades em (2.22) e (2.23), tem-se, para  $n \geq 1$ , que

$$P_{n+1}(1; z) = \frac{[(1 - \tau_n\alpha_n)z + (1 - \bar{\tau}_n\bar{\alpha}_n)]}{1 - \tau_n\alpha_n}P_n(1; z) - \frac{(1 - |\alpha_{n-1}|^2)|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{(1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1})(1 - \tau_n\alpha_n)}zP_{n-1}(1; z)$$

Então, combinando-se essas duas últimas igualdades, pode-se escrever

$$\tilde{R}_{n+1}(z) = [(1 - \tau_n\alpha_n)z + (1 - \bar{\tau}_n\bar{\alpha}_n)]\tilde{R}_n(z) - [(1 - |\alpha_{n-1}|^2)|1 - \tau_n\alpha_n|^2]z\tilde{R}_{n-1}(z), \quad (2.26)$$

para  $n \geq 1$ , com  $\tilde{R}_0(z) = P_0(1; z) = R_0(z)$  e

$$\tilde{R}_1(z) = (1 - \tau_0\alpha_0)P_1(1; z) = (1 - \tau_0\alpha_0)(z + b_1) = (1 - \tau_0\alpha_0)z + (1 - \bar{\tau}_0\bar{\alpha}_0), \quad (2.27)$$

uma vez que  $b_1 = (1 - \bar{\tau}_0\bar{\alpha}_0)/(1 - \tau_0\alpha_0)$ .

Agora, como por (2.4) tem-se  $|\tau_n| = 1$  para  $n \geq 0$ , observa-se que  $(1 - |\alpha_{n-1}|^2) = (1 - |\tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2)$ ,  $n \geq 1$ . Além disso, a partir de (2.24) e (2.25), é possível escrever os polinômios  $R_n(z)$  como

$$R_n(z) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1}[1 - \mathcal{R}e(\tau_j\alpha_j)]}\tilde{R}_n(z), \quad n \geq 1, \quad (2.28)$$

onde  $R_0(z) = P_0(1; z) = \tilde{R}_0(z)$ . Assim, substituindo  $\tilde{R}_n(z)$  (dado em termos de  $R_n(z)$  pela igualdade em (2.28)) na fórmula de recorrência (2.26) e levando-se em consideração que  $(1 - |\alpha_{n-1}|^2) = (1 - |\tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2)$ ,  $n \geq 1$ , obtém-se

$$\begin{aligned} R_{n+1}(z) &= \frac{[(1 - \tau_n\alpha_n)z + (1 - \bar{\tau}_n\bar{\alpha}_n)]}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)}R_n(z) \\ &\quad - \frac{[1 - |\tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2]|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)][1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})]}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Mas, observando-se que, para  $n \geq 0$ ,

$$\frac{[(1 - \tau_n\alpha_n)z + (1 - \bar{\tau}_n\bar{\alpha}_n)]}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)} = \left[1 - i \frac{\mathcal{I}m(\tau_n\alpha_n)}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)}\right]z + \left[1 + i \frac{\mathcal{I}m(\tau_n\alpha_n)}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)}\right]$$

e definindo-se, para  $n \geq 1$ ,

$$c_n := \frac{-\mathcal{I}m(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})} \quad \text{e} \quad d_{n+1} := \frac{1}{4} \frac{[1 - |\tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2]|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)][1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})]}, \quad (2.30)$$

então, a igualdade em (2.29), pode ser reescrita como

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com  $R_0(z) = P_0(1; z) = 1$  e, por (2.28) e (2.27),

$$\begin{aligned} R_1(z) &= \frac{1}{1 - \mathcal{R}e(\tau_0\alpha_0)} \tilde{R}_1(z) = \frac{1}{1 - \mathcal{R}e(\tau_0\alpha_0)} [(1 - \tau_0\alpha_0)z + (1 - \bar{\tau}_0\bar{\alpha}_0)] \\ &= \left[ 1 - i \frac{\mathcal{I}m(\tau_0\alpha_0)}{1 - \mathcal{R}e(\tau_0\alpha_0)} \right] z + \left[ 1 + i \frac{\mathcal{I}m(\tau_n\alpha_n)}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)} \right] \\ &= (1 + ic_1)z + (1 - ic_1), \end{aligned}$$

exatamente como se desejava.

Por fim, um cálculo direto, fornece

$$1 - \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})]} = \frac{1 - |\tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2}{2[1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})]}.$$

Conseqüentemente, a expressão dada para  $d_{n+1}$  em (2.30) pode ser reescrita como

$$d_{n+1} = \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})]} \right) \frac{|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{2[1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)]}, \quad n \geq 1.$$

Daí, pondo  $d_{n+1} := d_{1,n}$  e

$$g_{1,n} := \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)]}, \quad n \geq 0, \quad (2.31)$$

vê-se que  $d_{1,n} = (1 - g_{1,n-1})g_{1,n}$  para  $n \geq 1$ , e que  $0 < g_{1,n} < 1$  para  $n \geq 0$ , uma vez que  $|\alpha_n| < 1$  para  $n \geq 0$ ; isto é,  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$  é uma seqüência encadeada positiva.  $\square$

Usando (2.10), com  $w = 1$ , é possível reescrever os coeficientes  $c_n$ ,  $d_n$  e  $g_{1,n}$  do Teorema 2.2 como

$$c_n = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_n\alpha_{n-1})}{1 + \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_{n-1})}, \quad d_{n+1} = \frac{1}{4} \frac{|1 + \tau_n\alpha_{n-1}|^2 [1 - |\tau_{n+1}\alpha_n|^2]}{[1 + \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_{n-1})][1 + \mathcal{R}e(\tau_{n+1}\alpha_n)]}$$

para  $n \geq 1$  e

$$g_{1,n} = \frac{1}{2} \frac{[1 - |\tau_{n+1}\alpha_n|^2]}{[1 + \mathcal{R}e(\tau_{n+1}\alpha_n)]}, \quad n \geq 0.$$

De fato, para obter a nova expressão para  $c_n$  basta tomar a parte imaginária em ambos os membros da igualdade em (2.10) e, após alguns cálculos nesse processo, considerar a expressão já definida para  $c_n$  em (2.30). Já para obter  $g_{1,n}$  tome a parte

real em ambos os membros de (2.10) juntamente com a nova expressão de  $c_n$  obtida, para concluir, por um lado, que

$$\begin{aligned} \frac{1 - |\tau_{n+1}\alpha_n|^2}{1 + \mathcal{R}e(\tau_{n+1}\alpha_n)} &= \frac{1 - |\alpha_n|^2}{1 + \mathcal{R}e(\tau_{n+1}\alpha_n)} \\ &= 1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n) - c_{n+1}\mathcal{I}m(\tau_n\alpha_n). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Por outro lado, considerando-se a antiga expressão para  $c_n$ , dada em (2.30), pode-se verificar que

$$\begin{aligned} \frac{|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)} &= \frac{[\mathcal{R}e(1 - \tau_n\alpha_n)]^2 + [\mathcal{I}m(1 - \tau_n\alpha_n)]^2}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)} \\ &= 1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n) - c_{n+1}\mathcal{I}m(\tau_n\alpha_n). \end{aligned} \quad (2.33)$$

E a nova expressão para  $g_{1,n}$  segue agora de (2.31), (2.32) e (2.33).

Por último, para encontrar a nova expressão para  $d_n$ , basta observar que sendo  $d_n$  uma sequência encadeada positiva, pode também ser obtida através da relação  $d_{1,n} = (1 - g_{1,n-1})g_{1,n}$ ,  $n \geq 1$ , usando-se, agora, a nova  $g_{1,n}$  encontrada.

Além disso, usando-se (2.22) e (2.30), a expressão para  $b_n$  também pode ser dada por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1 - \bar{\tau}_{n-1}\bar{\alpha}_{n-1}}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}} = \frac{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1}) + i\mathcal{I}m(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1}) - i\mathcal{I}m(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})} \\ &= \frac{1 + i\frac{\mathcal{I}m(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}}{1 - i\frac{\mathcal{I}m(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}} = \frac{1 - ic_n}{1 + ic_n}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

isto é,

$$b_n = \frac{1 - ic_n}{1 + ic_n}, \quad n \geq 1.$$

Daí, uma vez que  $b_n$  também é escrito como  $b_n = \tau_n/\tau_{n-1}$  (veja (2.21)), então

$$\tau_n = b_1 b_2 \cdots b_n = \prod_{j=1}^n \frac{1 - ic_j}{1 + ic_j}, \quad n \geq 1,$$

ou seja,  $\tau_n$  pode ser reescrito como

$$\tau_n = \prod_{j=1}^n \frac{1 - ic_j}{1 + ic_j}, \quad n \geq 1, \quad (2.34)$$

onde  $\tau_0 = \tau_0(1) = S_0(1)/S^*(1) = 1$ .

## 2.2 Coeficientes de Verblunsky via par de sequências reais

É bastante conhecido, na literatura, que sequências de polinômios ortogonais mônicos,  $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ , são completamente determinadas pelos coeficientes de Verblunsky,  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ , e vice-versa (veja, por exemplo, [10, 14, 18]). Contudo, além desta relação, há outra na qual uma sequência como  $\{S_n\}_{n=0}^\infty$  pode ser completamente caracterizada por um par de sequências reais do tipo  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty; \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  também um sequência encadeada positiva. Com isso, vê-se que os OPUC estão intimamente ligadas à teoria das sequências encadeadas positivas. Como isto ocorre, é, justamente, o objetivo da presente seção.

**Lema 2.1.** Dadas duas sequências reais  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ , onde as  $g_n$  são tais que  $0 < g_n < 1$  para  $n \geq 1$ , então existe uma única sequência  $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ , onde  $|\beta_n| < 1$  para  $n \geq 0$ , tal que

$$c_n = \frac{-\mathcal{I}m(\beta_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\beta_{n-1})} \quad \text{e} \quad g_n = \frac{1 - |\beta_{n-1}|^2}{2[1 - \mathcal{R}e(\beta_{n-1})]}, \quad n \geq 1.$$

Explicitamente, temos

$$\beta_{n-1} = \frac{1 - 2g_n - ic_n}{1 - ic_n}, \quad n \geq 1.$$

*Demonstração.* Deseja-se encontrar uma sequência  $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ , com  $|\beta_n| < 1$  para  $n \geq 0$ , tais que os pontos  $\beta_{n-1} = (\mathcal{R}e(\beta_{n-1}), \mathcal{I}m(\beta_{n-1}))$ , cumpram

$$c_n = \frac{-\mathcal{I}m(\beta_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\beta_{n-1})} \quad \text{e} \quad g_n = \frac{1 - |\beta_{n-1}|^2}{2[1 - \mathcal{R}e(\beta_{n-1})]},$$

onde  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  são sequências reais dadas, com  $0 < g_n < 1$  para  $n \geq 1$ . Assim, como as igualdades acima para  $c$  e  $g_n$  fornecem

$$\mathcal{I}m(\beta_{n-1}) = c_n(\mathcal{R}e(\beta_{n-1}) - 1) \quad \text{e} \quad 2g_n(1 - \mathcal{R}e(\beta_{n-1})) = (1 - \beta_{n-1})\overline{(1 - \beta_{n-1})},$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{I}m(\beta_{n-1}) = c_n(\mathcal{R}e(\beta_{n-1}) - 1) \quad \text{e} \quad [\mathcal{R}e(\beta_{n-1}) - (1 - g_n)]^2 + \mathcal{I}m^2(\beta_{n-1}) = g_n^2,$$

então, escrevendo  $\beta_{n-1} = (\mathcal{R}e(\beta_{n-1}), \mathcal{I}m(\beta_{n-1})) = (x, y)$ ,  $n \geq 1$ , resulta que as coordenadas dos pontos  $\beta_{n-1}$  devem satisfazer as equações

$$y = c_n(x - 1) \quad \text{e} \quad [x - (1 - g_n)]^2 + y^2 = g_n^2, \quad (2.35)$$

que representam geometricamente, respectivamente, uma reta e uma circunferência. Dessa forma, substituindo o valor de  $y$ , dado na primeira equação de (2.35), na segunda equação, também de (2.35), chega-se em

$$(1 + c_n^2)x^2 - 2(1 + c_n^2 - g_n)x + (1 + c_n^2 - 2g_n) = 0$$

Agora, resolvendo esta última igualdade em  $x$ , resulta que  $x = 1$  (implicando em  $y = c_n(1 - 1) = 0$ ) ou  $x = 1 - 2g_n/(1 + c_n^2)$ . Note que, embora o ponto  $\beta_{n-1} = (1, 0)$  resolva as equações em (2.35), ele não pode ser considerado, pois deve-se ter  $|\beta_{n-1}| < 1$ ; logo, para satisfazer está última condição só resta o segundo valor para  $x$  que, substituído em  $y = c_n(x - 1)$  produz  $y = -2c_n g_n/(1 + c_n^2)$ . Portanto,

$$\beta_{n-1} = x + iy = \frac{1 - 2g_n - ic_n}{1 - ic_n}, \quad n \geq 1,$$

que, por construção, satisfaz  $|\beta_n| < 1$ , para  $n \geq 0$ , pois  $(x, y) = (\mathcal{R}e(\beta_{n-1}), \mathcal{I}m(\beta_{n-1})) = \beta_{n-1}$  obedece a equação da circunferência, dada em (2.35), de centro  $(1 - g_n, 0)$  e raio  $g_n$ , sendo  $g_n$  tal que  $0 < g_n < 1$  para  $n \geq 1$ .  $\square$

Como se pede ver, a sequência de números complexos encontrada  $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$  pode ser tomada para ser uma sequência de coeficientes de Verblunsky associada a uma dada medida,  $\mu$ , suportada no círculo unitário, já que  $|\beta_n| < 1$  para  $n \geq 0$ ; além disso, como a sequência  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  satisfaz  $0 < g_n < 1$  para  $n \geq 1$ , esta pode ser usada para determinar uma sequência de parâmetros para uma sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$  (veja Definição 1.12). Desse modo, fica provada uma relação entre coeficientes de Verblunsky e sequências encadeadas positivas, onde, neste caso, pelo Lema 2.1, é possível recuperar a sequência de coeficientes de Verblunsky  $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$  uma vez que a sequência real  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e a sequência de parâmetros  $\{g_{1,n}\}_{n=0}^\infty = \{g_n\}_{n=1}^\infty$  (da sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ ) são conhecidas.

Portanto, como é conhecido que dada uma sequência de coeficientes de Verblunsky  $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$  pode-se encontrar, de modo único, uma sequência de OPUC mônica com relação a uma dada medida  $\mu$  (veja [14]), o Lema 2.1 garante que dado um par de sequências reais da forma  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty; \{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$  é encadeada positiva, pode-se obter também de modo único uma sequência de OPUC mônica. Com isso, segue-se a relação:

$$\{\{c_n\}_{n=1}^\infty; \{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty\} \implies \{\beta_n\}_{n=0}^\infty \iff \mu \iff \{S_n\}_{n=0}^\infty \quad (2.36)$$

Mais adiante, novas informações sobre a relação entre sequência de coeficientes de Verblunsky  $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$  e par de sequências reais da forma  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty; \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva serão fornecidos, onde a caracterização em (2.36) será completa no sentido que para a primeira implicação valerá também a volta, isto é

$$\{\{c_n\}_{n=1}^\infty; \{d_n\}_{n=1}^\infty\} \iff \{\beta_n\}_{n=0}^\infty.$$

Suponha, agora, que a medida  $\mu$ , considerada na abertura do presente capítulo, tenha um salto  $\delta$  ( $0 \leq \delta < 1$ ) em  $z = 1$ . Assim, é possível definir a família de medidas,  $\mu^{(t)}$ , associadas à medida  $\mu$ , usando a seguinte transformação de Uvarov:

$$\int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\mu^{(t)}(\zeta) = \frac{1-t}{1-\delta} \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) d\mu(\zeta) + \frac{t-\delta}{1-\delta} f(1) \quad (2.37)$$

Pondo  $\mu_n^{(t)} = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n} d\mu^{(t)}(\zeta)$  pode-se escrever,

$$\mu_n^{(t)} = \frac{1-t}{1-\delta} \mu_n + \frac{t-\delta}{1-\delta}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.38)$$

A medida  $\mu^{(t)}$ , com  $0 \leq t \leq 1$ , é também uma medida de probabilidade não-trivial com salto  $t$  em  $z = 1$ . Além disso, como por (2.38), tem-se  $\mu_n^{(\delta)} = \mu_n$ , para  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ , então  $\mu^{(\delta)} = \mu$ , isto é a medida  $\mu$  é exatamente uma das medidas da família de Uvarov (aquela que tem salto  $t = \delta$  em  $z = 1$ ).

Segundo Costa et al. [7], na nomenclatura corrente, a medida  $\mu^{(t)}$ , com  $0 \leq t \leq 1$ , definida em (2.37), tem um ponto puro em  $z = 1$  com comprimento de massa  $t$  nesse ponto.

Denota-se, daqui em diante,  $S_n^{(t)}$  e  $\alpha_n^{(t)}$  como sendo, respectivamente, os OPUC mônicos e os coeficientes de Verblunsky associados à família  $\mu^{(t)}$ . Com isso, resulta que  $S_n^{(\delta)} = S_n$  e  $\alpha_n^{(\delta)} = \alpha_n$  para  $n \geq 0$ , pois como  $\mu^{(\delta)}$  gera  $S_n^{(\delta)}$  (mônico e único) e  $\mu$  gera  $S_n$  (mônico e único), basta usar que  $\mu^{(t)} = \mu$  para chegar-se a igualdade  $S_n^{(\delta)} = S_n$ . Consequentemente, como  $\overline{S_n^{(\delta)}(0)} = \overline{S_n(0)}$ , resulta que  $\alpha_n^{(\delta)} = \alpha_n$ .

Seja agora  $P_n^{(t)}(1; z)$  os polinômios núcleos mônicos de grau  $n$  em  $w = 1$  associados à medida  $\mu^{(t)}$  e dados, como em (2.7), por

$$P_n^{(t)}(1; z) = \frac{1}{z-1} \frac{S_{n+1}^{(t)}(z) - \tau_{n+1} S_{n+1}^{*(t)}(z)}{1 + \tau_{n+1}^{(t)} \alpha_n^{(t)}}, \quad n \geq 0,$$

em que  $\tau_n^{(t)} = S_n^{(t)}(1)/S_n^{*(t)}(1)$ . Com esta terminologia adotada, pode-se, então, enunciar o seguinte resultado:

**Lema 2.2.** Para todo  $t$  tal que  $0 \leq t \leq 1$  tem-se

$$P_n^{(t)}(1; z) = P_n(1; z), \quad \tau_n^{(t)} = \tau_n, \quad n \geq 0, \quad (2.39)$$

e

$$\frac{[\kappa_n^{(t)}]^{-2}}{1-t} [1 - \tau_n \alpha_n^{(t)}] = \frac{[\kappa_n]^{-2}}{1-\delta} [1 - \tau_n \alpha_n], \quad n \geq 0. \quad (2.40)$$

*Demonstração.* Com efeito, note que

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} P_n^{(t)}(1; z)(1-z) d\mu^{(t)}(z) = \frac{1}{1 + \tau_{n+1}^{(t)} \alpha_n^{(t)}} \int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} [\tau_{n+1}^{(t)} S_{n+1}^{*(t)}(z) - S_{n+1}^{(t)}] d\mu^{(t)}(z)$$

Pelas propriedades de ortogonalidade de  $\{S_{n+1}^{(t)}\}$  e  $\{S_{n+1}^{*(t)}\}$ , vistas na Seção 1.2 do capítulo anterior, e em virtude das igualdades em (1.19) e (2.10), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} P_n^{(t)}(1; z)(1-z) d\mu^{(t)}(z) &= -\frac{1}{1 + \tau_{n+1}^{(t)} \alpha_n^{(t)}} \int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} S_{n+1}^{*(t)}(z) d\mu^{(t)}(z) \\ &= -\frac{[\kappa_{n+1}^{(t)}]^{-2}}{1 + \tau_{n+1}^{(t)} \alpha_n^{(t)}} \\ &= -\frac{1 - |\alpha_n|^2 [\kappa_n^{(t)}]^{-2}}{1 + \tau_{n+1}^{(t)} \alpha_n^{(t)}} \\ &= -[1 - \tau_n^{(t)} \alpha_n^{(t)}] [\kappa_n^{(t)}]^{-2}, \quad \text{se } j = -1, \end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} P_n^{(t)}(1; z)(1-z) d\mu^{(t)}(z) = 0, \quad \text{se } 0 \leq j \leq n-1$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} P_n^{(t)}(1; z)(1-z) d\mu^{(t)}(z) &= \frac{1}{1 + \tau_{n+1}^{(t)} \alpha_n^{(t)}} \int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} \tau_{n+1}^{(t)} S_{n+1}^{*(t)}(z) d\mu^{(t)}(z) \\ &= \frac{\tau_{n+1}^{(t)}}{1 + \tau_{n+1}^{(t)} \alpha_n^{(t)}} [\kappa_{n+1}^{(t)}]^{-2} \\ &= \tau_{n+1}^{(t)} [1 - \tau_n^{(t)} \alpha_n^{(t)}] [\kappa_n^{(t)}]^{-2}, \quad \text{se } j = n, \end{aligned}$$

onde  $\int_{\mathcal{C}} z^{-j} S_j^{(t)}(z) d\mu^{(t)} = [\kappa_j^{(t)}]^{-2} = \Delta_j / \Delta_{j-1}$ . Com isso, pode-se escrever

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} P_n^{(t)}(1; z)(1-z) d\mu^{(t)}(z) = \begin{cases} \check{\gamma}_n^{(t)}, & \text{se } j = -1, \\ 0, & \text{se } 0 \leq j \leq n-1 \\ \hat{\gamma}_n^{(t)}, & \text{se } j = n \end{cases} \quad (2.41)$$

para todo  $n \geq 1$ , onde  $\hat{\gamma}_n^{(t)} = -\tau_{n+1}^{(t)} \check{\gamma}_n^{(t)}$ ,  $\check{\gamma}_n^{(t)} = -[1 - \tau_n^{(t)} \alpha_n^{(t)}] [\kappa_n^{(t)}]^{-2}$  e  $[\kappa_n^{(t)}]^{-2} = \int_{\mathcal{C}} z^{-n} S_{n+1}^{(t)}(z) d\mu^{(t)}$ .

Note ainda que, para  $n = 0$ , é possível definir  $\check{\gamma}_0^{(t)}$  e  $\hat{\gamma}_0^{(t)}$  os quais satisfazem

$$\check{\gamma}_0^{(t)} := \int_{\mathcal{C}} z^{-j} P_0^{(t)}(1; z)(1-z) d\mu^{(t)}(z) = - \left[ 1 - \tau_0^{(t)} \alpha_0^{(t)} \right] [\kappa_0^{(t)}]^{-2}, \quad (2.42)$$

$$\hat{\gamma}_0^{(t)} := \int_{\mathcal{C}} P_0^{(t)}(1; z)(1-z) d\mu^{(t)}(z) = -\tau_1^{(t)} \check{\gamma}_0^{(t)}, \quad (2.43)$$

onde  $[\kappa_0^{(t)}]^{-2} = \mu_0 = 1$ . Além disso, uma vez que, para todo  $n \geq 0$ , tem-se  $|\tau_n^{(t)}| = 1$  e  $|\alpha_n^{(t)}| < 1$ , então claramente os números  $\check{\gamma}_n^{(t)}$  e  $\hat{\gamma}_n^{(t)}$  são diferentes de zero para todo  $n \geq 0$ .

Agora, definindo-se a sequência dupla  $\{\nu_n^{(t)}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ , de momentos modificados, por

$$\nu_n^{(t)} = \int_{\mathcal{C}} z^{-n}(1-z) d\mu^{(t)}(z) = \mu_n^{(t)} - \mu_{n-1}^{(t)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

então, a partir do fato que  $\mu_{-n}^{(t)} = \bar{\mu}_n^{(t)}$ ,  $n \geq 0$ , tem-se

$$\nu_n^{(t)} = -\bar{\nu}_{-n+1}^{(t)} \quad \text{e} \quad [H_n^{(-n+2)}]^{(t)} = (-1)^n \overline{[H_n^{(-n+1)}]^{(t)}}, \quad n \geq 0,$$

onde  $[H_0^{(m)}]^{(t)} = 1$  e  $[H_n^{(m)}]^{(t)}$  representa o determinante de Hankel

$$\begin{vmatrix} \nu_m^{(t)} & \nu_{m+1}^{(t)} & \cdots & \nu_{m+n-1}^{(t)} \\ \nu_{m+1}^{(t)} & \nu_{m+2}^{(t)} & \cdots & \nu_{m+n}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{m+n-1}^{(t)} & \nu_{m+n}^{(t)} & \cdots & \nu_{m+2n-2}^{(t)} \end{vmatrix}.$$

Conseqüentemente, usando a ortogonalidade em (2.41) e considerando o sistema de equações sobre os coeficientes do polinômio mônico  $P_n^{(t)}(1; z)$  (como feito na Seção 1.2), obtém-se

(a)

$$[H_{n+1}^{(-n)}]^{(t)} = (-1)^n \hat{\gamma}_n^{(t)} \overline{[H_n^{(-n+1)}]^{(t)}}, \quad n \geq 1,$$

com  $[H_1^{(0)}]^{(t)} = \nu_0^{(t)} = 1 + \bar{\alpha}_0$ , de onde se conclui que os determinantes de Hankel  $[H_{n+1}^{(-n)}]^{(t)}$ ,  $n \geq 0$ , são todos diferentes de zero.

(b) Os polinômios núcleos mônicos  $P_n^{(t)}(1; z)$  com respeito à medida  $\mu^{(t)}$  são dados, unicamente, por

$$P_n^{(t)}(1; z) = \frac{1}{[H_n^{(-n+1)}]^{(t)}} \begin{vmatrix} \bar{\nu}_{-n+1}^{(t)} & \bar{\nu}_{-n+2}^{(t)} & \cdots & \bar{\nu}_1^{(t)} \\ \bar{\nu}_{-n+2}^{(t)} & \bar{\nu}_{-n+3}^{(t)} & \cdots & \bar{\nu}_2^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\nu}_0^{(t)} & \bar{\nu}_1^{(t)} & \cdots & \bar{\nu}_n^{(t)} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \quad (2.44)$$

onde

$$\nu_j^{(t)} = \mu_j^{(t)} - \mu_{j-1}^{(t)} = \frac{1-t}{1-\delta}(\mu_j - \mu_{j-1}) = \frac{1-t}{1-\delta}\nu_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.45)$$

com

$$[H_n^{(-n+1)}]^{(t)} = \begin{vmatrix} \nu_{-n+1}^{(t)} & \nu_{-n+2}^{(t)} & \cdots & \nu_0^{(t)} \\ \nu_{-n+2}^{(t)} & \nu_{-n+3}^{(t)} & \cdots & \nu_1^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_0^{(t)} & \nu_1^{(t)} & \cdots & \nu_{n-1}^{(t)} \end{vmatrix}, \quad n \geq 1. \quad (2.46)$$

Observe que de (2.45) e (2.46), tem-se também que, para  $n \geq 1$ ,

$$[H_n^{(-n+1)}]^{(t)} = \left(\frac{1-t}{1-\delta}\right)^n \begin{vmatrix} \nu_{-n+1} & \nu_{-n+2} & \cdots & \nu_0 \\ \nu_{-n+2} & \nu_{-n+3} & \cdots & \nu_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_0 & \nu_1 & \cdots & \nu_{n-1} \end{vmatrix} = \left(\frac{1-t}{1-\delta}\right)^n H_n^{(-n+1)},$$

e como, de (2.45),  $\bar{\nu}_j^{(t)} = (1-t)/(1-\delta)\bar{\nu}_j$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , resulta de (2.44) que

$$P_n^{(t)}(1; z) = \frac{1}{\left(\frac{1-t}{1-\delta}\right)^n \frac{1}{H_n^{(-n+1)}}} \left(\frac{1-t}{1-\delta}\right)^n \begin{vmatrix} \bar{\nu}_{-n+1} & \bar{\nu}_{-n+2} & \cdots & \bar{\nu}_1 \\ \bar{\nu}_{-n+2} & \bar{\nu}_{-n+3} & \cdots & \bar{\nu}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\nu}_0 & \bar{\nu}_1 & \cdots & \bar{\nu}_n \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1,$$

ou seja,

$$P_n^{(t)}(1; z) = \frac{1}{H^{(-n+1)}} \begin{vmatrix} \bar{\nu}_{-n+1} & \bar{\nu}_{-n+2} & \cdots & \bar{\nu}_1 \\ \bar{\nu}_{-n+2} & \bar{\nu}_{-n+3} & \cdots & \bar{\nu}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\nu}_0 & \bar{\nu}_1 & \cdots & \bar{\nu}_n \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix} = P_n(1; z), \quad n \geq 1,$$

o que prova a primeira igualdade em (2.39), já que  $P_0^{(t)}(1; z) = 1 = P_0(1; z)$ .

Para provar a segunda igualdade em (2.39), observe que, utilizando-se (2.37) e a primeira igualdade já provada em (2.39), obtém-se, para  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} P_n^{(t)}(1; z)(1-z) d\mu^{(t)}(z) &= \frac{1-t}{1-\delta} \int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} P_n^{(t)}(1; z)(1-z) d\mu(z) \\ &= \frac{1-t}{1-\delta} \int_{\mathcal{C}} z^{-n+j} P_n(1; z)(1-z) d\mu(z), \end{aligned}$$

ou, equivalentemente, para  $n \geq 1$ , por (2.41),

$$\tilde{\gamma}_n^{(t)} = \frac{1-t}{1-\delta} \tilde{\gamma}_n, \quad \text{se } j = -1,$$

$$\hat{\gamma}_n^{(t)} = \frac{1-t}{1-\delta} \hat{\gamma}_n, \quad \text{se } j = n.$$

Assim, das duas igualdades acima e do fato que  $\hat{\gamma}_n^{(t)} = -\tau_{n+1}^{(t)} \tilde{\gamma}_n^{(t)}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , tem-se

$$-\tau_{n+1}^{(t)} \left[ \frac{1-t}{1-\delta} \tilde{\gamma}_n \right] = -\tau_{n+1}^{(t)} \tilde{\gamma}_n^{(t)} = \hat{\gamma}_n^{(t)} = \frac{1-t}{1-\delta} \hat{\gamma}_n = \frac{1-t}{1-\delta} (-\tau_{n+1} \tilde{\gamma}_n),$$

e, conseqüentemente,  $\tau_{n+1}^{(t)} = \tau_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , o que prova a segunda igualdade em (2.39), já que  $\tau_0^{(t)} = 1 = \tau_0$  e, de modo análogo ao que se fez acima, utilizando-se, agora, de  $\tilde{\gamma}_0^{(t)}$  e  $\hat{\gamma}_0^{(t)}$ , definidos, respectivamente, em (2.42) e (2.43), pode-se verificar que  $\tau_1^{(t)} = \tau_1$ .

Por fim, note que, para todo  $n \geq 0$ , sendo  $\tau_n^{(t)} = \tau_n$ ,  $\tilde{\gamma}_n^{(t)} = - \left[ 1 - \tau_n^{(t)} \alpha_n^{(t)} \right] [\kappa_n^{(t)}]^{-2}$  e  $\tilde{\gamma}_n^{(t)} = (1-t)/(1-\delta) \tilde{\gamma}_n$ , se  $j = -1$ , valem as igualdades

$$\left[ 1 - \tau_n \alpha_n^{(t)} \right] [\kappa_n^{(t)}]^{-2} = \left[ 1 - \tau_n^{(t)} \alpha_n^{(t)} \right] [\kappa_n^{(t)}]^{-2} = -\tilde{\gamma}_n^{(t)} = \frac{1-t}{1-\delta} [-\tilde{\gamma}_n] = \frac{1-t}{1-\delta} \left[ 1 - \tau_n \alpha_n \right] [\kappa_n]^{-2}$$

de onde se concluí que

$$\frac{[\kappa_n^{(t)}]^{-2}}{1-t} \left[ 1 - \tau_n \alpha_n^{(t)} \right] = \frac{[\kappa_n]^{-2}}{1-\delta} \left[ 1 - \tau_n \alpha_n \right], \quad n \geq 0,$$

e isto completa a prova do lema. □

Observe que, a partir do Lema 2.2, tem-se

$$\frac{1 - \tau_n \alpha_n^{(t)}}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n^{(t)})} = \frac{\left( \frac{1-t}{1-\delta} \right) \frac{[\kappa_n]^{-2}}{[\kappa_n^{(t)}]^{-2}} \left[ 1 - \tau_n \alpha_n \right]}{\left( \frac{1-t}{1-\delta} \right) \frac{[\kappa_n]^{-2}}{[\kappa_n^{(t)}]^{-2}} \left[ 1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n) \right]} = \frac{1 - \tau_n \alpha_n}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n)} \quad (2.47)$$

e

$$\frac{-\mathcal{I}m(\tau_n \alpha_n^{(t)})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n^{(t)})} = \frac{\left( \frac{1-t}{1-\delta} \right) \frac{[\kappa_n]^{-2}}{[\kappa_n^{(t)}]^{-2}} [-\mathcal{I}m(\tau_n \alpha_n)]}{\left( \frac{1-t}{1-\delta} \right) \frac{[\kappa_n]^{-2}}{[\kappa_n^{(t)}]^{-2}} \left[ 1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n) \right]} = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_n \alpha_n)}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n)}, \quad (2.48)$$

para todo  $n \geq 0$ . Logo, considerando-se os polinômios  $R_n(z)$ , definidos em (2.24), e as sequências  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ , fornecidas a partir do Teorema 2.2, as igualdades em

(2.39), (2.47) e (2.48) implicam que, para  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
R_n^{(t)}(z) &= \frac{\prod_{j=0}^{n-1} [1 - \tau_j^{(t)} \alpha_j^{(t)}]}{\prod_{j=0}^{n-1} [1 - \mathcal{R}e(\tau_j \alpha_j^{(t)})]} P_n^{(t)}(1; z) \\
&= \frac{\prod_{j=0}^{n-1} [1 - \tau_j \alpha_j^{(j)}]}{\prod_{j=0}^{n-1} [1 - \mathcal{R}e(\tau_j \alpha_j^{(t)})]} P_n(1; z) \\
&= \frac{\prod_{j=0}^{n-1} [1 - \tau_n \alpha_n]}{\prod_{j=0}^{n-1} [1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n)]} P_n(1; z) \\
&= R_n(z)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

e

$$c_n^{(t)} = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_{n-1}^{(t)} \alpha_{n-1}^{(t)})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}^{(t)} \alpha_n^{(t)})} = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_{n-1} \alpha_{n-1}^{(t)})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1} \alpha_n^{(t)})} = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_{n-1} \alpha_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1} \alpha_n)} = c_n. \tag{2.50}$$

Além disso, considerando-se a relação de recorrência de três termos, obtida no Teorema 2.2, para os polinômios  $R_n^{(t)}(z)$ , com coeficientes  $c_n^{(t)}$  e  $d_{n+1}^{(t)}$ , usando as igualdades obtidas em (2.49) e (2.50), e comparando-a com a mesma relação de recorrência, agora, para os polinômios  $R_n(z)$ , com coeficientes  $c_n$  e  $d_{n+1}$ , pode-se concluir que

$$d_{n+1}^{(t)} = \frac{1}{4} \frac{[1 - |\tau_{n-1} \alpha_{n-1}^{(t)}|^2][1 - \tau_n \alpha_n^{(t)}]^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1} \alpha_{n-1}^{(t)})][1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n^{(t)})]} = d_{n+1} = d_{1,n}, \quad n \geq 1, \tag{2.51}$$

onde na primeira igualdade acima também leva-se em consideração o fato que  $\tau_n^{(t)} = \tau_n$ , para todo  $n \geq 0$ .

**Observação 2.1.** A partir da igualdade obtida em (2.41) pode-se dizer também que os polinômios  $P_n(1; z)$  estão relacionados com os *polinômios ortogonais de Laurent* considerados por, por exemplo, nos trabalhos de Hendriksen e Van Rossum [9] e Jones e Thron [12].

No resultado que segue serão fornecidas mais informações sobre as sequências de parâmetros da sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$  dada no Teorema 2.2.

**Teorema 2.3.** Para  $0 \leq t < 1$ , seja

$$g_{1,n}^{(t)} := \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_n \alpha_n^{(t)}|^2}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n^{(t)})}, \quad n \geq 0.$$

Então  $\{g_{1,n}^{(t)}\}_{n=0}^{\infty}$  é uma sequência de parâmetro para a sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$  dada no Teorema 2.2. Se  $0 \leq t_1 < t_2 < 1$ , então

$$0 < g_{1,n}^{(t_2)} < g_{1,n}^{(t_1)} < 1, \quad n \geq 0,$$

e, em particular,  $\{g_{1,n}^{(0)}\}_{n=0}^{\infty}$  é a sequência de parâmetro maximal de  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ .

*Demonstração.* Uma vez que pelo Lema 2.2 tem-se  $\tau_n^{(t)} = \tau_n$ ,  $n \geq 0$ , então procedendo-se exatamente como na prova do Teorema 2.2, pode-se mostrar que  $\{g_{1,n}^{(t)}\}_{n=0}^\infty$ , dada por

$$g_{1,n}^{(t)} = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_n^{(t)} \alpha_n^{(t)}|^2}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n^{(t)} \alpha_n^{(t)})} = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_n \alpha_n^{(t)}|^2}{1 - \mathcal{R}e(\tau_n \alpha_n^{(t)})}$$

é uma sequência de parâmetros para a sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}^{(t)}\}_{n=1}^\infty = \{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ , onde a última igualdade entre as sequências encadeadas  $\{d_{1,n}^{(t)}\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$  segue de (2.51).

Agora, para que se tenha  $0 < g_{1,n}^{(t_2)} < g_{1,n}^{(t_1)} < 1$  quando  $0 \leq t_1 < t_2 < 1$ , recorrendo-se ao Teorema 1.8, observa-se que é suficiente verificar que  $0 < g_{1,0}^{(t_2)} < g_{1,0}^{(t_1)} < 1$ . Para isto, desde que  $[\kappa_0^{(t_1)}]^{-2} = [\kappa_0^{(t_2)}]^{-2} = 1$ , basta notar que o Lema 2.2 (igualdade em (2.40)) fornece

$$1 - \tau_0 \alpha_0^{(t_2)} = \frac{1 - t_2}{1 - t_1} \left[ 1 - \tau_0 \alpha_0^{(t_1)} \right],$$

donde segue que

$$g_{1,0}^{(t_2)} = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_0 \alpha_0^{(t_2)}|^2}{1 - \mathcal{R}e(\tau_0 \alpha_0^{(t_2)})} = \frac{1 - t_2}{1 - t_1} \left[ \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_0 \alpha_0^{(t_1)}|^2}{1 - \mathcal{R}e(\tau_0 \alpha_0^{(t_1)})} \right] = \frac{1 - t_2}{1 - t_1} g_{1,0}^{(t_1)} < g_{1,0}^{(t_1)}, \quad (2.52)$$

uma vez que  $0 \leq t_1 < t_2 < 1$  implica em

$$\frac{1 - t_2}{1 - t_1} < 1.$$

Além disso, tomando  $t_2 < 1$  resulta que a medida  $\mu^{(t_2)}$  está bem definida (tal medida é uma das medidas da família de Uvarov, dada em (2.37)), donde segue que  $|\alpha_n^{(t_2)}| < 1$  para  $n \geq 0$ . Consequentemente, pela definição de  $g_{1,0}^{(t_2)}$ , conclui-se que  $0 < g_{1,0}^{(t_2)}$ . Por fim, a desigualdade  $g_{1,n}^{(t_1)} < 1$ , segue do fato de  $\{g_{1,n}^{(t)}\}_{n=0}^\infty$ , para todo  $0 \leq t < 1$ , ser uma sequência de parâmetros para  $\{d_{1,n}^{(t)}\}_{n=1}^\infty$ .

Resta agora apenas mostrar que  $\{g_{1,n}^{(0)}\}_{n=0}^\infty$  é a sequência maximal de parâmetros de  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ . Suponha, por absurdo, que  $\{g_{1,n}^{(0)}\}_{n=0}^\infty$  não é a sequência maximal de parâmetros de  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ . Então, existe uma sequência de parâmetros para  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ , denotada aqui por  $\{\tilde{g}_n\}_{n=0}^\infty$ , tal que

$$g_{1,n}^{(0)} < \tilde{g}_n < 1, \quad n \geq 0. \quad (2.53)$$

Logo, como, por (2.34),  $\tau_0 = 1$  e  $\tau_n = \prod_{j=1}^n \frac{1 - ic_j}{1 + ic_j}$ ,  $n \geq 1$  (onde  $|\tau_n| = 1$ , para todo  $n \geq 0$ ), obtém-se, pelo Lema 2.1, que existe uma única sequência  $\{\tilde{\alpha}_n\}_{n=0}^\infty$ , com  $|\tilde{\alpha}_n| < 1$

para todo  $n \geq 0$ , de modo que

$$c_n = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_{n-1}\tilde{\alpha}_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\tilde{\alpha}_{n-1})} \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{n-1} = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_{n-1}\tilde{\alpha}_{n-1}|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\tilde{\alpha}_{n-1})]}, \quad n \geq 1.$$

Então, pelo Teorema 1.6, existe uma única medida de probabilidade não-trivial  $\tilde{\mu}$  para a qual  $\{\tilde{\alpha}_n\}_{n=0}^\infty$  é a sua respectiva sequência de coeficientes de Verblunsky e para a qual  $\tilde{P}_n(1, z) = P_n(1; z)$  são seus respectivos polinômios núcleos mônicos em  $z = 1$ . Para verificar a igualdade nessa última afirmação basta observar, inicialmente, que é possível mostrar que  $\tilde{\tau}_n = \tau_n$  para todo  $n \geq 0$  (o que implicará em  $\{\tilde{g}_n\}_{n=0}^\infty$  ser uma sequência de parâmetros para  $\{\tilde{d}_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ , e como  $\{\tilde{g}_n\}_{n=0}^\infty$  também é uma sequência de parâmetros para  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ , então  $\tilde{d}_{n+1} = \tilde{d}_{1,n} = d_{1,n} = d_{n+1}$  para  $n \geq 1$ ) e  $\tilde{c}_n = c_n$ , para todo  $n \geq 1$ . Depois, é suficiente utilizar a relação de recorrência de três termos, obtida no Teorema 2.2, nos polinômios  $\tilde{R}_n(z)$  e  $R_n(z)$  para concluir que  $\tilde{R}_n(z) = R_n(z)$ , para todo  $n \geq 0$ .

A medida  $\tilde{\mu}$  deve ter um salto não-negativo, denotado aqui por  $\tilde{\delta}$ , em  $z = 1$ . Com isso, procedendo-se como antes, é possível obter uma medida,  $\tilde{\mu}^{(t)}$ , com um salto positivo  $t$  ( $t > \tilde{\delta}$ ) em  $z = 1$  ( $\tilde{\mu}^{(t)}$  é uma das medidas da família de Uvarov, definidas em (2.37), associadas à medida  $\tilde{\mu}$ ), cujos os coeficientes de Verblunsky,  $\tilde{\alpha}_n^{(t)}$ , produzem a mesma sequência de parâmetros  $g_{1,n}^{(0)}$ . [Para verificar esta última afirmação, note que, usando a expressão para  $\tilde{g}_n$  associada à sequência  $\{\tilde{\beta}_n\}_{n=0}^\infty$ , onde  $\tilde{\beta}_n = \tilde{\tau}_n\tilde{\alpha}_n$ ,  $n \geq 0$ , dada pelo Lema 2.1, e utilizando a desigualdade em (2.53), obtém-se

$$\tilde{g}_{1,n}^{(\tilde{\delta})} = \tilde{g}_{1,n} = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tilde{\tau}_n\tilde{\alpha}_n|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tilde{\tau}_n\tilde{\alpha}_n)]} = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_n\tilde{\alpha}_n|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_n\tilde{\alpha}_n)]} = \tilde{g}_n > g_{1,n}^{(0)}, \quad n \geq 0.$$

Em particular, tem-se  $\tilde{g}_{1,0}^{(\tilde{\delta})} > g_{1,0}^{(0)}$ . Daí, como  $t > \tilde{\delta}$ , e  $\tilde{g}_{1,n}^{(\tilde{\delta})}$  assim como  $\tilde{g}_{1,n}^{(t)}$  são sequências de parâmetros para a sequência encadeada positiva  $\{\tilde{d}_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ , onde  $\tilde{d}_{1,n} = d_{1,n}$  para todo  $n \geq 1$ , então pela primeira parte do que se provou no presente teorema, conclui-se que  $\tilde{g}_{1,0}^{(\tilde{\delta})} > \tilde{g}_{1,0}^{(t)}$  e, conseqüentemente, é possível obter um  $t$  ( $t > \tilde{\delta}$ ) tal que  $\tilde{g}_{1,0}^{(t)} = \tilde{g}_{1,0}^{(0)}$ . Esta última igualdade juntamente com a definição de sequência encadeada positiva e o fato de que  $\tilde{g}_{1,n}^{(t)}$  e  $\tilde{g}_{1,0}^{(0)}$  são, ambas, sequências de parâmetros para a sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$  garantem que  $\tilde{g}_{1,n}^{(t)} = \tilde{g}_{1,n}^{(0)}$  para todo  $n \geq 0$ .]

Finalmente, usando mais uma vez o Lema 2.1, como as sequências  $\{\tilde{c}_n^{(t)}\}_{n=1}^\infty = \{\tilde{c}_n\}_{n=1}^\infty = \{c_n\}_{n=1}^\infty = \{c_n^{(0)}\}_{n=1}^\infty$  e  $\{g_{1,n}^{(t)}\}_{n=0}^\infty = \{g_{1,n}^{(0)}\}_{n=0}^\infty$  definem unicamente os correspondentes coeficientes de Verblunsky, chega-se na contradição de ter-se duas medidas  $\mu^{(0)}$  e  $\tilde{\mu}^{(t)}$ , uma com salto nulo e a outra com salto positivo  $t$  em  $z = 1$ , com os mesmos coefi-

entes de Verblunsky. Portanto,  $\{g_{1,n}^{(0)}\}_{n=0}^{\infty}$  deve ser a sequência maximal de parâmetros de  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$  e isto finaliza a prova do teorema.  $\square$

**Observação 2.2.** A partir da igualdade em (2.52), fazendo-se  $t_2 = t$  e  $t_1 = 0$ , pode-se escrever

$$g_{1,0}^{(t)} = (1 - t)g_{1,0}^{(0)} := (1 - t)M_{1,0}, \quad (2.54)$$

onde  $\{g_{1,n}^{(0)}\}_{n=0}^{\infty} := \{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$  denota a sequência maximal de parâmetros para a sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$  (conforme estabelecido no Teorema 2.3). Esta relação mostra como o elemento inicial da sequência de parâmetros  $\{g_{1,n}^{(t)}\}_{n=0}^{\infty}$  está relacionada ao salto  $t$  na medida (em  $z = 1$ ). Em particular, para a medida de probabilidade  $\mu$  com salto  $\delta$  ( $0 \leq \delta < 1$ ) em  $z = 1$ , tem-se

$$g_{1,0} = g_{1,0}^{(\delta)} = (1 - \delta)M_{1,0}, \quad (2.55)$$

onde  $\{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$  é a sequência maximal de parâmetros da sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ .

## 2.2.1 Caracterização para pontos puros de medidas e um resultado tipo Favard

Nesta subseção, apresenta-se algumas consequências dos resultados estabelecidos até o presente momento. Como primeira consequência desses resultados será estabelecida a seguinte caracterização para os pontos puros de uma medida.

**Teorema 2.4.** A medida de probabilidade  $\mu$  tem um ponto puro em  $w$  ( $|w| = 1$ ) se, e somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=0}^n \frac{|1 - w\tau_{j-1}(w)\alpha_{j-1}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}|^2} \right] = \lambda(w) < \infty. \quad (2.56)$$

Além disso, o tamanho da massa no ponto  $z = w$  é igual a  $t = [1 + \lambda(w)]^{-1}$ .

*Demonstração.* Suponha que  $z = 1$  seja um ponto puro da medida  $\mu$  com massa  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ . Utilizando-se a Observação 2.2 (mais precisamente, a igualdade em (2.55)), pode-se concluir que  $g_{1,0} = g_{1,0}^{(\delta)} = (1 - \delta)M_{1,0}$ , onde  $\{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$  é a sequência maximal de parâmetros da sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ . Disto segue que  $g_{1,0} \neq M_{1,0}$  e, portanto,  $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$  não é a sequência maximal de parâmetros de  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ . Agora

usando-se o critério de Wall para seqüências maximais de parâmetros (dado no Teorema 1.10), e considerando-se a seqüência  $\{g_{1,n}\}_{n=0}^{\infty} = \{g_{1,n}^{(\delta)}\}_{n=0}^{\infty}$  definida como no Teorema 2.3, onde neste caso  $\alpha_n^{(\delta)} = \alpha_n$ , tem-se que a medida  $\mu$  possui um ponto puro em  $z = 1$  se, e somente se,

$$\begin{aligned} \infty > \lambda(1) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{g_{1,j-1}}{1 - g_{1,j-1}} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{\frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_{j-1} \alpha_{n-1}|^2}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{j-1} \alpha_{j-1})}}{1 - \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_{j-1} \alpha_{n-1}|^2}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{j-1} \alpha_{j-1})}} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{|1 - \tau_{j-1} \alpha_{n-1}|^2}{2 - 2\mathcal{R}e(\tau_{j-1} \alpha_{j-1}) - |1 - \tau_{n-1} \alpha_{n-1}|^2} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{|1 - \tau_{j-1} \alpha_{n-1}|^2}{1 - |\alpha_{n-1}|^2} \right]. \end{aligned}$$

Agora, para encontrar o valor  $\lambda(1)$ , inicia-se com a fração contínua finita

$$\frac{A_N}{B_N} = 1 - \frac{1}{|1 - \frac{g_{1,0}}{|1 - \frac{(1 - g_{1,0})g_{1,1}}{|1 - \dots - \frac{(1 - g_{1,N-2})g_{1,N-1}}{|1}}}} \quad (2.57)$$

que, a partir do Lema 1.2, com  $\gamma_1 = g_{1,0}$  e  $\gamma_n = (1 - g_{1,n-1})g_{1,n}$  para  $n \geq 2$ , é igual a

$$1 - \frac{1}{(1 + L)^{-1}} = -L, \quad \text{onde} \quad L = \sum_{n=1}^N \left[ \prod_{j=1}^n \frac{g_{1,j-1}}{1 - g_{1,j-1}} \right]. \quad (2.58)$$

Mas, definindo-se

$$\frac{Q_N}{R_N} = \frac{g_{1,0}}{|1 - \frac{(1 - g_{1,0})g_{1,1}}{|1 - \dots - \frac{(1 - g_{1,N-2})g_{1,N-1}}{|1}}}$$

obtem-se, de (2.57) e (2.58), que

$$- \sum_{n=1}^N \left[ \prod_{j=1}^n \frac{g_{1,j-1}}{1 - g_{1,j-1}} \right] = 1 - \frac{1}{1 - Q_N/R_N}$$

ou, ainda,

$$1 + \sum_{n=1}^N \left[ \prod_{j=1}^n \frac{g_{1,j-1}}{1 - g_{1,j-1}} \right] - \frac{Q_N}{R_N} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \left[ \prod_{j=1}^n \frac{g_{1,j-1}}{1 - g_{1,j-1}} \right] \right\} = 1.$$

E isto equivale a dizer que

$$\frac{Q_N}{R_N} = \frac{\sum_{n=1}^N \left[ \prod_{j=1}^n \frac{g_{1,j-1}}{1 - g_{1,j-1}} \right]}{1 + \sum_{n=1}^N \left[ \prod_{j=1}^n \frac{g_{1,j-1}}{1 - g_{1,j-1}} \right]} \quad (2.59)$$

Então, como

$$\sum_{n=1}^N \left[ \prod_{j=1}^n \frac{g_{1,j-1}}{1 - g_{1,j-1}} \right] = \frac{g_{1,0}}{1 - g_{1,0}} \left[ 1 + \frac{g_{1,1}}{1 - g_{1,1}} + \dots + \frac{g_{1,1} \cdots g_{1,N-1}}{(1 - g_{1,1}) \cdots (1 - g_{1,N-1})} \right]$$

a igualdade em (2.59) pode ser reescrita como

$$\frac{Q_N}{R_N} = \frac{\frac{g_{1,0}}{1-g_{1,0}} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N \left[ \prod_{j=2}^n \frac{g_{1,j-1}}{1-g_{1,j-1}} \right] \right\}}{1 + \frac{g_{1,0}}{1-g_{1,0}} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N \left[ \prod_{j=2}^n \frac{g_{1,j-1}}{1-g_{1,j-1}} \right] \right\}}$$

ou seja,

$$\frac{1}{g_{1,0}} \frac{Q_N}{R_N} = \frac{1 + \sum_{n=2}^N \left[ \prod_{j=2}^n \frac{g_{1,j-1}}{1-g_{1,j-1}} \right]}{1 + \sum_{n=2}^N \left[ \prod_{j=2}^n \frac{g_{1,j-1}}{1-g_{1,j-1}} \right]}. \quad (2.60)$$

Substituindo-se  $g_{1,j}$  por  $M_{1,j}$  (onde  $\{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$  é a sequência maximal de parâmetros de  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ ), e observando-se que  $(1 - M_{1,j-1})M_{1,j} = (1 - g_{1,j-1})g_{1,j}$ ,  $j \geq 1$ , segue da igualdade em (2.60) que

$$\begin{aligned} \frac{M_{1,0}}{g_{1,0}} \frac{Q_N}{R_N} &= \frac{\frac{M_{1,0}}{1-M_{1,0}} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N \left[ \prod_{j=2}^n \frac{M_{1,j-1}}{1-M_{1,j-1}} \right] \right\}}{1 + \frac{M_{1,0}}{1-M_{1,0}} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N \left[ \prod_{j=2}^n \frac{M_{1,j-1}}{1-M_{1,j-1}} \right] \right\}} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^N \left\{ \prod_{j=1}^n \frac{M_{1,j-1}}{1-M_{1,j-1}} \right\}}{1 + \sum_{n=1}^N \left\{ \prod_{j=1}^n \frac{M_{1,j-1}}{1-M_{1,j-1}} \right\}}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Agora, tomando-se o limite quando  $N \rightarrow \infty$  na igualdade (2.61), e usando-se novamente critério de Wall para sequências maximais (dado no Teorema 1.10), obtém-se

$$\frac{M_{1,0}}{g_{1,0}} \frac{Q_n}{R_n} \longrightarrow 1 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \frac{Q_n}{R_n} \longrightarrow \frac{g_{1,0}}{M_{1,0}},$$

já que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{M_{1,j-1}}{1-M_{1,j-1}} \right] = \infty.$$

Por outro lado, de (2.59), tem-se

$$\frac{Q_n}{R_n} \longrightarrow \frac{\lambda(1)}{1 + \lambda(1)}.$$

Daí, como  $g_{1,0} = (1 - \delta)M_{1,0}$ , a unicidade do limite garante que

$$\frac{\lambda(1)}{1 + \lambda(1)} = \frac{g_{1,0}}{M_{1,0}} = \frac{(1 - \delta)M_{1,0}}{M_{1,0}} = 1 - \delta,$$

de onde segue que

$$\delta = \frac{1}{1 + \lambda(1)},$$

o que conclui a prova do teorema para o caso  $z = w = 1$ .

Para mostrar que o resultado também é válido para todos os pontos da forma  $z = w = e^{i\vartheta}$  (não apenas para  $z = 1$ ), ou seja, para os pontos do círculo unitário  $\mathcal{C}$ , considera-se os polinômios mônicos  $\{S_n(w; z)\}$ , definidos por

$$S_n(w; z) := w^{-n} S_n(wz), \quad n \geq 1. \quad (2.62)$$

Da ortogonalidade dos polinômios  $S_n(z)$  e da definição de  $S_n(w; z)$  dada em (2.62), pode-se verificar, facilmente, que

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{S_m(w; \zeta)} S_n(w; \zeta) d\mu(w\zeta) = \delta_{n,m} \kappa_n^{-2},$$

de onde segue que  $S_n(w; z)$ ,  $n \geq 0$ , são os polinômios mônicos de Szegő associados com a medida  $\mu(w; \cdot)$ , definida por  $\mu(w; z) := \mu(wz)$ . Pelo que já foi provado na primeira parte, a medida  $\mu(w; \cdot)$  tem um ponto puro em  $z = 1$  se, e só se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{|1 - \tau_{j-1}(w; 1) \alpha_{j-1}(w; \cdot)|^2}{1 - |\alpha_{j-1}(w; \cdot)|^2} \right] = \lambda(w; 1) := \lambda(w) < \infty, \quad (2.63)$$

onde  $\alpha_n(w; \cdot) = -\overline{S_{n+1}(w; 0)}$  e  $\tau_n(w; 1) = S_n(w; 1)/S_n^*(w; 1)$ ,  $n \geq 0$ . Além disso, o tamanho da massa no ponto  $z = 1$  é dado por  $[1 + \lambda(w)]^{-1}$ .

Definido-se o polinômio recíproco de  $S_n(w; z) = w^{-n} S_n(wz)$  por  $S_n^*(w; z) := z^n \overline{S_n(w; 1/\bar{z})}$  e considerando-se o polinômio recíproco de  $S_n(z)$ , isto é,  $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$ , tem-se, para  $n \geq 0$ ,

$$S_n^*(w; z) = z^n \overline{S_n(w; 1/\bar{z})} = z^n \overline{w^{-n} S_n(w(1/\bar{z}))} = (wz)^n \overline{S_n(1/(\bar{w}z))} = S_n^*(wz),$$

isto é,  $S_n^*(w; z) = S_n^*(wz)$ ,  $n \geq 0$ , onde neste caso leva-se em consideração que  $w = 1/\bar{w}$ , já que  $w\bar{w} = |w|^2 = 1$ . Agora, observe também que

$$\alpha_n(w; \cdot) = -\overline{S_{n+1}(w; 0)} = \overline{w^{-(n+1)} \cdot [-S_{n+1}(0)]} = w^{n+1} \alpha, \quad n \geq 0, \quad (2.64)$$

e

$$\tau_n(w; 1) = \frac{S_n(w; 1)}{S_n^*(w; 1)} = \frac{w^{-n} S_n(w)}{S_n^*(w)} = w^{-n} \tau_n(w), \quad n \geq 0, \quad (2.65)$$

Finalmente, de (2.63), (2.64) e (2.65), pode-se afirmar que a medida  $\mu(w; \cdot)$  tem um ponto puro em  $z = 1$  (isto é, a medida  $\mu$  tem um ponto puro em  $z = w$ , já que

$\mu(w; 1) = \mu(w)$  se, e só se,

$$\begin{aligned} \infty > \lambda(w) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{|1 - \tau_{j-1}(w; 1)\alpha_{j-1}(w;)|^2}{1 - |\alpha_{j-1}(w;)|^2} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{|1 - w^{1-j}\tau_{j-1}(w)w^j\alpha_{j-1}|^2}{1 - |w^j\alpha_{j-1}|^2} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{|1 - w\tau_{j-1}(w)\alpha_{j-1}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}|^2} \right], \end{aligned}$$

onde o tamanho da massa no ponto  $z = 1$  é dado por  $[1 + \lambda(w)]^{-1}$ , e isto completa a prova do teorema.  $\square$

**Observação 2.3.** Note que a partir da igualdade em (2.10), tem-se

$$[1 - w\tau_n(w)\alpha_n][1 + \overline{\tau_{n+1}(w)\alpha_n}] = [1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n}][1 + \tau_{n+1}(w)\alpha_n] = 1 - |\alpha_n|^2, \quad n \geq 0, \quad (2.66)$$

de modo que a série em (2.56) pode ser reescrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{1 - w\tau_{j-1}(w)\alpha_{j-1}}{1 + \overline{\tau_j(w)\alpha_{j-1}}} \right] \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{1 - |\alpha_{j-1}|^2}{|1 + \tau_j(w)\alpha_{j-1}|^2} \right]$$

De fato, de (2.56) e (2.66), obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{|1 - w\tau_{j-1}(w)\alpha_{j-1}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}|^2} \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \prod_{j=0}^n \frac{[1 - w\tau_{j-1}(w)\alpha_{j-1}][1 - \overline{w\tau_{j-1}(w)\alpha_{j-1}}]}{[1 - \overline{w\tau_{j-1}(w)\alpha_{j-1}}][1 + \tau_j(w)\alpha_{j-1}]} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=0}^n \frac{1 - w\tau_{j-1}(w)\alpha_{j-1}}{1 + \tau_j(w)\alpha_{j-1}} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=0}^n \frac{|1 - w\tau_{j-1}(w)\alpha_{j-1}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}|^2} \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \prod_{j=0}^n \frac{[1 - |\alpha_{j-1}|^2][1 - \overline{w\tau_{j-1}\alpha_{j-1}}]}{[1 - \overline{w\tau_{j-1}\alpha_{j-1}}][1 + \tau_j(w)\alpha_{j-1}][1 + \tau_j(w)\alpha_{j-1}]} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=0}^n \frac{1 - |\alpha_{j-1}|^2}{|1 + \tau_j(w)\alpha_{j-1}|^2} \right]. \end{aligned}$$

Para encerrar os principais resultados deste capítulo, apresenta-se, a seguir, um outro teorema que é consequência dos resultados estabelecidos ao longo deste capítulo. Tal teorema fornece uma caracterização para OPUC em termos de duas sequências reais

$\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é também uma sequência encadeada positiva. Esse resultado configura-se, segundo Costa, Felix e Sri Ranga [7], como um *teorema do Tipo Favard* para o círculo unitário, e completa a caracterização apresentada no início da presente seção (veja relações em (2.36)).

**Teorema 2.5.** (a) Dada uma medida de probabilidade não trivial  $\mu$  no círculo unitário, então, associado a esta medida, existe um único par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty; \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é também uma sequência encadeada positiva. Especificamente, se  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de coeficientes de Verblunsky associada a  $\mu$ , e se a sequência  $\{\tau_n\}_{n=0}^\infty$  é tal que

$$\tau_0 = 1 \text{ e } \tau_n = \frac{1 - \bar{\tau}_{n-1}\bar{\alpha}_{n-1}}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}} \quad n \geq 1,$$

então  $m_0 = 0$ , e

$$c_n = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})} \text{ e } m_n = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})]}, \quad n \geq 1,$$

onde  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência minimal de parâmetros de  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ . Ademais, a sequência maximal de parâmetros  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  de  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é tal que  $M_0$  é o valor do salto na medida em  $z = 1$ .

(b) Reciprocamente, dado um par de sequência reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty; \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é também uma sequência encadeada positiva, então, associado a este par, existe uma única medida de probabilidade não trivial  $\mu$  com suporte no círculo unitário. Especificamente, se  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência minimal de parâmetros de  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , então  $\tau_0 = 1$ , e

$$\tau_{n-1}\alpha_{n-1} = \frac{1 - 2m_n - ic_n}{1 - ic_n} \quad \text{e} \quad \tau_n = \frac{1 - ic_n}{1 + ic_n}\tau_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Além disso, a medida tem um salto  $M_0$  em  $z = 1$ , onde  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência maximal de parâmetro para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ .

*Demonstração.* Observe que para obter a parte (a) do teorema basta escolher a sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  tal que  $d_1 := g_{1,0}$  e  $d_{n+1} := d_{1,n}$ ,  $n \geq 1$ , como no Teorema 2.2. De fato, neste caso, assumindo que a medida  $\mu$  tem um salto  $\delta$  ( $0 \leq \delta < 1$ ) em  $z = 1$ , segue do Teorema 2.3 e de (2.54) (veja também (2.55)) que  $g_{1,0} = g_{1,0}^{(\delta)} = (1 - \delta)g_{1,0}^{(0)}$ . Além disso,  $\{g_{1,n}^{(0)}\}_{n=0}^\infty$  é a sequência maximal de parâmetros para  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^\infty$  e  $g_{1,0}^{(0)} > 0$ , já que

$g_{1,n}^{(0)} > 0$ , para todo  $n \geq 0$ . Assim,  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência encadeada positiva não unicamente determinada (ou seja, suas sequências minimal e maximal de parâmetros são distintas), de onde se pode concluir que, tomando  $d_1 = \lambda g_{1,0}^{(0)}$ , com  $0 < \lambda = 1 - \delta \leq 1$ , a sequência  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ , definida acima, é uma sequência encadeada positiva com sequências minimal  $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$  e maximal  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  de parâmetros satisfazendo

$$m_0 := 0 \quad \text{e} \quad m_n := g_{1,n-1}^{(\delta)} = g_{1,n-1}, \quad n \geq 1,$$

e

$$M_0 := \delta \quad \text{e} \quad M_n := g_{1,n-1}^{(0)}, \quad n \geq 1, \quad (2.67)$$

e isto completa a prova da parte (a) do teorema (note que o fato de  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ , definida em (2.67), ser a sequência maximal de parâmetros para  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  segue do critério de Wall, dado no Teorema 1.10, juntamente com o fato de que  $\{g_{1,n}^{(0)}\}_{n=0}^{\infty}$  é a sequência maximal de parâmetros para  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ )

Reciprocamente, considere o par de sequências  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$  onde  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência encadeada positiva e  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  é sua sequência maximal de parâmetros. Assim escolhendo, convenientemente, os coeficientes  $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$  como

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_n = \prod_{j=1}^n \frac{1 - ic_j}{1 + ic_j}, \quad n \geq 1,$$

e os coeficientes  $\{\alpha_n^{(0)}\}_{n=0}^{\infty}$  tais que

$$c_n = \frac{-Im(\tau_{n-1}\alpha_{n-1}^{(0)})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1}^{(0)})} \quad \text{e} \quad M_{1,n-1} = \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}^{(0)}|^2}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1}^{(0)})}, \quad n \geq 1$$

resulta, do Lema 2.1, que existe uma única solução para  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  tal que  $|\alpha_n^{(0)}| < 1$ ,  $n \geq 0$ , dada por

$$\alpha_{n-1}^{(0)} = \bar{\tau}_{n-1} \left[ \frac{1 - 2M_{1,n-1} - ic_n}{1 - ic_n} \right], \quad n \geq 1.$$

Portanto, pelo Teorema 1.6, existe uma única medida de probabilidade não-trivial no círculo unitário para a qual  $\alpha_n^{(0)}$ ,  $n \geq 0$ , são os seus respectivos coeficientes de Verblunsky. Mas uma vez que  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  é a sequência maximal de parâmetros da sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ , então  $\{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$  é também a sequência maximal de parâmetros da sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ , de onde segue, a partir dos Teoremas 2.2 e 2.3 (veja também igualdades em (2.54) e (2.55)), que a medida obtida tem um salto 0 em  $z = 1$  e, portanto, pode-se representar essa medida por  $\mu^{(0)}$ . Em consequência, a medida

associada às sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  fornecidas, é a medida  $\mu^{(t)}$ , com  $t = M_0$  (uma das medidas da família de Uvarov de  $\mu^{(0)}$ , definidas pela igualdade em (2.37)), dada por

$$\int_C f(z) d\mu^{(M_0)}(z) = (1 - M_0) \int_C f(z) d\mu^{(0)}(z) + M_0 f(1),$$

Agora, basta observar que a medida  $\mu^{(M_0)}$ , associada às sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , tem salto  $M_0$  em  $z = 1$ . Com isso, concluí-se o item (b).  $\square$

**Observação 2.4.** A medida  $\mu$  possuir salto “zero” em  $z = 1$  é equivalente, pelo Teorema 2.5, à medida ter as sequências minimal e maximal de parâmetros (da sua associada sequência encadeada positiva) coincidindo.

## 2.3 Um exemplo

Encerra-se esse capítulo com um exemplo que ilustra, de modo mais conciso, os principais resultados discutidos e estabelecidos nas seções deste capítulo. Para isso, serão usados alguns conceitos essenciais como o da *função especial* Gama e o de *séries hipergeométricas*. Para mais detalhes sobre funções especiais, indicamos os textos de Andrews Askey e Roy [2] e Conway [6].

Considere as sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  dadas por

$$c_n = \frac{\gamma}{\lambda + n}, \quad n \geq 1, \quad (2.68)$$

$$d_1 = d_1(t) = \frac{1}{2} \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} (1 - t), \quad d_{n+1} = \frac{1}{4} \frac{n(2\lambda + n + 1)}{(\lambda + n)(\lambda + n + 1)}, \quad n \geq 1, \quad (2.69)$$

onde  $\lambda > -1/2$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq t < 1$ .

Primeiro, observe que os polinômios  $R_n$ , gerados a partir das sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  por meio da relação de recorrência de três termos no Teorema 2.2, são dados explicitamente de seguinte maneira:

$$R_n(z) = \frac{(2\lambda + 2)_n}{(\lambda + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z), \quad n \geq 1, \quad (2.70)$$

onde  $b = \lambda + i\gamma$ . De fato, considere a identidade de Gauss para relações contíguas dada por

$$(c - a) {}_2F_1(a - 1, b; c; z) = (c - 2a - (b - a)z) {}_2F_1(a, b; c; z) + a(1 - z) {}_2F_1(a + 1, b; c; z),$$

onde  ${}_2F_1(a, b; c; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$ ,  $n \geq 1$ , (veja, [2]). Em seguida, tomando-se  $a = -n$ , trocando-se  $b$  por  $b + 1$  e considerando-se  $c = b + \bar{b} + 2$  e  $z = 1 - z$ , observe que

$$\begin{aligned} & (2\lambda + 2 + n) {}_2F_1(-n - 1, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z) \\ &= [2\lambda + 2 + 2n - (\lambda + 1 + i\lambda + n)(1 - z)] {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z) \\ & \quad - nz {}_2F_1(-n + 1, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \frac{(2\lambda + 2)_{n+1}}{(\lambda + 1)_{n+1}} {}_2F_1(-n - 1, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z) \\ &= \left[ \frac{(\lambda + n + 1)(z + 1) + i\gamma(z - 1)}{\lambda + n + 1} \right] \frac{(2\lambda + 2)_n}{(\lambda + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z) \\ & \quad - \frac{n(2\lambda + n + 1)z(2\lambda + 2)_{n-1}}{(\lambda + n)(\lambda + n + 1)(\lambda + 1)_{n-1}} {}_2F_1(-n + 1, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z), \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} & \frac{(2\lambda + 2)_{n+1}}{(\lambda + 1)_{n+1}} {}_2F_1(-n - 1, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z) \\ &= \left[ \frac{(\lambda + n + 1)z + i\gamma z + \lambda + n + 1 - i\gamma}{\lambda + n + 1} \right] \frac{(2\lambda + 2)_n}{(\lambda + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z) \\ & \quad - \frac{n(2\lambda + n + 1)z(2\lambda + 2)_{n-1}}{(\lambda + n)(\lambda + n + 1)(\lambda + 1)_{n-1}} {}_2F_1(-n + 1, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} & \frac{(2\lambda + 2)_{n+1}}{(\lambda + 1)_{n+1}} {}_2F_1(-n - 1, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z) \\ &= \left[ \left( 1 + i \frac{\gamma}{\lambda + n + 1} \right) z + \left( 1 - i \frac{\gamma}{\lambda + n + 1} \right) \right] \frac{(2\lambda + 2)_n}{(\lambda + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z) \\ & \quad - \frac{n(2\lambda + n + 1)z}{(\lambda + n)(\lambda + n + 1)} \frac{(2\lambda + 2)_{n-1}}{(\lambda + 1)_{n-1}} {}_2F_1(-n + 1, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{(2\lambda + 2)_{n+1}}{(\lambda + n + 1)_{n+1}} {}_2F_1(-n - 1, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z) \\ &= [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})] \frac{(2\lambda + 2)_n}{(\lambda + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z) \\ & \quad - 4d_n z {}_2F_1(-n + 1, b + 1; b + \bar{b} + 2; 1 - z), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

de onde segue que os polinômios  $R_n(z)$ , expressos como em (2.70), podem ser gradados pela relação de recorrência de três termos acima, exatamente como no Teorema 2.2, com  $R_0(z) = 1$  e  $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$ .

Os coeficientes  $d_{n,1} = d_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , são os mesmos coeficientes como na fórmula de recorrência (1.6) para os polinômios ultraesféricos (veja Exemplo 1.3). Então, é conhecido na literatura que  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência encadeada positiva e sua sequência minimal de parâmetros pode ser dada em termo dos valores dos polinômios ultraesféricos avaliados em  $z = 1$ . A sequência de parâmetro maximal de  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$  é cogitada para ser  $\{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$ , onde

$$M_{1,n} = \frac{1}{2} \frac{2\lambda + n + 1}{\lambda + n + 1}, \quad n \geq 0.$$

De fato, obtém-se  $0 < M_{1,n} < 1$ ,  $n \geq 0$ , como resultado da condição  $\lambda > -1/2$  e, para  $n \geq 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} (1 - M_{1,n-1})M_{1,n} &= \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2\lambda + n}{\lambda + n}\right) \frac{1}{2} \frac{2\lambda + n + 1}{\lambda + n + 1} \\ &= \frac{1}{4} \frac{n(2\lambda + n + 1)}{(\lambda + n)(\lambda + n + 1)} \\ &= d_{n+1}. \end{aligned}$$

Além disso, ainda supondo que  $\lambda > -1/2$ , tem-se também que

$$\frac{M_{1,n}}{1 - M_{1,n}} = \frac{2\lambda + n + 1}{n + 1} > \frac{n}{n + 1}, \quad n \geq 1,$$

de onde segue que

$$\sum_{n=1}^N \left[ \prod_{j=1}^n \frac{M_{1,j}}{1 - M_{1,j}} \right] > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n + 1}.$$

Portanto quando  $N \rightarrow \infty$ , a série  $\sum_{n=1}^N 1/(n + 1)$  divergirá e, conseqüentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{M_{1,j}}{1 - M_{1,j}} \right] = \infty,$$

de onde segue, pelo critério de Wall (veja Teorema 1.10), que  $\{M_{1,n}\}_{n=0}^{\infty}$  é, de fato, a sequência maximal de parâmetros de  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ .

Em conseqüência disso, pode-se dizer que  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência encadeada positiva, com sequência maximal de parâmetros  $\{M_n^{(t)}\}_{n=0}^{\infty}$  dada por

$$M_0^{(t)} = t \quad \text{e} \quad M_n^{(t)} = M_{1,n-1} = \frac{1}{2} \frac{2\lambda + n}{\lambda + n}, \quad n \geq 1,$$

e sequência minimal de parâmetros,  $\{m_n^{(t)}\}_{n=0}^{\infty}$ , satisfazendo

$$m_0^{(t)} = 0, \quad m_1 = d_1(t) = \frac{1}{2} \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 1} (1 - t) \quad \text{e} \quad m_{n+1}^{(t)} = d_{n+1}/(1 - m_n^{(t)}).$$

Agora, pelo Teorema 2.5 (item (b)), associado com as sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  existe uma única medida de probabilidade não-trivial, com suporte no círculo unitário  $\mathcal{C}$ , denotada por  $\mu^{(t)}$ , cujos respectivos coeficientes Verblunsky  $\{\alpha_n^{(t)}\}_{n=0}^\infty$  são dados por

$$\alpha_{n-1}^{(t)} = \bar{\tau}_{n-1} \left[ \frac{1 - 2m_n^{(t)} - ic_n}{1 - ic_n} \right], \quad n \geq 1, \quad (2.71)$$

onde  $\tau_0 = 1$  e

$$\tau_n = \frac{1 - ic_n}{1 + ic_n} \tau_{n-1} = \frac{(\bar{b} + 1)_n}{(b + 1)_n}, \quad n \geq 1. \quad (2.72)$$

Realmente, como  $b = \lambda + i\gamma$  e

$$\frac{1 - ic_n}{1 + ic_n} = \frac{(\lambda - i\gamma + n)}{(\lambda + i\gamma + n)} = \frac{\bar{b} + n}{b + n}, \quad n \geq 1,$$

segue que

$$\begin{aligned} \tau_n = \frac{1 - ic_n}{1 + ic_n} \tau_{n-1} &= \frac{(1 - ic_n)(1 - ic_{n-1})}{(1 + ic_n)(1 + ic_{n-1})} \tau_{n-2} \\ &= \frac{(1 - ic_n)(1 - ic_{n-1})}{(1 + ic_n)(1 + ic_{n-1})} \cdots \frac{(1 - ic_1)}{(1 + ic_1)} \tau_0 \\ &= \frac{(\bar{b} + n)(\bar{b} + n - 1) \cdots (\bar{b} + 1)}{(b + n)(b + n - 1) \cdots (b + 1)} = \frac{(\bar{b} + 1)_n}{(b + 1)_n}. \end{aligned}$$

Finalmente, quando  $0 < t < 1$ , é possível verificar que a medida  $\mu^{(t)}$ , obtida anteriormente, também tem um salto  $t$  em  $z = 1$  (ou seja, tem um ponto puro em  $z = 1$  de massa  $t$ ). Para ver isso, considera-se primeiramente a medida  $\mu^{(0)}$ , obtida da sequência encadeada positiva cujas sequências maximal e minimal de parâmetros coincidem, ou seja:

$$m_0^{(0)} = M_0^{(0)} = 0 \quad \text{e} \quad m_n^{(0)} = M_n^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{2\lambda + n}{\lambda + n}, \quad n \geq 1. \quad (2.73)$$

Consequentemente, como  $c_n = \gamma/(\lambda + n)$ ,  $n \geq 1$ , então, da expressão para  $\alpha_{n-1}^{(t)}$ , dada em (2.71), obtém-se, para  $n \geq 1$ ,

$$\alpha_{n-1}^{(0)} = \bar{\tau}_{n-1} \left[ \frac{1 - \frac{2\lambda+n}{\lambda+n} - i\frac{\gamma}{\lambda+n}}{1 - i\frac{\gamma}{\lambda+n}} \right] = \frac{(\lambda + 1 + i\gamma)_{n-1}}{(\lambda + 1 - i\gamma)_{n-1}} \left( \frac{-\lambda - i\gamma}{\lambda + n - i\gamma} \right) = -\frac{(b)_n}{(\bar{b} + 1)_n}.$$

Conforme consta em Sri Ranga [16], as constantes  $\alpha_{n-1}^{(0)}$  são os coeficientes de Verblunsky associados com a medida de probabilidade não trivial,  $\mu^{(0)}$ , dada por

$$d\mu^{(0)}(e^{i\theta}) = \sigma^{(b)} [e^{-\theta}]^\gamma [\text{sen}^2(\theta/2)]^\lambda \frac{d\theta}{2\pi},$$

onde a constante  $\sigma^{(b)}$  é tal que

$$\sigma^{(b)} = \sigma^{(\lambda+i\gamma)} = \frac{|\Gamma(1 + \lambda + i\gamma)|^2}{\Gamma(2\lambda + 1)} 4^\lambda e^{\gamma\pi}.$$

Também a partir de [16], tem-se que os OPUC mônicos são dados, explicitamente, por

$$S_n^{(0)}(z) = \frac{(2\lambda + 1)_n}{(b + 1)_n} {}_2F_1(-n, b + 1; b + \bar{b} + 1; 1 - z), \quad n \geq 1, \quad (2.74)$$

onde  $b = \lambda + i\gamma$ . Assim, pelo Teorema 2.3, a medida  $\mu^{(t)}$  pode ser dada da seguinte forma ( $\mu^{(t)}$  como sendo uma das medidas da família de Uvarov de  $\mu^{(0)}$ , aquela com salto de tamanho  $t$  e  $z = 1$ ):

$$\begin{aligned} \int_C f(z) d\mu^{(t)}(z) &= (1 - t) \int_C f(z) d\mu^{(0)}(z) + tf(1) \\ &= (1 - t) \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\mu^{(0)}(e^{i\theta}) + tf(1) \\ &= \frac{(1 - t)}{2\pi} \sigma^{(b)} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-\gamma\theta} \sin^{2\lambda}(\theta/2) d\theta + tf(1). \end{aligned} \quad (2.75)$$

A respeito do que se acabou de fazer acima, cabe ainda uma discussão adicional referente ao caso particular em que  $\lambda = 0$ , no qual pode-se afirmar que:

(i) A seqüência de parâmetro minimal  $\{m_n^{(t)}\}$  é dada como

$$m_0^{(t)} = 0, \quad m_n^{(t)} = \frac{1}{2} \frac{1 + (n - 2)t}{1 + (n - 1)t}, \quad n \geq 1. \quad (2.76)$$

(ii) A medida associada para este caso, bem como os respectivos coeficientes de Verblunsky, são dados, respectivamente, por:

$$\int_C f(z) d\mu^{(t)}(z) = \frac{(1 - t)}{2\pi} \sigma^{(i\gamma)} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-\gamma\theta} d\theta + tf(1) \quad (2.77)$$

e

$$\alpha_{n-1}^{(t)} = \frac{(1 + i\gamma)_{n-1}}{(1 - i\gamma)_n} \left[ \frac{nt}{1 + (n - 1)t} - i\gamma \right], \quad n \geq 1. \quad (2.78)$$

Com efeito, considerando a expressão para  $d_n$  (com  $\lambda = 0$ ), dada em (2.69), e a expressão para  $m_n$ , dada em (2.73), vê-se que  $m_1 = d_1(t) = \frac{1}{2}(1 - t)$ ,

$$m_2^{(t)} = \frac{d_2}{1 - m_1^{(t)}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + t}, \quad m_3^{(t)} = \frac{d_3}{1 - m_2^{(t)}} = \frac{1}{2} \frac{1 + t}{1 + 2t} \quad e \quad m_4^{(t)} = \frac{d_4}{1 - m_3^{(t)}} = \frac{1}{2} \frac{1 + 2t}{1 + 3t},$$

onde  $d_{n+1} = 1/4$  para todo  $n \geq 1$ . Logo, seguindo esse padrão, pode-se mostrar por indução que

$$m_{n+1}^{(t)} = \frac{d_{n+1}}{1 - m_n^{(t)}} = \frac{1}{2} \frac{1 + (n - 2)t}{1 + (n - 1)t}, \quad n \geq 1,$$

o que comprova (i) já que  $m_1 = d_1(t) = \frac{1}{2}(1-t)$ . Para provar (ii) basta observar que, para este caso  $\lambda = 0$ , (2.77) segue diretamente de (2.75), e que sendo  $c_n = \gamma/n$ ,  $n \geq 1$  (veja (2.68)), tem-se por (2.71), (2.72) e (2.76) que

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1}^{(t)} &= \frac{(1+i\gamma)_{n-1}}{(1-i\gamma)_{n-1}} \left[ \frac{1 - \frac{1+(n-2)t}{1+(n-1)t} - i\frac{\gamma}{n}}{1 - i\frac{\gamma}{n}} \right] \\ &= \frac{(1+i\gamma)_{n-1}}{(1-i\gamma)_{n-1}(n-i\gamma)} \left[ n - \frac{n[1+(n-2)t]}{1+(n-1)t} - i\gamma \right] \\ &= \frac{(1+i\gamma)_{n-1}}{(1-i\gamma)_n} \left[ \frac{nt}{1+(n-1)t} - i\gamma \right].\end{aligned}$$

Agora, usa-se a medida especial  $\mu^{(t)}$  (onde  $\lambda = 0$ ), dada por (2.77), para dar uma justificativa do resultado dado no Teorema 2.4. Para isso, mantém-se a notação para os polinômios de Szegő,  $S_n^{(t)}$ , com respeito à medida  $\mu^{(t)}$  e observa-se que, em particular, quando  $t = 0$ , os polinômios de Szegő associados à medida  $\mu^{(0)}$  são dados, a partir de (2.74), por

$$S_n^{(0)}(z) = \frac{n!}{(1+i\gamma)_n} {}_2F_1(-n, 1+i\gamma; 1; 1-z),$$

Com isso,

$$\tau_n = \frac{S_n^{(t)}(1)}{S_n^{(t)*}(1)} = \frac{S_n^{(0)}(1)}{S_n^{(0)*}(1)} = \frac{(1-i\gamma)_n}{(1+i\gamma)_n}, \quad n \geq 0,$$

pois, como

$$S_n^{(t)}(1) = S_n^{(0)}(1) = \frac{n!}{(1+i\gamma)_n}, \quad S_n^{(t)*}(1) = S_n^{(0)*}(1) = \overline{S_n^{(t)}(1)} = \frac{n!}{(1-i\gamma)_n}$$

e  $\tau_n = \tau_n^{(t)}$  (veja Lema 2.2), resulta que

$$\tau_n = \tau_n^{(t)} := \frac{S_n^{(t)}(1)}{S_n^{(t)*}(1)} = \frac{S_n^{(0)}(1)}{S_n^{(0)*}(1)} = \frac{n!/(1+i\gamma)_n}{n!/(1-i\gamma)_n} = \frac{(1-i\gamma)_n}{(1+i\gamma)_n}.$$

Consequentemente, usando-se (2.78), tem-se

$$\tau_{j-1}\alpha_{j-1}^{(t)} = \frac{1}{j-i\gamma} \left[ \frac{jt}{1+(j-1)t} - i\gamma \right], \quad j \geq 1,$$

e

$$\tau_j\alpha_{j-1}^{(t)} = \frac{1}{j+i\gamma} \left[ \frac{jt}{1+(j-1)t} - i\gamma \right], \quad j \geq 1,$$

já que  $(1 \pm i\gamma)_j = (1 \pm i\gamma)_{j-1}(j \pm i\gamma)$ . Daí, obtém-se

$$|1 - \tau_{j-1}\alpha_{j-1}^{(t)}|^2 = \left[ \frac{j[1+(j-2)j]}{(j-i\gamma)[1+(j-1)t]} \right]^2 = \frac{j^2[1+(j-2)j]^2}{|j-i\gamma|^2[1+(j-1)t]^2}, \quad j \geq 1, \quad (2.79)$$

e

$$|1 + \tau_j \alpha_{j-1}^{(t)}|^2 = \left[ \frac{j[1 + jt]}{(j + i\gamma)[1 + (j-1)t]} \right]^2 = \frac{j^2[1 + jt]^2}{|j + i\gamma|^2[1 + (j-1)t]^2}, \quad j \geq 1,$$

de onde também segue que

$$1 - |\alpha_{j-1}^{(t)}|^2 = \frac{j^2[1 + (j-2)j][1 + jt]}{|j - i\gamma|^2[1 + (j-1)t]^2}. \quad (2.80)$$

De fato, pode-se calcular as duas primeiras igualdades como segue:

$$\begin{aligned} |1 - \tau_{j-1} \alpha_{j-1}^{(t)}|^2 &= \left| 1 - \frac{1}{j - i\gamma} \left[ \frac{jt}{1 + (j-1)t} - i\gamma \right] \right|^2 \\ &= \left| \frac{(j - i\gamma)[1 + (j-1)t] - jt + i\gamma[1 + (j-1)t]}{(j - i\gamma)[1 + (j-1)t]} \right|^2 \\ &= \left[ \frac{j[1 + (j-2)j]}{(j - i\gamma)[1 + (j-1)t]} \right]^2 \\ &= \frac{j^2[1 + (j-2)j]^2}{|j - i\gamma|^2[1 + (j-1)t]^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |1 + \tau_j \alpha_{j-1}^{(t)}|^2 &= \left| 1 + \frac{1}{j + i\gamma} \left[ \frac{jt}{1 + (j-1)t} - i\gamma \right] \right|^2 \\ &= \left| \frac{(j + i\gamma)[1 + (j-1)t] + jt - i\gamma[1 + (j-1)t]}{(j + i\gamma)[1 + (j-1)t]} \right|^2 \\ &= \left| \frac{j[1 + (j-1)t + t]}{(j + i\gamma)[1 + (j-1)t]} \right|^2 = \left| \frac{j[1 + jt]}{(j + i\gamma)[1 + (j-1)t]} \right|^2 \\ &= \frac{j^2[1 + jt]^2}{|(j + i\gamma)|^2[1 + (j-1)t]^2}. \end{aligned}$$

Já a última, dada em (2.80), resulta de (2.10) (com  $w = 1$ ), ou seja,

$$[1 - \tau_{j-1} \alpha_{j-1}^{(t)}][1 + \tau_j \alpha_{j-1}^{(t)}] = 1 - |\alpha_{j-1}^{(t)}|^2, \quad j \geq 1,$$

e do que se acabou de provar, já que, neste caso,

$$\begin{aligned} 1 - |\alpha_{j-1}^{(t)}|^2 = [1 - \tau_{j-1} \alpha_{j-1}^{(t)}][1 + \tau_j \alpha_{j-1}^{(t)}] &= \frac{j[1 + (j-2)j]}{(j - i\gamma)[1 + (j-1)t]} \frac{j[1 + jt]}{(j + i\gamma)[1 + (j-1)t]} \\ &= \frac{j^2[1 + (j-2)t][1 + jt]}{|j - i\gamma|^2[1 + (j-1)t]^2}. \end{aligned}$$

Como consequência de (2.79) e (2.79) veja que

$$\frac{|1 - \tau_{j-1} \alpha_{j-1}^{(t)}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}^{(t)}|^2} = \frac{j^2[1 + (j-2)j]^2}{j^2[1 + (j-2)t][1 + jt]} = \frac{1 + (j-2)t}{1 + jt}, \quad j \geq 1,$$

de onde se obtém

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \left[ \prod_{j=1}^n \frac{|1 - \tau_{j-1} \alpha_{j-1}^{(t)}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}^{(t)}|^2} \right] \\
&= \sum_{n=1}^N \left[ \prod_{j=1}^n \frac{1 + (j-2)t}{1 + jt} \right] \\
&= \sum_{n=1}^N \left[ \frac{(1-t)}{(1+t)} \frac{1}{(1+2t)} \frac{(1+t)}{(1+3t)} \frac{(1+2t)}{1+4t} \dots \frac{[1+(n-3)t]}{[1+(n-1)t]} \frac{[1+(n-2)t]}{[1+nt]} \right] \\
&= (1-t) \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{[1+(n-1)t][1+nt]} \right]. \tag{2.81}
\end{aligned}$$

Portanto, como esperado, quando  $t = 0$  esta série diverge quando  $N \rightarrow \infty$ . Entretanto, quando  $0 < t < 1$ , desde que a série do lado direito da igualdade em (2.81) pode ser reescrita como

$$(1-t) \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1/t}{[1+(n-1)t]} - \frac{1/t}{[1+nt]} \right],$$

resulta que

$$\sum_{n=1}^N \left[ \prod_j^n \frac{|1 - \tau_{j-1} \alpha_{j-1}^{(t)}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}^{(t)}|^2} \right] = (1-t) \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1/t}{[1+(n-1)t]} - \frac{1/t}{[1+nt]} \right].$$

Consequentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_j^n \frac{|1 - \tau_{j-1} \alpha_{j-1}^{(t)}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}^{(t)}|^2} \right] = \lambda^{(t)}(1) = \frac{(1-t)}{t},$$

o que, segundo o Teorema 2.4, garante que a medida  $\mu^{(t)}$  tem um ponto puro em  $z = 1$  com tamanho da massa nesse ponto igual a  $[1 + \lambda^{(t)}]^{-1} = [1 + (1-t)/t]^{-1} = [1/t]^{-1} = t$ .

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo dos polinômios ortogonais no ciclo unitário vem se fortalecendo, ao longo dos anos, devido à sua grande aplicação em diversos contextos em Matemática. Por essa razão, não é de estranhar que, vários pesquisadores vem se dedicando cada vez mais a explorar essa rica teoria. Dos importantes resultados já consolidados, nesse campo de estudo, pode-se destacar o conhecido teorema de Verblunsky, no qual, relaciona uma medida de probabilidade não trivial no círculo unitário a uma (única) sequência de números complexos  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ , os coeficientes de Verblunsky.

Em Costa, Félix e Sri Ranga [7], os autores mostraram que através da teoria das sequências encadeadas positivas, pode-se caracterizar também uma medida de probabilidade no círculo unitário por um par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}; \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência encadeada positiva. Em relação a essa nova visão lançada sobre a teoria dos polinômios ortogonais no círculo unitário, fizemos a presente dissertação.

O primeiro resultado de destaque, foi mostrado no Teorema 2.1, no qual, os polinômios núcleos mônicos  $P_n(w; z)$  satisfazem a uma relação de recorrência de três termos, o que nem sempre ocorre com polinômios complexos. Em seguida, após definir-se os polinômios  $R_n(z)$ , em função dos polinômios  $P_n(1; z)$  (que são um caso particular dos  $P_n(w; z)$ ), provou-se que estes últimos também satisfazem a uma relação de recorrência de três termos. Isto está no Teorema 2.2, onde observou-se a primeira aparição das sequências reais  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  como coeficientes da relação de recorrência dos  $R_n(z)$ . Além disso, também mostrou-se, nesse trabalho, que a partir do par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}; \{g_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ , onde  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  é tal que  $0 < g_n < 1$  para  $n \geq 1$  (o que garante que esta sequência pode ser usada para determinar uma sequência de parâmetros para uma sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ ) é possível obter uma sequência de números complexos  $\{\beta\}_{n=0}^{\infty}$ , onde  $|\beta_n| < 1$  para  $n \geq 0$  (que pode ser tomada para ser uma sequência de coeficientes de Verblunsky associada a uma única medida  $\mu$ ) dada, explicitamente, da seguinte forma:

$$\beta_{n-1} = \frac{1 - 2g_n - ic_n}{1 - ic_n}, \quad n \geq 1.$$

Considerando-se uma medida de probabilidade  $\mu$  com salto  $\delta$  ( $0 \leq \delta < 1$ ) em  $z = 1$  foi possível definir-se uma família de medidas  $\mu^{(t)}$  com salto  $t$  ( $0 \leq t < 1$ ) em  $z = 1$ , associadas à medida  $\mu_n^{(\delta)} = \mu_n$ . Isso foi particularmente relevante, pois permitiu enxergar-se que  $P_n^{(t)}(1; z) = P_n(1; z)$  e  $\tau_n^{(t)} = \tau_n$ ,  $n \geq 0$ , e por fim

$$\frac{(\kappa_n^{(t)})^{-2}[1 - \tau_n \alpha_n^{(t)}]}{1 - t} = \frac{\kappa_n^{-2}[1 - \tau_n \alpha_n]}{1 - t}, \quad n \geq 0.$$

Combinando-se esses resultados com a sequência dada por

$$g_{1,n}^{(t)} := \frac{1}{2} \frac{|1 - \tau_n \alpha_n^{(t)}|^2}{1 - \operatorname{Re}(\tau_n \alpha_n^{(t)})}, \quad n \geq 0,$$

onde  $0 \leq t < 1$ , mostrou-se que  $\{g_{1,n}^{(t)}\}_{n=0}^{\infty}$  é uma sequência de parâmetro para a sequência encadeada positiva  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$  e, em particular, que  $\{g_{1,n}^{(0)}\}_{n=0}^{\infty}$  é a sequência maximal de parâmetros para essa mesma sequência encadeada.

Um outro resultado importante estabelecido nesse trabalho foi em relação aos pontos puros da medida  $\mu$ . Mostrou-se que a medida de probabilidade  $\mu$  tem um ponto puro em  $w$  ( $|w| = 1$ ) se, e somente, se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{|1 - w \tau_{j-1}(w) \alpha_{j-1}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}|^2} \right] = \lambda(w) < \infty.$$

Neste caso, o tamanho da massa no ponto  $z = w$  é dado por  $t = [1 + \lambda(w)]^{-1}$ . Isso mostrou uma caracterização dos pontos puros de uma dada medida  $\mu$ .

Como consequência dos resultados mencionados anteriormente, chegou-se na afirmação mais importante do trabalho que consiste em um teorema do tipo Favard. Segundo esse resultado, dado uma medida de probabilidade não trivial no círculo unitário, pode-se obter um par de sequências reais associado, onde uma delas é também uma sequência encadeada positiva; reciprocamente, dado um par de seqências reais, onde uma delas é uma sequência encadeada positiva, então, pode-se recuperar uma medida de probabilidade não trivial no círculo unitário. Com isso posto, sendo  $\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$  a sequência de OPUC mônicos associados à medida  $\mu$ ,  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  os coeficientes de Versblunsky e  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}; \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$  um par de sequências reais, com  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  sendo uma sequência encadeada positiva, obteve-se a seguinte caracterização:

$$\{S_n(z)\}_{n=0}^{\infty} \iff \mu \iff \{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \iff \{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}; \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}. \quad (\text{I})$$

---

Para mostrar uma aplicação da teoria discutida no trabalho, na última seção, foi apresentado um exemplo explícito envolvendo sequências  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Os polinômios  $R_n$  ali obtidos eram tais que seus coeficientes  $d_{1,n} = d_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , eram os mesmos coeficientes como na fórmula de recorrência para os polinômios ultrasféricos, de onde pôde-se concluir que  $\{d_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$  era uma sequência encadeada positiva e obter, também, a sua sequência maximal de parâmetros, a qual também foi confirmado pelo critério de Wall. Consequentemente mostrou-se que a sequência  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  dada no exemplo era, de fato, uma sequência encadeada positiva, com sequências maximal e minimal de parâmetros conhecidas. A partir disso, usou-se a caracterização dada em (I) para obter a medida  $\mu^{(t)}$ ,  $0 < t < 1$ , associada ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}; \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ , bem como obter seus respectivos coeficientes de Verblunsky de forma explícita. Observou-se também, com os resultados estabelecidos nesse trabalho, que para este exemplo, a respectiva medida  $\mu^{(t)}$ ,  $0 < t < 1$ , tinha um ponto puro em  $z = 1$  com tamanho de massa  $t$ , obtido também explicitamente.

Em suma, acredita-se que o principal objetivo da presente dissertação é o de servir como um texto introdutório, e simples, para aqueles que pretendam ingressar na recente teoria dos polinômios ortogonais no círculo unitário via um par de sequências reais. Por essa razão, procurou-se demonstrar todos os resultados abordados da maneira mais clara possível, mas sem deixar de lado o rigor matemático presente desde o início do trabalho.

## REFERÊNCIAS

- [1] ANDRADE, E.X.L.; BRACCIALI, C.F. *Frações contínuas: propriedades e aplicações*. Notas em Matemática Aplicada. São Carlos: SBMAC, 2005, p. 28.
- [2] ANDREWS, G.E.; ASKEY, R.; ROY, R. *Special Functions*. In: Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
- [3] BARTLE, R.G. *Elementos de Análise Real*. Rio de Janeiro: Ed. Campus, 1983.
- [4] CASTILLO, K.; COSTA, M.S.; SRI RANGA, A.; VERONESE, D.O. A Favard type theorem for orthogonal polynomials on the unit circle from a three term recurrence formula. *J. Approx. Theory*, v. 184, p. 146-162, 2014.
- [5] CHIHARA, T.S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. In: Mathematics and its Applications Series. New York: Gordon and Breach, 1978.
- [6] CONWAY, J.B. *Functions of One Complex Variable*. New York: Springer, 2nd ed., 1978.
- [7] COSTA, M.S.; FELIX, H.M.; SRI RANGA, A. Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences. *J. Approx. Theory*, v. 173, p. 14-32, 2013.
- [8] DELSART, P.; GENIN, Y. The split Levinson algorithm. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process*, v. 34, p. 470-478, 1986.
- [9] HENDRIKSEN, E.; VAN ROSSUM, H. Orthogonal Laurent polynomials. *Indag. Math.*, (Ser. A), v. 48. p. 17-36, 1986.
- [10] ISMAIL, M.E.H. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. In: Encyclopedia of Mathematics and its Applications. vol. 98. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [11] JONES, W.B.; NJASTAD, O.; THRON, W.J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle. *Bull. Lond. Math. Soc.*, v. 21, p. 113-152, 1989.

- 
- [12] JONES, W.B.; THRON, W.J. *Survey of continued fraction methods of solving moment problems*. In: *Analytic Theory of Continued Fractions*. In: LNM, vol. 932. Berlin: Springer, 1981.
- [13] LIMA, E.L. *Álgebra Linear*, 8nd ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [14] SIMON, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory*. In: *American Mathematical Society Colloquium Publications*, vol. 54. Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [15] SIMON, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2. Spectral Theory*. In: *American Mathematical Society Colloquium Publications*, vol. 54. Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [16] SRI RANGA, A. Szegő polynomials from hypergeometric functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 138, p. 4259-4270, 2010.
- [17] SRI RANGA, A.; BRACCIALI, C.F.; ANDRADE, E.X.L. *Polinômios que satisfazem uma Relação de Recorrência de Três Termos*. *Notas em Matemática Aplicada*. São Carlos: SBMAC, 2014, p. 15, 21, 47, 55, 73, 74, 79, 80.
- [18] SZEGŐ, G. *Orthogonal Polynomials*. In: *American Mathematical Society Colloquium Publications*, vol. 23, 4. ed. Providence: American Mathematical Society, 1975.
- [19] WALL, H.S. *Analytic Theory of Continued Fractions*. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1948.