

UNIVERSIDADE
FEDERAL
DO
MARANHÃO

Luís Fernando Coelho Amaral

ANÁLISE VETORIAL

∂ \oint Σ Δ \iiint ∇ \oiint
 \vec{v} \propto $\text{Rot}\vec{F}$ $\text{div}\vec{F}$ $\chi(u, v)$

$$\oint_{\alpha} d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\oint_{\partial M} \vec{F} d\vec{r} = \iint_M (\text{Rot}\vec{F} \cdot \vec{n}) dM$$

$$\iint_{\partial S=M} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM = \iiint_S \text{div}\vec{F} dx dy dz$$

Luís Fernando Coelho Amaral

Análise Vetorial

Universidade Federal do Maranhão



Luís Fernando Coelho Amaral

À minha Família e a meu Pai

Prefácio

O Texto foi elaborado com o objetivo de ser utilizado num curso introdutório de **Análise Vetorial** oferecido pelo **Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão - UFMA**, principalmente para os cursos de Matemática, Física e Engenharia.

O aluno, ao estudar este texto, deve estar familiarizado com, pelo menos, o conteúdo de **Geometria analítica no \mathbb{R}^3** e com o **Cálculo Diferencial e Integral** [5],[6], este último com um enfoque em **Integração múltipla** (dupla e tripla).

No **Capítulo 1**, consideramos as **funções de uma variável real** que serão úteis para o desenvolvimento teórico das curvas no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 .

No **Capítulo 2**, estudamos as **curvas**[2] no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , com o caráter mais detalhado que o necessário para o desenvolvimento do resto do conteúdo. O objetivo de estudar as curvas de forma mais detalhada é de tentar suprir a falta de conhecimento dos alunos que terminam o curso, por exemplo, de Matemática e não cursam a disciplina **Geometria Diferencial** [1],[2], também do Departamento de Matemática da UFMA.

No **Capítulo 3**, faremos uma pequena introdução à **Topologia** no \mathbb{R}^3 . Este capítulo poderia ser considerado como um apêndice, porém a opção de torná-lo um capítulo é de tentar motivar os alunos à estudarem alguns conceitos interessantes e úteis para os capítulos posteriores.

No **Capítulo 4**, estudaremos as **funções vetoriais de várias variáveis**, principalmente os campos de vetores, tais como o **Rotacional**, o **Divergente** e o **Gradiente** [4], tanto em **coordenadas cartesianas** quanto em **coordenadas curvilíneas**.

No **Capítulo 5**, faremos a **integral de linha de campo escalar** e a **integral de linha de campo vetorial** com o objetivo principal de estudar o **Teorema de Green**[4],[7] no plano.

No **Capítulo 6**, estudaremos as **superfícies parametrizadas** [1],[2]. Tal como em curvas, a parte inicial de superfícies terá um pouco mais de detalhe além do necessário, pelos mesmos motivos como em curvas, e claro, estudaremos as **integrais de superfícies** e os Teoremas de **Stokes** e **Gauss** [4],[7].

No **Apêndice**, é apresentado um resumo de **vetores no Espaço**, [9] algumas operações e propriedades, com o propósito de auxiliar na revisão de alguma propriedade utilizada no texto.

Para finalizar, gostaria de agradecer a todos os professores do Departamento de Matemática da UFMA, em especial aos professores Marcos Antônio Ferreira Araújo

e Elivado Rodrigues Macedo, que muito contribuíram com várias sugestões e críticas para o desenvolvimento deste trabalho ao longo de alguns anos. Gostaria também de agradecer, mas sem citar nomes, aos alunos do Curso de Matemática que cursaram esta disciplina ao longo desses anos e que observaram vários erros de digitação, contribuindo assim para melhoria do material para que novos alunos tenham um material mais adequado.

Luís Fernando Coelho Amaral

Sumário

1	Funções Vetoriais de uma Variável	7
1	Função Vetorial	7
2	Álgebra de funções vetoriais	7
3	Limite de uma função vetorial	9
4	Derivação e Integração de função vetorial	12
5	Exercícios	16
2	Curvas no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3	18
1	Curva Parametrizada	18
2	Comprimento de Arco de Curva	22
3	Teoria Local das Curvas no \mathbb{R}^2	26
4	Exercícios	29
5	Teoria Local das Curvas no \mathbb{R}^3	31
6	Torção de uma curva em \mathbb{R}^3	34
7	Algumas proposições sobre curvas no \mathbb{R}^3	35
8	Hélices	36
9	Exercícios	41
3	Algumas Noções Topológicas em \mathbb{R}^3	45
1	Bolas	45
2	Conjunto Aberto	46
3	Conjunto Fechado	47
4	Conjunto Compacto	47
5	Exercícios	48
4	Funções Vetoriais de Várias Variáveis	49
1	Função Vetorial	49
2	Limite e Derivadas Parciais	51

3	Campo Vetorial	54
4	Gradiente, Divergente, Rotacional e Laplaciano em coordenadas cartesianas	55
4.1	Gradiente	55
4.2	Rotacional	57
4.3	Divergente	58
4.4	Laplaciano	59
5	Campo Conservativo	60
6	Campos Vetoriais em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais	63
6.1	Coordenadas Curvilíneas	63
6.2	Gradiente, Divergente e Rotacional em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais	73
7	Exercícios	83
5	Integral de Linha	87
1	Integral de Linha de Campo Escalar	87
2	Integral de Linha de um Campo Vetorial	92
3	Determinação de uma Função Potencial por integral indefinida	98
4	O Teorema de Green	99
5	Formas tangencial e normal do Teorema de Green	104
6	Campos Vetoriais Conservativos no Plano	105
7	Determinação de uma Função Potencial usando integral definida	107
8	Exercícios	111
6	Integral de Superfície	114
1	Superfície Parametrizada	114
2	Superfície Parametrizada Regular	116
3	Área de Superfície	120
4	Integral de Superfície de Função Escalar	125
5	Integral de Superfície de Função Vetorial	128
6	O Teorema de Stokes	134
7	Teorema de Gauss(da Divergência)	140
8	Algumas Identidades importantes	148

9	Exercícios	151
A	Vetores	155
1	Equipolência	155
1.1	Propriedades de Equipolência	156
2	Classe de Equivalência	156
3	Vetor	156
3.1	Operações com Vetores	157
3.2	Propriedades da Adição	158
4	Produto Escalar	158
4.1	Propriedades do Produto Escalar	159
4.2	Expressão Cartesiana do Produto Escalar	159
5	Produto de um Vetor por um Escalar	160
5.1	Propriedades do Produto de um Vetor por um Escalar	160
6	Produto Vetorial	160
6.1	Propriedades do Produto Vetorial	161
6.2	Expressão Cartesiana do Produto Vetorial	161
6.3	Interpretação Geométrica do módulo do Produto Vetorial	162
7	Produto Misto	163
7.1	Expressão Cartesiana do Produto Misto	163
7.2	Interpretação Geométrica do Produto Misto	163
8	Exercícios	164
	Referências Bibliográficas	166

Capítulo 1

Funções Vetoriais de uma Variável

Faremos aqui um breve estudo das funções vetoriais de uma variável real que será útil para o desenvolvimento das curvas no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 .

1 Função Vetorial

Definição 1.1. Uma **Função Vetorial** é uma função, que denotaremos por \vec{f} , definida num subconjunto I de \mathbb{R} a valores num subconjunto de um espaço vetorial real,¹ ou seja,

$$\vec{f}: I \longrightarrow \mathbb{R}^3; \quad t \longmapsto \vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)),$$

onde $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ são as funções componentes de \vec{f} .

Observação 1.1.

1. Podemos escrever $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$, onde os vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são os vetores canônicos² do \mathbb{R}^2 ou do \mathbb{R}^3 .
2. O domínio da função vetorial $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$, que denotaremos por $\mathbb{D}_{\vec{f}}$, é a interseção dos domínios de f_1, f_2 e f_3 , ou seja, $\mathbb{D}_{\vec{f}} = \bigcap_{i=1}^3 \mathbb{D}_{f_i}$.

Exemplo 1.1. O domínio da função vetorial $\vec{f}(t) = t^2\vec{i} + \log t\vec{j} + \frac{1}{t}\vec{k}$ é \mathbb{R}_+ , pois as suas funções componentes, $f_1(t) = t^2$, $f_2(t) = \log t$ e $f_3(t) = 1/t$ têm por domínios \mathbb{R} , \mathbb{R}_+ e \mathbb{R}^* , respectivamente. Assim, o domínio de \vec{f} é o conjunto $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+$.

2 Álgebra de funções vetoriais

Sejam

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$$

e

$$\vec{g}(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

¹Consideraremos \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ;

²Em \mathbb{R}^2 , os vetores canônicos são $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$.

duas funções vetoriais e $h(t)$ uma função escalar definida num intervalo I . Então, definimos

1. **Soma:**

$$\begin{aligned}(\vec{f} + \vec{g})(t) &= \vec{f}(t) + \vec{g}(t) \\&= [f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}] + [g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}] \\&= [f_1(t) + g_1(t)]\vec{i} + [f_2(t) + g_2(t)]\vec{j} + [f_3(t) + g_3(t)]\vec{k}\end{aligned}$$

2. **Multiplicação por h :**

$$\begin{aligned}(h\vec{f})(t) &= h(t)\vec{f}(t) \\&= h(t)[f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}] \\&= h(t)f_1(t)\vec{i} + h(t)f_2(t)\vec{j} + h(t)f_3(t)\vec{k}\end{aligned}$$

3. **Produto Escalar:**

$$\begin{aligned}(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) &= [f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}] \cdot [g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}] \\&= f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)\end{aligned}$$

4. **Produto Vetorial:**

$$\begin{aligned}(\vec{f} \times \vec{g})(t) &= \vec{f}(t) \times \vec{g}(t) \\&= [f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}] \times [g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}] \\&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Além disso, para cada $t \in I$, o **comprimento** de $\vec{f}(t)$ é dado por

$$\|\vec{f}(t)\| = \sqrt{f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3(t)^2},$$

ou seja, $\|\vec{f}(t)\|$ é uma função escalar de t , com $t \in I$. Para algumas funções vetoriais, o comprimento pode ser constante, como por exemplo, o comprimento da função vetorial $\vec{f}(t) = r(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j})$, $r > 0$ é dado por $\|\vec{f}(t)\| = r$.

Exemplo 2.1. Se $\vec{f}(t) = t\vec{i} + (1 - t^2)\vec{j} + \cos t\vec{k}$ e $\vec{g}(t) = \sin t\vec{i} + \ln t\vec{j} + t^2\vec{k}$ para $t > 0$, então temos

$$\vec{f}(t) + \vec{g}(t) = (t + \sin t)\vec{i} + ((1 - t^2) + \ln t)\vec{j} + (\cos t + t^2)\vec{k}$$

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = t \operatorname{sen} t + (1 - t^2) \ln t + t^2 \cos t$$

$$\begin{aligned} \vec{f}(t) \times \vec{g}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & 1 - t^2 & \cos t \\ \operatorname{sen} t & \ln t & t^2 \end{vmatrix} \\ &= [t^2(1 - t^2) - \cos t \ln t] \vec{i} + [\operatorname{sen} t \cos t - t^3] \vec{j} + [t \ln t - (1 - t^2) \operatorname{sen} t] \vec{k} \end{aligned}$$

$$\|\vec{f}(t)\| = \sqrt{t^2 + (1 - t^2)^2 + \cos^2 t} = \sqrt{1 - t^2 + t^4 + \cos^2 t}$$

$$\|\vec{g}(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \ln^2 t + t^4}$$

3 Limite de uma função vetorial

Definição 3.1. Seja $\vec{f} = f_1(t) \vec{i} + f_2(t) \vec{j} + f_3(t) \vec{k}$, $t \in I$, uma função vetorial. Chama-se **Limite** de $\vec{f}(t)$ quando t tende para a , e escreve-se $\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t)$, ao vetor

$$\left(\lim_{t \rightarrow a} f_1(t), \lim_{t \rightarrow a} f_2(t), \lim_{t \rightarrow a} f_3(t) \right),$$

ou escrito como combinação linear dos vetores canônicos, $\lim_{t \rightarrow a} f_1(t) \vec{i} + \lim_{t \rightarrow a} f_2(t) \vec{j} + \lim_{t \rightarrow a} f_3(t) \vec{k}$, desde que existam os limites de f_1, f_2 e f_3 quando t tende para a . Tem-se portanto

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f_1(t), \lim_{t \rightarrow a} f_2(t), \lim_{t \rightarrow a} f_3(t) \right),$$

ou então

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \lim_{t \rightarrow a} f_1(t) \vec{i} + \lim_{t \rightarrow a} f_2(t) \vec{j} + \lim_{t \rightarrow a} f_3(t) \vec{k}.$$

Exemplo 3.1. Considere a seguinte função $\vec{f}(t) = \ln(e - t) \vec{i} + \frac{\operatorname{sen} t}{t} \vec{j} + t^3 \vec{k}$. Como $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(e - t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$ e $\lim_{t \rightarrow 0} t^3 = 0$, tem-se $\lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t) = \vec{i} + \vec{j} + 0 \vec{k} = (1, 1, 0)$.

Proposição 1.1. Seja $\vec{f}(t) = f_1(t) \vec{i} + f_2(t) \vec{j} + f_3(t) \vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$, uma função vetorial, $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3) \in \mathbb{R}^3$. São equivalentes:

1. $\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \vec{L}$
2. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |t - a| < \delta \implies \|\vec{f}(t) - \vec{L}\| < \epsilon$

Demonstração. 1) \implies 2)] Suponhamos que $\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \vec{L}$. Então tem-se

$$\lim_{t \rightarrow a} f_1(t) = L_1, \quad \lim_{t \rightarrow a} f_2(t) = L_2 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow a} f_3(t) = L_3.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, tais que para $0 < |t - a| < \delta_i$, tem-se $|f_i(t) - L_i| < \frac{\epsilon}{3}$, $i = 1, 2, 3$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Então, para t tal que $0 < |t - a| < \delta$, tem-se $|f_i(t) - L_i| < \frac{\epsilon}{3}$, $i = 1, 2, 3$. Assim $\|\vec{f}(t) - \vec{L}\| < \epsilon$.

2) \implies 1)] Seja $\epsilon > 0$. Então existe um real $\delta > 0$ tal que, para t tal que $0 < |t - a| < \delta$, tem-se $\|\vec{f}(t) - \vec{L}\| < \epsilon$. Para cada $i = 1, 2, 3$, tem-se $|f_i(t) - L_i| \leq \|\vec{f}(t) - \vec{L}\|$. Assim, para t tal que $0 < |t - a| < \delta$, tem-se $|f_i(t) - L_i| < \epsilon$, $i = 1, 2, 3$.

■

Proposição 1.2. *Sejam \vec{f} e \vec{g} funções vetoriais e h uma função escalar, definidas num intervalo I . Suponha que $\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \vec{L}$, $\lim_{t \rightarrow a} \vec{g}(t) = \vec{M}$, $\lim_{t \rightarrow a} h(t) = l$, com \vec{L}, \vec{M} vetores constantes e l um escalar. Então*

$$1. \lim_{t \rightarrow a} (\vec{f}(t) + \vec{g}(t)) = \vec{L} + \vec{M}$$

$$2. \lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = \vec{L} \cdot \vec{M}$$

$$3. \lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) \times \vec{g}(t) = \vec{L} \times \vec{M}$$

$$4. \lim_{t \rightarrow a} h(t) \vec{f}(t) = l \cdot \vec{L}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \vec{L} = (L_1, L_2, L_3) &\iff \\ \lim_{t \rightarrow a} f_1(t) = L_1, \lim_{t \rightarrow a} f_2(t) = L_2, \lim_{t \rightarrow a} f_3(t) = L_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} \vec{g}(t) = \vec{M} = (M_1, M_2, M_3) &\iff \\ \lim_{t \rightarrow a} g_1(t) = M_1, \lim_{t \rightarrow a} g_2(t) = M_2, \lim_{t \rightarrow a} g_3(t) = M_3. \end{aligned}$$

Daí

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow a} (\vec{f}(t) + \vec{g}(t)) &= \lim_{t \rightarrow a} [(f_1(t) \vec{i} + f_2(t) \vec{j} + f_3(t) \vec{k}) + (g_1(t) \vec{i} + g_2(t) \vec{j} + g_3(t) \vec{k})] \\
&= \lim_{t \rightarrow a} [(f_1(t) + g_1(t)) \vec{i} + (f_2(t) + g_2(t)) \vec{j} + (f_3(t) + g_3(t)) \vec{k}] \\
&= (L_1 + M_1) \vec{i} + (L_2 + M_2) \vec{j} + (L_3 + M_3) \vec{k} \\
&= (L_1 \vec{i} + L_2 \vec{j} + L_3 \vec{k}) + (M_1 \vec{i} + M_2 \vec{j} + M_3 \vec{k}) \\
&= (L_1, L_2, L_3) + (M_1, M_2, M_3) = \vec{L} + \vec{M}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) &= \lim_{t \rightarrow a} [f_1(t) \vec{i} + f_2(t) \vec{j} + f_3(t) \vec{k}] \cdot [g_1(t) \vec{i} + g_2(t) \vec{j} + g_3(t) \vec{k}] \\
&= \lim_{t \rightarrow a} [f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)] \\
&= L_1 \cdot M_1 + L_2 \cdot M_2 + L_3 \cdot M_3 \\
&= (L_1, L_2, L_3) \cdot (M_1, M_2, M_3) = \vec{L} \cdot \vec{M}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) \times \vec{g}(t) &= \lim_{t \rightarrow a} \{ [f_1(t) \vec{i} + f_2(t) \vec{j} + f_3(t) \vec{k}] \times [g_1(t) \vec{i} + g_2(t) \vec{j} + g_3(t) \vec{k}] \} \\
&= \lim_{t \rightarrow a} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix} \\
&= \lim_{t \rightarrow a} [(f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t)) \vec{i} + (g_1(t)f_3(t) - g_3(t)f_1(t)) \vec{j} \\
&\quad + (f_1(t)g_2(t) - g_1(t)f_2(t)) \vec{k}] \\
&= (L_2M_3 - L_3M_2) \vec{i} + (M_1L_3 - M_3L_1) \vec{j} + (L_1M_2 - M_1L_2) \vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{vmatrix} \\
&= (L_1, L_2, L_3) \times (M_1, M_2, M_3) = \vec{L} \times \vec{M}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow a} h(t) \vec{f}(t) &= \lim_{t \rightarrow a} h(t) [f_1(t) \vec{i} + f_2(t) \vec{j} + f_3(t) \vec{k}] \\
&= \lim_{t \rightarrow a} [h(t)f_1(t) \vec{i} + h(t)f_2(t) \vec{j} + h(t)f_3(t) \vec{k}] \\
&= lL_1 \vec{i} + lL_2 \vec{j} + lL_3 \vec{k} = l\vec{L}
\end{aligned}$$

■

Definição 3.2. Uma função vetorial $\vec{f}(t)$, $t \in I$, é **Contínua** em $a \in I$ se $\lim_{t \rightarrow a} \vec{f}(t) = \vec{f}(a)$.

Observação 3.1.

1. É fácil verificar que a função vetorial \vec{f} de componentes f_1, f_2 e f_3 é contínua em a se e só se as funções f_1, f_2 e f_3 são contínuas em a .
2. São equivalentes:

- (a) $\vec{f}(t)$, $t \in I$, é contínua em $a \in I$
- (b) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |t - a| < \delta \implies \|\vec{f}(t) - \vec{f}(a)\| < \epsilon$.

Observação 3.2. Uma função vetorial \vec{f} diz-se **Contínua** se for **Contínua** em todos os pontos do seu domínio.

4 Derivação e Integração de função vetorial

Definição 4.1. A **Derivada** de uma função vetorial \vec{f} de domínio $I \subset \mathbb{R}$, que denotaremos por \vec{f}' ou $\frac{d\vec{f}}{dt}$, é a função vetorial definida por $\vec{f}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$, $t \in I$ caso este limite exista.

Exemplo 4.1. Considere a função vetorial dada por $\vec{f}(t) = t^2 \vec{i} + 2t \vec{j}$. Então

$$\begin{aligned} \vec{f}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 \vec{i} + 2(t+h) \vec{j} - t^2 \vec{i} - 2t \vec{j}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 2th + h^2) \vec{i} + (2t + 2h) \vec{j} - t^2 \vec{i} - 2t \vec{j}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2th + h^2) \vec{i} + 2h \vec{j}}{h} = 2t \vec{i} + 2 \vec{j}. \end{aligned}$$

Proposição 1.3. Seja $\vec{f}(t) = f_1(t) \vec{i} + f_2(t) \vec{j} + f_3(t) \vec{k}$, $t \in I$, uma função vetorial em que f_1, f_2 e f_3 são deriváveis em I . Então

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \left(\frac{df_1}{dt}(t), \frac{df_2}{dt}(t), \frac{df_3}{dt}(t) \right)$$

ou simplesmente, $\vec{f}'(t) = f_1'(t) \vec{i} + f_2'(t) \vec{j} + f_3'(t) \vec{k}$, $t \in I$.

Demonstração. Como as funções f_1, f_2 e f_3 são deriváveis, então para $t \in I$,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{f}}{dt}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(t+h)\vec{i} + f_2(t+h)\vec{j} + f_3(t+h)\vec{k} - [f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h} \vec{i} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h} \vec{j} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_3(t+h) - f_3(t)}{h} \vec{k} \\
 &= \frac{df_1}{dt}(t) \vec{i} + \frac{df_2}{dt}(t) \vec{j} + \frac{df_3}{dt}(t) \vec{k}.
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 4.2. Voltando ao exemplo anterior, para derivar a função vetorial $\vec{f}(t) = t^2 \vec{i} + 2t \vec{j}$, basta derivar suas funções coordenadas $f_1(t) = t^2$ e $f_2(t) = 2t$, com relação a t .

Proposição 1.4. Sejam $\vec{f}, \vec{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ funções vetoriais, $\lambda \in \mathbb{R}$ e h uma função real de variável real. Supondo que h e as funções componentes de \vec{f} e \vec{g} são deriváveis em I . Então, para $t \in I$,

1. $(\vec{f}(t) + \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t)$
2. $(\lambda \vec{f}(t))' = \lambda \vec{f}'(t)$
3. $(h(t) \vec{f}(t))' = h'(t) \vec{f}(t) + h(t) \vec{f}'(t)$
4. $(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)$
5. $(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \times \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \times \vec{g}'(t)$
6. $(\vec{f}(h(t)))' = \vec{f}'(h(t)) \cdot h'(t)$

Demonstração. 1.

$$\begin{aligned}
 (\vec{f}(t) + \vec{g}(t))' &= [(f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}) + (g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k})]' \\
 &= [(f_1(t) + g_1(t))\vec{i} + (f_2(t) + g_2(t))\vec{j} + (f_3(t) + g_3(t))\vec{k}]' \\
 &= (f_1(t) + g_1(t))' \vec{i} + (f_2(t) + g_2(t))' \vec{j} + (f_3(t) + g_3(t))' \vec{k} \\
 &= (f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k}) + (g_1'(t)\vec{i} + g_2'(t)\vec{j} + g_3'(t)\vec{k}) \\
 &= \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(\lambda \vec{f}(t))' &= (\lambda f_1(t) \vec{i} + \lambda f_2(t) \vec{j} + \lambda f_3(t) \vec{k})' \\
&= \lambda f_1'(t) \vec{i} + \lambda f_2'(t) \vec{j} + \lambda f_3'(t) \vec{k} \\
&= \lambda (f_1'(t) \vec{i} + f_2'(t) \vec{j} + f_3'(t) \vec{k}) = \lambda \vec{f}'(t)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(h(t) \vec{f}(t))' &= [h(t) f_1(t) \vec{i} + h(t) f_2(t) \vec{j} + h(t) f_3(t) \vec{k}]' \\
&= (h(t) f_1(t))' \vec{i} + (h(t) f_2(t))' \vec{j} + (h(t) f_3(t))' \vec{k} \\
&= (h'(t) f_1(t) + h(t) f_1'(t)) \vec{i} + (h'(t) f_2(t) + h(t) f_2'(t)) \vec{j} \\
&\quad + (h'(t) f_3(t) + h(t) f_3'(t)) \vec{k} \\
&= (h'(t) f_1(t) \vec{i} + h'(t) f_2(t) \vec{j} + h'(t) f_3(t) \vec{k}) + (h(t) f_1'(t) \vec{i} \\
&\quad + h(t) f_2'(t) \vec{j} + h(t) f_3'(t) \vec{k}) \\
&= h'(t) (f_1(t) \vec{i} + f_2(t) \vec{j} + f_3(t) \vec{k}) + h(t) (f_1'(t) \vec{i} + f_2'(t) \vec{j} + f_3'(t) \vec{k}) \\
&= h'(t) \vec{f}(t) + h(t) \vec{f}'(t)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))' &= \frac{d}{dt} [(f_1(t) \vec{i} + f_2(t) \vec{j} + f_3(t) \vec{k}) \cdot (g_1(t) \vec{i} + g_2(t) \vec{j} + g_3(t) \vec{k})] \\
&= \frac{d}{dt} [f_1(t) g_1(t) + f_2(t) g_2(t) + f_3(t) g_3(t)] \\
&= f_1'(t) g_1(t) + f_1(t) g_1'(t) + f_2'(t) g_2(t) + f_2(t) g_2'(t) + f_3'(t) g_3(t) \\
&\quad + f_3(t) g_3'(t) \\
&= (f_1'(t) g_1(t) + f_2'(t) g_2(t) + f_3'(t) g_3(t)) + (f_1(t) g_1'(t) + f_2(t) g_2'(t) \\
&\quad + f_3(t) g_3'(t)) \\
&= \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))' &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix} \\
&= \frac{d}{dt} [(f_2g_3 - f_3g_2)\vec{i} + (f_3g_1 - f_1g_3)\vec{j} + (f_1g_2 - f_2g_1)\vec{k}] \\
&= (f_2'(t)g_3(t) + f_2(t)g_3'(t) - f_3'(t)g_2(t) - f_3(t)g_2'(t))\vec{i} \\
&\quad + (f_3'(t)g_1(t) + f_3(t)g_1'(t) - f_1'(t)g_3(t) - f_1(t)g_3'(t))\vec{j} \\
&\quad + (f_1'(t)g_2(t) + f_1(t)g_2'(t) - f_2'(t)g_1(t) - f_2(t)g_1'(t))\vec{k} \\
&= [(f_2'g_3 - f_3'g_2)\vec{i} + (f_3'g_1 - f_1'g_3)\vec{j} + (f_1'g_2 - f_2'g_1)\vec{k}] \\
&\quad + [(f_2g_3' - f_3g_1')\vec{i} + (f_3g_1' - f_1g_3')\vec{j} + (f_1g_2' - f_2g_1')\vec{k}] \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1'(t) & g_2'(t) & g_3'(t) \end{vmatrix} \\
&= \vec{f}'(t) \times \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \times \vec{g}'(t)
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
[\vec{f}(h(t))]' &= \frac{d}{dt} (f_1(h(t))\vec{i} + f_2(h(t))\vec{j} + f_3(h(t))\vec{k}) \\
&= f_1'(h(t))h'(t)\vec{i} + f_2'(h(t))h'(t)\vec{j} + f_3'(h(t))h'(t)\vec{k} \\
&= [f_1'(h(t))\vec{i} + f_2'(h(t))\vec{j} + f_3'(h(t))\vec{k}]h'(t) \\
&= \vec{f}'(h(t)) \cdot h'(t)
\end{aligned}$$

■

Definição 4.2. Seja $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$, $t \in I$, uma função vetorial contínua em $I = [a, b]$. Chamamos **Integral Definida** de \vec{f} de a até b , e escrevemos $\int_a^b \vec{f}(t)dt$, ao vetor de componentes $\left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \int_a^b f_3(t)dt\right)$. Assim

$$\int_a^b \vec{f}dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \int_a^b f_3(t)dt\right).$$

Exemplo 4.3. A função vetorial $\vec{f}(t) = t^2\vec{i} + \sin(t\pi)\vec{k}$ é contínua em $[0, 2]$. Logo

$$\int_0^2 \vec{f}(t)dt = \left(\int_0^2 t^2dt, \int_0^2 0dt, \int_0^2 \sin(t\pi)dt\right) = \left(\frac{8}{3}, 0, 0\right).$$

5 Exercícios

1. Sejam $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$, $t \in I$, uma função vetorial e $a \in I$. Mostre que \vec{f} é contínua em a se e só se as funções f_1 , f_2 e f_3 são contínuas em a .
2. Considere a função vetorial real, dada por $\vec{f}(t) = \vec{u} + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, onde $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ e $\vec{v} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, com $a, b, c, l, m, n \in \mathbb{R}$ fixos.

(a) Determine as funções componentes de \vec{f} .

(b) Verifique que $\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \vec{v}$.

3. Considere a função vetorial de uma variável real definida por

$$\vec{f}(t) = \vec{u} + \cos t \vec{v} + \sin t \vec{w}, \quad t \in \mathbb{R},$$

sendo $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{j} + \vec{k}$. Calcule $\vec{f}'(t)$ e $\vec{f}''(t)$.

4. Sejam $\vec{f}(t)$, $\vec{g}(t)$ e $\vec{h}(t)$ funções vetoriais em t , prove que

$$(\vec{f} \cdot \vec{g} \times \vec{h})' = \vec{f}' \cdot \vec{g} \times \vec{h} + \vec{f} \cdot \vec{g}' \times \vec{h} + \vec{f} \cdot \vec{g} \times \vec{h}'.$$

5. Seja \vec{f} uma função vetorial. Mostre que se para todo $t \in \mathbb{R}$, $\|\vec{f}(t)\| = k$, com k fixo, então $\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t) = 0$.
6. Sejam $\vec{f}(t) = t\vec{a} + t^2\vec{b}$ e $\vec{g}(t) = t\vec{i} + \sin t \vec{j} + \cos t \vec{k}$, com $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $0 \leq t \leq 2\pi$. calcular:

(a) $\vec{f}(t) + \vec{g}(t)$

(b) $\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$

(c) $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$

(d) $\vec{a} \cdot \vec{f}(t) + \vec{b} \cdot \vec{g}(t)$

(e) $\vec{f}(t-1) + \vec{g}(t+1)$.

7. Se $\vec{f}(t) = e^{2t} \cdot \vec{u} + e^{3t} \cdot \vec{v}$, onde \vec{u} e \vec{v} são vetores constantes, mostre que $\vec{f}''(t) - 5\vec{f}'(t) + 6\vec{f}(t) = 0$.

8. Seja $\vec{f}(t) = (\ln t, t, \sqrt{1-t^2}, t^2)$

(a) Determine o domínio de \vec{f}

(b) Calcule $\vec{f}(3/5)$

9. Suponha que $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja derivável até a 2ª ordem e que, para todo $t \geq 0$, $\|\vec{f}(t)\| = \sqrt{t}$. Prove que

$$\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} = -\vec{f} \cdot \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}$$

em $[0, +\infty)$.

10. Determine $\vec{f} = \vec{f}(t)$ sabendo que $\frac{d\vec{f}}{dt} = t\vec{i} + 2\vec{k}$ e $\vec{f}(0) = \vec{i} + \vec{j}$.
11. Seja $\vec{f}(t) = a \cos(wt)\vec{i} + b \sin(wt)\vec{j}$, onde a, b e w são constantes não nulas. Mostre que $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2} + w^2 \cdot \vec{f} = 0$.
12. Seja $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, I intervalo, derivável até a 2ª ordem em I . Suponha que exista um real λ tal que, para todo $t \in I$, $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2}(t) = \lambda\vec{f}(t)$. Prove que $\vec{f}(t) \times \frac{d\vec{f}}{dt}(t)$ é constante em I .
13. Seja $\vec{f}(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$, onde A e B são vetores constantes não nulas e λ é um escalar. Mostre que \vec{f} satisfaz a equação $\vec{f}''(t) - \lambda^2\vec{f}(t) = 0$.
14. Se $\vec{f}(t)$ é uma função vetorial duas vezes diferenciável, mostre que

$$[\vec{f}(t) \times \vec{f}'(t)]' = \vec{f}(t) \times \vec{f}''(t)$$

15. Se $\vec{g}(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)$, mostre que $\vec{g}'(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) \times \vec{f}'''(t)$.

Capítulo 2

Curvas no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3

Faremos aqui o estudo das curvas no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 . Os exercícios foram separados para as curvas no \mathbb{R}^2 e para curvas no \mathbb{R}^3 para melhor entendimento do assunto. Uma boa referência do assunto pode ser encontrada em [2], de onde alguns exemplos e exercícios foram extraídos. Para efeito de simplificação consideremos as curvas tomadas diferenciáveis de classe C^{n-1} ou classe C^∞ , como veremos abaixo.

1 Curva Parametrizada

Definição 1.1. Uma **Curva Parametrizada** no \mathbb{R}^2 é uma aplicação α , de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^2 , ou seja, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ onde t é o **parâmetro** da curva e $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$, é o **traço** da curva.

Observação 1.1. Temos que:

1. A aplicação α é dita diferenciável quando as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são funções diferenciáveis.
2. A aplicação α é dita de classe $C^n(C^\infty)$ quando as funções coordenadas são de classe $C^n(C^\infty)$.
3. Consideraremos aqui as aplicações α que são diferenciáveis de classe $C^n(C^\infty)$, ou seja, as **curvas diferenciáveis** de classe $C^n(C^\infty)$

Exemplo 1.1. Consideremos os seguintes exemplos

1. A aplicação $\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$, $t \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma **reta** passando por (x_0, y_0) paralela ao vetor (a, b) . Podemos escrever vetorialmente a curva α do exemplo acima como $\vec{\alpha}(t) = P_0 + t\vec{v}$ onde $P_0 = (x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (a, b)$.
2. A aplicação $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço é uma circunferência de centro na origem e raio $r > 0$.

¹ n vezes continuamente diferenciáveis

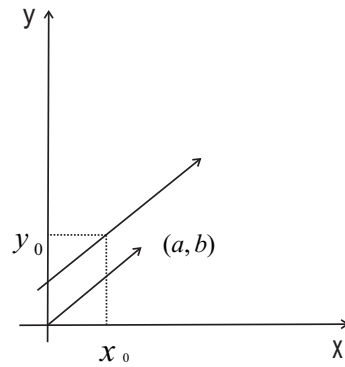


Figura 2.1: Reta $\alpha(t)$ paralela ao vetor (a, b)

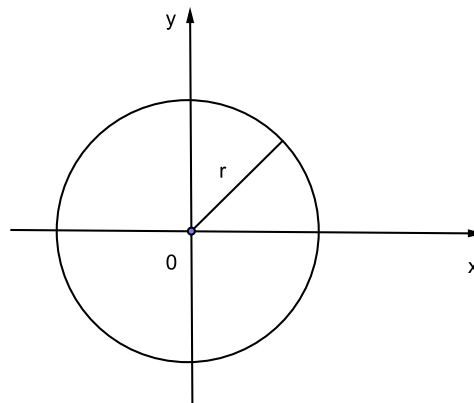


Figura 2.2: Circunferência de centro na origem e raio $r > 0$

Observação 1.2. Duas curvas podem ter o mesmo traço. Por exemplo, as curvas

$$\alpha(t) = (t^3, t^3), \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$\beta(s) = (s, s), \quad s \in \mathbb{R}$$

têm o mesmo traço. As curvas

$$\alpha(t) = (t, t^2), \quad -2 \leq t \leq 2$$

e

$$\beta(s) = (-s, s^2), \quad -2 \leq s \leq 2$$

têm também o mesmo traço, porém com orientações ² opostas.

²sentido de percurso

Definição 1.2. Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável, que a cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ é chamado **Vetor Tangente** a α em t .

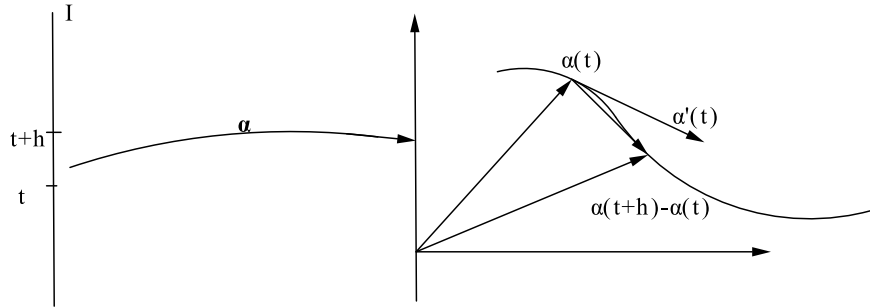


Figura 2.3: Vetor tangente $\alpha'(t)$

De fato, dado $t \in I$, para $h \neq 0$ tal que $t + h \in I$, consideremos o vetor

$$\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}.$$

Por um lado, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = \alpha'(t).$$

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \\ &= (x'(t), y'(t)) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Exemplo 1.2. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, o vetor tangente a α em t é igual a $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

Definição 1.3. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita **Regular** se $\forall t \in I$, $\|\alpha'(t)\| > 0$, ou equivalentemente, $\forall t \in I$, $\alpha'(t) \neq 0$.

Definição 1.4. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regular, $h : J \rightarrow I$ função diferenciável (C^n), onde I e J são abertos de \mathbb{R} e tal que $h' \neq 0$ em J , com $h(J) = I$. Então a função composta $\alpha \circ h = \beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, que tem o mesmo traço que α , chamada **Reparametrização** de α por h . A função h é dita **Mudança de Parâmetro**.

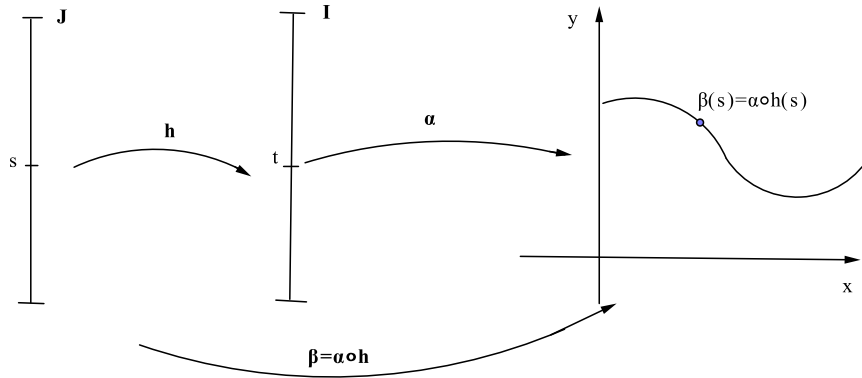


Figura 2.4: reparametrização da curva α

Observação 1.3.

1. Em qualquer mudança de parâmetro $h : J \rightarrow I$, os intervalos I e J são do mesmo tipo, ou seja, são simultaneamente abertos, fechados etc.
2. Se uma bijeção de classe C^n , $h : J \rightarrow I$ é uma mudança de parâmetro então h' nunca se anula.

De fato, se h é uma mudança de parâmetro, como $h^{-1} \circ h = id$ (aplicação identidade), temos que

$$(h^{-1} \circ h)' = 1 \iff (h^{-1})' \cdot h'(s) = 1, \forall s \in J,$$

o que implica, $h'(s) \neq 0, \forall s \in J$.

3. Uma reparametrização de uma curva regular é regular.

De fato, seja $\beta = \alpha \circ h$, uma reparametrização de uma curva regular α . Então $\beta'(s) = \alpha'(h(s)) \cdot h'(s)$. Como $h' \neq 0$, segue o resultado.

4. Dizer que α e β têm o mesmo traço, na definição 1.4, significa dizer que $\alpha(I) = \beta(J)$, e esta igualdade é verdadeira, pois, dado $p \in \alpha(I)$, então $p = \alpha(t)$, para algum $t \in I$, daí existe $s \in J$ tal que $h(s) = t$, segue que $\alpha \circ h(s) = \alpha(t)$, ou seja, $p \in \beta(J)$, e portanto $\alpha(I) \subset \beta(J)$. A outra inclusão é imediata.

Exemplo 1.3. Consideremos a curva regular $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ onde $r > 0$. Seja $h(s) = s/r$, $s \in \mathbb{R}$. A reparametrização de α por h é a curva

$$\beta(s) = \alpha \circ h(s) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r)).$$

2 Comprimento de Arco de Curva

Seja $\alpha(t)$ uma curva no \mathbb{R}^2 . Seja P uma partição regular³ de ordem n do intervalo I , isto é, $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, onde $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ e $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$. Quando Δt é pequeno, o comprimento da linha poligonal é aproximadamente igual ao comprimento da curva $\alpha(t)$. Mas o comprimento do segmento de reta $\alpha(t_i)$ até $\alpha(t_{i+1})$ é

$$\|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$$

onde $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Aplicando o Teorema de Valor Médio às funções $x(t)$ e $y(t)$ em $[t_i, t_{i+1}]$, obtemos $\epsilon_i^1, \epsilon_i^2 \in (t_i, t_{i+1})$ tais que

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\epsilon_i^1)(t_{i+1} - t_i)$$

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\epsilon_i^2)(t_{i+1} - t_i).$$

Logo o comprimento total da curva poligonal é

³Partição em que o comprimento de cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ tem a mesma medida

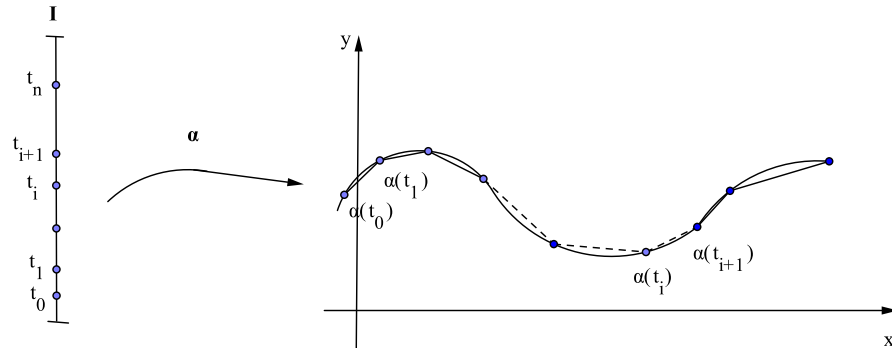


Figura 2.5: comprimento de arco por linha poligonal

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(\epsilon_i^1)]^2(t_{i+1} - t_i)^2 + [y'(\epsilon_i^2)]^2(t_{i+1} - t_i)^2} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x'(\epsilon_i^1)]^2 + [y'(\epsilon_i^2)]^2} \cdot (t_{i+1} - t_i)
 \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento da curva $\alpha(t)$ é o limite de S_n quando $n \rightarrow \infty$, se este limite existir. Como $\alpha'(t)$ é contínua, tal limite existe e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Daí

$$l(\alpha(t)) = \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_{t_0}^{t_n} \|\alpha'(t)\| dt$$

Observação 2.1. O comprimento de uma curva α independe das parametrizações escolhidas.

De fato, sejam

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

e

$$\beta(s) = (x(h(s)), y(h(s))), \quad c \leq s \leq d$$

duas parametrizações da curva, onde $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ é bijetora de classe C^n em $[c, d]$. O comprimento de α é

$$\begin{aligned} l(C_\beta) &= \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = \int_c^d |h'(s)| \cdot \|\alpha'(h(s))\| ds \\ &= \begin{cases} \int_c^d h'(s) \cdot \|\alpha'(h(s))\| ds, & \text{se } h \text{ é crescente} \\ \int_c^d -h'(s) \cdot \|\alpha'(h(s))\| ds, & \text{se } h \text{ é decrescente,} \end{cases} \end{aligned}$$

onde C_β é a curva C com a parametrização $\beta(t)$. Fazendo a substituição $u = h(s)$, $du = h'(s)ds$, obtemos

$$l(C_\beta) = \begin{cases} \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(u)\| du = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du = l(C_\alpha), & \text{se } h \text{ é crescente} \\ \int_{h(c)}^{h(d)} -\|\alpha'(u)\| du = -\int_b^a \|\alpha'(u)\| du = l(C_\alpha), & \text{se } h \text{ é decrescente} \end{cases}$$

onde C_α é a curva C com parametrização $\alpha(t)$.

Definição 2.1. A aplicação $l(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$ é denominada **função comprimento de arco** da curva α a partir de t_0 .

Exemplo 2.1. Cálculo do comprimento do gráfico de uma função de uma variável real f com derivada contínua no intervalo $[a, b]$. Uma parametrização para o gráfico G de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ é $\alpha(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$. Daí

$$\alpha'(t) = (1, f'(t)) \quad \text{e} \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}.$$

Portanto

$$l(G) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Definição 2.2. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está **parametrizada pelo comprimento de arco** quando para todo $t \in I$, $\|\alpha'(t)\| = 1$.

Exemplo 2.2. A aplicação $\alpha(t) = (r \cos(t/r), r \sin(t/r))$, $t \in \mathbb{R}$ onde $r > 0$, é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, pois $\alpha'(t) = (-\sin(t/r), \cos(t/r))$ e $\|\alpha'(t)\| = 1$.

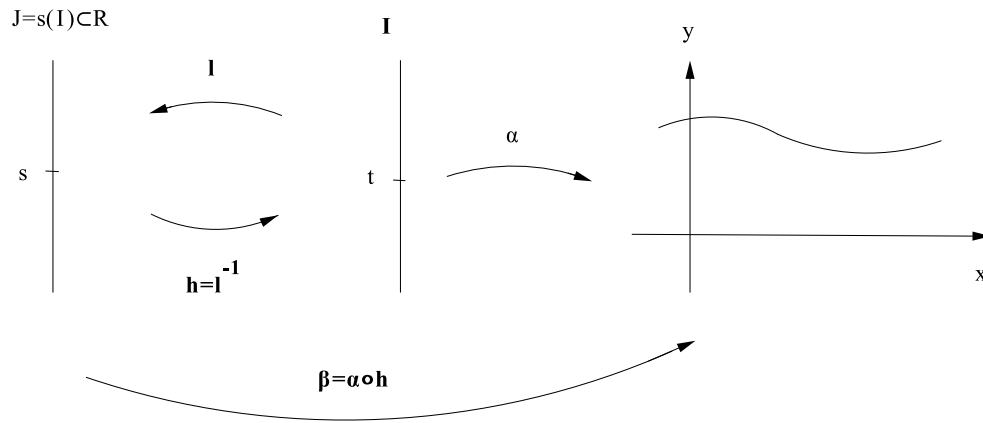


Figura 2.6: reparametrização pelo comprimento de arco

Proposição 2.1. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $l : I \rightarrow l(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa $l^{-1} = h$ de l , definida no intervalo aberto $J = l(I)$ e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α e tal que $\|\beta'\| = 1$.*

Demonstração. α é uma curva regular, portanto $l'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$, isto é, l é uma função estritamente crescente (e portanto injetiva). Segue-se que existe a função inversa de l , $l^{-1} = h : J \rightarrow I$. Como $\forall t \in I$, $h(l(t)) = t$, temos que $h' \cdot l' = 1$, portanto

$$h' = \frac{1}{l'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \neq 0.$$

Concluimos que $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, $s \in J$, é uma reparametrização de α e

$$\|\beta'\| = \|\alpha' \cdot h'\| = \|\alpha'\| \cdot |h'| = \|\alpha'\| \cdot \frac{1}{\|\alpha'\|} = 1.$$

Portanto pela definição, β está parametrizada pelo comprimento de arco. ■

Observação 2.2. A aplicação β desta Proposição é dita uma **reparametrização pelo comprimento de arco**.

Exemplo 2.3. Considere os exemplos

1. Seja $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$, $t \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$. Seja $l(t)$ a função comprimento de arco de α a partir de $t_0 = 0$, isto é

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot t$$

A função inversa de l é dada por $h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $s \in \mathbb{R}$. portanto

$$\beta(s) = \alpha \circ h(s) = \left(\frac{as}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right)$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

2. Para a curva $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, temos,⁴ $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}e^t$ daí a função comprimento de arco de α , a partir de $t_0 = 0$, é $l(t) = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}$; a função inversa é dada por $h(s) = \ln(s/\sqrt{2} + 1)$. Portanto

$$\beta(s) = \left[(s/\sqrt{2} + 1) \cos(\ln(s/\sqrt{2} + 1)), (s/\sqrt{2} + 1) \sin(s/\sqrt{2} + 1) \right]$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

3 Teoria Local das Curvas no \mathbb{R}^2

Dada uma curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$, tal que $\|\alpha'(s)\| = 1$. Denote por $t(s) = \alpha'(s)$ ⁵. Seja $n(s)$ unitário e ortogonal a $t(s)$ tal que $\{t(s), n(s)\}$ tem orientação positiva⁶, ou seja, $n(s) = (-y'(s), x'(s))$.

Definição 3.1. O conjunto $\{t(s), n(s)\}$ é chamado **Referencial de Frenet-Serret**⁷ da curva α em s .

Observação 3.1. Vejamos algumas considerações

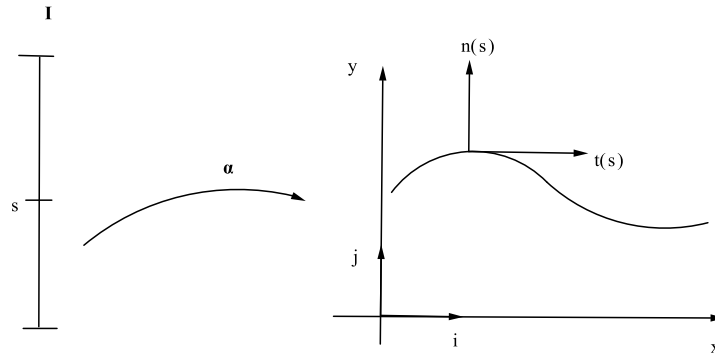
1. Como $t(s)$ é unitário, $\|t(s)\| = 1 \implies t(s) \cdot t(s) = 1 \implies t(s) \cdot t'(s) = 0$, daí, $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$ e portanto $t'(s)$ é proporcional a $n(s)$, ou seja, $t'(s) = k(s) \cdot n(s)$.

⁴espiral logarítmica

⁵vetor tangente

⁶a mesma orientação da base canônica $i = (1, 0)$, $j = (0, 1)$ do \mathbb{R}^2

⁷Jean Frédéric Frenet (1816 – 1900) e Joseph Alfred Serret (1819 – 1885), matemáticos franceses

Figura 2.7: Referencial de Frenet no ponto $\alpha(t)$

2. Em $t'(s) = k(s) \cdot n(s)$ o fator $k(s)$, é chamado **Curvatura**⁸ da curva α em s .
3. Como $t'(s) = k(s) \cdot n(s)$ segue que $k(s) = t'(s) \cdot n(s)$. Então

$$\begin{aligned} t'(s) = \alpha''(s) &\implies k(s) = \alpha''(s) \cdot n(s) \\ &\implies k(s) = -x''(s) \cdot y'(s) + y''(s) \cdot x'(s). \end{aligned}$$

4. Como $n(s)$ é unitário, $\|n(s)\| = 1 \implies n(s) \cdot n(s) = 1 \implies n(s) \cdot n'(s) = 0$, daí, $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e portanto, $n'(s)$ é proporcional a $t(s)$, ou seja,

$$n'(s) = \lambda(s) \cdot t(s)$$

e daí $\lambda(s) = n'(s) \cdot t(s)$. Segue então que

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= (-y''(s), x''(s)) \cdot (x'(s), y'(s)) \\ &= -x'(s) \cdot y''(s) + x''(s) \cdot y'(s) \\ &= -k(s). \end{aligned}$$

Portanto

$$n'(s) = -k(s) \cdot t(s).$$

⁸curvatura em \mathbb{R}^2

Conclusão: Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, então o referencial de Frenet $\{t(s), n(s)\}$ satisfaz às equações diferenciais

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s) \cdot n(s) \\ n'(s) &= -k(s) \cdot t(s) \end{aligned}$$

que são as **Equações de Frenet-Serret** de uma curva no \mathbb{R}^2 .

Exemplo 3.1. Consideremos a curva $\alpha(s) = (a + r \cos(s/r), b + r \sin(s/r))$, $s \in \mathbb{R}$, $r > 0$, cujo traço é uma circunferência de centro (a, b) e raio r . Neste caso

$$\begin{aligned} t(s) &= (x'(s), y'(s)) = (-\sin(s/r), \cos(s/r)) \\ n(s) &= (-y'(s), x'(s)) = (-\cos(s/r), -\sin(s/r)) \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} k(s) &= t'(s) \cdot n(s) \\ &= \left(-\frac{1}{r} \cos(s/r), -\frac{1}{r} \sin(s/r) \right) \cdot (-\cos(s/r), -\sin(s/r)) \\ &= \frac{1}{r} \cos^2(s/r) + \frac{1}{r} \sin^2(s/r) = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Observação 3.2. Seja $\alpha(t)$ uma curva regular. Considere $\alpha(t) = \beta(l(t))$, $l(t) = s$, onde $\beta(s)$ é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco. Defina

$$\begin{aligned} t_\alpha(t) &= t_\beta(l(t)) \\ n_\alpha(t) &= n_\beta(l(t)) \\ k_\alpha(t) &= k_\beta(l(t)) \end{aligned}$$

Temos que

$$\frac{d\beta}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \alpha'(t) \tag{1}$$

Agora, $\frac{dl}{dt} = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)}$. Então

$$\frac{d\beta}{dl} \cdot \|\alpha'(t)\| = \alpha'(t) \implies t_\beta = \frac{d\beta}{dl} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

ou seja, $t_\alpha = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$. Daí

$$t_\alpha = \frac{(x'(t), y'(t))}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Consequentemente o vetor normal é dado por

$$n_\alpha = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Derivando (1) temos,

$$\frac{d\beta}{dl} \cdot \frac{d^2l}{dt^2} + \frac{dl}{dt} \left(\frac{d^2\beta}{dl^2} \cdot \frac{dl}{dt} \right) = \alpha''(t)$$

o que implica

$$\frac{d^2\beta}{dl^2} \cdot \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + \frac{d\beta}{dl} \cdot \frac{d^2l}{dt^2} = \alpha''(t) \quad (2)$$

Mas

$$\left(\frac{dl}{dt} \right)^2 = \|\alpha'(t)\|^2$$

e

$$\frac{d^2l}{dt^2} = \frac{1}{2}(\alpha'(t) \cdot \alpha'(t))^{-1/2} \cdot 2\alpha'(t) \cdot \alpha''(t) \implies \frac{d^2l}{dt^2} = \frac{\alpha'(t) \cdot \alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Daí segue que

$$\frac{d^2\beta}{dl^2} = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} - \frac{t_\beta \cdot \alpha'(t) \cdot \alpha''(t) / \|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^2}.$$

Como

$$k_\beta = t'_\beta \cdot n_\beta = \frac{d^2\beta}{dl^2} \cdot n_\alpha \implies k_\alpha = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} \cdot n_\alpha,$$

ou seja,

$$k_\alpha = \frac{-x''(t) \cdot y'(t) + y''(t) \cdot x'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

4 Exercícios

1. Sejam $a, b > 0$ constantes. Verifique que a aplicação $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ é uma curva parametrizada diferenciável. Determine o **referencial de Frenet** e a **curvatura** k . Para quais valores de t temos $k'(t) = 0$?
2. Obtenha uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é tal que $\alpha(0) = (2, 0)$ e $\alpha'(t) = (t^2, e^t)$.
3. Determine o ponto de interseção do eixo $0x$ com a reta tangente à curva $\alpha(t) = (t, t^2)$ em $t = 1$.
4. Considere as curvas $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $\alpha(t) = (t, t^2)$ e $\beta(t) = (t^3, t^6)$, respectivamente. Prove que α e β têm o mesmo traço mas α é regular e β não o é.

5. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Prove que $\|\alpha'(t)\|$ é constante se e só se para cada $t \in I$, o vetor $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$.
6. Considere um disco a rolar (sem escorregar) numa superfície plana, ao longo de uma reta. Chama-se **Ciclóide**⁹ à curva plana descrita por um ponto nesse disco. Mostre que, se a reta for o eixo x e o disco tiver raio $r > 0$, a ciclóide pode ser parametrizada por $\alpha(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$.
7. Considere a família F_ϵ de funções definidas por

$$F_\epsilon(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - \epsilon = 0.$$

Então o conjunto de zeros de F_0 é chamado **Fólio de Descartes**. Obtenha uma parametrização de Fólio de Descartes pela substituição $y = tx$.

8. Verifique que as curvas regulares $\alpha(t) = (t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\beta(r) = (\log r, r)$, $r \in (0, \infty)$ têm o mesmo traço.
9. Considere a espiral logarítmica $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$. Mostre que o ângulo entre $\alpha(t)$ e o vetor tangente em $\alpha(t)$ não depende de t .
10. A **Cissóide de Diocles** é a curva cuja equação em termos de coordenadas polares (r, θ) é $r = \sin \theta \tan \theta$, $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$. Mostre que uma parametrização em coordenadas cartesianas é dada por $\alpha(t) = \left(t^2, \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\right)$, $-1 < t < 1$.
11. Determine a curvatura da **Astróide** $\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ e mostre que a curvatura tende para ∞ à medida que nos aproximamos dos pontos $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$.
12. Calcule o comprimento da **Catenária** $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$ entre $t = a$ e $t = b$.
13. Calcule o comprimento de arco da **Espiral Logarítmica**, a partir do ponto $\alpha(0) = (1, 0)$.
14. Obtenha uma reparametrização da ciclóide $\alpha(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$, $0 < t < 2\pi$, pelo comprimento de arco.
15. Seja $r = r(\theta)$ uma curva regular dada em coordenadas polares, ou seja, $\alpha(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $a < \theta < b$. Mostre que o comprimento de arco de a a b e a curvatura são dados, respectivamente, por

$$l = \int_a^b \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta.$$

e

$$k = \frac{2(r')^2 + rr'' + r^2}{((r')^2 + r^2)^{3/2}}$$

⁹de modo geral, uma **roleta**

5 Teoria Local das Curvas no \mathbb{R}^3

Definição 5.1. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, então a **Curvatura** de α em $s \in I$, é o número real, $k(s) = \|\alpha''(s)\|$.

Exemplo 5.1. A curva $\alpha : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\alpha(s) = (1/3(1+s)^{3/2}, 1/3(1-s)^{3/2}, s/\sqrt{2})$ está parametrizada pelo comprimento de arco e sua curvatura $k(s)$ é

$$k(s) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1-s^2}}, \quad \forall s \in (-1, 1).$$

Exemplo 5.2. A curva parametrizada pelo comprimento de arco

$$\alpha(s) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r), 0), \quad s \in \mathbb{R},$$

tem por traço a circunferência no plano xy de raio $r > 0$ e sua curvatura é

$$k(s) = \frac{1}{r}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Definição 5.2. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular com $\|\alpha'(s)\| = 1$. O vetor

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)},$$

onde $k(s) = \|\alpha''(s)\|$ é denominado **Vetor Normal** à curva α em s . Chamando $t(s) = \alpha'(s)$, temos $t(s)$ e $n(s)$ são vetores ortonormais e $t'(s) = k(s) \cdot n(s)$.

Definição 5.3. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular com $\|\alpha'(s)\| = 1$ tal que $k(s) > 0$. O **Vetor Binormal** à curva α em s é o vetor $b(s) = t(s) \times n(s)$.

Observação 5.1. O referencial ortonormal $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é o **Triedro de Frenet-Serret** da curva α em s

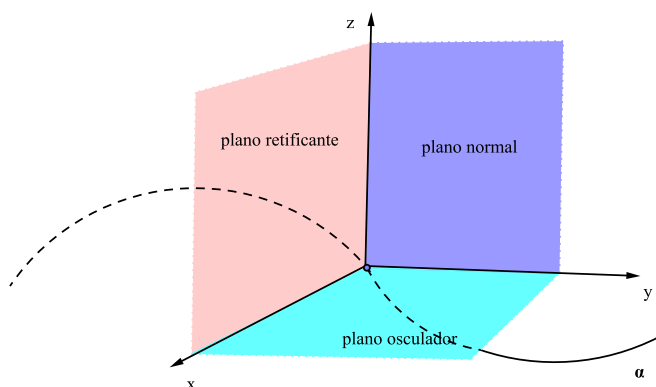


Figura 2.8: Triedro de Frenet-Serret

Observação 5.2. O Referencial de Frenet determina três planos. Vejamos cada um desses planos

1. Plano Normal

O plano normal à curva α é o plano que passa por $\alpha(s)$ e é normal a $t(s)$. Como $\langle \vec{v}, \alpha'(s) \rangle = 0$, segue que sua equação é

$$(x - x_0)x'(s_0) + (y - y_0)y'(s_0) + (z - z_0)z'(s_0) = 0.$$

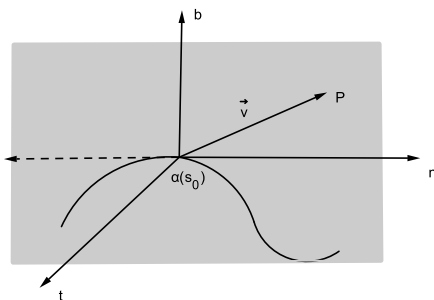


Figura 2.9: Plano Normal

2. Plano Osculador

O plano osculador à uma curva α em $\alpha_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é o plano que passa por $\alpha(s)$ e é normal ao vetor $b(s)$. Então dado um ponto $P = (x, y, z)$ no plano osculador, os vetores $\vec{v} = \overrightarrow{\alpha(s_0)P}$, $\alpha'(s_0)$ e $\alpha''(s_0)$ são coplanares, cuja equação vetorial é

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

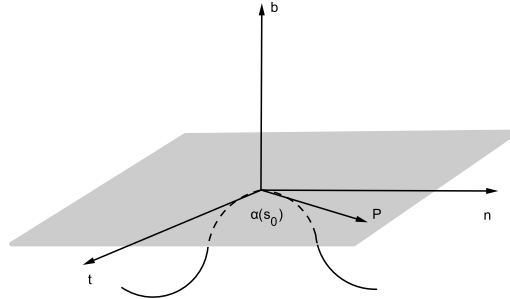


Figura 2.10: Plano Osculador

3. Plano Retificante

O plano retificante, à curva α é o plano que passa por $\alpha(s)$ e é normal a $n(s)$. Dado um ponto $P = (x, y, z)$ neste plano, os vetores $\vec{v} = \overrightarrow{\alpha(s_0)P}$, $\alpha'(s_0)$ e $b(t)$ são coplanares, e sua equação é

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ b_1(t_0) & b_2(t_0) & b_3(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

sendo $\vec{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$.

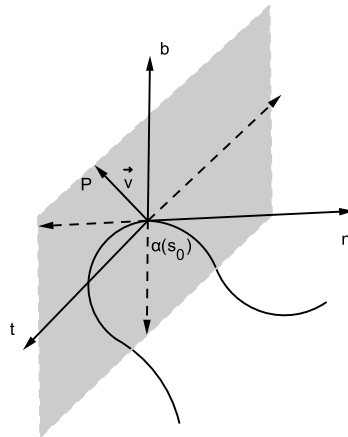


Figura 2.11: Plano Retificante

6 Torção de uma curva em \mathbb{R}^3

Como $b(s) = t(s) \times n(s)$ temos $b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s)$. Daí resulta que $b'(s) = t(s) \times n'(s)$, pois $t'(s) \times n(s) = 0$, já que $t'(s) = k(s) \cdot n(s)$. Portanto, $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$ ¹⁰. Como $\|b(s)\| = 1$, pois

$$\|b(s)\| = \|t(s) \times n(s)\| = \|t(s)\| \cdot \|n(s)\| \cdot \sin \theta, \quad \theta = \angle(t(s), n(s))$$

então $b'(s) \cdot b(s) = 0 \implies b'(s)$ é ortogonal a $b(s)$. Daí $b'(s)/\|b'(s)\|$, isto é, $b'(s)$ pode ser escrito como $b'(s) = \tau(s) \cdot n(s)$, onde $\tau(s)$ é uma constante real.

Definição 6.1. O número real $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s) \cdot n(s)$ é chamado **Torção** da curva em s . A torção mede o quanto a curva deixa de ser plana.

Observação 6.1. Como $n(s) = b(s) \times t(s)$, derivando esta igualdade temos

$$n'(s) = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s).$$

Como $b'(s) = \tau(s) \cdot n(s)$ e $t'(s) = k(s) \cdot n(s)$, temos

$$n'(s) = (\tau(s) \cdot n(s)) \times t(s) + b(s) \times (k(s) \cdot n(s)).$$

Portanto

$$n'(s) = -\tau(s) \cdot b(s) - k(s) \cdot t(s).$$

Resumindo temos, se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, e tal que $k(s) > 0, \forall s \in I$, então o Triedro de Frenet definido por

$$t(s) = \alpha'(s), \quad n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad b(s) = t(s) \times n(s),$$

satisfaz as equações diferenciais

$$t'(s) = k(s) \cdot n(s)$$

$$n'(s) = -k(s) \cdot t(s) - \tau(s) \cdot b(s)$$

$$b'(s) = \tau(s) \cdot n(s)$$

que são denominadas **Fórmulas de Frenet-Serret**.

Observação 6.2. Uma forma de visualizar as equações de Frenet-Serret é colocá-las na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

¹⁰e também a $n'(s)$

Exemplo 6.1. Obter o **Triedro de Frenet**, a **Curvatura** e a **Torção** da hélice circular

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), s \in \mathbb{R}, a > 0.$$

7 Algumas proposições sobre curvas no \mathbb{R}^3

Proposição 2.2. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então $\alpha(I)$ é um segmento de reta se e somente se, a sua curvatura $k(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$.*

Demonstração. \Rightarrow] Seja $\alpha(I)$ um segmento de reta, então $\alpha(s) = p + \vec{v}s$ onde $p \in \mathbb{R}^3$ e \vec{v} é um vetor unitário de \mathbb{R}^3 . portanto, $\forall s \in I$, $\alpha'(s) = \vec{v}$ e $\alpha''(s) = 0$, donde $k(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$.

\Leftarrow] Se $\|\alpha''(s)\| = 0, \forall s \in I$, então $\alpha''(s) = 0$. Integrando, temos que $\alpha'(s) = \vec{v}$ e $\|\vec{v}\| = 1$. Integrando novamente, obtemos $\alpha(s) = p + \vec{v}s$, cujo traço é um segmento de reta.

■

Proposição 2.3. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco de curvatura $k > 0$.*

1. *A curva α é uma curva plana se e só se sua torção $\tau \equiv 0$.*
2. *Se α é plana e sua curvatura k é constante então α descreve um círculo de raio $1/k$.*

Demonstração. 1. \Rightarrow] Se α é plana, existe $\vec{v} \neq \vec{0}$ constante tal que

$$[\alpha(s) - \alpha(0)] \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \alpha'(s) \cdot \vec{v} \equiv 0 \Rightarrow t(s) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow t(s)$$

é ortogonal a \vec{v} . Mas $\alpha''(s) \cdot \vec{v} \equiv 0 \Rightarrow k \cdot n(s) \cdot \vec{v} \equiv 0$. Como $k \neq 0 \Rightarrow n(s) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow n(s)$ é ortogonal a \vec{v} . Além disso, $b(s) = t(s) \times n(s)$, então $b(s) \parallel \vec{v}$. Logo $b(s)$ é constante ¹¹. Portanto $b'(s) = 0$. Mas

$$b'(s) = \tau(s) \cdot n(s) \Rightarrow \tau(s) = 0.$$

¹¹de fato, $b(s) = a\vec{v}$; $b(s) \cdot b(s) = 1 \Rightarrow a^2 \|\vec{v}\|^2 = 1$; a é constante

\Leftarrow] Por outro lado, se $\tau(s) = 0$, então $b'(s) = \tau(s) \cdot n(s) = 0$. Logo $b(s)$ é constante. Defina $f(s) = [\alpha(s) - \alpha(0)] \cdot b$. Temos que

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(s) = \alpha'(s) \cdot b = t(s) \cdot b = 0.$$

Logo $f \equiv 0$, ou seja $[\alpha(s) - \alpha(0)] \cdot b = 0$, daí α está contida no plano que passa por $\alpha(0)$ e tem b como vetor normal.

2. Seja $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k}n(s) \implies \beta'(s) = \alpha'(s) + \frac{1}{k}n'(s)$$

o que implica que

$$\beta'(s) = t(s) + \frac{1}{k}(-kt(s) - \tau b(s)) \Rightarrow \beta'(s) = t(s) - t(s) - \frac{\tau}{k}b(s)$$

Como $\tau = 0$ segue que $\beta'(s) = 0$. Logo $\beta(s) = C$, com C constante, e portanto

$$\|\alpha(s) - C\| = \|\alpha(s) - \beta(s)\| = \|\alpha(s) - \alpha(s) - \frac{1}{k}n(s)\| = \frac{1}{k}.$$

■

Proposição 2.4. *Seja α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco cuja imagem está em uma esfera de raio r . Então a sua curvatura $k \geq 1/r$.*

Demonstração. Temos que $\alpha(s) \cdot \alpha(s) = r^2 \implies t(s) \cdot \alpha(s) \equiv 0$. Daí

$$k \cdot n(s) \cdot \alpha(s) + t(s) \cdot t(s) \equiv 0 \implies k \cdot n(s) \cdot \alpha(s) = -1.$$

Portanto

$$1 = |k \cdot n(s) \cdot \alpha(s)| = k|n(s) \cdot \alpha(s)| \leq k \cdot \|n(s)\| \cdot \|\alpha(s)\| \implies k \geq 1/r.$$

■

8 Hélices

Definição 8.1. Uma **Hélice** no \mathbb{R}^3 é uma curva $\alpha(t)$ tal que o vetor tangente $t = \alpha'(t)$ forma com um vetor fixo unitário \vec{v} um ângulo constante, ou seja, $\frac{t \cdot \vec{v}}{\|t(t)\|}$ é constante.

Teorema de Lancret 8.1. *Uma curva regular α no \mathbb{R}^3 , com curvatura $k > 0$ é uma hélice $\iff \tau/k$ é constante.*

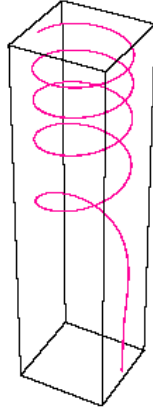


Figura 2.12: Hélice

Demonstração. \implies Suponha que α seja uma hélice. Podemos supor, sem perda de generalidade, que α está parametrizada pelo comprimento de arco. Neste caso $t(s) = \alpha'(s)$ e tem-se $t(s) \cdot \vec{v}$ constante. Podemos supor que $\|\vec{v}\| = 1$. Derivando, temos $t'(s) \cdot \vec{v} = 0 \implies k \cdot n(s) \cdot \vec{v} = 0$. Como $k > 0$, segue que $n(s) \cdot \vec{v} = 0$. Logo \vec{v} pertence ao plano de t e b ; então $\vec{v} = \cos \varphi t(s) + \sin \varphi b(s)$. Como $\vec{v} \cdot t(s) = \cos \varphi$ e $\vec{v} \cdot t(s)$ é constante, então φ é constante; logo

$$\begin{aligned} 0 = \vec{v}' &= \cos \varphi t'(s) + \sin \varphi b'(s) \\ &= \cos \varphi \cdot k \cdot n(s) + \sin \varphi \cdot (\tau \cdot n(s)) \\ &= (k \cos \varphi + \tau \sin \varphi) \cdot n(s) \end{aligned}$$

daí

$$k \cos \varphi + \tau \sin \varphi = 0 \implies k \cos \varphi = -\tau \sin \varphi \implies \frac{\tau}{k} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \implies \frac{\tau}{k} = -\cot \varphi.$$

Mas φ é constante $\implies \frac{\tau}{k}$ é constante.

\Longleftarrow Inversamente se $\frac{\tau}{k}$ é constante, defina φ pela equações

$$\frac{\tau}{k} = -\cot \varphi$$

e

$$\vec{v} = \cos \varphi t(s) + \sin \varphi b(s),$$

então neste caso $\vec{v}' = 0$, pois sendo

$$\frac{\tau}{k} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \implies k \cos \varphi + \tau \sin \varphi = 0$$

temos

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \cos \varphi t'(s) + \sin \varphi b'(s) \\ &= \cos \varphi kn(s) + \sin(-\tau n(s) - kt(s)) \\ &= (k \cos \varphi + \tau \sin \varphi) \cdot n = 0. \end{aligned}$$

Dai \vec{v} é constante, e $t(s) \cdot \vec{v} = \cos \varphi$, com φ constante, segue o resultado. ■

Exemplo 8.1. A curva $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ é uma hélice, pois $k = -\tau$ e $\tau/k = -1$.

Observação 8.1. Seja $\alpha(t) = \beta(l(t))$, $l(t) = s$, onde $\beta(s)$ é uma reparametrização pelo comprimento de arco. Para $\beta(s)$ sabemos que valem as equações de Frenet, ou seja, é possível definir

$$\begin{aligned} t_\beta(s) &= \beta'(s) \\ t'_\beta(s) &= k(s) \cdot n_\beta(s), \quad k(s) = \|\beta'(s)\| > 0 \\ n_\beta(s) &= \frac{\beta''(s)}{k(s)} \\ n'_\beta(s) &= -k(s) \cdot t(s) - \tau(s) \cdot b(s) \\ b_\beta(s) &= t(s) \times n(s) \\ b'_\beta(s) &= \tau(s) \cdot n(s) \end{aligned}$$

defina

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= v \\ t_\alpha(t) &= t_\beta(l(t)) \\ n_\alpha(t) &= n_\beta(l(t)) \\ b_\alpha(t) &= b_\beta(l(t)) \\ k_\alpha(t) &= k_\beta(l(t)) \\ \tau_\alpha(t) &= \tau_\beta(l(t)) \end{aligned}$$

então

$$\frac{dt_\alpha}{dt} = \frac{dt_\beta}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \|\alpha'(t)\| \cdot \frac{dt_\beta}{dl} = v \cdot k(s) \cdot n(s) = v \cdot k_\alpha \cdot n_\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_\alpha}{dt} &= \frac{dn_\beta}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \|\alpha'(t)\| \cdot \frac{dn_\beta}{dl} \\ &= v \cdot (-k(s) \cdot t(s) - \tau(s) \cdot b(s)) \\ &= -v \cdot k(s) \cdot t(s) - v \cdot \tau(s) \cdot b(s) \\ &= -v \cdot k \cdot t_\alpha - v \cdot \tau \cdot b_\alpha. \end{aligned}$$

Veja que

$$\frac{db_\alpha}{dt} = \frac{db_\beta}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \|\alpha'(t)\| \cdot \frac{db_\beta}{ds} = v \cdot (\tau(s) \cdot n(s)) = v \cdot \tau n_\alpha.$$

Então temos:

$$\begin{aligned} t' &= v \cdot k \cdot n_\alpha \\ n' &= -v \cdot k \cdot t_\alpha - v \cdot \tau \cdot b_\alpha, \quad v = \|\alpha'\| \\ b' &= v \cdot \tau \cdot n_\alpha \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\alpha'(t) = \frac{d}{dt}(\beta(l(t))) = \frac{d\beta(s)}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \beta'(s) \cdot v = v \cdot t_\beta(s) = v \cdot t_\alpha$$

o que implica que

$$t_\alpha = \frac{\alpha'(t)}{v}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \alpha' = v \cdot t_\alpha &\implies \alpha'' = \frac{dv}{dt} \cdot t_\alpha + v \cdot \frac{dt_\alpha}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot t_\alpha + v \cdot t'_\alpha \\ &\implies \alpha'' = \frac{dv}{dt} \cdot t_\alpha + v \cdot (v \cdot k \cdot n_\alpha) = \frac{dv}{dt} \cdot t_\alpha + v^2 \cdot k \cdot n_\alpha, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha'' = \frac{dv}{dt} \cdot t_\alpha + v^2 \cdot k \cdot n_\alpha.$$

Fazendo $\alpha' \times \alpha''$, teremos

$$\alpha' \times \alpha'' = v \cdot t_\alpha \times \left(\frac{dv}{dt} \cdot t_\alpha + v^2 \cdot k \cdot n_\alpha \right) = v^3 \cdot k \cdot t_\alpha \times n_\alpha = v^3 \cdot k \cdot b_\alpha$$

o que implica

$$\|\alpha' \times \alpha''\| = v^3 \cdot k \implies k = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{v^3}.$$

Dai

$$b_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha''}{v^3 \cdot k} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{v^3 \cdot \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{v^3}}$$

Portanto

$$b_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}.$$

Agora

$$\begin{aligned} \alpha''' &= \frac{dv}{dt} \cdot t'_\alpha + \frac{d^2v}{dt^2} \cdot t_\alpha + 2v \frac{dv}{dt} \cdot k \cdot n_\alpha + v^2 \cdot \frac{dk}{dt} \cdot n_\alpha + v^2 \cdot k \cdot \frac{dn_\alpha}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot k \cdot n_\alpha + \frac{d^2v}{dt^2} \cdot t_\alpha + 2v \frac{dv}{dt} \cdot k \cdot n_\alpha + v^2 \frac{dk}{dt} \cdot n_\alpha \\ &\quad + v^2 k \cdot (-kv t_\alpha - \tau v b_\alpha) \\ &= \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot k \cdot n_\alpha + \frac{d^2v}{dt^2} \cdot t_\alpha + 2v \frac{dv}{dt} \cdot k \cdot n_\alpha - v^3 k^2 t_\alpha - v^3 k \tau b_\alpha. \end{aligned}$$

Se fizermos $(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''$, teremos

$$(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = -v^6 k^2 \tau \implies \tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{-v^6 k^2} = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{-\|\alpha'\|^6 \cdot \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}{v^6}}$$

Dai

$$\tau = -\frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$

Resumindo temos:

$$\begin{aligned} v &= \|\alpha'(t)\| \\ t_\alpha &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \\ n_\alpha &= b_\alpha \times t_\alpha \\ b_\alpha &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \\ k &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{-(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

Exemplo 8.2. Considere a curva $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Então

$$\alpha'(t) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

$$\alpha''(t) = 6(-t, 1, t)$$

$$\alpha'''(t) = 6(-1, 0, 1)$$

Daí

$$\|\alpha'(t)\| = 3\sqrt{(1 - t^2)^2 + 4t^2 + (1 + t^2)^2} = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$$

$$\|\alpha'''(t)\| = 6\sqrt{2}$$

$$\alpha' \times \alpha'' = 18(-1 + t^2, -2t, 1 + t^2)$$

$$\|\alpha' \times \alpha''\| = 18\sqrt{2}(1 + t^2)$$

$$(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha''' = 216$$

portanto

$$k = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{18\sqrt{2}(1 + t^2)}{(3\sqrt{2}(1 + t^2))^3} = \frac{1}{3(1 + t^2)^2}$$

$$\tau = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{216}{(18\sqrt{2}(1 + t^2))^2} = \frac{1}{3(1 + t^2)^2}$$

$$t_\alpha = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)}{\sqrt{2}(1 + t^2)}$$

$$b_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = \frac{(-1 + t^2, -2t, 1 + t^2)}{\sqrt{2}(1 + t^2)}$$

$$n_\alpha = b_\alpha \times t_\alpha = \frac{(-2t, 1 + t^2, 0)}{1 + t^2}$$

9 Exercícios

1. Calcule o vetor tangente da curva $\alpha(t) = (2 \cos^2 t, \sin 2t, 2 \sin t)$ para t arbitrário, e em $t = \pi/4$.

2. Verifique que as aplicações

(a) $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$

(b) $\alpha(t) = (t, t^2 + 2, t^3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ são curvas regulares

3. Ache a (única) curva α tal que $\alpha(0) = (1, 0, -5)$ e $\alpha'(t) = (t^2, t, e^t)$.
4. Obtenha a curva regular tal que $\alpha(0) = (2, 3, 1)$ e $\alpha'(t) = (t^2, t, e^t)$.
5. Consideremos $a, b \in \mathbb{R}$ e $\alpha_{a,b} = (at, bt^2, t^3)$. Determine os valores de a e b para os quais $\alpha_{a,b}$ é regular.
6. Mostre que a curva $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, pertence a um cone em \mathbb{R}^3 .
7. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Prove que $\|\alpha'(t)\|$ é constante, se só se, $\forall t \in I, \alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha(t)$.
8. Verifique que a curva $\alpha(s) = \left(\frac{1}{2}u(s), \frac{1}{2u(s)}, \frac{1}{\sqrt{2}}\log(u(s)) \right)$, onde $u(s) = s + \sqrt{s^2 + 1}$, está parametrizada pelo comprimento de arco.
9. Mostre que a curva $\alpha(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ tem função comprimento de arco $s(t) = \sqrt{2}\sinh t$, e ache uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.
10. Considere a curva regular $\alpha(t) = (2t, t^2, \log t)$, $t \in (0, \infty)$. Obtenha a função comprimento de arco a partir de $t = 1$. Verifique que os pontos $(2, 1, 0)$ e $(4, 4, \log 2)$ pertencem ao traço de α e calcule o comprimento de arco de α entre estes pontos.
11. Prove que a aplicação $\alpha(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(t/2))$, $t \in \mathbb{R}$ é uma curva cujo traço está contido na interseção do cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$$

e da esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

12. Obtenha uma reparametrização pelo comprimento de arco das curvas

(a) $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$

(b) $\alpha(t) = (2 \cosh 2t, 2 \sinh 2t, 4t)$, $t \in \mathbb{R}$

13. Considere as seguintes curvas regulares

(a) $\alpha(t) = (4 \cos t, 5 - 5 \sin t, -3 \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$

(b) $\alpha(t) = (1 - \cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, reparametrize estas curvas por comprimento de arco, obtenha o Triedro de Frenet, a curvatura e a torção.

14. Mostre que as retas tangentes à curva parametrizada regular $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ fazem um ângulo constante com a reta $y = 0, z = x$.
15. Dada a curva $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin(t/2))$, calcule a curvatura k e a torção τ .

16. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento de arco. Suponha que a curvatura e a torção de α satisfaçam $k(s) > 0$ e $\tau(s) > 0, \forall s \in I$. Defina a curva $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\beta(s) = b(s)$ (binormal de α). Expresse a curvatura e a torção de β em função da curvatura e da torção de α .
17. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $k(s) > 0, \forall s \in I$. Obtenha $\alpha'''(s)$ como combinação linear do Triedro de Frenet de α em s .
18. Determinar as equações dos planos normal, osculador e retificante à curva $\alpha(t) = (2t^2 + 1, t - 1, 3t^3)$ no ponto de interseção com o plano zx .
19. Determinar a equação dos planos normal, osculador e retificante à curva $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ no ponto $t = 0$.
20. Calcule os aparatos de Frenet da curva parametrizada pelo comprimento de arco $\beta(s) = \left(\frac{4}{5} \cos s, 1 - \sin s, \frac{-3}{5} \cos s\right)$. Mostre que esta curva é um **círculo**; ache seu **centro** e **raio**.
21. Considere a curva $\beta(s) = \left(\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ definida no intervalo $-1 < s < 1$. Mostre que β está parametrizada pelo comprimento de arco e calcule seus aparatos de Frenet.
22. Se α é uma curva com curvatura $k > 0$, então a **Evoluta** $\alpha^* = \alpha + \frac{1}{k}n$ consiste de todos os centros de curvatura α . Para dois números não nulos a e b , seja β_{ab} a hélice $\beta(s) = (a \cos(s/c), a \sin(s/c), bs/c)$, onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $a > 0$.
- (a) Mostre que a evoluta de β_{ab} é $\beta_{\bar{a}b}$ onde $\bar{a} = -\frac{b^2}{a}$.
- (b) Deduza que a evoluta de $\beta_{\bar{a}b}$ é a hélice original β_{ab} .
23. Verifique que as curvas são hélices
- (a) $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t), t \in \mathbb{R}$
- (b) $\alpha(t) = (t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t, \sqrt{3}t - \sin t), t \in \mathbb{R}$
- (c) $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t), t \in \mathbb{R}$
24. Prove que a curva $\alpha(t) = (at, bt^2, ct^3), t \in \mathbb{R}$, é uma hélice se, e somente se $3ac = \pm 2b^2$.
25. Prove que α é uma hélice se, e somente se existe um vetor unitário \vec{v} de \mathbb{R}^3 , que forma um ângulo constante com os vetores binormais de α .

26. Prove que a curvatura k de uma curva regular em \mathbb{R}^3 é dado por

$$k^2 v^4 = \|\alpha''\|^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

onde $v = \|\alpha'(t)\|$.

27. Determine a **torção** das seguintes curvas

(a) $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 + \cos t), bt), t \geq 0$.

(b) $\alpha(t) = (t, at^2, \frac{2}{3}a^2t^3), t \geq 0$, onde a é uma constante positiva.

28. Ache a **curvatura** e a **torção** da curva $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3), t \geq 0$.

29. Mostre que a torção da curva $\alpha(t) = (t, 1 + 1/t, 1/t - t), t \geq 0$ é zero.

30. Mostre que $\alpha(t) = (\cos^2 t - 1/2, \sin t \cos t, \sin t)$ é uma parametrização da curva de interseção do cilindro circular, de raio $1/2$ e o eixo Oz , com a esfera de raio 1 e centro $(-1/2, 0, 0)$, chamada **Curva de Viviani**.

31. Sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definidas por $\alpha(t) = (t, p + qt + rt^2, 0)$ e $\beta(t) = (t, a + be^{ct}, d)$, em que p, q, r, a, b, c e d são constantes reais. Estabeleça uma condição necessária e suficiente, envolvendo as constantes, para que suas curvaturas sejam iguais em 0 , ou seja, $k_\alpha(0) = k_\beta(0)$.

32. Considere a curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Mostre que $k = \tau$.

33. Sejam $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ e $\beta(t) = (t, -t^2/2, 0)$. Determine todos os valores reais t nos quais a reta tangente a α em $\alpha(t)$ e a reta normal a β em $\beta(t)$ têm a mesma direção.

34. Sejam $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Prove que o ângulo definido pelo vetor binormal de α em $\alpha(t)$ e pelo vetor $(0, 0, a)$, $a \neq 0$ é constante.

35. Prove que a curva $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = \left(\frac{1+t^2}{t}, t+1, \frac{1-t}{t}\right)$ é plana.

Capítulo 3

Algumas Noções Topológicas em \mathbb{R}^3

Faremos uma pequena introdução de alguns conceitos básicos da topologia dos espaços euclidianos.

1 Bolas

Dado um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, associamos a esse ponto (x, y, z) um número real, denotado por $\|(x, y, z)\|$, chamado **Norma de** (x, y, z) , e definido por

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Definição 1.1. Definimos a **distância euclidiana** entre os pontos (x_1, y_1, z_1) , $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, e denotamos por $d = \|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)\|$, como segue:

$$\begin{aligned} d &= \|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)\| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \end{aligned}$$

Observação 1.1. Assumiremos, para efeito de simplificação, a seguinte notação:

$$\bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Definição 1.2. Dados $r > 0$ e $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, a **Bola Aberta** centrada em \bar{x}_0 e raio $r > 0$, denotada por $B(\bar{x}_0, r)$,¹ é definida como

$$B(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3; \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r\}.$$

Definição 1.3. A **Bola Fechada** centrada em $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ e raio $r > 0$ é o conjunto

$$B[\bar{x}_0, r] = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3; \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r\}.$$

¹também denotada por $B_r(\bar{x}_0)$

Definição 1.4. A **Esfera** centrada em \bar{x}_0 e raio $r > 0$ é o conjunto

$$S(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3; \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r\}.$$

Definição 1.5. Dado $X \subset \mathbb{R}^3$ e $\bar{x}_0 \in X$. Dizemos que \bar{x}_0 é **Ponto Interior** de X se existir um $r > 0$ tal que a bola $B(\bar{x}_0, r) \subset X$. O conjunto dos pontos interiores a X é chamado interior de X e será denotado por **int** X .

Definição 1.6. Dizemos que \bar{x}_0 é **Ponto Exterior** de X , se existe $r > 0$ tal que $B(\bar{x}_0, r) \cap X = \emptyset$.

2 Conjunto Aberto

Definição 2.1. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ é dito **Aberto** em \mathbb{R}^3 quando $B(\bar{x}, r) \subset A, \forall \bar{x} \in A$ ²

Exemplo 2.1.

1. \mathbb{R}^3 e \emptyset são abertos
2. A bola aberta é um conjunto aberto.

De fato, dado $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, r)$, então $d(\bar{x}, \bar{x}_0) < r$. Tome $r_1 = r - d(\bar{x}, \bar{x}_0) < r$, então $B(\bar{x}, r_1) \subset B(\bar{x}_0, r)$.

3. O conjunto unitário $\{\bar{x}\}$ de \mathbb{R}^3 não é aberto, pois toda bola centrada em \bar{x} e raio $r > 0$, temos $B(\bar{x}, r)$ não está contida em $\{\bar{x}\}$.

Proposição 3.1. A união qualquer de abertos é aberto. A interseção finita de abertos é aberto.

Demonstração. Seja $\{A_i\}_i$ uma família de abertos. Queremos mostrar que a união $\bigcup_i A_i$ é aberta. Dado $\bar{x} \in \bigcup_i A_i$, então existe um i_0 tal que $\bar{x} \in A_{i_0}$. Como A_{i_0} é aberto existe $r > 0$ tal que $B(\bar{x}, r) \subset A_{i_0}$. Daí $B(\bar{x}, r) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_i A_i$.

Agora, se $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, então $\bar{x} \in A_i, \forall i$. Como cada A_i é aberto, então existe $r_i > 0$ tal que $B(\bar{x}, r_i) \subset A_i$. Tome $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Então $B(\bar{x}, r) \subset A_i, \forall i = 1, \dots, n$. Logo $B(\bar{x}, r) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$, e portanto $\bigcap_{i=1}^n A_i$ é aberto.

■

²todo ponto de A é interior a A

Definição 2.2. Dado $X \subset \mathbb{R}^3$. Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ é dito **Ponto de Fronteira** de X se toda bola aberta $B(\bar{x}, r)$ intercepta X e X^C , $\forall r > 0$ onde X^C é o complementar de X .

Observação 2.1. O conjunto dos pontos de fronteira de X , denotaremos por ∂X . Um conjunto A é aberto quando $A \cap \partial A = \emptyset$.

3 Conjunto Fechado

Definição 3.1. Dizemos que um conjunto $F \subset \mathbb{R}^3$ é **Fechado** quando seu complementar $A = F^C$ é um conjunto aberto.

Exemplo 3.1.

1. \mathbb{R}^3 e \emptyset são fechados
2. O conjunto $\{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto fechado.

Proposição 3.2. A interseção qualquer de fechados de \mathbb{R}^3 é fechado. A união finita de abertos de \mathbb{R}^3 é aberto

Demonstração. Dada $\{F_i\}_i$ uma família qualquer de fechados, então $\{F_i^C\}_i$ é uma família de abertos. Como a união de abertos é aberto, segue que $\bigcup_i F_i^C = \left(\bigcap_i F_i\right)^C$ é um aberto. Logo $\bigcap_i F_i$ é fechado. Por outro lado, como a interseção finita de abertos é aberto, segue que $\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^n F_i^C$ é fechado. Portanto $\bigcup_{i=1}^n F_i$ é fechado. ■

4 Conjunto Compacto

Definição 4.1. Um subconjunto $L \subset \mathbb{R}^3$ é dito **Limitado** quando existe $r > 0$ tal que $L \subset B(\bar{0}, r)$.

Exemplo 4.1. Qualquer bola $B(\bar{x}, r), r > 0$ é um conjunto limitado.

Definição 4.2. Dado $X \subset \mathbb{R}^3$, um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ é dito **Ponto de Acumulação** de X quando toda vizinhança de \bar{x} contém um ponto de X , diferente de \bar{x} . Denotaremos por X' o conjunto dos pontos de acumulação de X

Exemplo 4.2. Todo ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ é ponto de acumulação de \mathbb{R}^3 .

Observação 4.1. Um ponto $\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^3$ que não é ponto de acumulação do conjunto X é dito **Ponto Isolado** de X .

Observação 4.2. Podemos dizer que um conjunto $F \subset \mathbb{R}^3$ é fechado quando todo ponto de acumulação de F pertence a F .

Definição 4.3. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ é dito **Compacto** quando é **fechado e limitado**

Observação 4.3. Todo conjunto finito é compacto.

Observação 4.4. Toda bola fechada $B[\bar{x}, r]$ de \mathbb{R}^3 é compacta.

5 Exercícios

- Dados X, Y subconjuntos de \mathbb{R}^3 . Mostre que:
 - X é fechado $\Leftrightarrow X' \subset X$
 - $X \subset Y \Rightarrow X' \subset Y'$
 - X' é fechado
- Se $X \subset Y, X, Y \subset \mathbb{R}^3$, mostre que $\text{int}X \subset \text{int}Y$
- Prove que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ que não tenha pontos de acumulação não tem pontos interiores.
- Dado $X \subset \mathbb{R}^3$, mostre que $\text{int}X$ é um conjunto aberto
- O conjunto $\overline{X} = X' \cup X$ é chamado **conjunto Aderente** ou **Fecho** de X . Mostre que
 - X é fechado $\Leftrightarrow X = \overline{X}$
 - Se $X \subset Y$, então $\overline{X} \subset \overline{Y}$

Capítulo 4

Funções Vetoriais de Várias Variáveis

O objetivo principal neste capítulo é estudar alguns campos escalares e vetoriais, que serão úteis para os capítulos seguintes. Destacamos também os campos conservativos.

1 Função Vetorial

Definição 1.1. É uma aplicação $\vec{f} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, onde \mathbb{D} é um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^n .

$$\vec{f} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m; \quad (u_1, u_2, \dots, u_n) \longmapsto \vec{f}(u_1, u_2, \dots, u_n) = (f_1, f_2, \dots, f_m),$$

onde cada $f_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$ é a função coordenada de \vec{f} .

Domínio: É o Conjunto \mathbb{D} .

Imagem: É o conjunto $Im_f = \{\vec{f}(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^m; (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n\}$

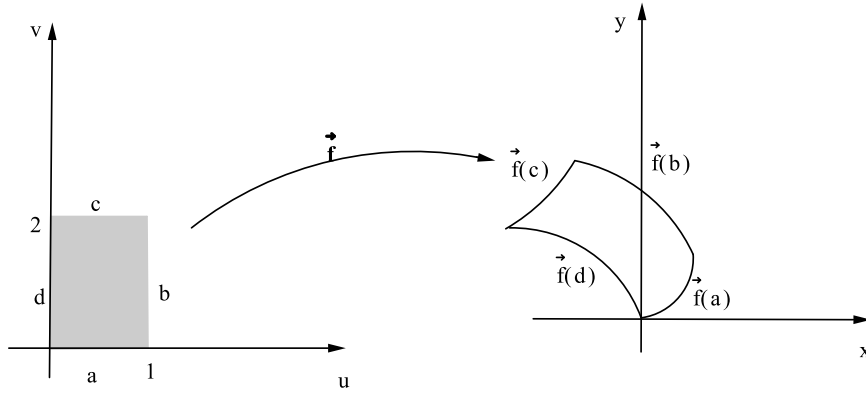
Observação 1.1. Para $n = m = 3$, escrevemos

$$\vec{f} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3; \quad (u, v, w) \longmapsto \vec{f}(u, v, w) = (f_1(u, v, w), f_2(u, v, w), f_3(u, v, w))$$

onde $x = f_1(u, v, w)$, $y = f_2(u, v, w)$ e $z = f_3(u, v, w)$, são funções coordenadas de \vec{f} . Na maioria das vezes, usaremos o caso em que $n = m$. Os exemplos a seguir ilustram a imagem de um conjunto através de uma função vetorial

Exemplo 1.1. Sendo $\vec{f}(u, v) = (u - v^2, u^2 + v)$, encontrar a imagem da região $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$, ou seja, $\mathbb{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\}$ através de \vec{f} . Para encontrar $\vec{f}(\mathbb{D})$, devemos achar a imagem através de \vec{f} de cada um dos segmentos que constituem a fronteira da região \mathbb{D} que são encontradas da seguinte forma

- i) Se $v = 0$ e $0 \leq u \leq 1$, tem-se $x = u$ e $y = u^2$ com $0 \leq u \leq 1$, daí, $0 \leq x \leq 1$, com $y = x^2$.
- ii) Se $u = 1$ e $0 \leq v \leq 2$, tem-se $x = 1 - v^2$ e $y = 1 + v$, $0 \leq v \leq 2$, daí, $x = -y^2 + 2y$ e $1 \leq y \leq 3$.
- iii) Se $v = 2$ e $0 \leq u \leq 1$, tem-se $x = u - 4$ e $y = u^2 + 2$ com $0 \leq u \leq 1$, assim, $y = x^2 + 8x + 18$ com $-4 \leq x \leq -3$.

Figura 4.1: Imagem da transformação \mathbb{D}

- iv) Se $u = 0$ e $0 \leq v \leq 2$, tem-se $x = -v^2$ e $y = v$, com $0 \leq v \leq 2$, daí, $x = -y^2$, com $0 \leq y \leq 2$.

Exemplo 1.2. Sendo $\vec{f}(u, v, w) = (u \cos v \sin w, u \sin v \sin w, u \cos w)$, então a imagem do paralelepípedo $\mathbb{D} = \{(u, v, w); 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi, 0 \leq w \leq \pi\}$ por \vec{f} está na região $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, isto é, $\vec{f}(\mathbb{D})$ está contida na bola esférica unitária com centro na origem.

Observação 1.2. Usaremos sempre a representação

$$\vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

ou seja, no domínio e contra-domínio de \vec{f} as mesmas coordenadas.

Suponha que $\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$ e $\vec{g}(x, y, z) = g_1(x, y, z)\vec{i} + g_2(x, y, z)\vec{j} + g_3(x, y, z)\vec{k}$ são duas funções vetoriais, e h uma função escalar definidas num domínio $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$, então definimos

$$1. (\vec{f} + \vec{g})(x, y, z) = [f_1(x, y, z) + g_1(x, y, z)]\vec{i} + [f_2(x, y, z) + g_2(x, y, z)]\vec{j} + [f_3(x, y, z) + g_3(x, y, z)]\vec{k}$$

$$2. (h\vec{f})(x, y, z) = h(x, y, z)[f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}]$$

3.

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})(x, y, z) = f_1(x, y, z)g_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)g_2(x, y, z) + f_3(x, y, z)g_3(x, y, z)$$

$$4. (\vec{f} \times \vec{g})(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(x, y, z) & f_2(x, y, z) & f_3(x, y, z) \\ g_1(x, y, z) & g_2(x, y, z) & g_3(x, y, z) \end{vmatrix}$$

Exemplo 1.3. Sejam $\vec{f}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ e $\vec{g}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ e $h(x, y, z) = x + y + z$. Então

$$1. (\vec{f} + \vec{g})(x, y, z) = (x^2 + xy)\vec{i} + (y^2 + yz)\vec{j} + (z^2 + xz)\vec{k}$$

2.

$$\begin{aligned} (h\vec{f})(x, y, z) &= (x + y + z)[x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}] \\ &= (x + y + z)x^2\vec{i} + (x + y + z)y^2\vec{j} + (x + y + z)z^2\vec{k} \end{aligned}$$

$$3. (\vec{f} \cdot \vec{g})(x, y, z) = x^3y + y^3z + z^3x$$

4.

$$\begin{aligned} (\vec{f} \times \vec{g})(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} \\ &= (xy^2z - yz^3)\vec{i} + (xyz^2 - zx^3)\vec{j} + (x^2yz - xy^3)\vec{k} \end{aligned}$$

2 Limite e Derivadas Parciais

Dada $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função vetorial. Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$. Dado $L = (l_1, l_2, l_3)$ em \mathbb{R}^3 , dizemos que $\lim_{P \rightarrow P_0} \vec{f} = L$, se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\vec{f}(x, y, z) - L\| < \epsilon$ sempre que $0 < \|P - P_0\| < \delta$. Veja que a desigualdade $\|P - P_0\| < \delta$ é equivalente a $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2$, que descreve o interior de uma esfera de raio δ e centro em (x_0, y_0, z_0) . Daí, geometricamente, a definição significa que para cada $\epsilon > 0$ existe uma esfera sobre (x_0, y_0, z_0) de raio δ tal que para cada ponto (x, y, z) dentro da esfera, o comprimento da diferença entre $\vec{f}(x, y, z)$ e L é menor que ϵ .

Observação 2.1. Em termos de componentes, se $\vec{f} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$ e $L = l_1\vec{i} + l_2\vec{j} + l_3\vec{k}$, a definição implica que

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \vec{f}(x, y, z) = L \iff \lim_{P \rightarrow P_0} f_i(x, y, z) = l_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Teorema 2.1. Sejam \vec{f} e \vec{g} funções vetoriais tais que $\lim_{P \rightarrow P_0} \vec{f}(x, y, z) = L$ e $\lim_{P \rightarrow P_0} \vec{g}(x, y, z) = M$, onde $L = (l_1, l_2, l_3)$ e $M = (m_1, m_2, m_3)$, então temos:

1. $\lim_{P \rightarrow P_0} [\vec{f}(x, y, z) + \vec{g}(x, y, z)] = L + M$
2. $\lim_{P \rightarrow P_0} \lambda \vec{f}(x, y, z) = \lambda L, \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{P \rightarrow P_0} \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{g}(x, y, z) = L \cdot M$
4. $\lim_{P \rightarrow P_0} \vec{f}(x, y, z) \times \vec{g}(x, y, z) = L \times M$
5. $\lim_{P \rightarrow P_0} \|\vec{f}(x, y, z)\| = \|L\|$

Demonstração. 1. Dados

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}, \quad f_i = f_i(x, y, z), i = 1, 2, 3.$$

$$\vec{g}(x, y, z) = g_1 \vec{i} + g_2 \vec{j} + g_3 \vec{k}, \quad g_i = g_i(x, y, z), i = 1, 2, 3.$$

$$L = (l_1, l_2, l_3) \quad \text{e} \quad M = (m_1, m_2, m_3).$$

Então, de acordo com a observação anterior

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow P_0} [\vec{f}(x, y, z) + \vec{g}(x, y, z)] &= \lim_{P \rightarrow P_0} [(f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}) + (g_1 \vec{i} + g_2 \vec{j} + g_3 \vec{k})] \\ &= \lim_{P \rightarrow P_0} [(f_1 + g_1) \vec{i} + (f_2 + g_2) \vec{j} + (f_3 + g_3) \vec{k}] \\ &= (l_1 + m_1) \vec{i} + (l_2 + m_2) \vec{j} + (l_3 + m_3) \vec{k} \\ &= (l_1 \vec{i} + l_2 \vec{j} + l_3 \vec{k}) + (m_1 \vec{i} + m_2 \vec{j} + m_3 \vec{k}) \\ &= L + M \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow P_0} \lambda \vec{f}(x, y, z) &= \lim_{P \rightarrow P_0} \lambda (f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}) \\ &= \lim_{P \rightarrow P_0} (\lambda f_1 \vec{i} + \lambda f_2 \vec{j} + \lambda f_3 \vec{k}) \\ &= \lambda l_1 \vec{i} + \lambda l_2 \vec{j} + \lambda l_3 \vec{k} \\ &= \lambda L. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow P_0} \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{g}(x, y, z) &= \lim_{P \rightarrow P_0} [(f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}) \cdot (g_1 \vec{i} + g_2 \vec{j} + g_3 \vec{k})] \\ &= \lim_{P \rightarrow P_0} (f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3) \\ &= l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 \\ &= (l_1, l_2, l_3) \cdot (m_1, m_2, m_3) \\ &= L \cdot M \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\lim_{P \rightarrow P_0} \vec{f}(x, y, z) \times \vec{g}(x, y, z) &= \lim_{P \rightarrow P_0} [(f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k}) \times (g_1 \vec{i} + g_2 \vec{j} + g_3 \vec{k})] \\
&= \lim_{P \rightarrow P_0} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} \\
&= \lim_{P \rightarrow P_0} [(f_2 g_3 - f_3 g_2) \vec{i} + (f_3 g_1 - f_1 g_3) \vec{j} + (f_1 g_2 - g_1 f_2) \vec{k}] \\
&= (l_2 m_3 - l_3 m_2) \vec{i} + (l_3 m_1 - l_1 m_3) \vec{j} + (l_1 m_2 - m_1 l_2) \vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = L \times M
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\lim_{P \rightarrow P_0} \|\vec{f}(x, y, z)\| &= \lim_{P \rightarrow P_0} \|(f_1 \vec{i} + f_2 \vec{j} + f_3 \vec{k})\| \\
&= \lim_{P \rightarrow P_0} \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} \\
&= \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} = \|L\|
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.1. Se $\vec{f} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ e $\vec{g} = xy \vec{i} + yz \vec{j} + xz \vec{k}$, então

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,-1)} \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{g}(x, y, z) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,-1)} (x^3 y + y^3 z + z^3 x) = -7.$$

Definição 2.1. Uma função vetorial \vec{f} é dito **Contínua** num ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ quando

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} \vec{f}(x, y, z) = \vec{f}(x_0, y_0, z_0).$$

Segue que uma função vetorial \vec{f} é contínua em \mathbb{D} se e somente se cada uma de suas funções componentes é contínua em \mathbb{D} .

Seja $\vec{f}: \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ função vetorial, com

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z) \vec{i} + f_2(x, y, z) \vec{j} + f_3(x, y, z) \vec{k}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\vec{f}_x &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x + \Delta x, y, z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta x} \\
\vec{f}_y &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x, y + \Delta y, z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta y}
\end{aligned}$$

$$\vec{f}_z = \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x, y, z + \Delta z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta z}$$

são as **Derivadas Parciais Vetoriais** de \vec{f} em relação às variáveis x, y e z , respectivamente, desde que os limites existam.

Observação 2.2. Se $\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z) \vec{i} + f_2(x, y, z) \vec{j} + f_3(x, y, z) \vec{k}$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial x} \vec{k} \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} &= \frac{\partial f_1}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial y} \vec{k} \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} &= \frac{\partial f_1}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \vec{k}. \end{aligned}$$

Com efeito, no caso de $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x + \Delta x, y, z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f_1(x + \Delta x, y, z) - f_1(x, y, z)}{\Delta x} \vec{i} + \frac{f_2(x + \Delta x, y, z) - f_2(x, y, z)}{\Delta x} \vec{j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_3(x + \Delta x, y, z) - f_3(x, y, z)}{\Delta x} \vec{k} \right) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial x} \vec{k}. \end{aligned}$$

As outras derivadas são análogas.

Exemplo 2.2. Seja $\vec{f}(x, y, z) = e^{xy} \vec{i} + (x - y) \vec{j} + x \sin y \vec{k}$. Então

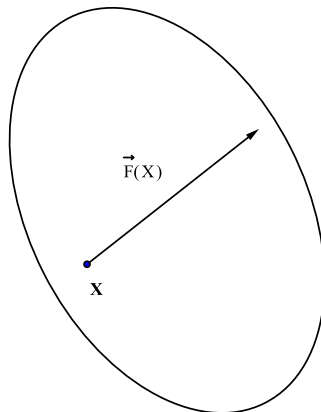
$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} &= \frac{\partial(e^{xy})}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(x - y)}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial(x \sin y)}{\partial x} \vec{k} \\ &= ye^{xy} \vec{i} + \vec{j} + \sin y \vec{k} \end{aligned}$$

3 Campo Vetorial

Definição 3.1. É uma aplicação $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\vec{F}(X) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_n(X)),$$

onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Figura 4.2: Campo \vec{F}

Exemplo 3.1. Vejamos alguns exemplos

1. $\vec{F}(x, y) = \vec{i}$
2. $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{k}$
3. $\vec{F}(x, y) = x\vec{j}$

Os exemplos mais importantes de campos vetoriais serão estudados na próxima seção, sendo considerado o caso $n = 3$.

4 Gradiente, Divergente, Rotacional e Laplaciano em coordenadas cartesianas

Como dito antes para funções vetoriais de várias variáveis, consideraremos quase sempre campos $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $n = 3$, e neste caso, suas funções coordenadas serão sempre denotadas por $F_1(x, y, z) = P(x, y, z)$, $F_2(x, y, z) = Q(x, y, z)$ e $F_3(x, y, z) = R(x, y, z)$.

4.1 Gradiente

É o campo vetorial de uma função escalar $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, que denotaremos por ∇f (ou $grad f$), dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

ou então

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k},$$

Exemplo 4.1. Dada $f(x, y, z) = 3x^2y + z^5$, temos que $\nabla f = 6xy\vec{i} + 3x^2\vec{j} + 5z^4\vec{k}$.

Segue que se ∇f e ∇g existem, então para k constante, tem-se

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(k \cdot f) = k \cdot \nabla f$
3. $\nabla(f \cdot g) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$
4. $\nabla(f/g) = \frac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}$

De fato,

1-

$$\begin{aligned} \nabla(f + g) &= \frac{\partial(f + g)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(f + g)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(f + g)}{\partial z} \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \right) \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \nabla f + \nabla g \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} \nabla(kf) &= \frac{\partial(kf)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(kf)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(kf)}{\partial z} \vec{k} \\ &= k \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= k \nabla f. \end{aligned}$$

3-

$$\begin{aligned}
\nabla(f \cdot g) &= \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial z} \vec{k} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \right) \vec{k} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) g + f \left(\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k} \right) \\
&= \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g.
\end{aligned}$$

4-

$$\begin{aligned}
\nabla(f/g) &= \frac{\partial(f/g)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(f/g)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(f/g)}{\partial z} \vec{k} \\
&= \left(\frac{g \cdot \partial f / \partial x - f \cdot \partial g / \partial x}{g^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{g \cdot \partial f / \partial y - f \cdot \partial g / \partial y}{g^2} \right) \vec{j} \\
&\quad + \left(\frac{g \cdot \partial f / \partial z - f \cdot \partial g / \partial z}{g^2} \right) \vec{k} \\
&= \frac{1}{g^2} (g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g).
\end{aligned}$$

4.2 Rotacional

Seja um campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde \mathbb{D} é um aberto do \mathbb{R}^3 , definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k},$$

tais que as derivadas parciais de P, Q e R ¹ existam em \mathbb{D} . O **Rotacional** de \vec{F} , denotado por $Rot \vec{F}$, é o campo vetorial definido em \mathbb{D} , como $\nabla \times \vec{F}$, onde ∇ é o operador diferencial

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Observação 4.1. Veja que

$$Rot \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Então

$$Rot \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

¹sempre que necessário, consideraremos as funções P, Q e R de classe C^1

Observação 4.2. No caso de $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ definimos

$$\text{Rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Exemplo 4.2. Dado $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} + yz^2\vec{j} + xyz\vec{k}$, então o rotacional de \vec{F} é

$$\text{Rot } \vec{F}(x, y, z) = z(x - 2y)\vec{i} - yz\vec{j} - x\vec{k}.$$

Observação 4.3. Seja $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial. Dizemos que \vec{F} é um **Campo Vetorial Irrotacional** quando $\text{Rot } \vec{F} = \vec{0}$ em \mathbb{D} .

Segue da definição e das regras de derivação que o Rotacional satisfaz

1. $\text{Rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{Rot } \vec{F} + \text{Rot } \vec{G}$
2. $\text{Rot}(f\vec{F}) = f \cdot \text{Rot } \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$, onde f é uma função escalar diferenciável.

4.3 Divergente

Seja $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial definido no aberto $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$. Suponhamos que existam e sejam contínuas as derivadas parciais de P , Q e R em \mathbb{D} . O Campo Escalar

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

chama-se **Divergente** do campo vetorial \vec{F} .

Observação 4.4. Podemos denotar $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$, onde $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, então

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned}$$

Observação 4.5. Temos:

1. **Rotacional:** Campo Vetorial : $Rot \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$
2. **Divergente:** Campo Escalar : $div \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

Segue da definição e pelas regras de derivação que

1. $div(\vec{F} + \vec{G}) = div \vec{F} + div \vec{G}$
2. $div(f\vec{F}) = f div \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$, onde f é uma função escalar diferenciável.

De fato, dados $\vec{F} = (P_1, Q_1, R_1)$, $\vec{G} = (P_2, Q_2, R_2)$ e f uma função escalar diferenciável, então

1.

$$\begin{aligned}
 div(\vec{F} + \vec{G}) &= \frac{\partial}{\partial x}(P_1 + P_2) + \frac{\partial}{\partial y}(Q_1 + Q_2) + \frac{\partial}{\partial z}(R_1 + R_2) \\
 &= \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial z} \\
 &= \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z} \right) \\
 &= div \vec{F} + div \vec{G}.
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 div(f\vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(fP_1) + \frac{\partial}{\partial x}(fQ_1) + \frac{\partial}{\partial x}(fR_1) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}P_1 + f\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}Q_1 + f\frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}R_1 + f\frac{\partial R_1}{\partial z} \\
 &= f\left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (P_1, Q_1, R_1) \\
 &= f div \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}.
 \end{aligned}$$

Se \vec{F} é um campo vetorial tal que $div \vec{F}(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{D}_{\vec{F}}$, diz-se que \vec{F} é um **Campo Vetorial Solenoidal** em \mathbb{D} (ou incompressível em \mathbb{D}).

4.4 Laplaciano

Sendo $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar, sabemos que o gradiente ∇f é dado por $\nabla f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z)$, então o **divergente do Gradiente** de f , ou seja, $div \nabla f = \nabla \cdot \nabla f$, denotado por $\nabla^2 f$ será

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{aligned}$$

chamado **Laplaciano** de f , também denotado por Δf , ou seja,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

5 Campo Conservativo

Definição 5.1. Um campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ denomina-se **Conservativo** se existe uma função escalar diferenciável $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \vec{F}$ em \mathbb{D} . A função $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $\nabla f = \vec{F}$ chama-se uma **Função Potencial** de \vec{F} .

Observação 5.1. É possível mostrar que, sob certas condições, um campo vetorial é conservativo se, e somente se, ele é irrotacional. Por enquanto, veremos a condição necessária.

Teorema 5.1. Seja $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 no aberto \mathbb{D} . Se \vec{F} é conservativo então \vec{F} é Irrotacional em \mathbb{D} .

Demonstração. Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Supondo \vec{F} conservativo, existirá $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \vec{F}$ em \mathbb{D} , ou equivalentemente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R$$

em \mathbb{D} . Como \vec{F} é de classe C^1 , resulta que f é de classe C^2 . Dai temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} = P &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q &\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

em \mathbb{D} . De modo análogo, conclui-se que

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

em \mathbb{D} . Como

$$\text{Rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

segue que

$$\text{Rot } \vec{F} = \vec{0} \quad \text{em } \mathbb{D}.$$

■

Exemplo 5.1. Dado o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz})$, então \vec{F} é conservativo, pois se tomarmos a função escalar $f(x, y, z) = xe^{yz}$, seguirá que $\nabla f = \vec{F}$.

Observação 5.2. A recíproca do Teorema acima não é verdadeira, ou seja, se \vec{F} é irrotacional, então \vec{F} não é necessariamente conservativo, pois se considerarmos o campo vetorial (Elemento de Ângulo), $\vec{F}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$, temos que $\text{Rot } \vec{F} = 0$, mas \vec{F} não é conservativo.

Definição 5.2. Dado um campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, se existe outro campo vetorial $\vec{G} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F} = \text{Rot } \vec{G}$ em \mathbb{D} , o campo \vec{G} é dito um **Potencial Vetorial** do campo \vec{F} em \mathbb{D} .

Observação 5.3. A existência de um potencial vetorial para um campo dado está relacionada com campos solenoidais², assim como os campos conservativos estão relacionados com os campos irrotacionais. Vamos mostrar que, sob certas condições, um campo vetorial tem potencial vetorial se, e somente se, ele é Solenoidal; tais restrições, referem-se ao campo vetorial e ao conjunto onde o campo admita o potencial vetorial. Veremos mais adiante, um tipo de conjunto onde um campo é solenoidal, mas não possui um potencial vetorial nesse conjunto.

Lema 5.1. Dado um campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, então $\text{div Rot } \vec{F} = 0$.

Demonstração. Dado $\vec{F} = (P, Q, R)$, então

$$\text{Rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Daí

$$\begin{aligned} \text{div Rot } \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

² $\text{div } \vec{F} = 0$

Proposição 4.1. *Seja \mathbb{D} um conjunto aberto do \mathbb{R}^3 , onde dois pontos quaisquer de \mathbb{D} , podem ser ligados por segmentos paralelos aos eixos coordenados. Se $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 em \mathbb{D} , então \vec{F} tem um potencial vetorial em \mathbb{D} se, e somente se, \vec{F} é solenoidal.*

Demonstração. \Rightarrow] Se \vec{F} tem um potencial vetorial \vec{G} , em \mathbb{D} , decorre que $\vec{F} = \text{Rot } \vec{G}$ em \mathbb{D} , ou seja, $\text{div } \vec{F} = \text{div } \text{Rot } \vec{G}$, pelo lema 5.1, segue que \vec{F} é solenoidal.

[\Leftarrow Suponha que \vec{F} seja solenoidal ($\text{div } \vec{F} = 0$) em \mathbb{D} . Sejam $\vec{F} = (P, Q, R)$ e $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$. Queremos mostrar que $\vec{F} = \text{Rot } \vec{G}$, ou seja,

$$P = \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \quad Q = \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \quad \text{e} \quad R = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}.$$

Considerando $G_3 = G_3(z)$, tem-se

$$P = -\frac{\partial G_2}{\partial z} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\partial G_1}{\partial z},$$

assim, por integração, tem-se

$$G_2 = -\int_{z_0}^z F_1 dz + f(x, y) \quad \text{e} \quad G_1 = \int_{z_0}^z F_2 dz + g(x, y)$$

onde z_0 é constante, f e g são funções que independem de z . Temos que encontrar as funções f e g . Substituindo G_1 e G_2 na equação de R , obtem-se

$$\begin{aligned} R &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\int_{z_0}^z P dz + f(x, y) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{z_0}^z Q dz + g(x, y) \right) \\ &= -\int_{z_0}^z \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dz + f_x(x, y) - g_y(x, y). \end{aligned}$$

Como \vec{F} é solenoidal, isto é,

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

tem-se $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial z}$, assim

$$\begin{aligned} R(x, y, z) &= \int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial z} dz + f_x(x, y) - g_y(x, y) \\ &= R(x, y, z) \Big|_{z_0}^z + f_x(x, y) - g_y(x, y) \\ &= R(x, y, z) - R(x, y, z_0) + f_x(x, y) - g_y(x, y), \end{aligned}$$

ou seja, f e g devem ser soluções da equação $f_x(x, y) - g_y(x, y) = R(x, y, z_0)$. Tomando $f(x, y) = \int_{x_0}^x R(x, y, z_0)dx$, onde x_0 é constante e $g(x, y)$ tal que $g_y(x, y) = R(x_0, y, z_0)$, segue que a equação $f_x(x, y) - g_y(x, y) = R(x, y, z_0)$ se verifica, portanto, se \vec{F} é solenoidal, definindo o campo \vec{G} por

$$\vec{G}(x, y, z) = \left(\int_{z_0}^z Q(x, y, z)dz + g(x, y), \int_{x_0}^x R(x, y, z_0)dx - \int_{z_0}^z P(x, y, z)dz, G_3(z) \right),$$

onde $g(x, y)$ é tal que $g_y(x, y) = R(x_0, y, z_0)$, tem-se $\vec{F} = \text{Rot } \vec{G}$.

■

6 Campos Vetoriais em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Estudaremos os campos vetoriais como visto na seção anterior, porém em coordenadas curvilíneas.

6.1 Coordenadas Curvilíneas

Seja $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação definida por

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w).$$

Se num aberto $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$, \vec{F} é injetiva e de classe C^1 e o determinante da diferencial de \vec{F} , $\det d\vec{F}(u, v, w) > 0$, pelo **Teorema da função inversa**, estas equações podem ser resolvidas unicamente para u, v e w em função de x, y e z , ou seja, cada ponto $(x, y, z) \in \vec{F}(\mathbb{D})$ corresponde a um único ponto (u, v, w) em \mathbb{D} . Para qualquer ponto fixo $P_0 = (u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{D}$, são obtidas curvas coordenadas em $\vec{F}(\mathbb{D})$ passando por $\vec{F}_0 = q_0$, dadas por

- i) **Curva u -parâmetro:** $x = f_1(u, v_0, w_0)$, $y = f_2(u, v_0, w_0)$ e $z = f_3(u, v_0, w_0)$
- ii) **Curva v -parâmetro:** $x = f_1(u_0, v, w_0)$, $y = f_2(u_0, v, w_0)$ e $z = f_3(u_0, v, w_0)$
- iii) **Curva w -parâmetro:** $x = f_1(u_0, v_0, w)$, $y = f_2(u_0, v_0, w)$ e $z = f_3(u_0, v_0, w)$

Estas curvas coordenadas definem localmente um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^3 chamado **Sistema de Coordenadas Curvilíneas** uvw em q_0 .

Dois exemplos especiais de coordenadas curvilíneas são as **Coordenadas Cilíndricas** dadas pelas equações

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = w,$$

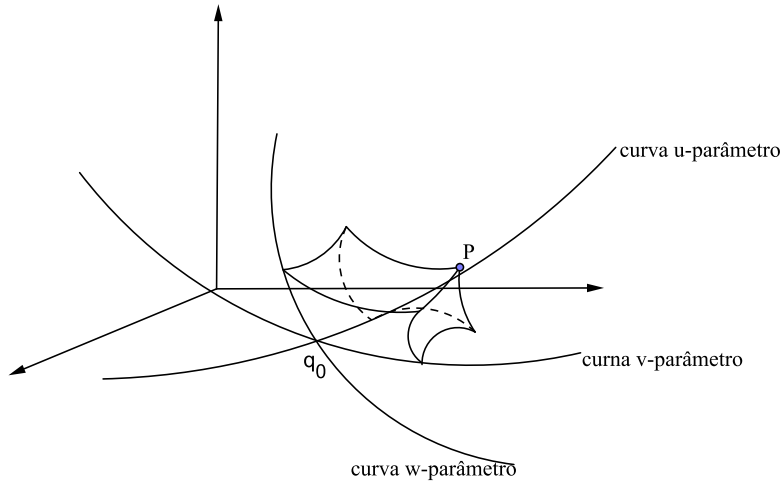


Figura 4.3: Sistema de Coordenadas Curvilíneas

com $u > 0, 0 \leq v \leq 2\pi$ e $-\infty < w < +\infty$, cuja correspondência entre as coordenadas cilíndricas retangulares é dada por

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad w = z;$$

e as **Coordenadas Esféricas**, dadas pelas equações

$$x = u \sin v \cos w, \quad y = u \sin v \sin w, \quad z = u \cos v,$$

com $u > 0, 0 \leq v \leq \pi$ e $0 \leq w < 2\pi$ e a relação inversa é dada por

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad \text{e} \quad w = \arctan \frac{y}{x}.$$

Os **Vetores Tangentes Básicos** do sistema de coordenadas curvilíneas em q_0 , são os vetores que denotaremos por T_u, T_v e T_w , unitários e tangentes às curvas coordenadas em q_0 .

Proposição 4.2. Se $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ é o vetor posição de um ponto $P(x, y, z)$ no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, onde $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$ então os vetores tangentes básicos T_u, T_v e T_w são dados por

$$T_u = \frac{1}{\|\partial\vec{r}/\partial u\|} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}$$

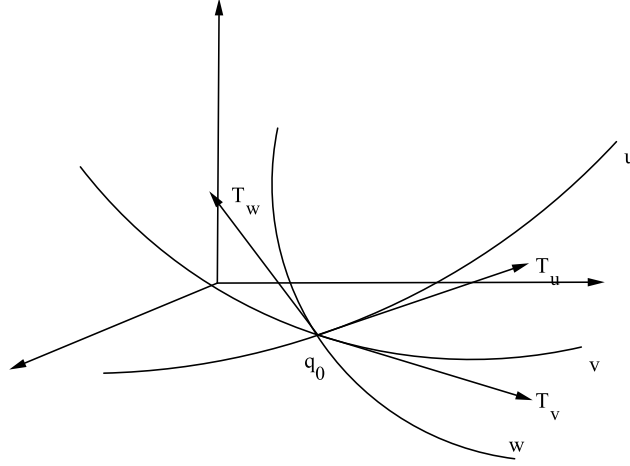


Figura 4.4: Vetores básicos T_u, T_v e T_w em q_0

$$T_v = \frac{1}{\|\partial \vec{r} / \partial v\|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

$$T_w = \frac{1}{\|\partial \vec{r} / \partial w\|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

Demonstração. Sendo x, y e z funções de u, v e w , então

$$\vec{r} = x(u, v, w) \vec{i} + y(u, v, w) \vec{j} + z(u, v, w) \vec{k}.$$

Mantendo $v = v_0$ e $w = w_0$ constantes, \vec{r} é o vetor posição de um ponto qualquer da curva u -parâmetro, logo $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ é um vetor tangente à curva u -parâmetro, ou seja,

$$T_u = \frac{1}{\|\partial \vec{r} / \partial u\|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$$

De forma análoga, o resultado segue para T_v e T_w , ou seja,

$$T_v = \frac{1}{\|\partial \vec{r} / \partial v\|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

$$T_w = \frac{1}{\|\partial \vec{r} / \partial w\|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

■

Observação 6.1. Para efeito de simplificação, usaremos a partir de agora a notação $h_u = \|\partial\vec{r}/\partial u\|$, $h_v = \|\partial\vec{r}/\partial v\|$ e $h_w = \|\partial\vec{r}/\partial w\|$ e teremos $T_u = \frac{1}{h_u} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}$, $T_v = \frac{1}{h_v} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ e $T_w = \frac{1}{h_w} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}$.

Exemplo 6.1. Vamos encontrar os vetores tangentes básicos do sistema de coordenadas cilíndricas, sendo $\vec{r} = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + w \vec{k}$.

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j} + 0 \vec{k} \Rightarrow \left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \right\| = \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v} = 1$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = -u \sin v \vec{i} + u \cos v \vec{j} + 0 \vec{k} \Rightarrow \left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} = u$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial w} = 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \left\| \frac{\partial\vec{r}}{\partial w} \right\| = 1,$$

Portanto

$$T_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$T_v = \frac{1}{h_v} \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = -\sin v \vec{i} + \cos v \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$T_w = \frac{1}{h_w} \frac{\partial\vec{r}}{\partial w} = 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + \vec{k}$$

Exemplo 6.2. Vamos encontrar os vetores tangentes básicos do sistema de coordenadas esféricas. Como o vetor posição \vec{r} em função das coordenadas esféricas, é

$$\vec{r} = u \sin v \cos w \vec{i} + u \sin v \sin w \vec{j} + u \cos v \vec{k},$$

os vetores tangentes às curvas coordenadas são

$$T_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \sin v \cos w \vec{i} + \sin v \sin w \vec{j} + \cos v \vec{k}$$

$$T_v = \frac{1}{h_v} \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \cos v \cos w \vec{i} + \cos v \sin w \vec{j} - \sin v \vec{k}$$

$$T_w = \frac{1}{h_w} \frac{\partial\vec{r}}{\partial w} = -\sin w \vec{i} + \cos w \vec{j} + 0 \vec{k}.$$

Um sistema de coordenadas curvilíneas é dito **Ortogonal**, quando as curvas coordenadas se interceptam ortogonalmente em todo ponto de uma região $\vec{F}(\mathbb{D})$, ou ainda, quando os vetores tangentes básicos do sistema são mutuamente ortogonais em cada ponto de $\vec{F}(\mathbb{D})$.

Exemplo 6.3. O sistema de coordenadas cilíndricas é ortogonal.

De fato,

$$T_u \cdot T_v = -\cos v \sin v + \sin v \cos v + 0 = 0$$

$$T_u \cdot T_w = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$T_v \cdot T_w = 0 + 0 + 0 = 0$$

Exemplo 6.4. Vamos verificar que o sistema de coordenadas esféricas é ortogonal.

De fato,

$$T_u \cdot T_v = \sin v \cos v \cos^2 w + \sin v \cos v \sin^2 w - \sin v \cos v = 0$$

$$T_u \cdot T_w = -\sin v \sin w \cos w + \sin v \sin w \cos w = 0$$

$$T_v \cdot T_w = -\cos v \sin w \cos w + \cos v \sin w \cos w = 0$$

Daí o sistema de coordenadas esféricas é ortogonal.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar e c um valor na imagem de f , então o conjunto dos pontos $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$; $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ é chamado **Conjunto de Nível** de f correspondente ao nível c . Se $n = 2$ e $z = f(x, y)$, o conjunto de nível de f correspondente ao nível $z = c$ é chamado **Curva de Nível** de f correspondente ao nível c . Se $n = 3$ e $w = f(x, y, z)$, tal conjunto é chamado de **Superfície de Nível** de f correspondente ao nível $w = c$.

Suponha que das equações $x = f_1(u, v, w)$, $y = f_2(u, v, w)$ e $z = f_3(u, v, w)$, é possível obter u, v e w como funções de x, y e z , isto é

$$u = g_1(x, y, z), \quad v = g_2(x, y, z) \quad \text{e} \quad w = g_3(x, y, z).$$

As superfícies de níveis das funções g_1, g_2 e g_3 , são chamadas **Superfícies Coordenadas** de u, v e w , respectivamente. Os vetores unitários e **Normais** às superfícies coordenadas de

$$u = g_1(x, y, z), \quad v = g_2(x, y, z) \quad \text{e} \quad w = g_3(x, y, z).$$

são dados, respectivamente, por

$$N_u = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}, \quad N_v = \frac{\nabla v}{\|\nabla v\|} \quad \text{e} \quad N_w = \frac{\nabla w}{\|\nabla w\|},$$

onde, por exemplo, $\nabla u = (\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u / \partial z)$. De forma análoga para ∇v e ∇w .

De fato, os vetores $\nabla u, \nabla v$ e ∇w são normais às superfícies de níveis das funções g_1, g_2 e g_3 , respectivamente.

Exemplo 6.5. Encontrar os vetores unitários e normais às superfícies coordenadas, dadas pela transformação coordenadas cilíndricas.

A transformação coordenadas cilíndricas é definida pelas equações

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v \quad \text{e} \quad z = w$$

expressando u, v e w como funções de x, y e z , obtém-se

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{e} \quad w = z.$$

Calculando o gradiente de cada uma destas funções, obtemos

$$\nabla u = (\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u / \partial z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y, 0) \Rightarrow \|\nabla u\| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

$$\nabla v = (\partial v / \partial x, \partial v / \partial y, \partial v / \partial z) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0) \Rightarrow \|\nabla v\| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\nabla w = (\partial w / \partial x, \partial w / \partial y, \partial w / \partial z) = (0, 0, 1) \Rightarrow \|\nabla w\| = 1$$

Dai

$$N_u = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right) = \left(\frac{u \cos v}{u}, \frac{u \sin v}{u}, 0 \right) = (\cos v, \sin v, 0)$$

$$\begin{aligned} N_v = \frac{\nabla v}{\|\nabla v\|} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}(-y, x, 0) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-y, x, 0) = \frac{1}{u}(-u \sin v, u \cos v, 0) \\ &= (-\sin v, \cos v, 0) \end{aligned}$$

$$N_w = \frac{\nabla w}{\|\nabla w\|} = (0, 0, 1)$$

Exemplo 6.6. Vetores normais unitários em coordenadas esféricas.

Sendo $x = u \sin v \cos w$, $y = u \sin v \sin w$, $z = u \cos v$, onde $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $v = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$, $w = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)$, temos

$$\begin{aligned} \nabla u &= (\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u / \partial z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \left(\frac{u \sin v \cos w}{u}, \frac{u \sin v \sin w}{u}, \frac{u \cos v}{u} \right) \\ &= (\sin v \cos w, \sin v \sin w, \cos v). \end{aligned}$$

$$\|\nabla u\| = \sqrt{\sin^2 v \cos^2 w + \sin^2 v \sin^2 w + \cos^2 v} = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v} = 1.$$

Logo

$$N_u = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = (\sin v \cos w, \sin v \sin w, \cos v).$$

Aqui para N_v , usaremos o fato que $g = \arccos(u) \implies g' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}u'$.

$$\nabla v = (\partial v / \partial x, \partial v / \partial y, \partial v / \partial z) = \left(\frac{\cos v \cos w}{u}, \frac{\cos v \sin w}{u}, -\frac{\sin v}{u} \right)$$

e

$$\|\nabla v\| = \frac{1}{u}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} N_v = \frac{\nabla v}{\|\nabla v\|} &= u \left(\frac{\cos v \cos w}{u}, \frac{\cos v \sin w}{u}, -\frac{\sin v}{u} \right) \\ &= (\cos v \cos w, \cos v \sin w, -\sin v) \end{aligned}$$

Para N_w , teremos

$$\nabla w = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0) \implies \|\nabla w\| = 1.$$

Logo

$$N_w = \frac{\nabla w}{\|\nabla w\|} = (-\sin w, \cos w, 0).$$

Observação 6.2. Vimos que no sistema de coordenadas cilíndricas os vetores tangentes básicos são

$$\begin{aligned} T_u &= \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j} + 0\vec{k} \\ T_v &= -\sin v \vec{i} + \cos v \vec{j} + 0\vec{k} \\ T_w &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}, \end{aligned}$$

que são, respectivamente, os vetores normais N_u, N_v e N_w , ou seja, $T_u = N_u, T_v = N_v$ e $T_w = N_w$.

Vejamos que isso é verdade, de modo geral. Para isso definimos o que chamaremos de Conjuntos Recíprocos de Vetores.

Definição 6.1. Sejam $\{u_1, u_2, u_3\}$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ conjuntos de vetores satisfazendo $u_i \cdot v_j = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, definido com

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Então os conjuntos em questão são chamados de **Conjuntos Recíprocos de Vetores**.

Lema 6.1. Se $\{u_1, u_2, u_3\}$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ são conjuntos recíprocos de vetores então o produtos mistos $[u_1, u_2, u_3] \neq 0$ e $[v_1, v_2, v_3] \neq 0$.

Demonstração. Se $[u_1, u_2, u_3]$ fosse zero, os vetores u_1, u_2, u_3 seriam coplanares, e, por exemplo,

$$u_1 = k_1 u_2 + k_2 u_3.$$

Daí

$$1 = u_1 \cdot v_1 = k_1 u_2 v_1 + k_2 u_3 v_1 = 0;$$

absurdo. De forma similar, $[v_1, v_2, v_3] \neq 0$. ■

Lema 6.2. Se $\{u_1, u_2, u_3\}$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ são conjuntos recíprocos de vetores, então

$$v_i = \frac{u_j \times u_k}{[u_1, u_2, u_3]},$$

onde $1 \leq i, j, k \leq 3$, distintos entre si, onde $[u_1, u_2, u_3]$ é o produto misto entre u_1, u_2 e u_3 .

Demonstração. Temos que $v_1 \cdot u_2 = v_1 \cdot u_3 = 0$ e $v_1 \cdot u_1 = 1$; como v_1 é ortogonal a u_2 e u_3 , é paralelo à $u_2 \times u_3$, então $v_1 = k(u_2 \times u_3)$ onde k é uma constante; daí

$$u_1 \cdot v_1 = k u_1 \cdot (u_2 \times u_3) = k [u_1, u_2, u_3].$$

O que implica,

$$k = \frac{u_1 \cdot v_1}{[u_1, u_2, u_3]} = \frac{1}{[u_1, u_2, u_3]}.$$

Logo,

$$v_1 = \frac{u_2 \times u_3}{[u_1, u_2, u_3]}.$$

As outras identidades são análogas. ■

Proposição 4.3. Os conjuntos $\left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\}$ e $\{\nabla u, \nabla v, \nabla w\}$ são conjuntos recíprocos de vetores.

Demonstração. Considere

$$u = u(x, y, z) = u(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \quad (1)$$

derivando (1), com relação a u , temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 1;$$

além disso,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \vec{k},$$

onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ em (u, v, w) , e

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

segue que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \nabla u = 1;$$

de forma análoga,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \nabla v = 1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \nabla w.$$

Por outro lado, derivando (1) com relação a v , temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = 0;$$

e isto implica que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \nabla v = 0;$$

analogamente,

$$0 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \nabla w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \nabla u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \nabla w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \nabla u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \nabla v;$$

ou seja, $\left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\}$ e $\{\nabla u, \nabla v, \nabla w\}$ são conjuntos recíprocos de vetores. ■

Observação 6.3. Conjunto de vetores $\{u, v, w\}$, tais que o produto misto, $[u, v, w] = 1$, são, às vezes, chamados de **Dextrógiro**

Lema 6.3. O conjunto de vetores $\{T_u, T_v, T_w\}$ em coordenadas cilíndricas satisfaz $[T_u, T_v, T_w] = 1$.

Demonstração. Vimos que

$$T_u = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j} + 0\vec{k}$$

$$T_v = -\sin v \vec{i} + \cos v \vec{j} + 0\vec{k}$$

$$T_w = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k},$$

então

$$[T_u, T_v, T_w] = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

■

Lema 6.4. O conjunto de vetores $\{T_u, T_v, T_w\}$ em coordenadas esféricas satisfaz $[T_u, T_v, T_w] = 1$.

Demonstração. Tal como no lema anterior, em coordenadas esféricas ■

Observação 6.4. Os resultados dos Lemas 6.3 e 6.4, também valem para o conjunto $\{N_u, N_v, N_w\}$.

Proposição 4.4. Os conjuntos $\{T_u, T_v, T_w\}$ de vetores tangentes e $\{N_u, N_v, N_w\}$ de vetores normais em coordenadas curvilíneas ortogonais são conjuntos recíprocos de vetores.

Demonstração. Basta mostrarmos que $h_u = \frac{1}{\|\nabla u\|}$, $h_v = \frac{1}{\|\nabla v\|}$ e $h_w = \frac{1}{\|\nabla w\|}$. Dada f uma função escalar, seja $\nabla f = f_u T_u + f_v T_v + f_w T_w$ e determinemos às funções f_u, f_v e f_w nesta igualdade. Dado o vetor posição $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$ temos que a diferencial de \vec{r} é dada por

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw.$$

Como $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u T_u$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = h_v T_v$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = h_w T_w$, segue que

$$d\vec{r} = h_u du T_u + h_v dv T_v + h_w dw T_w.$$

Agora, por um lado

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw.$$

Por outro lado, $df = \nabla f \cdot d\vec{r}$, pois sendo

$$f = f(x, y, z) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)),$$

segue que,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} dw = \nabla f \cdot d\vec{r}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} df = \nabla f \cdot d\vec{r} &= (f_u T_u + f_v T_v + f_w T_w) \cdot (h_u du T_u + h_v dv T_v + h_w dw T_w) \\ &= f_u h_u du + f_v h_v dv + f_w h_w dw \end{aligned}$$

comparando estas equações, segue que

$$f_u h_u = \frac{\partial f}{\partial u} \implies f_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$f_v h_v = \frac{\partial f}{\partial v} \implies f_v = \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$f_w h_w = \frac{\partial f}{\partial w} \implies f_w = \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w}.$$

Logo

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} T_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} T_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} T_w.$$

Agora se considerarmos $f = u$, segue que

$$\nabla u = \frac{1}{h_u} T_u \implies \|\nabla u\| = \frac{1}{h_u}.$$

As outras identidades são análogas. ■

Proposição 4.5. *Num sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais $\{u, v, w\}$ (com $[u, v, w] = 1$), temos que $T_u = N_u$, $T_v = N_v$, $T_w = N_w$.*

Demonstração. Como os conjuntos $\{T_u, T_v, T_w\}$ e $\{N_u, N_v, N_w\}$ são recíprocos, então pelo lema 6.2,

$$N_u = \frac{T_v \times T_w}{[T_u, T_v, T_w]} = T_v \times T_w = T_u.$$
■

Proposição 4.6. *Num sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, valem*

$$i) \quad T_u = h_u \nabla u, \quad T_v = h_v \nabla v \quad e \quad T_w = h_w \nabla w$$

$$ii) \quad \nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w = (h_u h_v h_w)^{-1}.$$

Demonstração. i) $T_u = N_u = \frac{1}{\|\nabla u\|} \nabla u = h_u \nabla u$. Os outros resultados são análogos.

ii)

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w &= \frac{1}{h_u} T_u \cdot \left(\frac{1}{h_v} T_v \times \frac{1}{h_w} T_w \right) \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w} T_u \cdot T_v \times T_w \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w} = (h_u h_v h_w)^{-1}. \end{aligned}$$
■

6.2 Gradiente, Divergente e Rotacional em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Seja um sistema de coordenadas curvilíneas definido pelas equações

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w) \quad e \quad z = f_3(u, v, w).$$

Então, se uma função real f depende das coordenadas cartesianas x, y e z , fazendo a mudança de coordenadas fica $f(x, y, z) = f(f_1(u, v, w), f_2(u, v, w), f_3(u, v, w))$.

Proposição 4.7. Se f é uma função real das coordenadas curvilíneas u, v e w , o **Gradiente de f** é dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial f}{\partial v} \nabla v + \frac{\partial f}{\partial w} \nabla w.$$

E se o sistema de coordenadas curvilíneas é ortogonal,

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} T_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} T_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} T_w.$$

Demonstração. O gradiente de f em coordenadas cartesianas ortogonais é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Usando a regra da cadeia, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Substituindo $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$ no segundo membro do gradiente de f , obtem-se

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial w} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \nabla u + \frac{\partial f}{\partial v} \nabla v + \frac{\partial f}{\partial w} \nabla w. \end{aligned}$$

A segunda parte para ∇f , basta ver, pela Proposição 4.6, que

$$T_u = h_u \nabla u, \quad T_v = h_v \nabla v \quad \text{e} \quad T_w = h_w \nabla w.$$

■

Corolário 6.1. Num sistema de **coordenadas cilíndricas** $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = w$ o gradiente de uma função escalar f é dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u} T_u + \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial v} T_v + \frac{\partial f}{\partial w} T_w$$

Demonstração. De fato, basta ver que os fatores h_u, h_v, h_w são dados por $h_u = 1$, $h_v = u$ e $h_w = 1$. ■

Corolário 6.2. Num sistema de **coordenadas esféricas** $x = u \sen v \cos w$, $y = u \sen v \sen w$ e $z = u \cos v$ o gradiente de uma função escalar f é dado por

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial u} T_u + \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial v} T_v + \frac{1}{u \sen v} \frac{\partial f}{\partial w} T_w.$$

Demonstração. Basta ver que $h_u = 1$, $h_v = u$ e $h_w = u \sen v$. ■

Exemplo 6.7. Vamos calcular o gradiente da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, no sistema de coordenadas esféricas. As coordenadas esféricas são dadas pelas equações

$$x = u \sen v \cos w, \quad y = u \sen v \sen w \quad \text{e} \quad z = u \cos v.$$

Assim

$$\begin{aligned} f(u, v, w) &= (u \sen v \cos w)^2 + (u \sen v \sen w)^2 - (u \cos v)^2 \\ &= -u^2 \cos(2v) \end{aligned}$$

e suas derivadas parciais de primeira ordem são

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -2u \cos(2v), \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 2u^2 \sen(2v) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

tem-se ainda que

$$\begin{aligned} h_u &= 1, \quad h_v = u, \quad h_w = u \sen v \\ T_u &= \sen v \cos w \vec{i} + \sen v \sen w \vec{j} + \cos v \vec{k} \\ T_v &= \cos v \cos w \vec{i} + \cos v \sen w \vec{j} - \sen v \vec{k} \\ T_w &= -\sen w \vec{i} + \cos w \vec{j}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \nabla f &= (-2u \cos(2v)) T_u + \frac{1}{u} 2u^2 \sen(2v) T_v + \frac{1}{u \sen v} 0 \cdot T_w \\ &= -2u \cos(2v) T_u + 2u \sen v T_v + 0 \cdot T_w. \end{aligned}$$

Observação 6.5. Considere $\vec{F}(x, y, z) = G_1 \vec{i} + G_2 \vec{j} + G_3 \vec{k}$, com $G_1 = G_1(u, v, w)$, $G_2 = G_2(u, v, w)$ e $G_3 = G_3(u, v, w)$. Como

$$\begin{aligned} \vec{i} &= (\vec{i} T_u) T_u + (\vec{i} T_v) T_v + (\vec{i} T_w) T_w \\ \vec{j} &= (\vec{j} T_u) T_u + (\vec{j} T_v) T_v + (\vec{j} T_w) T_w \\ \vec{k} &= (\vec{k} T_u) T_u + (\vec{k} T_v) T_v + (\vec{k} T_w) T_w \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= G_1((\vec{i}T_u)T_u + (\vec{i}T_v)T_v + (\vec{i}T_w)T_w) + G_2((\vec{j}T_u)T_u + (\vec{j}T_v)T_v + (\vec{j}T_w)T_w) \\
 &+ G_3((\vec{k}T_u)T_u + (\vec{k}T_v)T_v + (\vec{k}T_w)T_w) \\
 &= (G_1(\vec{i}T_u) + G_2(\vec{j}T_u) + G_3(\vec{k}T_u))T_u + (G_1(\vec{i}T_v) + G_2(\vec{j}T_v) + G_3(\vec{k}T_v))T_v \\
 &+ (G_1(\vec{i}T_w) + G_2(\vec{j}T_w) + G_3(\vec{k}T_w))T_w \\
 &= F_1T_u + F_2T_v + F_3T_w.
 \end{aligned}$$

Lema 6.5. *Sejam \vec{F} e \vec{G} dois campos vetoriais definidos num aberto \mathbb{D} , cujas componentes admitem derivadas parciais em \mathbb{D} . Então $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\operatorname{Rot} \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\operatorname{Rot} \vec{G})$.*

Demonstração. Ver exercício 18 ■

Proposição 4.8. *O **Divergente** do campo $\vec{F} = F_1T_u + F_2T_v + F_3T_w$ em **coordenadas curvilíneas** ortogonais u, v e w , é dado por*

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_1) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_2) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_3) \right)$$

Demonstração. Temos que $\operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{div} \vec{G}$, onde \vec{F} e \vec{G} são campos vetoriais. Então $\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div}(F_1T_u) + \operatorname{div}(F_2T_v) + \operatorname{div}(F_3T_w)$, como o sistema de coordenadas é ortogonal, tem-se $T_u = T_v \times T_w = h_v h_w \nabla v \times \nabla w$, substituindo T_u em $\operatorname{div}(F_1T_u)$ e sabendo que $\operatorname{div}(f\vec{G}) = f \operatorname{div} \vec{G} + \nabla f \cdot \vec{G}$, obtem-se

$$\operatorname{div}(F_1T_u) = h_v h_w F_1 \operatorname{div}(\nabla v \times \nabla w) + \nabla v \times \nabla w \cdot \nabla(h_v h_w F_1).$$

Mas pelo lema 6.5

$$\operatorname{div}(\nabla v \times \nabla w) = \nabla w \cdot \operatorname{rot} \nabla v - \nabla v \cdot \operatorname{rot} \nabla w = \nabla w \cdot 0 - \nabla v \cdot 0 = 0$$

e usando a proposição 4.7, teremos

$$\begin{aligned}
 \nabla v \times \nabla w \cdot \nabla(h_v h_w F_1) &= \nabla v \times \nabla w \left(\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_1) \nabla u + \frac{\partial}{\partial v} (h_v h_w F_1) \nabla v + \frac{\partial}{\partial w} (h_v h_w F_1) \nabla w \right) \\
 &= \nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_1) \\
 &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_1).
 \end{aligned}$$

Portanto, substituindo $\operatorname{div}(\nabla v \times \nabla w)$ e $\nabla v \times \nabla w \cdot \nabla(h_v h_w F_1)$, obtem-se

$$\operatorname{div}(F_1T_u) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_1).$$

De forma análoga, obtem-se que

$$\operatorname{div}(F_2 T_v) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_2),$$

$$\operatorname{div}(F_3 T_w) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_3),$$

basta agora somar estas igualdades para concluir. ■

Corolário 6.3. *O divergente do campo $\vec{F} = F_1 T_u + F_2 T_v + F_3 T_w$ num sistema de coordenadas cilíndricas é dado por*

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{u} \left(\frac{\partial}{\partial u} (u F_1) + \frac{\partial F_2}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w} (u F_3) \right).$$
■

Exemplo 6.8. *Considere $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$ em coordenadas cilíndricas $x = u \cos v, y = u \sin v, z = w$. Então $\vec{F}(u, v, w) = u \cos v \vec{i} - u \sin v \vec{j} - w \vec{k}$. Vimos que vetores básicos são*

$$T_u = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$T_v = -\sin v \vec{i} + \cos v \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$T_w = 0 \vec{i} + 0 \vec{j} + \vec{k},$$

então

$$\vec{i} = (\vec{i} T_u) T_u + (\vec{i} T_v) T_v + (\vec{i} T_w) T_w = \cos v T_u - \sin v T_v$$

$$\vec{j} = (\vec{j} T_u) T_u + (\vec{j} T_v) T_v + (\vec{j} T_w) T_w = \sin v T_u + \cos v T_v$$

$$\vec{k} = (\vec{k} T_u) T_u + (\vec{k} T_v) T_v + (\vec{k} T_w) T_w = T_w.$$

Daí

$$\begin{aligned} \vec{F}(u, v, w) &= u \cos v (\cos v T_u - \sin v T_v) - u \sin v (\sin v T_u + \cos v T_v) - w T_w \\ &= (u \cos^2 v - u \sin^2 v) T_u + (-2u \sin v \cos v) T_v - w T_w \\ &= u \cos(2v) T_u - u \sin(2v) T_v - w T_w. \end{aligned}$$

Logo, $\vec{F} = F_1 T_u + F_2 T_v + F_3 T_w$, onde $F_1 = u \cos(2v)$, $F_2 = -u \sin(2v)$, $F_3 = -w$.

Como $h_u = 1$, $h_v = u$, $h_w = 1$, e $\frac{\partial}{\partial u} (u F_1) = 2u \cos(2v)$, $\frac{\partial}{\partial v} (F_2) = -2u \cos(2v)$, $\frac{\partial}{\partial w} (u F_3) = -u$, segue que

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{u} [\cos(2v) - 2u \cos(2v) - u] = \frac{1}{u} \cos(2v) - 2 \cos(2v) - 1.$$

Corolário 6.4. *O divergente do campo $\vec{F} = F_1T_u + F_2T_v + F_3T_w$ num sistema de coordenadas esféricas é dado por*

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{u^2 \sin v} \left(\frac{\partial}{\partial u}(u^2 \sin v F_1) + \frac{\partial}{\partial v}(u \sin v F_2) + \frac{\partial}{\partial w}(u F_3) \right).$$

■

Exemplo 6.9. Considere agora o campo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ em coordenadas esféricas $x = u \sin v \cos w$, $y = u \sin v \sin w$, $z = u \cos v$, então $\vec{F} = u \sin v \cos w \vec{i} + u \sin v \sin w \vec{j} - u \cos v \vec{k}$ e os vetores tangentes básicos

$$T_u = \sin v \cos w \vec{i} + \sin v \sin w \vec{j} + \cos v \vec{k}$$

$$T_v = \cos v \cos w \vec{i} + \cos v \sin w \vec{j} - \sin v \vec{k}$$

$$T_w = -\sin w \vec{i} + \cos w \vec{j} = 0\vec{k},$$

além disso

$$\vec{i} = (\vec{i}T_u)T_u + (\vec{i}T_v)T_v + (\vec{i}T_w)T_w = \sin v \cos w T_u + \cos v \cos w T_v - \sin w T_w$$

$$\vec{j} = (\vec{j}T_u)T_u + (\vec{j}T_v)T_v + (\vec{j}T_w)T_w = \sin v \sin w T_u + \cos v \sin w T_v + \cos w T_w$$

$$\vec{k} = (\vec{k}T_u)T_u + (\vec{k}T_v)T_v + (\vec{k}T_w)T_w = \cos v T_u - \sin v T_v.$$

Logo

$$\begin{aligned} \vec{F} &= u \sin v \cos w (\sin v \cos w T_u + \cos v \cos w T_v - \sin w T_w) \\ &+ u \sin v \sin w (\sin v \sin w T_u + \cos v \sin w T_v + \cos w T_w) \\ &- u \cos v (\cos v T_u - \sin v T_v) \\ &= -u \cos(2v) T_u + 0 T_v + u \sin v \cos v T_w \end{aligned}$$

mas

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{u \sin v} \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial u}(u^2 \sin v F_1)}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial v}(u \sin v F_2)}_{(b)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial w}(u F_3)}_{(c)} \right),$$

onde

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial u}(u^2 \sin v F_1) = -3u^2 \sin v \cos(2v)$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial v}(u \sin v F_2) = 0$$

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial w}(u F_3) = 0$$

logo

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{u^2 \sin v} (-3u^2 \sin v \cos(2v)) = -3 \cos(2v)$$

Corolário 6.5. *Seja f uma função real de **coordenadas curvilíneas ortogonais**. Então o **Laplaciano** de f é*

$$\Delta f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \cdot \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right]$$

Demonstração. Dado $\vec{F} = F_1 T_u + F_2 T_v + F_3 T_w$, vimos que o divergente de \vec{F} é dado como

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_1) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_2) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_3) \right)$$

e para um campo escalar f o gradiente é dado por

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} T_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} T_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} T_w.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(h_v h_w \cdot \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(h_u h_w \cdot \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(h_u h_v \cdot \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right] \\ &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \cdot \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right] \end{aligned}$$

■

Corolário 6.6. *O Laplaciano de f em **coordenadas cilíndricas** é dado por*

$$\Delta f = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}.$$

■

Corolário 6.7. *O Laplaciano de f em **coordenadas esféricas** é dado por*

$$\Delta f = \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(u^2 \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{1}{u \sin v} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sin v \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{1}{u^2 \sin^2 v} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}.$$

■

Exemplo 6.10. No exemplo 6.5 para a função escalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ encontramos

$$\nabla f = -2u \cos(2v)T_u + 2u \sin(2v)T_v + 0T_w,$$

para este campo vetorial $\nabla f = \vec{F} = F_1T_u + F_2T_v + F_3T_w$, temos

$$F_1 = -2u \cos(2v), \quad F_2 = 2u \sin(2v), \quad F_3 = 0;$$

logo o divergente de \vec{F} é

$$\text{div } \vec{F} = 6(\sin(2v) - \cos(2v)).$$

Exemplo 6.11. Calcular o laplaciano da função real dada no exemplo 6.5, no sistema de coordenadas esféricas. Para o sistema de coordenadas esféricas, tem-se

$$h_u = 1, \quad h_v = u \quad \text{e} \quad h_w = u \sin v,$$

e já vimos que

$$\nabla f = -2u \cos(2v)T_u + 2u \sin v T_v + 0T_w.$$

Logo

$$\begin{aligned} \Delta f &= \text{div} \nabla f \\ &= \frac{1}{u^2 \sin v} \left[\frac{\partial}{\partial u} (-2u^3 \cos(2v) \sin v) + \frac{\partial}{\partial v} (2u^2 \sin(2v) \sin v) + \frac{\partial 0}{\partial w} \right] \\ &= -2 \cos(2v) + 2 \cot v \cos(2v) \end{aligned}$$

Proposição 4.9. *O Rotacional do campo vetorial $\vec{F} = F_1T_u + F_2T_v + F_3T_w$ em coordenadas curvilíneas ortogonais u, v e w , é dado por*

$$\text{Rot } \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u T_u & h_v T_v & h_w T_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_1 & h_v F_2 & h_w F_3 \end{vmatrix}.$$

Demonstração. Temos que

- i) $\text{Rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{Rot } \vec{F} + \text{Rot } \vec{G}$
- ii) $\text{Rot}(f\vec{G}) = f \text{Rot } \vec{G} + \nabla f \times \vec{G}$

então

$$\text{Rot } \vec{F} = \text{Rot}(F_1T_u) + \text{Rot}(F_2T_v) + \text{Rot}(F_3T_w)$$

como o sistema de coordenadas é ortogonal, temos $F_1T_u = h_u F_1 \nabla u$. Logo

$$\begin{aligned}
\text{Rot}(F_1 T_u) &= \text{Rot}(h_u F_1 \nabla u) = h_u F_1 \underbrace{\text{Rot} \nabla u}_{=0} + \nabla(h_u F_1) \times \nabla u \\
&= \nabla(h_u F_1) \times \nabla u
\end{aligned}$$

Substituindo $\nabla u = \frac{1}{h_u} T_u$, encontramos

$$\begin{aligned}
\nabla(h_u F_1) \times \nabla u &= \left[\frac{1}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} (h_u F_1) T_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} (h_u F_1) T_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} (h_u F_1) T_w \right] \times \frac{1}{h_u} T_u \\
&= \frac{1}{h_u^2} \frac{\partial}{\partial u} (h_u F_1) T_u \times T_u + \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial}{\partial v} (h_u F_1) T_v \times T_u \\
&\quad + \frac{1}{h_u h_w} \frac{\partial}{\partial w} (h_u F_1) T_w \times T_u
\end{aligned}$$

Mas $T_u \times T_u = 0$, $T_v \times T_u = -T_w$ e $T_w \times T_u = 0$, portanto

$$\text{Rot}(F_1 T_u) = \frac{1}{h_u h_w} \frac{\partial}{\partial w} (h_u F_1) T_v - \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial}{\partial v} (h_u F_1) T_w.$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\text{Rot}(F_2 T_v) &= \frac{1}{h_u h_v} \frac{\partial}{\partial u} (h_v F_2) T_w - \frac{1}{h_v h_w} \frac{\partial}{\partial w} (h_v F_2) T_u, \\
\text{Rot}(F_3 T_w) &= \frac{1}{h_v h_w} \frac{\partial}{\partial v} (h_w F_3) T_u - \frac{1}{h_u h_w} \frac{\partial}{\partial u} (h_w F_3) T_v.
\end{aligned}$$

Agora somando as igualdades $\text{Rot}(F_1 T_u)$, $\text{Rot}(F_2 T_v)$ e $\text{Rot}(F_3 T_w)$, segue o resultado. ■

Corolário 6.8. *O Rotacional de \vec{F} num sistema de **coordenadas cilíndricas** é dado por*

$$\text{Rot} \vec{F} = \frac{1}{u} \begin{vmatrix} T_u & uT_v & T_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_1 & uF_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

■

Corolário 6.9. *O Rotacional de \vec{F} num sistema de **coordenadas esféricas** é dado por*

$$\text{Rot} \vec{F} = \frac{1}{u^2 \sin v} \begin{vmatrix} T_u & uT_v & u \sin v T_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_1 & uF_2 & u \sin v F_3 \end{vmatrix}.$$



Exemplo 6.12. Calcular o rotacional do campo definido por $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$, no sistema de coordenadas cilíndricas. As coordenadas cilíndricas u, v e w são dadas pelas equações $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ e $z = w$, assim

$$\vec{F}(u, v, w) = u \cos v \vec{i} - u \sin v \vec{j} - w \vec{k}.$$

Os vetores básicos do sistema de coordenadas cilíndricas são

$$T_u = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j}, \quad T_v = -\sin v \vec{i} + \cos v \vec{j} \quad \text{e} \quad T_w = \vec{k}.$$

Como T_u, T_v e T_w são vetores ortogonais, tem-se

$$\begin{aligned} i &= (iT_u)T_u + (iT_v)T_v + (iT_w)T_w = \cos v T_u - \sin v T_v, \\ j &= (jT_u)T_u + (jT_v)T_v + (jT_w)T_w = \sin v T_u + \cos v T_v \\ k &= T_w. \end{aligned}$$

Assim substituindo \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} , obtem-se as coordenadas do campo \vec{F} com relação aos vetores básicos do sistema de coordenadas cilíndricas, ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{F}(u, v, w) &= u \cos v (\cos v T_u - \sin v T_v) - u \sin v (\sin v T_u + \cos v T_v) - w T_w \\ &= u (\cos^2 v - \sin^2 v) T_u - 2u \cos v \sin v T_v - w T_w \\ &= u \cos(2v) T_u - u \sin(2v) T_v - w T_w. \end{aligned}$$

Tem-se ainda, para o sistema de coordenadas cilíndricas, que $h_u = 1$, $h_v = u$, $h_w = 1$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{F} &= \frac{1}{u} \begin{vmatrix} T_u & uT_v & T_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ u \cos(2v) & -u^2 \sin(2v) & -w \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{u} \left[\frac{\partial}{\partial v}(-w) - \frac{\partial}{\partial w}(-u^2 \sin(2v)) \right] T_u + \frac{1}{u} \left[\frac{\partial}{\partial w}(u \cos(2v)) - \frac{\partial}{\partial u}(-w) \right] u T_v \\ &\quad + \frac{1}{u} \left[\frac{\partial}{\partial u}(-u^2 \sin(2v)) - \frac{\partial}{\partial v}(u \cos(2v)) \right] T_w \\ &= 0 \end{aligned}$$

7 Exercícios

1. Calcule o Rotacional

(a) $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$

(b) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + xz\vec{k}$

(c) $\vec{F}(x, y, z) = yx\vec{i} + xz\vec{k}$

(d) $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\vec{i}$

(e) $\vec{F}(x, y) = xy\vec{i} - x^2\vec{j}$

2. Seja $\varphi : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aberto, de classe C^2 . Mostre que o campo vetorial $\vec{F} = \nabla\varphi$ é irrotacional.

3. Se \vec{r} é o vetor posição, determinar $\text{Rot } \vec{r}$.

4. Calcule o Divergente do campo vetorial dado.

(a) $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$

(b) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

(c) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - y^2)\vec{i} + \sin(x^2 + y^2)\vec{j} + \arctan \vec{k}$

(d) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \arctan(x^2 + y^2 + z^2) \vec{k}$

5. Calcule o Laplaciano da função φ dada

(a) $\varphi(x, y) = xy$

(b) $\varphi(x, y) = \arctan(x/y), \quad y > 0$

(c) $\varphi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(d) $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}e^{x^2+y^2}$

6. Mostre que $\text{grad } f$ é um vetor perpendicular à superfície $f(x, y, z) = c$, onde c é uma constante.

7. Sejam $\vec{F} = \sin x\vec{i} + \cos y\vec{j} + \ln z\vec{k}$ ($z \neq 0$) e $\vec{G} = e^x \cos y\vec{i} + e^x \sin y\vec{j}$. Ache

(a) $\vec{F} + \vec{G}$

(b) $\vec{F} \cdot \vec{G}$

(c) $\vec{F} \times \vec{G}$

8. (a) Mostre que $u \cdot f''(u) = -f'(u)$, $u > 0$

(b) Determine uma função f não-constante, para que se tenha $\Delta f = 0$.

9. Mostre que a função $f(x, y, z) = \|\vec{r}\|^{-1}$ é harmônica, onde \vec{r} é o vetor posição.
10. Sejam $\vec{F} = e^x \cos z \vec{i} + e^x \sin z \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{G} = e^x \cos z \vec{i} + e^x \sin z \vec{j} - e^{2x} \vec{k}$.
- (a) Mostre que \vec{F} e \vec{G} são ortogonais para todo (x, y, z)
- (b) Mostre que o campo vetorial $\vec{F} \times \vec{G}$ é paralelo ao plano xy .
11. Sejam $\vec{F}_1, \vec{F}_2 : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dois campos vetoriais e $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar. Em cada caso, suponha $\vec{F}_1 = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ e $\vec{F}_2 = P_1\vec{i} + Q_1\vec{j} + R_1\vec{k}$. Prove:
- (a) $\text{Rot}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \text{Rot} \vec{F}_1 + \text{Rot} \vec{F}_2$
- (b) $\text{div}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \text{div} \vec{F}_1 + \text{div} \vec{F}_2$
- (c) $\text{div}(\varphi \vec{F}_1) = \varphi \text{div} \vec{F}_1 + \nabla \varphi \cdot \vec{F}_1$
- (d) $\text{Rot}(\varphi \vec{F}_1) = \varphi \text{Rot} \vec{F}_1 + \nabla \varphi \times \vec{F}_1$
- (e) $\text{div}(\text{Rot} \vec{F}_1) = 0$
- (f) $\text{Rot}(\text{Rot} \vec{F}_1) = \nabla(\text{div} \vec{F}_1) - \nabla^2 \vec{F}_1$, onde $\nabla^2 \vec{F}_1 = (\nabla^2 P, \nabla^2 Q, \nabla^2 R)$.
12. Sejam f e g funções duas vezes continuamente diferenciáveis. Mostre que

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\nabla f \cdot \nabla g + \Delta f.$$

13. Se $\vec{F} = r^n \vec{r}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $r = \|\vec{r}\|$, ache $\text{div} \vec{F}$ e mostre que

$$\text{grad}(\text{div} \vec{F}) = n(n+3)r^{n-2} \cdot \vec{r}.$$

14. Seja f um campo escalar diferenciável, e seja \vec{F} o campo vetorial

$$\vec{F} = \left(y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{i} + \left(z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right) \vec{k}.$$

Mostre que: $\vec{F} = \vec{r} \times \nabla f$, $\vec{F} \cdot \vec{r} = 0$ e $\vec{F} \cdot \nabla f = 0$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

15. Mostre que

$$(\vec{F} \cdot \nabla) \vec{F} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{F} \cdot \vec{F}) - \vec{F} \times (\text{Rot} \vec{F}).$$

16. Mostre que

$$\text{div}(f\nabla g - g\nabla f) = f\Delta g - g\Delta f.$$

17. Seja $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ um campo vetorial definido no aberto \mathbb{D} de \mathbb{R}^3 . Prove que $\text{div} \vec{w} = 0$ é uma condição necessária para que exista um campo vetorial $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, com componentes de classe C^2 em \mathbb{D} , tal que $\text{Rot} \vec{u} = \vec{w}$.

18. Sejam \vec{F} e \vec{G} dois campos vetoriais definidos no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, cujas componentes admitem derivadas parciais em Ω . prove que

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\operatorname{Rot} \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\operatorname{Rot} \vec{G}).$$

19. Verifique que o sistema das equações $x = u - 2v + w$, $y = 2u + v - w$ e $z = -u + v - w$, pode ser resolvido unicamente para u, v e w em função de x, y e z . Calcule os vetores básicos do sistema de coordenadas dado pelo sistema

20. Para o sistema de coordenadas curvilíneas

(a) Calcule os vetores básicos desse sistema

(b) Mostre que esse sistema é ortogonal

21. Calcule os vetores unitários e normais às superfícies coordenadas, num ponto qualquer, dadas pela transformação coordenadas esféricas

22. Determine as componentes do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$

(a) com relação aos vetores básicos do sistema de coordenadas cilíndricas

(b) com relação aos vetores básicos do sistema de coordenadas esféricas

23. Para cada um dos sistemas de coordenadas curvilíneas, definidos pelos sistemas de equações seguintes: (I) encontre os vetores básicos; (II) verifique se o sistema é ortogonal; (III) Encontre os vetores unitários e normais às superfícies coordenadas, num ponto qualquer

(a) $x = uv, \quad y = \frac{1}{2}(v^2 - u^2) \quad \text{e} \quad z = w$

(b) $x = uv \cos w, \quad y = uv \sin w \quad \text{e} \quad z = \frac{1}{2}(v^2 - u^2)$

24. Calcule o rotacional dos campos abaixo onde (u, v, w) são dadas em coordenadas cilíndricas e esféricas

(a) $\vec{F}(u, v, w) = u^2 T_u + uv^2 T_v - w^2 T_w$

(b) $\vec{G}(u, v, w) = v \cos w T_u - u \sin w T_v + uv \sin v \cos v T_w$

25. Calcule o gradiente da função: (a) no sistema de coordenadas cilíndricas; (b) no sistema de coordenadas esféricas

(a) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$

(b) $g(x, y, z) = x + y - 2z$

26. Calcule a divergência do campo vetorial dado: (a) no sistema de coordenadas cilíndricas; (b) no sistema de coordenadas esféricas:

(a) $\vec{F}(x, y, z) = x \vec{i} - y \vec{j} + z \vec{k}$

(b) $\vec{G}(x, y, z) = 2x^2 \vec{i} + 4y^2 \vec{j} - z^2 \vec{k}$

27. Calcule o laplaciano da função dada: (a) no sistema coordenadas cilíndricas; (b) no sistema de coordenadas esféricas:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(b) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z^2$

Capítulo 5

Integral de Linha

1 Integral de Linha de Campo Escalar

Seja α uma curva contínua parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, com $a \leq t \leq b$. Seja uma partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, onde $t_0 = a$ e $t_n = b$. Seja $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $x_i = x(c_i)$, $y_i = y(c_i)$ e ΔS_i o comprimento de arco de α correspondente ao intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

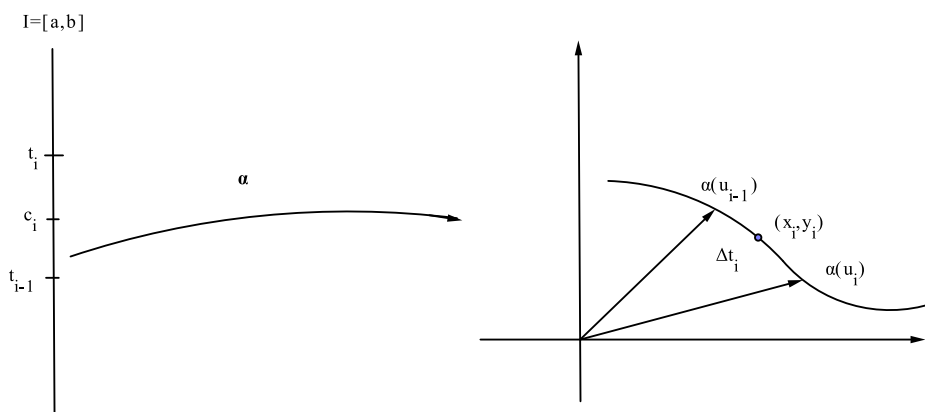


Figura 5.1: comprimento de arco de $\alpha(u_{i-1})$ à $\alpha(u_i)$

Sendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar definido em $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(I) \subset \mathbb{D}$, se o limite do somatório ,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$$

existe, onde $\Delta = \max\{\Delta t_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, diz-se que esse limite é a **Integral de Linha de f** em relação ao comprimento de arco S sobre α e denota-se por

$$\int_{\alpha} f(x, y) dS = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

Observação 1.1. Suponha f contínua, não-negativa em $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, então podemos pensar em $\int_{\alpha} f dS$ como sendo a área da superfície que tem com base a curva α e altura determinada pelo gráfico de f .

Estabeleceremos através da proposição abaixo, condições para calcular a integral de linha de um campo escalar.

Proposição 5.1. Seja $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo sobre uma curva α diferenciável C^∞ , parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, então

$$\int_{\alpha} f(x, y) dS = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt.$$

Demonstração. Tome uma partição de $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ e $\Delta S_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\| dt$. Como $\|\alpha'\|$ é contínua em $[a, b]$ (e daí contínua em $[t_{i-1}, t_i]$), pelo Teorema do Valor Médio para integrais,¹ existe $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $\Delta S_i = \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t_i$. Sejam $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ qualquer, com $x_i = x(c_i)$ e $y_i = y(c_i)$. Daí sendo $s_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$, tem-se

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(x_i(c_i), y_i(c_i)) \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t_i,$$

ou seja

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\alpha(c_i)) \cdot \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t_i.$$

Por outro lado, como f e α são contínuas, segue que o limite da soma

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\alpha(\xi_i)) \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t_i,$$

quando $\Delta = \max\{\Delta t_i, i = 1, 2, \dots, n\} \rightarrow 0$, existe e é a integral de $f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\|$ em $[a, b]$, ou seja,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S_n = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt.$$

Agora sendo $f \circ \alpha$ contínua em $[a, b]$, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(\alpha(\xi_i)) - f(\alpha(c_i))| < \epsilon$ para cada partição de $[a, b]$ em que $|\xi_i - c_i| < \Delta t_i \leq \Delta$. Assim

$$|S_n - s_n| = \left| \sum_{i=1}^n (f(\alpha(\xi_i)) - f(\alpha(c_i))) \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t_i \right| < \epsilon \sum_{i=1}^n \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t_i;$$

¹Se f é contínua em $[a, b]$, então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

mas sendo $\|\alpha'\|$ contínua em $[a, b]$, $\|\alpha'\|$ é limitada em $[a, b]$, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|\alpha'(\xi_i)\| < M$, logo

$$|S_n - s_n| < \epsilon M \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \epsilon M(b - a).$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, segue então que

$$\int_{\alpha} f(x, y) dS = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt.$$

■

Observação 1.2.

1. Veja que quando tivermos f definida em \mathbb{R}^3 e $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, então a integral de linha é dada por

$$\int_{\alpha} f(x, y, z) dS = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt.$$

2. Quando $f \equiv 1$, a integral de linha dá o comprimento da curva α , ou seja, $\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$.

Exemplo 1.1. Vamos calcular $\int_{\alpha} (x^2 + y^2) dS$, onde α é a curva parametrizada por

$$\alpha(t) = (2 + 2 \cos t, 3 + 2 \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Como o campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2$ e a curva α satisfazem as hipóteses da **Proposição 5.1**, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} (x^2 + y^2) dS &= \int_0^{2\pi} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(2 + 2 \cos t)^2 + (3 + 2 \sin t)^2] \cdot 2 dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (17 + 8 \cos t + 12 \sin t) dt \\ &= 2(17t + 8 \sin t - 12 \cos t) \Big|_0^{2\pi} = 68\pi. \end{aligned}$$

Observação 1.3. De maneira similar, definimos a integral de linha de f sobre uma curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, com respeito as variáveis x, y, z como as integrais escalares

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} f(x, y, z) dx &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) dt \\ \int_{\alpha} f(x, y, z) dy &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) dt \\ \int_{\alpha} f(x, y, z) dz &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) dt\end{aligned}$$

Observe ainda que quando $f \equiv 1$, estas integrais dão, respectivamente, $x(b) - x(a)$, $y(b) - y(a)$ e $z(b) - z(a)$, que são as projeções das curvas no espaço sobre os eixos x , y e z , respectivamente.

Proposição 5.2. Suponha f e g campos escalares, definidos e contínuos num domínio $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ contendo uma curva regular $\alpha(t)$, $t \in [a, b]$. Então para constantes k_1 e k_2 , temos

1. $\int_{\alpha} (k_1 f + k_2 g) dS = k_1 \int_{\alpha} f dS + k_2 \int_{\alpha} g dS$
2. Suponha que α é justaposição das curvas $\alpha_1(t)$, $t \in [a, b]$ e $\alpha_2(s)$, $s \in [c, d]$, então

$$\int_{\alpha} f dS = \int_{\alpha_1} f dS + \int_{\alpha_2} f dS.$$

Demonstração. Segue da definição ■

Proposição 5.3. Seja β uma reparametrização da curva α . Se $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo escalar contínuo sobre α (logo contínuo sobre β), então

$$\int_{\alpha} f(x, y, z) dS = \int_{\beta} f(x, y, z) dS.$$

Demonstração. Sejam $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $\beta(s) = (u(s), v(s), w(s))$ parametrizações de α e β , respectivamente, então existe $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h([c, d]) = [a, b]$ e $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, $s \in [c, d]$. A integral de f sobre α é dada por

$$\int_{\alpha} f(x, y, z) dS = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt.$$

Se α e β têm a mesma orientação, $h'(s) > 0$ em $[c, d]$, isto é, h é crescente em $[c, d]$, daí $h(c) = a$ e $h(d) = b$. Logo fazendo $t = h(s)$, tem-se

$$\int_{\alpha} f(x, y, z) dS = \int_a^b f(\alpha(h(s))) \cdot \|\alpha'(h(s))\| \cdot |h'(s)| dt,$$

mas

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s)) \cdot h'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| |h'(s)|$$

em $[c, d]$, pois $h'(s) > 0$ em $[c, d]$, daí

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} f(x, y, z) dS &= \int_a^b f(\alpha(h(s))) \cdot \|\alpha'(h(s))\| \cdot h'(s) dt \\ &= \int_c^d f(\beta(s)) \cdot \|\beta'(s)\| dt = \int_{\beta} f(x, y, z) dS.\end{aligned}$$

Se α e β têm orientações opostas, $h'(s) < 0$ em $[c, d]$, ou seja, h é decrescente em $[c, d]$, daí $h(c) = b$ e $h(d) = a$. Assim, fazendo $t = h(s)$ em

$$\int_{\alpha} f(x, y, z) dS = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt,$$

tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} f(x, y, z) dS &= \int_a^b f(\alpha(h(s))) \|\alpha'(h(s))\| h'(s) dt \\ &= - \int_c^d f(\alpha(h(s))) \|\alpha'(h(s))\| h'(s) dt.\end{aligned}$$

Mas

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))h'(s)\| = -\|\alpha'(h(s))\| h'(s)$$

em $[c, d]$, pois $h'(s) < 0$ em $[c, d]$. Logo

$$\begin{aligned}\int_{\alpha} f(x, y, z) dS &= - \int_c^d f(\beta(s)) (-\|\alpha'(h(s))\|) h'(s) dt \\ &= \int_c^d f(\beta(s)) \|\beta'(s)\| dt = \int_{\beta} f(x, y, z) dS.\end{aligned}$$

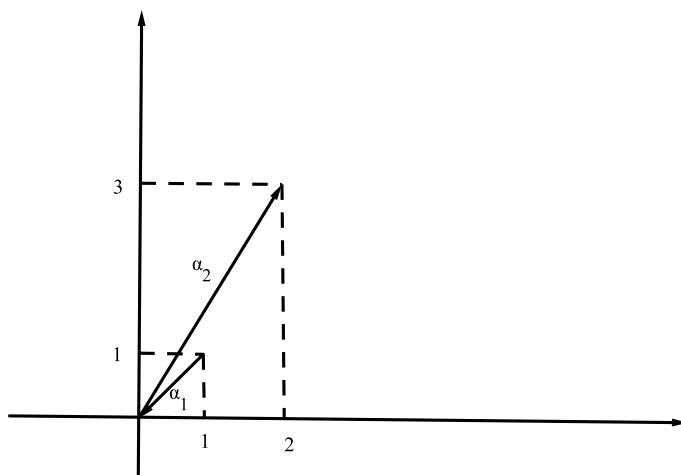
■

Observação 1.4. A integral de linha sobre uma curva suave por partes é definida como a soma das integrais sobre cada uma das partes suaves (item 2, da **Proposição 5.2**).

Exemplo 1.2. Calcule $\int_{\alpha} (3x - 2y) dS$, onde α é formada pelos segmentos de $(1, 1)$ a $(0, 0)$ e de $(0, 0)$ a $(2, 3)$.

Sejam α_1 e α_2 as partes de α (**figura 5.2**) que vão de $(1, 1)$ a $(0, 0)$ e de $(0, 0)$ a $(2, 3)$, respectivamente. A equação da reta que passa por $(0, 0)$ e $(1, 1)$ é $y = x$, daí uma parametrização de α_1 é $\alpha_1(t) = (t, t)$, com $0 \leq t \leq 1$. Analogamente, uma parametrização de α_2 é dada por $\alpha_2(t) = (t, \frac{3}{2}t)$, $0 \leq t \leq 2$. Daí

$$\int_{\alpha_1} (3x - 2y) dS = \int_0^1 (3t - 2t) \sqrt{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

Figura 5.2: Justaposição das curvas α_1 e α_2

e

$$\int_{\alpha_2} (3x - 2y) dS = \int_0^2 (3t - 2\frac{3}{2}t) \sqrt{2} dt = \int_0^2 0 dt = 0;$$

portanto

$$\int_{\alpha} (3x - 2y) dS = \int_{\alpha_1} (3x - 2y) dS + \int_{\alpha_2} (3x - 2y) dS = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2 Integral de Linha de um Campo Vetorial

Definição 2.1. Seja $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo, \mathbb{D} aberto e seja $\alpha : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^1 . Definimos a **Integral de Linha** de \vec{F} sobre a curva α por

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\alpha = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

Se $\vec{r} = \alpha(t)$, podemos escrever $\int_{\alpha} \vec{F} d\alpha = \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$, ou seja,

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

Observação 2.1. Se a curva α é fechada, isto é, se $\alpha(a) = \alpha(b)$, a **Integral de Linha** pode ser denotada como $\oint_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$.

Exemplo 2.1. Calcular a integral do campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (xy, x + y)$ sobre a curva α parametrizada por $\alpha(t) = (t - 1, t^2 + 1)$, $0 \leq t \leq 1$.

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F}(x, y) d\alpha &= \int_0^1 \vec{F}(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^1 [(t-1)(t^2+1), (t-1) + (t^2+1)] \cdot (1, 2t) dt \\ &= \int_0^1 (3t^3 + t^2 + t - 1) dt = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Calcule a integral de linha de $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$ ao longo da hélice $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Temos que $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ e $\vec{F}(\alpha(t)) = (\sin t, -\cos t, t)$, daí

$$\vec{F} \cdot \alpha'(t) = -\sin^2 t - \cos^2 t + t = -1 + t,$$

portanto

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{\pi} (-1 + t) dt = -\pi + \pi^2/2.$$

Observação 2.2. Sejam $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ um campo vetorial contínuo num aberto $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$ uma curva de classe C^1 dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t))\vec{i} + Q(x(t), y(t))\vec{j}] \cdot \left[\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \right] dt \\ &= \int_a^b \left[P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt \end{aligned}$$

Então

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\alpha} P(x(t), y(t)) dx + Q(x(t), y(t)) dy,$$

ou simplesmente, $\int_{\alpha} P dx + Q dy$.

No caso do \mathbb{R}^3 , $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\alpha} P dx + Q dy + R dz$, onde

$$P = P(x(t), y(t), z(t)), \quad Q = Q(x(t), y(t), z(t)) \text{ e } R = R(x(t), y(t), z(t)).$$

Exemplo 2.3. Dada $\int xdx + (x^2 + y + z)dy + xyzdz$, com $\alpha(t) = (t, 2t, 1)$, $0 \leq t \leq 1$, temos $x(t) = t$, $y(t) = 2t$, $z(t) = 1$. Daí $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 2$, $\frac{dz}{dt} = 0$ e

$$P(\alpha(t)) = t, \quad Q(\alpha(t)) = t^2 + 2t + 1, \quad R(\alpha(t)) = 2t^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} xdx + (x^2 + y + z)dy + xyzdz &= \int_0^1 (t + (t^2 + 2t + 1) \cdot 2 + 0)dt \\ &= \int_0^1 (2t^2 + 5t + 2)dt = \frac{31}{6}. \end{aligned}$$

Vimos que a integral de linha de um campo escalar não muda com a mudança de parametrização. Vejamos que isso não acontece no caso de campo vetorial.

Proposição 5.4. *Seja $\beta(s)$, $s \in [c, d]$ uma reparametrização de $\alpha(t)$, $t \in [a, b]$. Se \vec{F} é um campo vetorial contínuo, então*

1. $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\beta} \vec{F} d\vec{r}$, se α e β têm a mesma orientação
2. $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{\beta} \vec{F} d\vec{r}$, se α e β têm orientações opostas.

Demonstração. 1. Seja $\beta(s)$, $s \in [c, d]$ uma reparametrização de $\alpha(t)$, $t \in [a, b]$ e $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ uma função mudança de parâmetro com $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$, $s \in [c, d]$. A integral de linha do campo \vec{F} é dada por

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

Se α e β têm a mesma orientação, $h'(s) > 0$ em $[c, d]$, $h(c) = a$ e $h(d) = b$, logo para $t = h(s)$

$$\begin{aligned} \int_{\beta} \vec{F} d\vec{r} &= \int_c^d \vec{F}(\beta(s)) \cdot \beta'(s) ds \\ &= \int_{h(c)}^{h(d)} \vec{F}(\alpha(h(s))) \cdot \alpha'(h(s)) h'(s) ds \\ &= \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}. \end{aligned}$$

2. Se α e β têm orientações opostas, $h'(s) < 0$ em $[c, d]$, $h(c) = b$ e $h(d) = a$, logo

$$\begin{aligned}\int_{\beta} \vec{F} d\vec{r} &= \int_c^d \vec{F}(\beta(s)) \cdot \beta'(s) ds \\ &= \int_b^a \vec{F}(\alpha(h(s))) \cdot \alpha'(h(s)) h'(s) ds \\ &= - \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = - \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}.\end{aligned}$$

■

Observação 2.3. No caso particular, $\int_{\alpha^-} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$, onde α^- é a curva α com orientação oposta, isto é, $h(t) = -t$.

Observação 2.4. Se uma curva $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_n$, então

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\cup \alpha_i} \vec{F} d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i} \vec{F} d\vec{r}.$$

Exemplo 2.4. Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F}(x, y) = (x - y, x + y)$, ao longo da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ orientada negativamente.

Uma parametrização desta curva é $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$ com orientação positiva. Sendo α^- a circunferência com orientação negativa, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\alpha^-} \vec{F} d\vec{r} &= - \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{\alpha} \vec{F}(\alpha(t)) \alpha'(t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (2 \cos t - 2 \sin t, 2 \cos t + 2 \sin t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt \\ &= -4 \int_0^{2\pi} dt = -8\pi.\end{aligned}$$

Observação 2.5. Suponha que \vec{F} represente um campo de forças contínuo, então $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$ pode ser interpretado como o **Trabalho** W realizado pelo campo \vec{F} para deslocar uma partícula sobre uma curva suave α . De fato, basta ver que o trabalho W é dado por $W = \vec{F} \cdot d$, onde d é o deslocamento da partícula sobre α , que pode ser aproximado através de vários deslocamentos pequenos ao longo de segmentos consecutivos em α . Para isso, seja $\alpha(t)$, $t \in [a, b]$ uma parametrização de α . Considere uma partição regular de $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ e $\Delta = \max\{\Delta t_i, i = 1, \dots, n\}$. Então o trabalho W_i realizado pelo campo \vec{F} , para deslocar a partícula do ponto $\alpha(t_{i-1})$ à $\alpha(t_i)$ sobre α é aproximadamente igual a $\vec{F}(\alpha(t_{i-1}))(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))$.

Assim, uma aproximação para o trabalho W realizado pelo campo \vec{F} para deslocar a partícula ao longo de α é

$$W \cong \sum \vec{F}(\alpha(t_{i-1}))[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})];$$

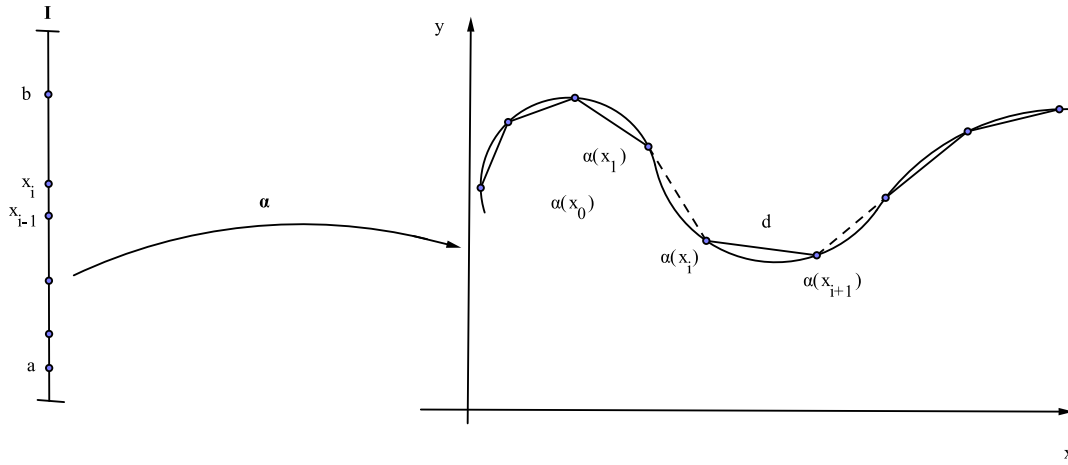


Figura 5.3: deslocamento da partícula ao longo da curva

mas, pelo Teorema do Valor Médio, $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) = \alpha'(\xi_i)\Delta t_i$, onde $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Daí

$$W \cong \sum_{i=1}^n \vec{F}(\alpha(\xi_i)) \cdot \alpha'(\xi_i) \Delta t_i.$$

Como $\vec{F}(\alpha(\xi)) \cdot \alpha'(\xi)$ é contínua em $[a, b]^2$, tem-se

$$W = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\alpha(\xi_i)) \alpha'(\xi_i) \Delta t_i = \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \alpha'(t) dt = \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}.$$

Exemplo 2.5. Considere o campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y, xyz)$. Vamos calcular a integral de linha do campo \vec{F} de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ ao longo das seguintes curvas:

1. O segmento de reta que liga $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$
2. A justaposição dos segmentos de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, de $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$ e de $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

Uma parametrização para o segmento de reta do item 1 é dada por $\alpha(t) = (t, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$; daí $\alpha'(t) = (1, 1, 1)$ e $\vec{F}(\alpha(t)) = (t^2, t, t^3)$. Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^1 (t^2 + t + t^3) dt \\ &= \left(t^4/4 + t^3/3 + t^2/2 \right) \Big|_0^1 = 13/2 \end{aligned}$$

²logo integrável em $[a, b]$

No ítem 2, considere a curva $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$, onde

β_1 é a segmento que liga os pontos $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$

β_2 é a segmento que liga os pontos $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$

β_3 é a segmento que liga os pontos $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

Portanto, as parametrizações de β_1 , β_2 e β_3 são,

$$\beta_1(t) = (t, 0, 0), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \vec{F}(\beta_1(t)) = (t^2, 0, 0), \quad \beta_1'(t) = (1, 0, 0),$$

$$\beta_2(t) = (1, t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \vec{F}(\beta_2(t)) = (1, t, 0), \quad \beta_2'(t) = (0, 1, 0),$$

$$\beta_3(t) = (1, 1, t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \vec{F}(\beta_3(t)) = (1, 1, t), \quad \beta_3'(t) = (0, 0, 1).$$

Dai

$$\int_{\beta} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\beta_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\beta_2} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\beta_3} \vec{F} d\vec{r},$$

onde

$$\int_{\beta_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\beta_1(t)) \cdot \beta_1'(t) dt = \int_0^1 t^2 dt = t^3/3 \Big|_0^1 = 1/3$$

$$\int_{\beta_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\beta_2(t)) \cdot \beta_2'(t) dt = \int_0^1 t dt = t^2/2 \Big|_0^1 = 1/2$$

$$\int_{\beta_3} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\beta_3(t)) \cdot \beta_3'(t) dt = \int_0^1 t dt = t^2/2 \Big|_0^1 = 1/2$$

logo

$$\int_{\beta} \vec{F} d\vec{r} = 1/3 + 1/2 + 1/2 = 4/3.$$

Este exemplo mostra que a integral de linha de um campo vetorial de um ponto a outro **depende**, em geral, da curva que liga os dois pontos.

Observação 2.6. Para alguns campos vetoriais, a integral depende dos extremos da curva e não propriamente da curva que os liga, como mostra o Teorema abaixo

Teorema 2.1. *Seja \vec{F} um campo vetorial contínuo conservativo definido num subconjunto aberto $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$. Se $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva de classe C^1 em \mathbb{D} com extremos $\alpha(a) = A$ e $\alpha(b) = B$, então $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = f(B) - f(A)$, onde f é uma função potencial de \vec{F} .*

Demonstração. Suponha que \vec{F} é um campo conservativo com um potencial real f definido em \mathbb{D} , então $\vec{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{D}$. Logo, se α é uma curva de classe C^1 em \mathbb{D} , parametrizada por $\alpha(t)$, $t \in [a, b]$, tem-se

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\alpha} \nabla f(x, y) d\vec{r} = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt,$$

mas

$$\nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} f(\alpha(t)),$$

logo

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) dt \\ &= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Portanto, a integral depende apenas dos valores de f nos pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$, e não da curva que liga esses pontos. Suponha agora que α é constituída por n partes de classe C^1 e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ as partes de α ligando A a A_1 , A_1 a A_2, \dots, A_{n-1} a B , respectivamente. Então

$$\int_{\alpha_1} \vec{F} d\vec{r} = f(A_1) - f(A), \dots, \int_{\alpha_n} \vec{F} d\vec{r} = f(B) - f(A_{n-1}).$$

Somando membro a membro, segue o resultado. ■

Observação 2.7. Já vimos que $\nabla f = \vec{F}$ é chamado **Campo Gradiente** ou **Campo conservativo** e f uma **Função Potencial**.

3 Determinação de uma Função Potencial por integral indefinida

Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ é um campo conservativo de uma função potencial f num aberto $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q.$$

Usando integração, temos $f(x, y) = \int P(x, y) dx + \phi(y)$, onde ϕ é uma função com respeito a y a ser determinada. De modo análogo, temos

$$f(x, y) = \int Q(x, y) dy + \psi(x)$$

Exemplo 3.1. Consideremos o campo conservativo $\vec{F}(x, y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \sin y)$. Calcule $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$, onde α é uma curva (C^1 por partes) de $A = (\pi, 0)$ até $B = (0, \pi)$. Pelo **Teorema 2.1**,

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = f(B) - f(A) = f(0, \pi) - f(\pi, 0),$$

onde f é uma função potencial de \vec{F} em \mathbb{R}^2 . Aqui temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-y} - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xe^{-y} - \sin y.$$

Dai

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \phi(y) \quad \text{e também} \quad f(x, y) = xe^{-y} + \cos y + \phi(x).$$

Logo

$$\phi(y) = \cos y \quad \text{e} \quad \phi(x) = -x^2$$

verificam as equações acima. Portanto uma função potencial é $f(x, y) = xe^{-y} + \cos y - x^2$. Logo

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = f(0, \pi) - f(\pi, 0) = -1 - (\pi + 1 - \pi^2) = \pi^2 - \pi - 2.$$

4 O Teorema de Green

O Teorema de Green relaciona uma integral de linha ao longo de uma **curva fechada** α no plano xy com uma **integral dupla** sobre a região limitada por α .

Definição 4.1. Vejamos as definições

1. **Região Elementar tipo I:** $\mathbb{D}_1 \subset \mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

2. **Região Elementar tipo II:** $\mathbb{D}_2 \subset \mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}.$$

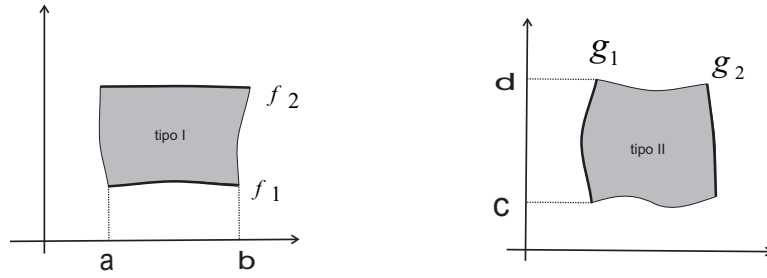


Figura 5.4: Regiões tipo I e tipo II

Definição 4.2. Uma região é dita **Simples** se é região do tipo I e do tipo II, simultaneamente. Dizemos que a fronteira da região $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, denotado por $\partial\mathbb{D}$, de uma região limitada \mathbb{D} está **orientada positivamente**, se a região \mathbb{D} fica à esquerda, ao percorrermos a fronteira $\partial\mathbb{D}$.

Teorema de Green 4.1. *Seja $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ uma região **Compacta**, cuja fronteira $\partial\mathbb{D} = \alpha$ está orientada positivamente e é parametrizada por uma curva α , C^1 por partes. Se $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ é um campo vetorial de classe C^1 num subconjunto aberto que contém \mathbb{D} , então*

$$\oint_{\alpha=\partial\mathbb{D}} Pdx + Qdy = \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Demonstração. Considere \mathbb{D} uma **região simples**, ou seja, vamos supor que \mathbb{D} pode ser descrita simultaneamente por \mathbb{D}_1 e \mathbb{D}_2 . Como

$$\iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy,$$

basta estabelecer as seguintes identidades

$$\oint_{\alpha} P(x, y)dx = - \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

e

$$\oint_{\alpha} Q(x, y)dy = \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{D}} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\
&= \int_a^b (P(x, f_1(x)) - P(x, f_2(x))) dx \\
&= \int_a^b P(x, f_1(x)) dx - \int_a^b P(x, f_2(x)) dx \\
&= \oint_{\partial \mathbb{D}} P dx
\end{aligned}$$

também temos

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \int_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \\
&= \int_c^d (Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)) dy \\
&= \int_c^d Q(g_2(y), y) dy - \int_c^d Q(g_1(y), y) dy \\
&= \oint_{\partial \mathbb{D}} Q dy
\end{aligned}$$

daí

$$\iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial \mathbb{D}} Q dy + \int_{\partial \mathbb{D}} P dx = \int_{\partial \mathbb{D}} P dx + Q dy,$$

ou seja,

$$\int_{\partial \mathbb{D}} P dx + Q dy = \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

■

Observação 4.1. Se \mathbb{D} não é simples, a decomposmos como uma união finita de regiões simples, digamos $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2 \cup \dots \cup \mathbb{D}_n$ onde cada região simples \mathbb{D}_k tem fronteira $\partial \mathbb{D}_k$, C^1 por partes ($k = 1, 2, \dots, n$) e aplicando o Teorema de Green a cada região \mathbb{D}_k , obtendo

$$\iint_{\mathbb{D}_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial \mathbb{D}_k} P dx + Q dy,$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{\mathbb{D}_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \dots + \iint_{\mathbb{D}_n} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
&= \oint_{\partial \mathbb{D}_1} P dx + Q dy + \dots + \oint_{\partial \mathbb{D}_n} P dx + Q dy \\
&= \oint_{\partial \mathbb{D}} P dx + Q dy.
\end{aligned}$$

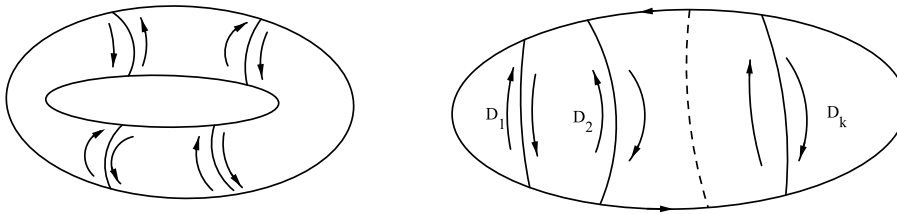


Figura 5.5: região não simples transformada em região simples

Exemplo 4.1. Seja α a fronteira da região retangular de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ e $(0, 1)$, com orientação positiva. A integral de linha do campo $\vec{F}(x, y) = (x + y^3, x^2 + y)$ ao longo de α é dada por

$$\begin{aligned}
\oint_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} &= \oint_{\alpha} (x + y^3) dx + (x^2 + y) dy \\
&= \iint_{\mathbb{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y) - \frac{\partial}{\partial y} (x + y^3) \right] dx dy \\
&= \iint_{\mathbb{D}} (2x - 3y^2) dx dy \\
&= \int_0^2 \int_0^1 (2x - 3y^2) dx dy = 2
\end{aligned}$$

Exemplo 4.2. Calcule a integral do campo $\vec{F}(x, y) = (x^2 y^3, x^3 y^2)$ sobre a elipse α dada por $4x^2 + 9y^2 = 36$ e orientada positivamente.

Tem-se

$$\oint_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \oint_{\alpha} x^2 y^3 dx + x^3 y^2 dy.$$

Como o campo \vec{F} , a curva α e a região \mathbb{D} satisfazem o Teorema de Green, tem-se

$$\begin{aligned}\oint_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} &= \int_{\mathbb{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3 y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y^3) \right] dx dy \\ &= \int_{\mathbb{D}} (3x^2 y^2 - 3x^2 y^2) dx dy = 0.\end{aligned}$$

Exemplo 4.3. Se uma região $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ e sua fronteira $\partial\mathbb{D}$, têm-se as hipóteses do teorema de Green, então a área de \mathbb{D} , $A(\mathbb{D})$ é dada por

$$A(\mathbb{D}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{D}} (-y dx + x dy),$$

ou ainda

$$A(\mathbb{D}) = \int_{\partial\mathbb{D}} -y dx = \int_{\partial\mathbb{D}} x dy.$$

De fato, como o campo $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ é de classe C^1 em qualquer região do \mathbb{R}^2 , aplicando o Teorema de Green, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{D}} (-y dx + x dy) &= \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{D}} 2 dx dy = 2 \cdot A(\mathbb{D}).\end{aligned}$$

Logo,

$$A(\mathbb{D}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{D}} (-y dx + x dy).$$

Exemplo 4.4. A área da região delimitada pela cicloide dada por $\alpha_1(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e pelo segmento de reta dado por $\alpha_2(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é 3π . De fato, tomando $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ com orientação horária, temos

$$\begin{aligned}A = - \oint_{\alpha} x dy &= - \left(\int_{\alpha_1} x dy - \int_{\alpha_2} x dy \right) = - \int_{\alpha_1} x dy \\ &= \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin t dt = \int_0^{2\pi} (t \sin t - \sin^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt - \int_0^{2\pi} t \sin t dt = 3\pi.\end{aligned}$$

Exemplo 4.5. A área da região delimitada pela elipse de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, é $ab\pi$, pois tomando a elipse com parametrização dada por $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e orientação positiva, temos

$$\begin{aligned}A = \frac{1}{2} \oint_{\alpha} x dy - y dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t + b \sin t \cdot a \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = ab\pi.\end{aligned}$$

5 Formas tangencial e normal do Teorema de Green

Seja $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ e seja α uma curva fechada parametrizada pelo comprimento de arco dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. Como o vetor tangente unitário sobre a curva é dado por $t(s) = (x'(s), y'(s))$ e como $\text{Rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$, a equação

$$\oint_{\alpha=\partial\mathbb{D}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

pode ser escrita em forma vetorial como

$$\oint_{\alpha} \vec{F} \cdot t d\vec{r} = \iint_{\mathbb{D}} \text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{k} dxdy.$$

Note que $\vec{F} \cdot t$ representa a componente tangencial de \vec{F} sobre α . Por isso nos referimos a esta última igualdade como a **Forma Tangencial** do Teorema de Green. De forma similar, note que o vetor normal (apontando para fora) sobre a curva é dada por $n = (y'(s), -x'(s))$. Portanto $\vec{F} \cdot n = P(x, y) \frac{dy}{ds} - Q(x, y) \frac{dx}{ds}$. Daí, aplicando o Teorema de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \oint_{\alpha} \vec{F} \cdot n d\vec{r} &= \int_{\alpha} -Q(x, y)dx + P(x, y)dy \\ &= \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy \end{aligned}$$

e isto é a **Forma Normal** do Teorema de Green. Como o lado direito desta última equação é a divergência de \vec{F} , podemos escrever como

$$\oint_{\alpha} \vec{F} \cdot n d\vec{r} = \iint_{\mathbb{D}} \text{div } \vec{F} dxdy.$$

Em particular, quando $\vec{F} = \nabla f$, isto resulta na fórmula integral

$$\oint_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial n} d\vec{r} = \iint_{\mathbb{D}} \Delta f dxdy,$$

que relaciona a integral do laplaciano de f num domínio com a integral de linha da derivada normal de f sobre a fronteira do domínio ³.

³ $\alpha = \partial\mathbb{D}$

6 Campos Vetoriais Conservativos no Plano

Um subconjunto aberto $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ é dito **Simplesmente Conexo**, se para toda curva fechada simples α em \mathbb{D} , a região limitada por α está totalmente contida em \mathbb{D} , ou seja, α pode ser contraída a um ponto de forma que a todo instante, α esteja inteiramente contida em \mathbb{D} . Intuitivamente, um aberto \mathbb{D} é simplesmente conexo se não tem "buracos". Caracterizamos agora os campos vetoriais do plano que são campos conservativos.

Proposição 5.5. *Seja $\vec{F} = (P, Q)$ um campo vetorial de classe C^1 definido num simplesmente conexo $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$. São equivalentes.*

- i) O campo \vec{F} é conservativo e tem um potencial real definido em \mathbb{D} .
- ii) A integral $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$ independe da parametrização da curva C^1 , por partes, em \mathbb{D} , apenas dos extremos da curva.
- iii) A equação $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = 0$ para qualquer que seja a curva fechada α , C^1 por partes, contida em \mathbb{D} .
- iv) $\text{rot} \vec{F} = 0$ em \mathbb{D} , isto é, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, em \mathbb{D} .

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$ Já visto (Teorema 2.1).

$ii) \Rightarrow iii)$ Suponha que a integral do campo \vec{F} independa da curva C^1 por partes em \mathbb{D} . Inicialmente, considere α uma curva suave por partes, fechada e simples em \mathbb{D} .

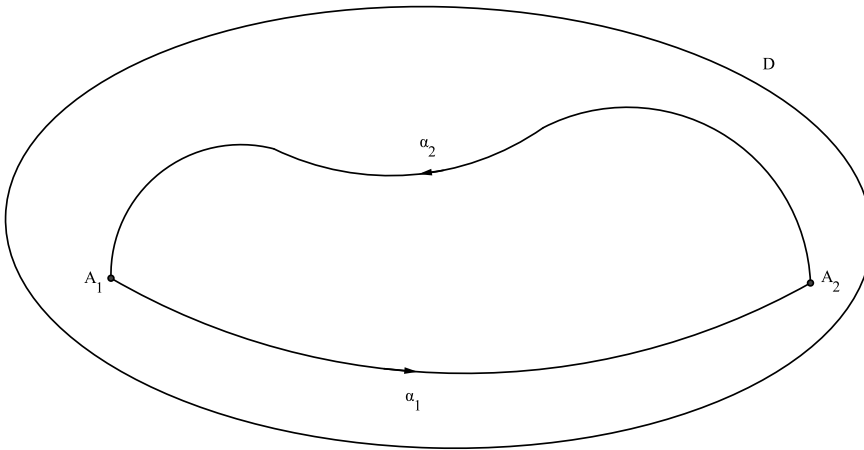


Figura 5.6: curva $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$

Sejam A_1 e A_2 pontos distintos de \mathbb{D} , α_1 e α_2 as partes de α que ligam o ponto A_1 ao ponto A_2 , então $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$. Como a integral do campo \vec{F} independe da curva em \mathbb{D} , tem-se

$$\int_{\alpha_1(A_1 \rightarrow A_2)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\alpha_2(A_1 \rightarrow A_2)} \vec{F} d\vec{r}.$$

Daí

$$\begin{aligned} \oint_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} &= \int_{\alpha_1(A_1 \rightarrow A_2)} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\alpha_2(A_2 \rightarrow A_1)} \vec{F} d\vec{r} \\ &= \int_{\alpha_1(A_1 \rightarrow A_2)} \vec{F} d\vec{r} - \int_{\alpha_2(A_1 \rightarrow A_2)} \vec{F} d\vec{r} = 0. \end{aligned}$$

iii) \Rightarrow iv) Mostraremos primeiro que se $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = 0$, para toda curva fechada C^1 por partes α em \mathbb{D} então \vec{F} é um campo conservativo. De fato, sejam (x_0, y_0) um ponto fixado e (x, y) um ponto qualquer em \mathbb{D} , então para toda curva C^1 por partes α em \mathbb{D} , a função

$$f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{F} d\vec{r}$$

está bem definida, pois \vec{F} é um campo contínuo em \mathbb{D} e a integral independe da curva que liga estes dois pontos. Vamos mostrar que f é uma função potencial do campo \vec{F} . Para Δx suficiente pequeno, tal que $(x + \Delta x, y) \in \mathbb{D}$, temos

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y) - f(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} \vec{F} d\vec{r} - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{F} d\vec{r} \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x + \Delta x, y)} \vec{F} d\vec{r} + \int_{(x, y)}^{(x_0, y_0)} \vec{F} d\vec{r} \\ &= \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} \vec{F} d\vec{r}. \end{aligned}$$

Como a integral independe da curva que liga (x, y) a $(x + \Delta x, y)$, tomemos então o segmento de reta que os liga; então, neste caso, $dy = 0$. Logo

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx + Q dy = \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, obtemos

$$\int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx = P(x + t\Delta x, y)\Delta x, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y)}^{(x + \Delta x, y)} P dx = \frac{1}{\Delta x} P(x + t\Delta x, y) \cdot \Delta x \\ &= P(x + t\Delta x, y).\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Finalmente como \vec{F} de classe C^1 , segue que f é de classe C^2 , logo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

iv) \Rightarrow i)] Se α é uma curva fechada em \mathbb{D} , então a região R limitada por α está contida em \mathbb{D} , visto que \mathbb{D} é simplesmente conexo. Aplicando o Teorema de Green, obtemos

$$\oint_{\alpha} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Portanto \vec{F} é conservativo em \mathbb{D} .

■

7 Determinação de uma Função Potencial usando integral definida

A função $f(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$, (x_0, y_0) fixado em \mathbb{D} , define uma função potencial. Então integra-se de (x_0, y_0) a (x, y_0) ao longo do segmento horizontal α_1 , e depois de (x, y_0) a (x, y) ao longo do segmento vertical α_2 . Parametrizando α_1 por $\alpha_1(t) = (t, y_0)$, $x_0 \leq t \leq x$ e α_2 por $\alpha_2(t) = (x, t)$, $y_0 \leq t \leq y$, obtemos

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt.$$

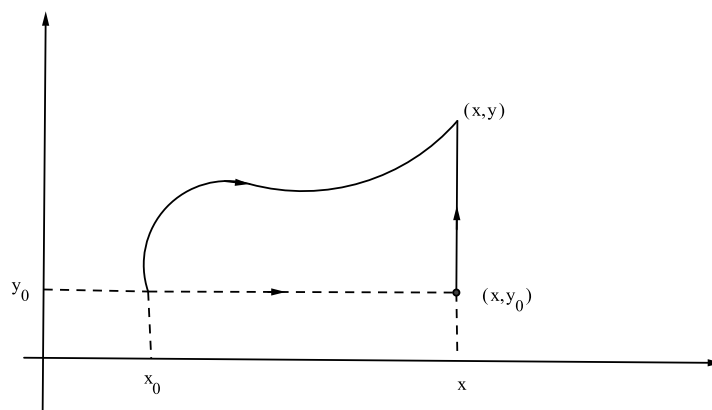


Figura 5.7:

Exemplo 7.1. Considere a integral $\int_C (x^2 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 + y)dy$, onde C é uma curva ligando os pontos $(0, 0)$ e $(2, 2)$. Como

$$P(x, y) = x^2 + 2xy^3 \quad \text{e} \quad Q(x, y) = 3x^2y^2 + y$$

são de classe C^1 em \mathbb{R}^2 e $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, podemos escolher qualquer curva ligando os pontos $(0, 0)$ a $(2, 2)$. Tome, por exemplo, a curva $\alpha(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 2$, então

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 + y)dy &= \int_{\alpha} (x^2 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 + y)dy \\ &= \int_0^2 \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt \\ &= \int_0^2 (t^2 + 2t^4 + 3t^4 + t)dt \\ &= \int_0^2 (5t^4 + t^2 + t)dt = \frac{110}{3} \end{aligned}$$

Observação 7.1. Em relação ao exemplo anterior, como \vec{F} é um campo conservativo em \mathbb{R}^2 , então tem um potencial f definido em \mathbb{R}^2 ; e um potencial é dado por $f(x, y) = x^3/3 + x^2y^3 + y^2/2$. Logo

$$\int_C (x^2 + 2xy^3)dx + (3x^2y^2 + y)dy = f(2, 2) - f(0, 0) = \frac{110}{3}.$$

Exemplo 7.2. Considere a curva α parametrizada por $\alpha(t) = (e^{t-1}, \sin(\pi/t))$, $1 \leq t \leq 2$. Calcule $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (2x \cos y, -x^2 \sin y)$. Como \vec{F} é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 e

$$\frac{\partial}{\partial x}(-x^2 \sin y) = -2x \sin y = \frac{\partial}{\partial y}(2x \cos y)$$

o Teorema garante que a integral $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$ independe do caminho que liga $\alpha(1) = (1, 0)$ a $\alpha(2) = (e, 1)$. Usando o caminho poligonal ligando os pontos $(1, 0)$, $(e, 0)$ e $(e, 1)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{(1,0)}^{(e,1)} \vec{F} d\vec{r} &= \int_{(1,0)}^{(e,0)} 2x \cos y dx - x^2 \sin y dy \\ &+ \int_{(e,0)}^{(e,1)} 2x \cos y dx - x^2 \sin y dy \\ &= \int_1^e 2t dt + \int_0^1 -e^2 \sin t dt \\ &= e^2 - 1 + e^2(\cos 1 - 1) = e^2 \cos 1 - 1. \end{aligned}$$

Exemplo 7.3. Vamos calcular $\oint_{\alpha} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$, onde α é a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Como

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

segue que

$$\oint_{\alpha} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

para qualquer curva fechada simples C contida no interior da elipse. Tome C uma circunferência de raio r contida no interior da elipse. Uma parametrização para C é dada por $\beta(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo

$$\oint_{\alpha} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Exemplo 7.4. Considere o campo vetorial

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} \right) + \left(\frac{-y}{(x+2)^2 + y^2}, \frac{x+2}{(x+2)^2 + y^2} \right)$$

e seja α uma curva regular tal como na figura 5.8. Vamos calcular a integral de linha $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$. Para isso, consideremos a região limitada pela curva α , e pelas circunferências C_1 e C_2 de raio 1, centradas em 2 e -2, respectivamente. Pelo Teorema de Green,

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r}.$$

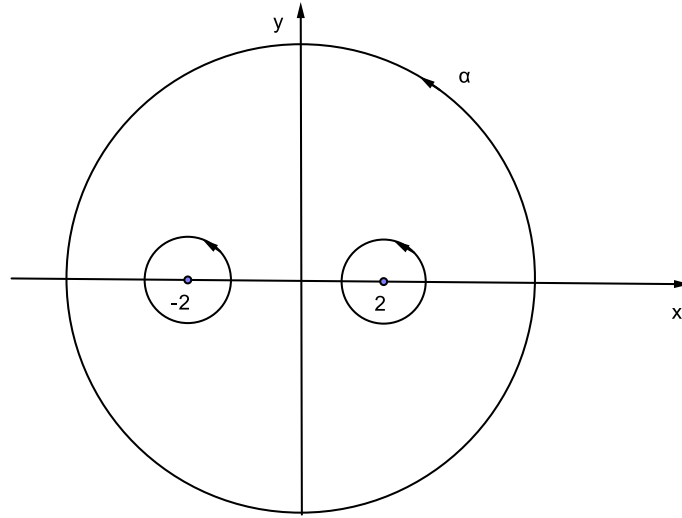


Figura 5.8:

Para efeito de simplificação, notemos que $\vec{F}(x, y) = \vec{G}(x, y) + \vec{H}(x, y)$, onde

$$\vec{G}(x, y) = \left(\frac{-y}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} \right)$$

e

$$\vec{H}(x, y) = \left(\frac{-y}{(x+2)^2 + y^2}, \frac{x+2}{(x+2)^2 + y^2} \right).$$

Uma parametrização para a circunferência C_1 é $\alpha_1(t) = (2 + \cos t, \sin t)$, $0 < t < 2\pi$, e uma parametrização para a circunferência C_2 é $\alpha_2(t) = (-2 + \cos t, \sin t)$, $0 < t < 2\pi$.

Logo

$$\int_{C_1} \vec{G} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

e

$$\int_{C_1} \vec{H} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Além disso,

$$\int_{C_2} \vec{G} d\vec{r} = 0 \quad \text{e} \quad \int_{C_1} \vec{H} d\vec{r} = 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} &= \int_{C_1} \vec{G} d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{G} d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{H} d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{H} d\vec{r} \\ &= 2\pi + 0 + 0 + 2\pi = 4\pi. \end{aligned}$$

8 Exercícios

- Calcule $\int_{\alpha} (xy - x + y) dS$ onde α é a curva abaixo:
 - α é o segmento orientado de $(-1, 2)$ a $(2, 3)$
 - α é a parte da reta $2x + 3y = 1$ orientada de $(-1, 1)$ a $(2, -1)$
 - α é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ orientada positivamente
- Calcule $\int_{\alpha} \sqrt{x+1} y^2 dS$, onde α é a parte da curva $9y^2 = 4x^3$ orientada de $(0, 0)$ para $(1, 2/3)$.
- Calcule $\int_{\alpha} \frac{xy}{\sqrt{9y+4}} dS$ onde α é a parte da curva $y^3 = x^2$ orientada de $(-1, 1)$ para $(0, 0)$
- Calcule $\int_{\alpha} (xy, x - y^2) d\vec{r}$, onde α é determinada pela parábola $y = 2x$ e a reta $x = 2$.
- A expressão $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ é dita uma **Diferencial Exata** numa região $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, se existe uma função $\phi : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q$ em \mathbb{D} . Mostre que
 - Se $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ é uma diferencial exata numa região aberta \mathbb{D} , então o campo $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ é um campo conservativo em \mathbb{D} .
 - $\int_{\alpha} d\phi = \phi(A_2) - \phi(A_1)$, onde α é qualquer curva suave por partes ligando A_1 e A_2 .
- Verifique que a expressão dada, é uma diferencial exata em qualquer região $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ em que $(0, 0) \notin \mathbb{D}$
 - $\frac{x dx}{x^2 + y^2} + \frac{y dy}{x^2 + y^2}$
 - $\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$
- Verifique que a expressão $\frac{y dx}{x^2 + y^2} - \frac{x dy}{x^2 + y^2}$ é uma diferencial exata numa região $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, somente se, para qualquer curva fechada $\alpha \subset \mathbb{D}$ a região limitada por α não contém a origem.
- Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua num aberto $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, tal que dois pontos quaisquer de \mathbb{D} podem ser ligados por uma curva suave por partes em \mathbb{D} . Mostre que

- (a) Se $\nabla f = 0$ em \mathbb{D} , então f é constante em \mathbb{D}
- (b) Se $\nabla f = \nabla g$, em \mathbb{D} , então f e g diferem de uma constante.
9. Verifique o Teorema de Green para o campo $\vec{F}(x, y) = (xy + x^2, xy - y^2)$ e a região dada;
- (a) A região retangular com vértices $(\pm 1, \pm 1)$
- (b) A região triangular com vértices $(-1, -1)$, $(1, -1)$ e $(1, 1)$
- (c) A região limitada pelos gráficos das equações $y = 2 - x^2$ e $x + y = 0$, no segundo quadrante
10. Calcule $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$ sendo dados:
- (a) $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- (b) $\vec{F}(x, y, z) = (x + y + z)\vec{k}$ e $\alpha(t) = (t, t, 1 - t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.
- (c) $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{j}$ e $\alpha(t) = (t^2, 3)$, $-1 \leq t \leq 1$.
- (d) $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ e $\alpha(t) = (t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
11. Seja α uma curva no \mathbb{R}^3 , \vec{F}_1 e \vec{F}_2 campos de vetores contínuos e com domínio contendo a curva α e $c \in \mathbb{R}$. Mostre que:
- (a) $\int_{\alpha} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) d\vec{r} = \int_{\alpha} \vec{F}_1 d\vec{r} + \int_{\alpha} \vec{F}_2 d\vec{r}$
- (b) $\int_{\alpha} (c\vec{F}) d\vec{r} = c \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$
12. Uma partícula desloca-se em um campo de forças dado por
- $$\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}.$$
- Calcule o trabalho realizado por \vec{F} ao deslocamento da partícula de $\alpha(a)$ até $\alpha(b)$, sendo dados
- (a) $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $a = 0$ e $b = 2\pi$
- (b) $\alpha(t) = (2t + 1, t - 1, t)$, $a = 1$ e $b = 2$
- (c) $\alpha(t) = (\cos t, 0, \sin t)$, $a = 0$ e $b = 2\pi$
13. Sejam α e \mathbb{D} como no Teorema de Green. Prove que a área de $\mathbb{D} = \oint_{\alpha} x dy$.
14. Use o Teorema de Green para calcular o valor da integral
- (a) $\oint_{\alpha} (6x^{10} - xy) dx$, onde α é o quadrado $|x| + |y| = 1$
- (b) $\oint_{\alpha} (5x - y^{20}) dy$, onde α é a elipse $x^2 + 4y^2 = 4$

15. Calcule a integral do campo $\vec{F}(x, y) = (xy, y^2 - 2x)$ sobre a fronteira α da região \mathbb{D} entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, onde α está orientada com \mathbb{D} à esquerda.
16. Use o Teorema de Green para calcular $\int_{\alpha} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, onde α é a fronteira da região \mathbb{D} entre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ e a elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$, orientada com \mathbb{D} à esquerda.
17. Calcule o valor da integral indicada

(a) $\oint_{\alpha} \frac{y^3 dx - xy^2 dy}{(x^2 + y^2)^2}$, onde α é o polígono com vértices $(-2, 0)$, $(0, -2)$, $(0, 2)$ e $(3, 0)$.

(b) $\oint_{\alpha} \frac{x^2 y dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2}$, onde α é o polígono com vértices $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

18. Mostre que a fórmula do Teorema de Green, em coordenadas polares (r, θ) , é escrita na forma

$$\int_{\partial \mathbb{D}} P dr + Q d\theta = \iint_{\mathbb{D}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) dr d\theta,$$

onde as funções P e Q , a região \mathbb{D} e sua fronteira $\partial \mathbb{D}$ possuem as hipóteses apropriadas. Mostre ainda que a área de \mathbb{D} , é dada por

$$A = - \int_{\partial \mathbb{D}} r \theta dr = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbb{D}} r^2 d\theta.$$

19. Seja $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ definida num domínio simplesmente conexo limitado por uma curva diferenciável simples fechada α . Mostre que

$$\oint_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial n} d\vec{r} = 0.$$

20. Seja $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. Calcule $\int_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial n} d\vec{r}$, onde α é o círculo unitário centrado na origem.

21. Deduza as seguintes fórmulas integrais

(a) $\oint_{\alpha} v \frac{\partial u}{\partial n} d\vec{r} = \iint (v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx dy$

(b) $\oint_{\alpha} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) d\vec{r} = \iint (v \Delta u - u \Delta v) dx dy$

22. Mostre que

$$\frac{1}{2} \oint_{\alpha} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \iint_{\mathbb{D}} \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) dx dy.$$

Capítulo 6

Integral de Superfície

Estudaremos aqui as integrais de superfícies. Iniciaremos com o estudo de superfícies parametrizadas [1],[2] que será útil para o desenvolvimento dessas integrais. Destacaremos também os teoremas de Stokes e Gauss.

1 Superfície Parametrizada

Definição 1.1. Uma **Superfície Parametrizada** é uma aplicação $\chi : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida num aberto \mathbb{D} , por $\chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \mathbb{D}$, onde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ são as **Funções Coordenadas** de χ .

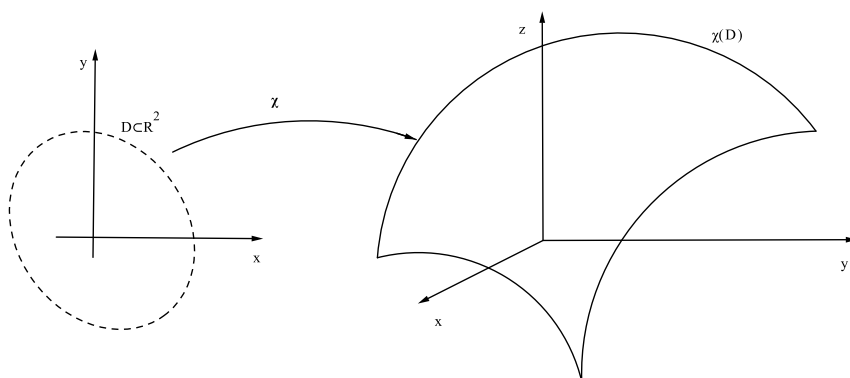


Figura 6.1: idéia geométrica da definição

Observação 1.1. Temos que

1. A aplicação χ é diferenciável de classe $C^n(C^\infty)$ se as funções coordenadas $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ são funções diferenciáveis de classe $C^n(C^\infty)$.
2. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma Superfície Parametrizada, se existem um aberto $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ e uma aplicação $\chi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, M é a imagem de \mathbb{D} pela aplicação χ .

3. Seja M superfície parametrizada por $\chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \mathbb{D}$ diferenciável em $(u_0, v_0) \in \mathbb{D}$.

- 3.1 Fixado $u = u_0$, obtemos uma função $\chi(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$ que define uma curva na superfície. Se o vetor

$$\frac{\partial \chi}{\partial v}(u_0, v_0) = \chi_v(u_0, v_0) = (x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0)) \neq \vec{0},$$

então $\chi_v(u_0, v_0)$ é um **Vetor Tangente** a essa curva no ponto $\chi(u_0, v_0)$.

- 3.2 Fixado $v = v_0$, a função $\chi(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$ define uma curva na superfície e se

$$\frac{\partial \chi}{\partial u}(u_0, v_0) = \chi_u(u_0, v_0) = (x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), z_u(u_0, v_0)) \neq \vec{0},$$

então $\chi_u(u_0, v_0)$ é um **Vetor Tangente** a essa curva no ponto $\chi(u_0, v_0)$.

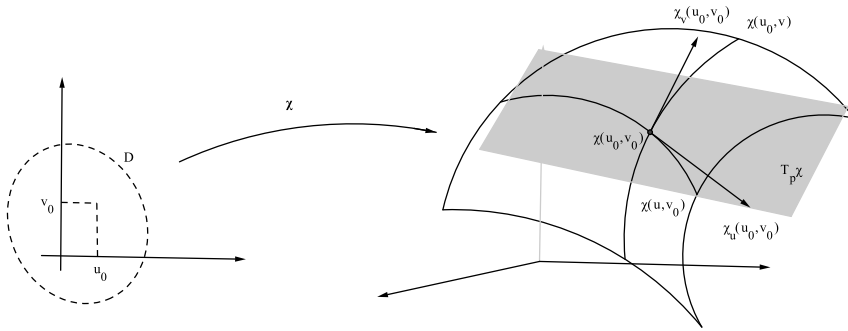


Figura 6.2: plano tangente $T_p \chi$ em $\chi(u_0, v_0)$.

Observação 1.2. As curvas definidas acima, que são imagens pela χ das retas paralelas aos eixos coordenados, são chamadas **Curvas Coordenadas** da superfície M .

Observação 1.3. O vetor $\vec{n}(u_0, v_0) = \chi_u(u_0, v_0) \times \chi_v(u_0, v_0) \neq 0$, é **Normal** ao plano tangente gerado pelos vetores $\chi_u(u_0, v_0)$ e $\chi_v(u_0, v_0)$ em $\chi(u_0, v_0)$; dado $q = \chi(p)$, $p \in \mathbb{D}$, o plano tangente gerado pelos vetores χ_u e χ_v , será denotado por $T_q \chi$ e o produto vetorial $\chi_u \times \chi_v$, dado pela expressão

$$\begin{aligned}
\chi_u \times \chi_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k} \\
&= \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \vec{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \vec{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \vec{k}
\end{aligned}$$

é chamado **Produto Vetorial Fundamental**.

2 Superfície Parametrizada Regular

Definição 2.1. Uma superfície M parametrizada por $\chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \mathbb{D}$, diferenciável de classe C^∞ é dita **Regular** em $\chi(u_0, v_0)$ se

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \chi_u(u_0, v_0) \times \chi_v(u_0, v_0) \neq 0.$$

Observação 2.1. Dizer que $\chi_u(u_0, v_0) \times \chi_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$ é equivalente a dizer que os vetores $\chi_u(u_0, v_0)$ e $\chi_v(u_0, v_0)$ são **Linearmente Independentes**.

Exemplo 2.1. Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^3 . A aplicação $\chi(u, v) = P_0 + \vec{a}u + \vec{b}v$, ou seja,

$$\chi(u, v) = (x_0 + a_1u + b_1v, y_0 + a_2u + b_2v, z_0 + a_3u + b_3v)$$

é uma superfície parametrizada regular cujo traço é um plano que passa pelo ponto P_0 , ortogonal ao vetor $\vec{a} \times \vec{b}$.

Exemplo 2.2. Superfícies parametrizada por uma função diferenciável C^∞ .

M : Superfície com parametrização explícita $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{D}$.

Parametrização: $\chi(x, y) = (x, y, f(x, y))$

Se $f(x, y)$ é de classe C^∞ , então $M = \chi(\mathbb{D})$ é regular, pois

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \chi}{\partial y}(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

é não nulo para todo $(x, y) \in \mathbb{D}$, onde f_x e f_y são as derivadas parciais de f em relação a x e y , respectivamente. O plano tangente a M em $(x_0, y_0, z_0) = \chi(u_0, v_0)$ é dado por

$$(-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Exemplo 2.3. Superfície de Revolução

Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular, tal que $f(u) \neq 0$. Então a aplicação $\chi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, $v \in \mathbb{R}$ é uma superfície parametrizada regular, chamada **Superfície de Revolução** gerada pela curva α em torno do eixo z .

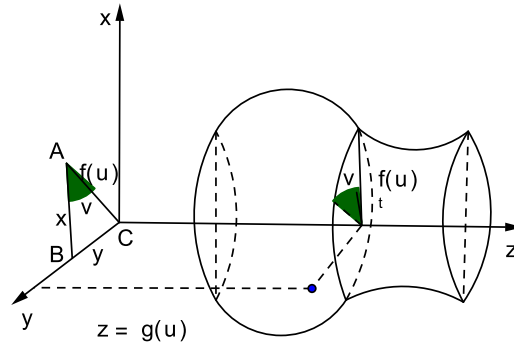


Figura 6.3: Superfície de Revolução em torno do eixo z

De fato, no triângulo $\triangle ABC$, temos

$$\sin v = \frac{y}{f(u)} \Rightarrow y = f(u) \sin v$$

$$\cos v = \frac{x}{f(u)} \Rightarrow x = f(u) \cos v$$

daí

$$\chi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

Além disso,

$$\chi_u(u, v) = (f_u(u) \cos v, f_u(u) \sin v, g_u(u))$$

$$\chi_v(u, v) = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0).$$

Portanto

$$\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v) = (-g_u \cdot f(u) \cos v, -g_u \cdot f(u) \sin v, f_u \cdot f(u))$$

e

$$\begin{aligned}\|\chi_u \times \chi_v\|^2 &= g_u^2 \cdot f^2(u) \cos^2 v + g_u^2 \cdot f^2(u) \sin^2 v + f_u^2 \cdot f^2(u) \\ &= \underbrace{(g_u^2 + f_u^2)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{f^2(u)}_{\neq 0} \neq 0,\end{aligned}$$

já que α é regular e $f \neq 0$. Portanto χ é uma superfície regular.

Observação 2.2. Vejamos alguns outros casos de revolução

1. Se tomarmos $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$, $g(u) \neq 0$, uma curva regular girando em torno do eixo y .

$$\sin v = \frac{x}{g(u)} \Rightarrow x = g(u) \sin v$$

$$\cos v = \frac{z}{g(u)} \Rightarrow z = g(u) \cos v$$

então

$$\chi(u, v) = (g(u) \sin v, f(u), g(u) \cos v)$$

é uma superfície de revolução regular gerada pela curva α em torno do eixo y .

2. Se tomarmos $\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$, $g(u) \neq 0$, curva regular girando em torno do eixo x .

$$\sin v = \frac{z}{g(u)} \Rightarrow z = g(u) \sin v$$

$$\cos v = \frac{y}{g(u)} \Rightarrow y = g(u) \cos v$$

então

$$\chi(u, v) = (f(u), g(u) \cos v, g(u) \sin v)$$

é uma superfície de revolução regular gerada pela curva α em torno do eixo x

Exemplo 2.4. A aplicação $\chi(u, v) = (r \cos v, r \sin v, u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, r constante, descreve o **cilindro circular**, que é obtido pela revolução da reta $\alpha(u) = (r, 0, u)$ em torno do eixo z .

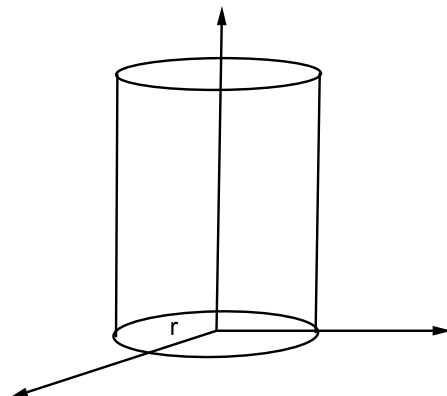


Figura 6.4: cilindro circular

Exemplo 2.5. Dada a curva $\alpha(u) = (R + r \cos u, 0, r \sin u)$, $u \in \mathbb{R}$, onde $0 < r < R$. A superfície de revolução em torno do eixo z , dada por

$$\chi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

é uma superfície regular cujo traço é chamado de **Toro**.

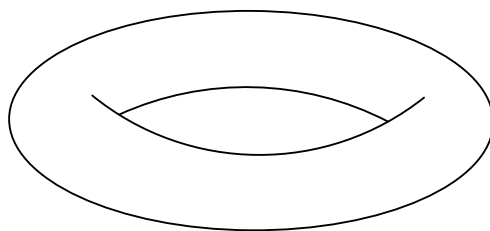


Figura 6.5: Toro (de revolução)

3 Área de Superfície

Definição 3.1. Seja M uma superfície parametrizada por $\chi(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}$. Definimos a **Área** de M , que denotaremos por $A(M)$, por

$$A(M) = \iint_{\mathbb{D}} \|\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)\| du dv$$

onde $\|\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)\|$ é a norma do vetor $\vec{n} = \chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)$. A fórmula

$$dM = \|\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)\| du dv$$

é chamada o **Elemento de Área** da superfície M .

Exemplo 3.1. A área da esfera de raio $r > 0$ é $4\pi r^2$.

De fato, uma parametrização da esfera é dada por

$$\chi(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u), \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi;$$

daí

$$\chi_u(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u)$$

$$\chi_v(u, v) = (-r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0);$$

logo

$$\|\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)\| = r^2 \sin u,$$

e a área da esfera é

$$A(M) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin u du dv = 4\pi r^2.$$

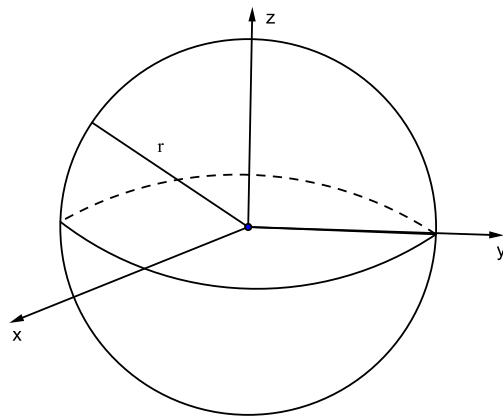


Figura 6.6: Esfera de raio r

Exemplo 3.2. A área do cone circular $\chi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, $0 \leq u \leq r$, $0 \leq v \leq 2\pi$ é dada por $\sqrt{2}\pi r^2$. Temos que

$$\chi_u(u, v) = (\cos v, \sin v, 1) \quad \text{e} \quad \chi_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

Logo $\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v) = (-u \cos v, -u \sin v, u)$; daí $\|\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)\| = \sqrt{2}u$, portanto a área é dada por

$$A(\text{cone}) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \sqrt{2}u \, du \, dv = \sqrt{2}\pi r^2.$$

Vejamos o significado geométrico da fórmula da área de uma superfície. Para entender esta relação, suponha que \mathbb{D} seja um retângulo. Considere uma partição regular de ordem n de \mathbb{D} . Seja $R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; u_i \leq x \leq u_{i+1}, v_j \leq y \leq v_{j+1}\}$ o ij -ésimo retângulo da partição com vértices

$$(u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_{i+1}, v_{j+1}), (u_i, v_{j+1}), \quad i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Os vetores $\Delta u_i \chi_{u_i}$ e $\Delta v_j \chi_{v_j}$ são tangentes à superfície em $\chi(u_i, v_j) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, onde $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ e $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$. Seja P_{ij} o paralelogramo formado pelos vetores $\Delta u_i \chi_{u_i}$ e $\Delta v_j \chi_{v_j}$ tangente a superfície em $\chi(u_i, v_j)$. Quando $n \rightarrow +\infty$, a área A de P_{ij} , $A(P_{ij})$, se aproxima a área da porção da superfície $\chi(R_{ij})$. Como a área A de P_{ij} é dado por

$$A(P_{ij}) = \|\Delta u_i \chi_{u_i} \times \Delta v_j \chi_{v_j}\| = \|\chi_{u_i} \times \chi_{v_j}\| \Delta u_i \Delta v_j.$$

então $A(\chi(R_{ij})) \approx \|\chi_{u_i} \times \chi_{v_j}\| \Delta u_i \Delta v_j$. Portanto, a área da superfície é aproximada por

$$A(\chi(R)) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} A(P_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|\chi_{u_i} \times \chi_{v_j}\| \Delta u_i \Delta v_j$$

Quando $n \rightarrow +\infty$, o limite do somatório duplo existe e é denotado por

$$\iint_{\mathbb{D}} \|\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)\| \, du \, dv$$

Observação 3.1. Se uma superfície M é parametrizada pelo gráfico de uma função diferenciável, ou seja, uma parametrização de M é dada por $\chi(x, y) = (x, y, z)$, com $z = f(x, y)$, onde f é uma função diferenciável, então

$$\chi_x(x, y) = (1, 0, f_x) \quad \text{e} \quad \chi_y(x, y) = (0, 1, f_y).$$

Daí,

$$\chi_x(x, y) \times \chi_y(x, y) = (-f_x, -f_y, 1) \implies \|\chi_x(x, y) \times \chi_y(x, y)\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

Portanto a área é dada como

$$A(M) = \int \int_{\mathbb{D}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy,$$

onde \mathbb{D} é a projeção da superfície M sobre o plano xy . Veja que o vetor normal a superfície M é dado por $\vec{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$, portanto se θ é o ângulo entre \vec{n} e $k = (0, 0, 1)$, temos

$$\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot k}{\|\vec{n}\| \cdot \|k\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

ou seja, o elemento de área de M é dado como

$$dM = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \frac{1}{\cos \theta} dx dy = \sec \theta dx dy;$$

logo a área pode ser escrita como

$$A(M) = \int \int_{\mathbb{D}} \sec \theta dx dy.$$

Analogamente, se tivermos uma superfície com parametrização

$$\chi(x, z) = (x, y, z), \quad \text{com } y = f(x, z)$$

ou

$$\chi(y, z) = (x, y, z), \quad \text{com } x = f(y, z)$$

então teremos, respectivamente, a área dada por

$$A(M) = \int \int_{\mathbb{D}_1} \sec \theta_1 dx dz,$$

ou

$$A(M) = \int \int_{\mathbb{D}_2} \sec \theta_2 dy dz,$$

onde \mathbb{D}_1 e \mathbb{D}_2 são as projeções de M sobre os planos xz e yz e θ_1 e θ_2 são os ângulos entre \vec{n} e \vec{j} , e \vec{n} e \vec{i} , respectivamente.

Observação 3.2. Utilizando a identidade $\|u \times v\|^2 = (u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)^2$ e considerando $E = \chi_u \cdot \chi_u$, $F = \chi_u \cdot \chi_v$ e $G = \chi_v \cdot \chi_v$, então $\|\chi_u \cdot \chi_v\| = \sqrt{EG - F^2}$ e daí a área $A(M)$ pode ser escrita como

$$A(M) = \int \int_{\mathbb{D}} \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Definição 3.2. Sejam

$$\chi^1 : \mathbb{D}_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \chi^1(u, v)$$

e

$$\chi^2 : \mathbb{D}_2 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (s, t) \mapsto \chi^2(s, t)$$

duas parametrizações de uma superfície M . Dizemos que χ^1 e χ^2 são **Parametrizações Equivalentes** quando existe uma aplicação

$$h : \mathbb{D}_2 \longrightarrow \mathbb{D}_1; (s, t) \longmapsto h(s, t) = (u(s, t), v(s, t)),$$

bijetora de classe C^1 tal que $\chi^1(h(\mathbb{D}_1)) = \chi^2(\mathbb{D}_2) = M$, ou seja,

$$\chi^2(s, t) = \chi^1(u(s, t), v(s, t)).$$

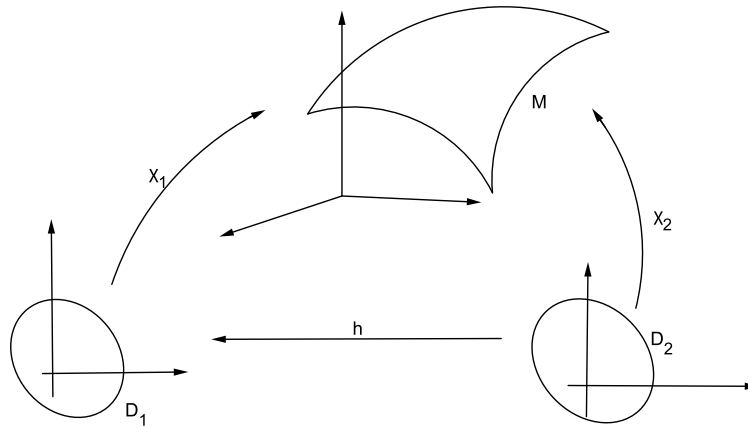


Figura 6.7: parametrizações equivalentes

A aplicação h é dita **Mudança de parâmetro**.

Considere χ^1 e χ^2 parametrizações equivalentes para uma superfície M . Então a área de M com parametrização χ^2 é dada por

$$A(M_{\chi^2}) = \iint_{\mathbb{D}_2} \|\chi_s^2(s, t) \times \chi_t^2(s, t)\| ds dt;$$

além disso, $\|\chi_s^2(s, t) \times \chi_t^2(s, t)\| = \frac{\partial \chi^2}{\partial s} \times \frac{\partial \chi^2}{\partial t}$, mas

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial s} = \frac{\partial \chi^1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \chi^1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s}$$

e

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial t} = \frac{\partial \chi^1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \chi^1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

onde $\frac{\partial \chi^1}{\partial u}$ e $\frac{\partial \chi^1}{\partial v}$ são calculados em $(u(s, t), v(s, t))$. Daí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial s} \times \frac{\partial \chi^2}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \chi^1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \chi^1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \chi^1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \chi^1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \chi^1}{\partial u} \times \frac{\partial \chi^1}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial \chi^1}{\partial u} \times \frac{\partial \chi^1}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \chi^1}{\partial u} \times \frac{\partial \chi^1}{\partial v} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= \chi_u^1(u, v) \times \chi_v^1(u, v) \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}. \end{aligned}$$

Desta relação, segue que

$$\vec{n}_{\chi^1} = \vec{n}_{\chi^2} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} A(M_{\chi^1}) &= \iint_{\mathbb{D}_1} \|\chi_u^1(u, v) \times \chi_v^1(u, v)\| du dv \\ &= \iint_{\mathbb{D}_2} \|\chi_u^1(u(s, t), v(s, t)) \times \chi_v^1(u(s, t), v(s, t))\| \cdot \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| ds dt \\ &= \iint_{\mathbb{D}_2} \|\chi_s^2(u(s, t), v(s, t)) \times \chi_t^2(u(s, t), v(s, t))\| ds dt \\ &= A(M_{\chi^2}) \end{aligned}$$

ou seja, a fórmula da área está bem definida.

Exemplo 3.3 (Área do Toro). Considere a superfície de revolução com parametrização $\chi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$, com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $0 < r < R$, que descreve um toro. Então

$$\chi_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u),$$

$$\chi_v = (-(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0),$$

$$\chi_u \times \chi_v = (-r(R + r \cos u) \cos v \cos u, -r(R + r \cos u) \sin v \cos u, -r(R + r \cos u) \sin u),$$

$$\|\chi_u \times \chi_v\| = r(R + r \cos u).$$

Logo

$$\begin{aligned} A(\chi(\mathbb{D})) &= \iint_{\mathbb{D}} \|\chi_u \times \chi_v\| du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos u) du dv = 4\pi^2 Rr. \end{aligned}$$

4 Integral de Superfície de Função Escalar

Definição 4.1. Sejam M uma superfície parametrizada por $\chi(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}$, e $f(x, y, z)$ uma função escalar contínua definida em M . Definimos a **integral de superfície** de f sobre M por

$$\iint_M f(x, y, z) dM = \iint_{\mathbb{D}} f(\chi(u, v)) \cdot \|\chi_u \times \chi_v\| du dv,$$

independente da parametrização de M .

Observação 4.1. Quando M é definida explicitamente por

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{D}, \quad (\text{parametrização } \chi(x, y) = (x, y, z(x, y))),$$

então

$$\iint_M f dM = \iint_{\mathbb{D}} f(x, y, z) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy,$$

com $z = z(x, y)$. Podemos também escrever a integral, como

$$\iint_M f(x, y, z) dM = \iint_{\mathbb{D}} f(x, y, z) \sec \theta dx dy,$$

onde $\sec \theta = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$, $z = z(x, y)$ e \mathbb{D} é a projeção de M sobre o plano xy ; de forma análoga, se $\chi(y, z) = (x, y, z)$, $x = x(y, z)$ ou $\chi(x, z) = (x, y, z)$, $y = y(x, z)$, as integrais são, respectivamente,

$$\iint_M f(x, y, z) dM = \iint_{\mathbb{D}_1} f(x, y, z) \sec \theta_1 dy dz,$$

ou

$$\iint_M f(x, y, z) dM = \iint_{\mathbb{D}_2} f(x, y, z) \sec \theta_2 dx dz,$$

onde

$$\sec \theta_1 = \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} \quad \text{e} \quad \sec \theta_2 = \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}$$

e \mathbb{D}_1 e \mathbb{D}_2 são as projeções de M nos planos yz e xz , respectivamente.

Observação 4.2.

1. Se $f(x, y, z) = 1$ sobre M , a integral de superfície fica

$$\begin{aligned}\iint_M f(x, y, z) dM &= \iint_M 1 dM \\ &= \iint_{\mathbb{D}} \|\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)\| du dv \\ &= \text{área da superfície } M\end{aligned}$$

2. Se $M = \cup M_i, i = 1, 2, \dots, n$, então $\iint_M f dM = \sum_{i=1}^n \iint_{M_i} f dM_i$.

Exemplo 4.1. Calcule $\iint_M z dM$, onde M é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = 1$ e $x + z = 4$.

A superfície M é a união das superfícies M_1, M_2 e M_3 , onde

M_1 é o cilindro

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{com} \quad 1 \leq z \leq 4 - x,$$

M_2 é o plano

$$z = 1 \quad \text{com} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

e

M_3 é o plano

$$x + z = 4 \quad \text{com} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Portanto

$$\iint_M z dM = \iint_{M_1} z dM_1 + \iint_{M_2} z dM_2 + \iint_{M_3} z dM_3$$

Parametrização de M_1 :

$$M_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad 1 \leq z \leq 4 - x$$

$$\chi(u, v) = (\cos u, \sin u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{D}, \quad \|\chi_u \times \chi_v\| = 1$$

$$\mathbb{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 1 \leq v \leq 4 - \cos u\}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{M_1} z dM_1 &= \iint_{\mathbb{D}} v dv du = \int_0^{2\pi} \int_1^{4-\cos\theta} v dv du \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{v^2}{2} \Big|_1^{4-\cos\theta} \right) du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (15 - 8 \cos u + \cos^2 u) du \\
&= \frac{31\pi}{2}
\end{aligned}$$

Parametrização de M_2 : $\iint_{M_2} z dM_2 = \iint_{M_2} 1 dM_2 = \text{área de } M_2 = \pi$.

Parametrização de M_3 : Como M_3 é o gráfico da função $z = f(x, y) = 4 - x$, então $\|\vec{n}\| = \sqrt{2}$. Assim,

$$\iint_{M_3} z dM_3 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{2}(4-x) dx dy.$$

Usando mudança polar, obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{2}(4-x) dx dy &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - r \cos \theta) r dr d\theta \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{\cos \theta}{3} \right) d\theta = 4\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

Logo

$$\iint_M z dM = \frac{31\pi}{2} + \pi + 4\sqrt{2}\pi = \frac{\pi}{2}(33 + 8\sqrt{2})$$

Exemplo 4.2. Seja M a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ uma função escalar. Uma parametrização da esfera pode ser dada por

$$\chi(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u), \quad r > 0, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Dai

$$\begin{aligned}
\chi_u(u, v) &= (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, -r \sin u) \\
\chi_v(u, v) &= (-r \sin u \sin v, r \sin u \cos v, 0) \\
\|\chi_u \times \chi_v\| &= r^2 \sin u.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\iint_M f dM = \iint_{\mathbb{D}} r^2 \sin^2 u \cdot r^2 \sin u du dv = \frac{4\pi^4}{3}.$$

5 Integral de Superfície de Função Vetorial

Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial, cujo domínio contém uma superfície M . Considere \vec{n} um campo vetorial e normal a M em cada ponto (x, y, z) . Fixado \vec{n} ao longo de M , dizemos que M está **Orientada**. Suponha, então que \vec{n} define a orientação de M , então a componente normal de \vec{F} sobre M , dada por $\vec{F}_{\vec{n}}(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n}$, é uma função real definida em M . O **Elemento Vetorial de Área** da superfície M , denotado por dM , é dado por $dM = \vec{n}d\sigma$, onde $d\sigma$ é o elemento de área de M .

Considere $\chi : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de M . O campo

$$\vec{n} = \frac{\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)}{\|\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)\|}$$

é unitário e normal a M em cada ponto; além disso $\vec{n}(u, v)$ define uma orientação para M ¹. A integral

$$\iint_M \vec{F}(x, y, z) dM = \iint_M \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n} d\sigma$$

é dita a integral do campo \vec{F} sobre M . Portanto definimos

Definição 5.1. Sejam \vec{F} um campo vetorial contínuo definido numa superfície orientada M parametrizada por $\chi(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}$ e $\vec{n} = \frac{\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)}{\|\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)\|}$ (ou $-\vec{n}$).

Definimos a **Integral de Superfície** de \vec{F} sobre M por

$$\iint_M \vec{F} dM = \iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma.$$

Observação 5.1. Como $\vec{F} \cdot \vec{n}$ é uma função escalar, segue da definição de integral de superfície de função escalar que

$$\begin{aligned} \iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM &= \iint_{\mathbb{D}} \vec{F}(\chi(u, v)) \cdot \vec{n}(\chi(u, v)) \cdot \|\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)\| du dv \\ &= \begin{cases} \iint_{\mathbb{D}} \vec{F}(\chi(u, v)) \cdot (\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)) du dv, & \text{se } \vec{n} \\ - \iint_{\mathbb{D}} \vec{F}(\chi(u, v)) \cdot (\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)) du dv, & \text{se } -\vec{n} \end{cases} \end{aligned}$$

Observação 5.2. Quando M é definida explicitamente pela equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{D}$, temos

$$\vec{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}},$$

¹veja que $-\vec{n}$ também define uma orientação para M

e neste caso

$$\iint_M \vec{F} \cdot \vec{n} dM = \iint_{\mathbb{D}} \left[\vec{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1) \right] dx dy$$

e também podemos escrever como

$$\iint_M \vec{F} \cdot \vec{n} dM = \iint \vec{F} \cdot \vec{n} \sec \theta dx dy.$$

Exemplo 5.1. Calcule $\iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, x^2 z)$ e M é a superfície do cilindro $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = 4$ com o vetor normal apontando para fora de M . O cilindro M em questão, tem parametrização dada por

$$\chi(u, v) = (1 + \cos u, 1 + \sin u, v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 4.$$

Um campo de vetores que aponta para fora de S em cada ponto é dado por

$$\chi_u \times \chi_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0).$$

Logo

$$\begin{aligned} \iint_M \vec{F} \cdot \vec{n} dM &= \iint_{\mathbb{D}} [(1 + \cos u, 1 + \sin u, (1 + \cos u)^2 v) \cdot (\cos u, \sin u, 0)] du dv \\ &= \iint_{\mathbb{D}} (\cos u + \sin u + 1) du dv = \int_0^4 \int_0^{2\pi} (\cos u + \sin u + 1) du dv \\ &= \int_0^4 2\pi dv = 8\pi \end{aligned}$$

Exemplo 5.2. Vamos calcular a integral do campo $\vec{F}(x, y, z) = (z, x, -3y^2 z)$ sobre a parte M do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com $0 \leq z \leq 3$ e no 1º octante, orientada de forma que os vetores normais apontem para o eixo do cilindro. Uma parametrização para a parte do cilindro é dada por $\chi(u, v) = (2 \cos u, 2 \sin u, v)$, com $0 \leq u \leq \pi/2$ e $0 \leq v \leq 3$. Assim

$$\vec{F}(\chi(u, v)) = (v, 2 \cos u, -12v \sin^2 u)$$

e

$$\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v) = (2 \cos u, 2 \sin u, 0)$$

como $\chi_u \times \chi_v$ aponta no sentido contrário do problema, temos

$$\begin{aligned}
\iint_M \vec{F}(x, y, z) dM &= - \iint_{\mathbb{D}} (v, 2 \cos u, -12v \sin^2 u) \cdot (2 \cos u, 2 \sin u, 0) dudv \\
&= - \iint_{\mathbb{D}} (2v \cos u + 4 \cos u \sin u) dudv \\
&= - \int_0^3 \int_0^{\pi/2} (2v \cos u + 4 \cos u \sin u) dudv = -15.
\end{aligned}$$

Observação 5.3 (Fluxo). Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo que representa a velocidade e o sentido do escoamento de um fluido passando por uma superfície suave M . A integral $\iint_M \vec{F}(x, y, z) dM$ pode ser interpretada como o **Fluxo** do fluido através de M . De fato, se M é a região plana e \vec{F} é um campo constante, então o fluxo é igual a $\phi(M) = \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot A(M)$, onde $\vec{F} \cdot \vec{n}$ é a componente de \vec{F} na direção normal a M e $A(M)$ é a área de M . Considere agora M uma superfície qualquer. Seja $\chi : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de M . Traçando retas paralelas aos eixos u e v , com as curvas u -parâmetro e v -parâmetro correspondentes a estas retas, decompõem-se M em pequenas superfícies M_{ij} de áreas iguais a $\Delta_{ij}\sigma$, respectivamente. Seja $\chi(u_i, v_j)$ um ponto arbitrário de M_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), então o fluxo de \vec{F} através de M_{ij} é aproximadamente igual a

$$\vec{F}(\chi(u_i, v_j)) \cdot \vec{n} \Delta_{ij}\sigma.$$

Logo, uma aproximação para o fluxo $\phi(M)$ de \vec{F} através de M , é dado por

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}(\chi(u_i, v_j)) \cdot \vec{n} \Delta_{ij}\sigma.$$

Passando o limite desta soma, quando $\Delta = \max\{\Delta_{ij}\sigma; i, j = 1, 2, \dots, n\} \rightarrow 0$ obtém-se o fluxo de \vec{F} através de M que é dado por

$$\begin{aligned}
\phi(M) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}(\chi(u_i, v_j)) \cdot \vec{n} \Delta_{ij}\sigma \\
&= \iint_{\mathbb{D}} \vec{F}(\chi(u, v)) \cdot \vec{n} d\sigma \\
&= \iint_{\mathbb{D}} \vec{F}(\chi(u, v)) \cdot (\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v)) dudv \\
&= \iint_M \vec{F}(x, y, z) dM
\end{aligned}$$

Exemplo 5.3. Calcule o fluxo ϕ do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ através da superfície M do parabolóide $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, com vetor normal apontando

para fora de M . A superfície M é definida por $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{D}$ onde $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Um campo de vetores normais que aponta para fora de M em cada ponto é dado por $\vec{n} = (f_x, f_y, -1) = (2x, 2y, -1)$. Logo

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM = \iint_M [(x, y, -2x^2 - 2y^2) \cdot (2x, 2y, -1)] dM \\ &= \iint_{\mathbb{D}} 4(x^2 + y^2) dx dy.\end{aligned}$$

Usando mudança polar para resolver esta integral dupla, obtemos

$$\iint_{\mathbb{D}} 4(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^3 dr d\theta = 2\pi.$$

Exemplo 5.4. Calcule $\iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x, -x, -1)$ e M é a porção do plano $x + y + z = 0$ situada no interior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. A superfície M é definida por $z = f(x, y) = -x - y$, ou seja, $\chi(x, y) = (x, y, -x - y)$, $(x, y) \in \mathbb{D}$, onde $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x^2 + 2y^2 + 2xy \leq 1\}$. Escolhendo o campo de vetores normais a M dado por $\chi_x \times \chi_y = (1, 1, 1)$, obtemos

$$\begin{aligned}\iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM &= \iint_M \left[(x, -x, -1) \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} \right] dM = \iint_M \frac{-1}{\sqrt{3}} dM \\ &= \frac{-1}{\sqrt{3}} \text{ área de } M = \frac{-\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Definição 5.2. Seja M uma superfície parametrizada por $\chi(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}$. O **Bordo** de M , denotado por ∂M , é a curva em M pela imagem de χ da fronteira $\partial \mathbb{D}$ de \mathbb{D} .

Definição 5.3. Se M é uma superfície orientada por um campo de vetores normais unitários \vec{n} , dizemos que o bordo ∂M de M está **Orientado Positivamente** quando a superfície M está a esquerda do sentido de percurso ao longo de ∂M .

Definição 5.4. Diz-se que uma superfície suave por partes M é orientável, quando cada parte suave de M é orientável, de tal modo que, as curvas em comum dos bordos de duas partes suaves, podem ser orientadas em sentidos opostos.

Exemplo 5.5. Calcule $\iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 2z)$ e M é a união dos planos

$$y - z = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

e

$$y + z = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Veja que $M = M_1 \cup M_2$ onde M_1 é a porção do plano $z = y$ e M_2 é a porção do plano $z = -y$. Daí

$$\iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM = \iint_{M_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM_1 + \iint_{M_2} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM_2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM &= \iint_{M_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM_1 + \iint_{M_2} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM_2 \\ &= \iint_{M_1} (u, v, 2v) \cdot (0, -1, 1) dudv \\ &\quad + \iint_{M_2} (u, v, -2v) \cdot (0, 1, -1) dM_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 v dudv + \int_{-1}^0 \int_0^1 -v dudv \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Teorema 5.1. *Sejam $\chi_1(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}_1$ e $\chi_2(s, t)$, $(s, t) \in \mathbb{D}_2$, parametrizações equivalentes de uma superfície regular orientada M , então*

1. *Se f é uma função escalar contínua definida em M , então*

$$\iint_{\chi_1(\mathbb{D}_1)} f dM = \iint_{\chi_2(\mathbb{D}_2)} f dM.$$

2. *Se \vec{F} é um campo vetorial contínuo definido em M , então*

$$\iint_{\chi_1(\mathbb{D}_1)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM = \begin{cases} \iint_{\chi_2(\mathbb{D}_2)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM, & \vec{n}_{\chi_1} \text{ e } \vec{n}_{\chi_2}, \text{ com mesmo sentido em } M \\ -\iint_{\chi_2(\mathbb{D}_2)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM, & \vec{n}_{\chi_1} \text{ e } \vec{n}_{\chi_2}, \text{ com sentidos opostos em } M \end{cases}$$

Demonstração. 1. Temos que

$$\iint_{\chi_1(\mathbb{D}_1)} f dM = \iint_{\mathbb{D}_1} f(\chi_1(u, v)) \left\| \frac{\partial \chi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \chi_1}{\partial v} \right\| dudv.$$

Mas pelo fato de χ_1 e χ_2 serem equivalentes, segue que

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial s} \times \frac{\partial \chi_2}{\partial t} = \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \chi_1}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)},$$

daí

$$\begin{aligned}
 \iint_{\chi_1(\mathbb{D}_1)} f dM &= \iint_{\mathbb{D}_1} f(\chi_1(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \chi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \chi_1}{\partial v} \right\| dudv \\
 &= \iint_{\mathbb{D}_2} f(\chi_1(u(s, t), v(s, t))) \cdot \left\| \frac{\partial \chi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \chi_1}{\partial v} \right\| \cdot \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| dsdt \\
 &= \iint_{\mathbb{D}_2} f(\chi_2(s, t)) \cdot \left\| \frac{\partial \chi_2}{\partial s} \times \frac{\partial \chi_2}{\partial t} \right\| dsdt \\
 &= \iint_{\chi_2(\mathbb{D}_2)} f dM.
 \end{aligned}$$

2. Sabemos que

$$\iint_{\chi_1(\mathbb{D}_1)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{\mathbb{D}_1} \vec{F}(\chi_1(u, v)) \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \chi_1}{\partial v} \right) dudv. \quad (1)$$

Fazendo a mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
 (1) &= \iint_{\mathbb{D}_2} \vec{F}(\chi_1(u(s, t), v(s, t))) \cdot \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \chi_2}{\partial v} \right) \cdot \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| dsdt \\
 &= \begin{cases} \iint_{\chi_2(\mathbb{D}_2)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM, & \text{se } \vec{n}_{\chi_1} \text{ e } \vec{n}_{\chi_2} \text{ com mesmo sentido em } M \\ -\iint_{\chi_2(\mathbb{D}_2)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM & \text{se } \vec{n}_{\chi_1} \text{ e } \vec{n}_{\chi_2} \text{ com sentidos opostos em } M \end{cases}
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 5.6 (Motivação para o Teorema de Stokes). Considere o campo \vec{F} definido por $\vec{F}(x, y, z) = (2x + y, -yz^2, -y^2z)$ e a parte da esfera S^2 de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ acima do plano xy . Vamos calcular a integral do $\text{Rot } \vec{F}$ sobre a parte da esfera S^2 . Uma parametrização para S^2 , é dada por $\chi(u, v) = (\cos v \sen u, \sen v \sen u, \cos u)$ onde \mathbb{D} é a região retangular $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq v \leq 2\pi$. Como $\text{Rot } \vec{F}(x, y, z) = (0, 0, -1)$ e

$$\chi_u(u, v) \times \chi_v(u, v) = (\cos v \sen^2 u, \sen v \sen^2 u, \sen u \cos v),$$

tem-se

$$\begin{aligned}
 \iint_S \text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_S (0, 0, -1) \cdot (\cos v \sen^2 u, \sen v \sen^2 u, \sen u \cos v) dudv \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sen u \cos u dudv = -\pi
 \end{aligned}$$

Agora considere a integral de \vec{F} sobre o bordo orientado positivamente de S^2 . Encontremos o bordo ∂S^2 de S^2 , encontrando a imagem através de χ de cada um dos segmentos que constituem a fronteira da região \mathbb{D} , orientada positivamente.

Uma parametrização para o segmento de $(0, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ é dada por $\alpha(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq \pi/2$, logo uma parametrização para sua imagem é dada por $\chi(\alpha(t)) = (\sin t, 0, \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$, que é a parte da circunferência sobre a semi-esfera que vai de $(0, 0, 1)$ a $(1, 0, 0)$.

O segmento de $(\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 2\pi)$, tem como imagem a circunferência sobre a semi-esfera, no plano xy e orientada positivamente.

O segmento que vai de $(\pi/2, 2\pi)$ a $(0, 2\pi)$, tem como imagem a parte da circunferência sobre a semi-esfera, que vai de $(1, 0, 0)$ a $(0, 0, 1)$

O segmento que vai de $(0, 2\pi)$ a $(0, 0)$ tem como imagem o ponto $(0, 0, 1)$.

Logo, para encontrar a integral de \vec{F} sobre ∂S^2 , basta integral sobre a circunferência de centro na origem e raio igual a 1, no plano xy orientada positivamente. Uma parametrização para tal circunferência é dada por $\partial S^2 = \beta(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$; assim

$$\begin{aligned} \oint_{\beta=\partial S^2} \vec{F}(x, y, z) d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t + \sin t, 0, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (\sin 2t + \sin^2 t) dt = -\pi. \end{aligned}$$

Portanto

$$\oint_{\beta=\partial S^2} \vec{F}(x, y, z) d\vec{r} = \int \int_{S^2} \text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

6 O Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes relaciona a integral de linha de um campo vetorial ao longo de uma curva fechada α no \mathbb{R}^3 com a integral sobre uma superfície M da qual α é o **bordo**, ou seja, $\alpha = \partial M$.

Teorema de Stokes 6.1. *Sejam M uma superfície orientada, parametrizada por $\chi(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}$, onde \mathbb{D} é uma região compacta do plano uv , limitada por uma curva C^1 por partes, e χ uma aplicação de classe C^2 definida num aberto de \mathbb{R}^2 contendo \mathbb{D} . Se $\vec{F} = (P, Q, R)$ é um campo vetorial de classe C^1 definido num aberto de \mathbb{R}^3 que contém M cujo bordo ∂M está orientado positivamente, então*

$$\oint_{\partial M} \vec{F} d\vec{r} = \iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM.$$

Demonstração. Consideremos M parametrizada por $\chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \mathbb{D}$, e orientada com campo de vetores normais $\vec{n} = \frac{\chi_u \times \chi_v}{\|\chi_u \times \chi_v\|}$, onde

$\chi_u \times \chi_v = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$, é o produto fundamental em notação de Jacobiano.

Sabemos que

$$\begin{aligned}
 \iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM &= \iint_{\mathbb{D}} \text{rot } \vec{F}(\chi(u, v)) \cdot (\chi_u \times \chi_v) du dv \\
 &= \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv \\
 &+ \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv \\
 &+ \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \\
 &= \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du dv \\
 &+ \iint_{\mathbb{D}} \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) du dv \\
 &+ \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) du dv.
 \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\oint_{\partial M} \vec{F} d\vec{r} = \oint_{\partial M} P dx + Q dy + R dz.$$

Para completar, basta verificar as seguintes igualdades

$$\oint_{\partial M} P dx = \iint_{\mathbb{D}} \left[\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv \quad (2)$$

$$\oint_{\partial M} Q dy = \iint_{\mathbb{D}} \left[-\frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv \quad (3)$$

$$\oint_{\partial M} R dz = \iint_{\mathbb{D}} \left[\frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right] du dv \quad (4)$$

pois somando estas três equações obtemos

$$\iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM = \oint_{\partial M} \vec{F} d\vec{r}.$$

Provaremos apenas (2) (as provas de (3) e (4) são análogas)

Suponhamos que $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$ seja uma parametrização da fronteira $\partial\mathbb{D}$ de \mathbb{D} , orientada de modo que $\chi(\alpha(t))$ seja uma parametrização do bordo ∂M de M , orientado positivamente. Então,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial M} P dx &= \int_a^b \left[P(\chi(\alpha(t))) \frac{d}{dt}(x(\alpha(t))) \right] dt \\ &= \int_a^b \left[P(\chi(\alpha(t))) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}(\alpha(t)) \cdot u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}(\alpha(t)) \cdot v'(t) \right) \right] dt \\ &= \int_{\partial\mathbb{D}} P(\chi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) du + \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) dv \right) \\ &= \int_{\partial\mathbb{D}} P(\chi(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) du + P(\chi(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) dv \end{aligned}$$

Como χ é de classe C^2 , podemos aplicar o Teorema de Green a esta última integral, obtendo:

$$\oint_{\partial M} P dx = \iint_{\mathbb{D}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(P \circ (\chi(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \circ (\chi(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right) \right] du dv.$$

Mas

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u} \left((P \circ \chi) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left((P \circ \chi) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial u} (P \circ \chi) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + (P \circ \chi) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial v} (P \circ \chi) \frac{\partial x}{\partial u} - (P \circ \chi) \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} (P \circ \chi) \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} (P \circ \chi) \frac{\partial x}{\partial u} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \end{aligned}$$

Logo

$$\oint_{\partial M} P dx = \iint_{\mathbb{D}} \left[\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv$$

■

Observação 6.1. No caso particular em que M é uma região no plano xy e $\vec{n} = (0, 0, 1)$, então

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} Pdx + Qdy &= \int_{\partial M} \vec{F} d\vec{r} \\ &= \iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM \\ &= \iint_M \left(\frac{-\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot (0, 0, 1) dM \\ &= \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \end{aligned}$$

que é exatamente o Teorema de Green.

Exemplo 6.1. Calcule $\oint_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (yz + x^3, 2xz + 3y^2, xy + 4)$ e α é a curva obtida como interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário.

Veja que a curva α delimita uma superfície M que está definida pela parametrização $\chi(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, com $(x, y) \in \mathbb{D}$, onde $\mathbb{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 \leq 1\}$. O campo vetorial $\text{Rot } \vec{F}$ é dado por $\text{Rot } \vec{F}(x, y, z) = (-x, 0, z)$. Tomando o campo de vetores normais a M dado por $\vec{n} = (1, 1, 1)$, temos, pelo Teorema de Stokes, que

$$\oint_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM$$

e

$$\begin{aligned} \iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM &= \iint_{\mathbb{D}} (-u, 0, 1 - u - v) \cdot (1, 1, 1) dudv \\ &= \iint_{\mathbb{D}} (1 - 2u - v) dudv. \end{aligned}$$

Fazendo mudança polar para resolver esta integral dupla, obtemos

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{D}} (1 - 2u - v) dudv &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - 2r \cos \theta - r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cos \theta - \frac{1}{3} \sin \theta \right) d\theta = \pi \end{aligned}$$

Portanto

$$\oint_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \pi.$$

Exemplo 6.2. Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM$, sendo $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, 0, xy)$ e M a porção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, situada acima do plano $z = 1$.

O bordo ∂M de M é a curva dada pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $z = 1$. Daí $x^2 + y^2 = 3$ e $z = 1$. Uma parametrização para ∂M é dada por $\alpha(t) = (\sqrt{3} \cos t, \sqrt{3} \sin t, 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Pelo Teorema de Stokes

$$\iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM = \oint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \oint_{\partial M} \vec{F} d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (3 \sin t \cos t, 0, 3 \sin t \cos t) \cdot (-\sqrt{3} \sin t, \sqrt{3} \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-3\sqrt{3} \sin^2 t \cos t) dt = -3\sqrt{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM = 0.$$

Exemplo 6.3. Calcule $\iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM$ onde $\vec{F}(x, y, z) = (y, 0, x + y)$ e M é parametrizada por $\chi(u, v) = (u, v, 2 - u^2 - v^2)$, com $u^2 + v^2 \leq 1$.

Pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM = \oint_{\partial M} \vec{F} d\vec{r},$$

onde ∂M é parametrizado por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e

$$\oint_{\partial M} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\pi.$$

Teorema 6.1. Seja $\vec{F} = (P, Q, R)$ um campo vetorial de classe C^1 definido em \mathbb{R}^3 . São equivalentes:

1. $\oint_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = 0$, qualquer que seja a curva fechada α , C^1 por partes.
2. $\int_A^B \vec{F} d\vec{r}$ independe da curva C^1 por partes que os liga os pontos A e B em \mathbb{R}^3 .

3. \vec{F} é um campo gradiente de alguma função f , ou seja, $\nabla f = \vec{F}$.

4. $\text{Rot } \vec{F} = 0$.

Demonstração. 1) \Rightarrow 2)] Já visto.

2) \Rightarrow 3)] Seja α uma curva C^1 por partes ligando $A = (0, 0, 0)$ a $B = (x, y, z)$. Defina $f(x, y, z) = \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$, onde $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$, com $\alpha_1(t) = (t, 0, 0)$, $0 \leq t \leq x_0$, $\alpha_2(t) = (x_0, t, 0)$, $0 \leq t \leq y_0$ e $\alpha_3(t) = (x_0, y_0, t)$ com $0 \leq t \leq z_0$. Então

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} \\ &= \int_0^x P(t, 0, 0) dt + \int_0^y Q(x_0, t, 0) dt + \int_0^z R(x_0, y_0, t) dt. \end{aligned}$$

Daí segue

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R.$$

3) \Rightarrow 4)] Sendo $\vec{F} = \nabla f$, isto significa que $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ e $R = \frac{\partial f}{\partial z}$. Como \vec{F} é de classe C^1 , então f é de classe C^2 . Pela definição do $\text{Rot } \vec{F}$, temos

$$\begin{aligned} \text{Rot } \vec{F} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Schwartz segue $\text{Rot } \vec{F} = 0$.

4) \Rightarrow 1)] Seja α uma curva fechada que é o bordo de uma superfície M tal que o campo \vec{F} seja de classe C^1 em M . Então pelo Teorema de Stokes, temos

$$\oint_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = \iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM = 0,$$

pois, por hipótese, $\text{Rot } \vec{F} = 0$.

■

Exemplo 6.4. Vamos calcular a integral do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (yz + x^2, xz + 3y^2, xy)$ ao longo da curva α obtida como interseção da superfície $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$, $z \geq 0$, com o plano $y = 1$.

Temos que $\text{Rot } \vec{F} = (x - x, y - y, z - z) = \vec{0}$. Então pelo Teorema anterior, a integral de campo independe da parametrização de α e sim dos pontos A e B de \mathbb{R}^3 que liga α . Veja que $A = (3/2, 1, 0)$ e $B = (-3/2, 1, 0)$. Uma função potencial é obtida a partir das equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz + x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz + 3y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy,$$

e obtemos

$$f(x, y, z) = xyz + \frac{x^3}{3} + \phi_1(y, z)$$

$$f(x, y, z) = xyz + y^3 + \phi_2(x, z)$$

$$f(x, y, z) = xyz + \phi_3(x, y).$$

Assim, a função $f(x, y, z) = xyz + \frac{x^3}{3} + y^3$ é uma função potencial de \vec{F} . Daí

$$\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r} = f(B) - f(A) = f(-3/2, 1, 0) - f(3/2, 1, 0) = -9/4.$$

7 Teorema de Gauss(da Divergência)

O Teorema de Gauss relaciona uma integral tripla num sólido de \mathbb{R}^3 com a integral sobre a superfície que é fronteira deste sólido. Seja \mathbf{S} uma região (sólido) limitada de \mathbb{R}^3 , tendo como fronteira uma superfície $\partial\mathbf{S} = M$. Diremos que $\partial\mathbf{S}$ está **orientada positivamente** se o vetor normal em cada ponto de $\partial\mathbf{S}$ aponta para fora de \mathbf{S} .

Definição 7.1. Vejamos algumas definições (sólidos)

1. Região Elementar tipo I: $\mathbf{S}_1 \subset \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{D}_1 \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$

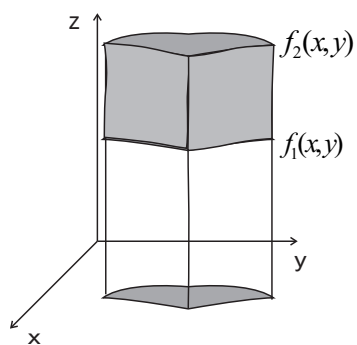


Figura 6.8:

2. Região Elementar tipo II: $S_2 \subset \mathbb{R}^3$.

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, z) \in D_2 \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\}$$

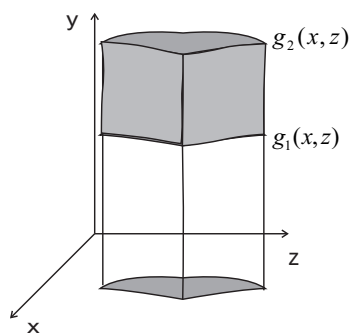


Figura 6.9:

3. Região Elementar tipo III: $S_3 \subset \mathbb{R}^3$.

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (y, z) \in \mathbb{D}_3 \subset \mathbb{R}^2 \text{ e } h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\}$$

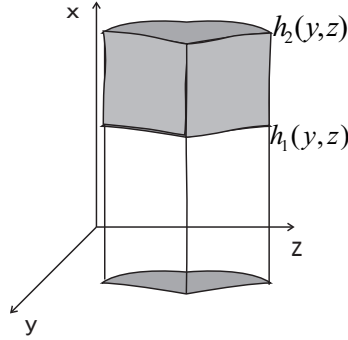


Figura 6.10:

Definição 7.2. Uma região $S \subset \mathbb{R}^3$ é dita **simples** se é do tipo I, tipo II, tipo III, simultaneamente.

Teorema de Gauss 7.1. *Seja S uma região (sólido) compacta de \mathbb{R}^3 cuja fronteira ∂S é uma superfície orientada positivamente. Se \vec{F} é um campo vetorial de classe C^1 num subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 que contém S , então*

$$\iint_{\partial S=M} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM = \iiint_S \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz \quad (5)$$

Demonstração. Suponha que S é uma região simples (tipo I, tipo II, tipo III, simultaneamente). Se $\vec{F} = (P, Q, R)$, por um lado podemos escrever o lado direito de (5) na forma

$$\iiint_S \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_S \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz + \iiint_S \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz + \iiint_S \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

Por outro lado, a integral de superfície da equação (5) é dada por

$$\begin{aligned} \iint_{\partial S=M} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM &= \iint_{\partial S=M} (P, Q, R) \cdot \vec{n} dM = \iint_{\partial S=M} ((P, 0, 0) \cdot \vec{n}) dM \\ &+ \iint_{\partial S=M} ((0, Q, 0) \cdot \vec{n}) dM + \iint_{\partial S=M} ((0, 0, R) \cdot \vec{n}) dM. \end{aligned}$$

O objetivo é mostrar as igualdades

$$\iiint_{\mathbf{S}} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial \mathbf{S}=M} (P, 0, 0) \cdot \vec{n} dM \quad (6)$$

$$\iiint_{\mathbf{S}} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial \mathbf{S}=M} (0, Q, 0) \cdot \vec{n} dM \quad (7)$$

$$\iiint_{\mathbf{S}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial \mathbf{S}=M} (0, 0, R) \cdot \vec{n} dM \quad (8)$$

Vamos provar (8) ((6) e (7) são análogas)

Sendo \mathbf{S} uma região simples, suponhamos que \mathbf{S} é do tipo I, ou seja,

$$\mathbf{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}, (x, y) \in \mathbb{D}_f$$

A região \mathbf{S} é limitada por superfícies:

1. M_1 de equação $z = f_1(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{D}$,
2. M_2 de equação $z = f_2(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{D}$,
3. M_3 que é uma porção de cilindro gerada por uma reta paralela ao eixo z ao longo da fronteira de \mathbb{D} .

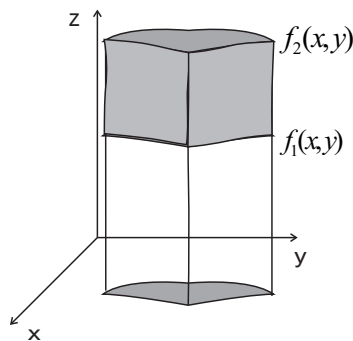


Figura 6.11:

Então Temos

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathbf{S}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\mathbb{D}} \left(\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy \\
&= \iint_{\mathbb{D}} [R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))] dx dy.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial \mathbf{S}=\mathbf{M}} (0, 0, R) \cdot \vec{n} dM &= \iint_{M_1} (0, 0, R) \cdot \vec{n}_1 dM_1 + \iint_{M_2} (0, 0, R) \cdot \vec{n}_2 dM_2 \\
&+ \iint_{M_3} (0, 0, R) \cdot \vec{n}_3 dM_3.
\end{aligned}$$

Veja que em M_3 , um campo de vetores normais unitários é paralelo ao plano xy , portanto $(0, 0, R) \cdot \vec{n}_3 = 0$. Daí

$$\iint_{M_3} (0, 0, R) \cdot \vec{n}_3 dM_3 = 0.$$

Em M_2 , um campo de vetores normais unitários é dado por

$$\vec{n}_2 = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right),$$

pois uma parametrização da superfície M_2 é dada por $\chi(u, v) = (u, v, f_2(u, v))$. Então

$$\begin{aligned}
\iint_{M_2} (0, 0, R) \cdot \vec{n}_2 dM_2 &= \iint_{\mathbb{D}} (0, 0, R(x, y, f_2(x, y))) \cdot \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right) dx dy \\
&= \iint_{\mathbb{D}} R(x, y, f_2(x, y)) dx dy.
\end{aligned}$$

Em M_1 , um campo de vetores normais unitários é dado por

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\iint_{M_1} (0, 0, R) \cdot \vec{n}_1 dM_1 &= \iint_{\mathbb{D}} (0, 0, R(x, y, f_1(x, y))) \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right) dx dy \\
&= \iint_{\mathbb{D}} -R(x, y, f_1(x, y)) dx dy.
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\iint_{\partial \mathbf{S}=M} (0, 0, R) \cdot \vec{n}_1 dM_1 &= \iint_{\mathbb{D}} [R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))] dx dy \\ &= \iiint_{\mathbf{S}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.\end{aligned}$$

De forma análoga

$$\iint_{M=\partial \mathbf{S}} (0, Q, 0) \cdot \vec{n} dM = \iiint_{\mathbf{S}} \frac{\partial Q}{\partial z} dx dy dz$$

e

$$\iint_{M=\partial \mathbf{S}} (0, 0, R) \cdot \vec{n} dM = \iiint_{\mathbf{S}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz.$$

Portanto

$$\iint_{\partial \mathbf{S}=M} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM = \iiint_{\mathbf{S}} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz.$$

■

Quando \mathbf{S} não é simples, podemos fazer $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2 \cup \dots \cup \mathbf{S}_n$, então

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbf{S}} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz &= \iiint_{\mathbf{S}_1} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz + \dots + \iiint_{\mathbf{S}_n} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz \\ &= \iint_{\partial \mathbf{S}_1=M_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM_1 + \dots + \iint_{\partial \mathbf{S}_n=M_n} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM_n \\ &= \iint_{\partial \mathbf{S}=M} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM.\end{aligned}$$

Pois regiões opostas simples têm vetores normais opostos, e portanto as integrais das superfícies dessas regiões se cancelam.

Exemplo 7.1. Calcule $\iint_{\partial \mathbf{S}=M} \vec{F} \cdot \vec{n} dM$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ e M é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 1$ e $z = -1$, com a normal a M apontando para fora do cilindro.

A superfície M é uma superfície fechada, fronteira da região

$$\mathbf{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}.$$

Usando o Teorema de Gauss, temos

$$\iint_{\partial \mathbf{S}=M} \vec{F} \cdot \vec{n} dM = \iiint_{\mathbf{S}} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz.$$

Como $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = y^2 + x^2$, então

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbf{S}} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz &= \iiint_{\mathbf{S}} (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dz \right) dx dy \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Fazendo mudança de coordenadas polares para resolver a integral dupla, obtemos

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Assim

$$\iint_{\partial \mathbf{S}=M} \vec{F} \cdot \vec{n} dM = \pi.$$

Exemplo 7.2. Seja $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ um campo de vetores em \mathbb{R}^3 . Calcule $\iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM$ através da semi-esfera M de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$. Pelo Teorema da Divergência(Gauss)

$$\iint_{M=\partial \mathbf{S}} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM = \iiint_{\mathbf{S}} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz.$$

onde $\mathbf{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$. Mas $\operatorname{div} \vec{F} = 3$. Daí

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbf{S}} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz &= \iiint_{\mathbf{S}} 3 dx dy dz \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 3\rho^2 \sin \varphi d\varphi d\theta d\rho = 54\pi, \end{aligned}$$

transformado em coordenadas esféricas

$$\{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}.$$

Exemplo 7.3. Se uma região \mathbf{S} em \mathbb{R}^3 e sua fronteira $\partial\mathbf{S} = M$, têm as hipóteses do Teorema de Gauss, então o volume de \mathbf{S} , $V(\mathbf{S})$, é dado por

$$V(\mathbf{S}) = \frac{1}{3} \iint_{\partial\mathbf{S}=M} \vec{r} \cdot \vec{n} dM.$$

De fato, pelo Teorema de Gauss, tem-se

$$\iint_{\partial\mathbf{S}} \vec{r} \cdot \vec{n} dM = \iiint_{\mathbf{S}} \operatorname{div} \vec{r} dV = 3 \iiint_{\mathbf{S}} dV = 3V(\mathbf{S}),$$

portanto

$$V(\mathbf{S}) = \frac{1}{3} \iint_{\partial\mathbf{S}=M} \vec{r} \cdot \vec{n} dM.$$

Observação 7.1. Vimos no Capítulo 5, que sob certas condições, um campo vetorial tem um potencial vetorial se, e somente se, ele é solenoidal. Veremos agora um conjunto onde um campo solenoidal não admite um potencial vetorial nesse conjunto.

Proposição 6.1. *Seja $\mathbf{S} = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ e $\vec{F}(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, então \vec{F} é solenoidal em \mathbf{S} , mas não tem um potencial vetorial em \mathbf{S} .*

Demonstração. Calculando a divergência de \vec{F} , tem-se $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \neq 0$, logo \vec{F} é solenoidal em \mathbf{S} . Considere agora, \mathbf{S}_1 uma região compacta interna a uma superfície fechada (suave por partes) M e de forma que $(0, 0, 0)$ seja um ponto interior de \mathbf{S}_1 ; então existe uma esfera S^2 de centro em $(0, 0, 0)$ e raio r contida em \mathbf{S} ; além disso, a região compacta \bar{S} entre S^2 e M , é simplesmente conexa e \vec{F} é de classe C^1 em \bar{S} . Logo, pelo Teorema de Gauss

$$0 = \iiint_{\bar{S}} \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) dV = \iint_{S^2} \vec{F}(x, y, z) dS^2 + \iint_M \vec{F}(x, y, z) dM$$

onde $\partial\bar{S} = S^2 \cup M$ está orientada com os vetores normais a S^2 apontando para a origem e com vetores normais a M apontando para fora de \mathbf{S} , assim

$$\iint_M \vec{F}(x, y, z) dM = \iint_{S^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} dM = 4\pi.$$

Portanto, não existe um campo vetorial $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F} = \operatorname{Rot} \vec{G}$ em \mathbf{S} , pois se existisse, $\iint_M \vec{F}(x, y, z) dM = 0$ uma vez que M é fechada. ■

8 Algumas Identidades importantes

Lema 8.1. Para f e g , funções escalares, $\operatorname{div}(f\nabla g) = f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g$.

Demonstração. Fica como exercício. ■

Proposição 6.2 (Primeira Identidade de Green). Se f e g são funções escalares de classe C^2 numa região S limitada pela superfície fechada M , então

$$\iint_M f\nabla g dM = \iiint_S (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dV.$$

Demonstração. Usando o resultado do lema 8.1, e integrando para a região S , temos

$$\iiint_S \operatorname{div}(f\nabla g) dV = \iiint_S (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dV.$$

Aplicando o teorema da Divergência,

$$\iiint_S \operatorname{div}(f\nabla g) dV = \iint_M f\nabla g dM.$$

Portanto

$$\iint_M f\nabla g dM = \iiint_S (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dV.$$

■

Proposição 6.3 (Segunda Identidade de Green). Se f e g são funções escalares de classe C^2 numa região S limitada pela superfície fechada M , então

$$\iint_M (f\nabla g - g\nabla f) dM = \iiint_S (f\Delta g - g\Delta f) dV.$$

Demonstração. Pela Primeira Identidade de Green, temos

$$\iint_M f\nabla g dM = \iiint_S (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dV \tag{9}$$

e

$$\iint_M g\nabla f dM = \iiint_S (g\Delta f + \nabla g \cdot \nabla f) dV \tag{10}$$

fazendo a diferença entre 9 e 10, temos

$$\iint_M (f\nabla g - g\nabla f) dM = \iiint_S (f\Delta g - g\Delta f) dV.$$

■

Corolário 8.1. Se g é harmônica na região \mathbf{S} limitada por M , então

$$\iint_M \nabla g dM = \iint_M \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} dM = 0.$$

Demonstração. Basta fazer $f \equiv 1$, no primeiro teorema de Green, e então

$$\iint_M \nabla g dM = \iiint_{\mathbf{S}} \Delta g dV,$$

pois $\nabla 1 = 0$, e sendo g harmônica, temos $\Delta g = 0$. Logo

$$\iint_M \nabla g dM = \iint_M \nabla g \cdot \vec{n} = \iint_M \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} dM = 0.$$

■

Corolário 8.2. Se f e g são harmônicas numa região \mathbf{S} limitada por M , então

$$\iint_M (f \nabla g - g \nabla f) dM = \iint_M \left(f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right) dM = 0.$$

Demonstração. Se f e g são harmônicas, temos $\Delta f = 0 = \Delta g$. Daí, pelo Segundo Teorema de Green,

$$\iint_M (f \nabla g - g \nabla f) dM = \iiint_{\mathbf{S}} (f \Delta g - g \Delta f) dV = 0.$$

■

Observação 8.1. Podemos dar uma outra interpretação da divergência. Tal como em [7], suponha, sem perda de generalidade, um sólido esférico $\mathbf{S}(r)$ de raio $r > 0$ com centro em um ponto $a \in \mathbb{R}^3$, e seja $\partial \mathbf{S}(r) = M$ a fronteira de $\mathbf{S}(r)$. Seja \vec{F} um campo de vetores continuamente diferenciável em $\mathbf{S}(r)$. Então se $V_{\mathbf{S}(r)}$ denota o volume de $\mathbf{S}(r)$, e se \vec{n} é o vetor normal a $\partial \mathbf{S}(r)$, então temos

$$\operatorname{div} \vec{F}(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V_{\mathbf{S}(r)}} \iint_{\partial \mathbf{S}(r)=M} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM.$$

De fato, seja $\operatorname{div} \vec{F}$. Se $\epsilon > 0$ é dado devemos achar um $\delta > 0$ tal que

$$\left| \operatorname{div} \vec{F}(a) - \frac{1}{V_{\mathbf{S}(r)}} \iint_{\partial \mathbf{S}(r)} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM \right| < \epsilon$$

sempre que $0 < r < \delta$. Como $\operatorname{div} \vec{F}$ é contínuo em a , para um ϵ dado existe uma bola $B(a, h)$, $h > 0$ do \mathbb{R}^3 tal que

$$|\operatorname{div} \vec{F}(x) - \operatorname{div} \vec{F}(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

sempre que $x \in B(a, h)$. Portanto, podemos escrever

$$\operatorname{div} \vec{F}(a) = \operatorname{div} \vec{F}(x) + (\operatorname{div} \vec{F}(a) - \operatorname{div} \vec{F}(x)).$$

daí

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbf{S}(r)} \operatorname{div} \vec{F}(a) dx dy dz &= \iiint_{\mathbf{S}(r)} \operatorname{div} \vec{F}(x) dx dy dz \\ &+ \iiint_{\mathbf{S}(r)} (\operatorname{div} \vec{F}(a) - \operatorname{div} \vec{F}(x)) dx dy dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Aplicando o Teorema da Divergência em (11), temos

$$\operatorname{div} \vec{F}(a) \cdot V_{\mathbf{S}(r)} = \iint_{\partial \mathbf{S}(r)=M} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM + \iiint_{\mathbf{S}(r)} (\operatorname{div} \vec{F}(a) - \operatorname{div} \vec{F}(x)) dx dy dz$$

o que implica

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{div} \vec{F}(a) \cdot V_{\mathbf{S}(r)} - \iint_{\partial \mathbf{S}(r)=M} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM \right| &\leq \iiint_{\mathbf{S}(r)} |\operatorname{div} \vec{F}(a) - \operatorname{div} \vec{F}(x)| dx dy dz \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \cdot V_{\mathbf{S}(r)} < \epsilon \cdot V_{\mathbf{S}(r)}. \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{1}{V_{\mathbf{S}(r)}} \left| \operatorname{div} \vec{F}(a) \cdot V_{\mathbf{S}(r)} - \iint_{\partial \mathbf{S}(r)=M} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM \right| < \epsilon.$$

Logo

$$\left| \operatorname{div} \vec{F}(a) - \frac{1}{V_{\mathbf{S}(r)}} \iint_{\partial \mathbf{S}(r)=M} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM \right| < \epsilon.$$

Portanto

$$\operatorname{div} \vec{F}(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{V_{\mathbf{S}(r)}} \iint_{\partial \mathbf{S}(r)=M} (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM.$$

Daí, $\operatorname{div} \vec{F}(a)$ é o valor limite do fluxo por unidade de volume sobre uma superfície esférica de centro a , quando o raio r da esfera tende a zero.

9 Exercícios

1. Calcule a área

(a) $\chi(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.

(b) $\chi(u, v) = (u, v, 2 - u - v)$, $u^2 + v^2 \leq 1$.

2. Calcule $\iint_{M=\chi(u,v)} f(x, y, z) dM$ sendo

(a) $f(x, y, z) = x$ e $\chi(u, v) = (u, v, u^2 + v)$, $0 \leq u \leq 1$ e $u^2 \leq v \leq 1$.

(b) $f(x, y, z) = xy$ e $\chi(u, v) = (u - v, u + v, 2u + v + 1)$, $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq u$.

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ e $\chi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $u^2 + v^2 \leq 1$.

(d) $f(x, y, z) = y$ e $\chi(u, v) = (u, v, 1 - u^2)$, $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq \sqrt{4}$.

(e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ e χ é a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 1$.

3. Calcular $\iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM$, sendo $\vec{F} = (y, -x)$ e M a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no 1º octante com a normal apontando para fora.

4. Calcular $\iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM$, sendo $\vec{F} = (x, y, z)$, M a parte do plano $2x + 3y + 4z = 12$ cortada pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ e $y = 2$, e \vec{n} a normal com componente z não negativa.

5. Calcule $\iint_M (x^2 + y^2) \cdot z dM$ onde M é a parte da superfície cônica $z^2 = x^2 + y^2$ limitada por $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, com $z \geq 0$.

6. Calcule $\iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM$, onde $\vec{F} = (x, y, z) = (yz, xz, x^2 + y^2)$ e M é a superfície de revolução obtida girando-se o segmento de reta que liga os pontos $(1, 0, 1)$ e $(0, 0, 3)$ em torno do eixo z , onde o vetor normal \vec{n} tem componente z não negativa.

Sobre o Teorema de Stokes: Usar o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha abaixo

7. $\oint_{\alpha} (y^2 dx + x^2 dz)$, onde α é o contorno da parte do plano $2x + y + z = 4$ que está no 1º octante, no sentido anti-horário.

8. $\oint_{\alpha} (y + 2z) dx + (2z + x) dy + (x + y) dz$, onde α é a interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $x = a/2$.

9. $\oint_{\alpha} x dx + y dy + z^2 dz$, onde α é o contorno do retângulo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$, $z = 4$, no sentido anti-horário.

10. $\oint_{\alpha} e^{x^2} dx + (x + z) dy + (2x - z) dz$, onde α é o contorno da parte do plano $x + 2y + z = 4$ que está no 1º octante, no sentido anti-horário.

11. $\oint_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = (y^3 \cos(xz), 2x^2 + z^2, y(x - z))$ e α é o retângulo $0 \leq x \leq 4, 0 \leq z \leq 1$, no plano $y = 2$.
12. Calcule $\int_{\alpha} \vec{F} d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (z^2, xy, 2xy)$ e α é a curva obtida como interseção da superfície $z = 1 - y^2, z \geq 0$, com o plano $2x + 3z = 6$, orientada no sentido anti-horário.
13. $\oint_{\alpha} ydx + (x + y + 2z)dy + (x + 2y)dz$, onde α é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = y$, orientada no sentido anti-horário.
14. $\oint_{\alpha} (y - x)dx + (x - z)dy + (x - y)dz$, onde α é o retângulo de vértices $(0, 0, 5), (0, 2, 5), (-1, 0, 5)$ e $(-1, 2, 5)$, no sentido horário.
15. $\oint_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F} = (e^{x^2} + 2y, e^{x^2} + x, e^{x^2})$ e α a elipse $x = \cos t, y = 2 \sin t, z = 2, 0 \leq t \leq 2\pi$.
16. $\oint_{\alpha} ydx + zdy + xdz$ onde α é a curva de interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com o plano $x + y + z = 0$.
17. $\oint_{\alpha} (x^2 + 2y^3)dx + xy^2dy + \sqrt[3]{z^2 + 1}dz$, sendo α a circunferência $x = a \cos t, y = a \sin t, z = 2, 0 \leq t \leq 2\pi$.
18. Usar o **Teorema de Gauss** para calcular o fluxo do campo vetorial \vec{F} , através da superfície M do sólido S , sendo:
 - (a) $\vec{F} = (0, -y, z)$, e S o cilindro $x^2 + y^2 \leq 16, -2 \leq z \leq 2$
 - (b) $\vec{F} = (xy, yz, xz)$ e S o cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 4$.
 - (c) $\vec{F} = (2, 2, 2)$ e S a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.
19. Determine se \vec{F} é ou não um campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine um potencial de \vec{F}
 - (a) $\vec{F}(x, y, z) = (x + z)i - (y + z)j + (x - y)k$ em \mathbb{R}^3 .
 - (b) $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2)i + (3x^3y - 3xy)j - (4z^2y^2 + 2x^3z)k$ em \mathbb{R}^3
20. Mostre que as integrais independem do caminho e calcule-as:
 - (a) $\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xydx + (x^2 - y^2)dy$
 - (b) $\int_{(0,0)}^{(a,b)} \sin ydx + x \cos ydy$
21. Mostre que se \vec{v} é uma solução da equação $\text{Rot } \vec{v} = \vec{u}$, para \vec{u} de classe C^1 em \mathbb{R}^3 , então todas as soluções são da forma $\vec{v} + \text{grad } f$ para funções $f(x, y, z)$ que possuem derivadas parciais em \mathbb{R}^3 .

22. Uma função $f(x, y, z)$ é dita Harmônica se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Mostre que, se f é de classe C^2 e harmônica e M é uma superfície fechada, então $\iint_M (\nabla f \cdot \vec{n}) dM = 0$.
23. Dada a superfície de revolução $\chi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$, $0 \leq u \leq 4$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Calcule sua área.
24. calcule as integrais de superfícies
- $\iint_M x^2 z dM$, onde M é o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com $0 \leq z \leq 1$.
 - $\iint_M z dM$, sendo M a semi-esfera positiva de centro na origem e raio 1.
 - $\iint_M xz dM$, onde M é a parte do plano $z = 4x + 2y$ limitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.
25. Calcule $\iint_M (\vec{F} \cdot \vec{n}) dM$ nos casos
- $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ e M é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
 - $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ e M é o triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.
26. Calcular o fluxo do campo $\vec{F} = zi + xj - 3y^2zk$ sobre o cilindro $x^2 + y^2 = 16$ situado no 1º octante entre $z = 0$ e $z = 5 - y$.
27. Seja M uma superfície descrita por $z = f(x, y)$, onde (x, y) variam numa região plana fechada \mathbb{D} , projeção de M sobre o plano xy . Sejam $\vec{F} = Pi + Qj + Rk$ e \vec{n} a normal unitária a M tendo componente z não negativa. Mostre que
- $$\iint_M \vec{F} \cdot \vec{n} dM = \iint_{\mathbb{D}} \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx dy$$
28. Use o Teorema de Stokes para mostrar que a integral de linha é igual ao valor dado
- $\oint_{\alpha} y dx + z dy + x dz = -2\pi\sqrt{2}$, onde α é a curva obtida como interseção do plano $x + y = 2$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.
 - $\oint_{\alpha} (3y + z) dx + (x + 4y) dy + (2x + y) dz = -\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{4}$, onde α é a curva obtida como interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com o plano $y + z = a$.
 - $\oint_{\alpha} (8x - 2y) dx + y dy + 3z dz = 4\sqrt{3}$, onde α é a fronteira do triângulo equilátero situado no plano $-3x + \sqrt{3}z + 6 = 0$ de vértices $P = (2, 2, 0)$, $Q = (2, 6, 0)$ e $R = (2 + \sqrt{3}, 4, 3)$.
29. Use o Teorema de Gauss para calcular $\iint_M (\text{Rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) dM$, onde M é a união do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, com a porção do plano $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, orientada com vetor normal exterior, e $\vec{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$.

30. Sejam f e g duas funções reais de duas variáveis reais, com derivadas parciais de 2ª ordem contínuas. Seja \mathbb{D} uma região plana do plano xOy , cuja fronteira é a curva fechada α . Usando o Teorema de Stokes, prove que

$$\oint_{\alpha} f \nabla g f \vec{r} = \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dM,$$

onde $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ é o Jacobiano de u e v em relação a x e y .

31. Seja $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^3$ o sólido simples de fronteira $\partial\mathbf{S} = M$ e seja f uma função de classe C^n , tal que o Laplaciano $\Delta f = 0$ num aberto contendo \mathbf{S} e a sua fronteira. Sendo \vec{n} a normal unitária exterior a M e $D_{\vec{n}}f$ a derivada direcional de f segundo a direção de \vec{n} , mostre que

$$(a) \iint_M D_{\vec{n}}f dM = 0$$

$$(b) \iint_M f D_{\vec{n}}f dM = \iiint_{\mathbf{S}} \|\nabla f\|^2 dx dy dz.$$

32. Seja \mathbf{S} o sólido de uma superfície fechada M . Sejam f, g funções. Mostre que

$$(a) \iint_M f \cdot (\nabla g) \cdot \vec{n} dM = \iiint_{\mathbf{S}} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$$

$$(b) \iint_M (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \vec{n} dM = \iiint_{\mathbf{S}} (f \Delta g - g \Delta f) dV$$

Apêndice A

Vetores

Neste capítulo, faremos um estudo de vetores sem muitos detalhes, apenas recordando alguns conceitos e propriedades que serão úteis nos próximos capítulos.

1 Equipolência

Dois segmentos são **Equipolentes** quando têm a mesma **medida** (módulo), a mesma **direção** e o mesmo **sentido**.

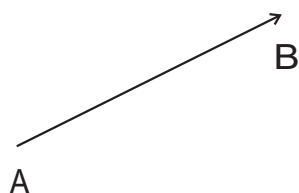


Figura A.1: Segmento AB

Observação 1.1. Note que

- (a) Todos os segmentos nulos são equipolentes entre si.
- (b) Todos os segmentos coincidentes são equipolentes
- (c) Todos os segmentos equipolentes de mesma origem são coincidentes.

1.1 Propriedades de Equipolência

- (a) **Reflexiva** : \overrightarrow{AB} é equipolente a si mesmo : $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$
- (b) **simétrica** : $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ então $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$
- (c) **Transitiva** : $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$ então $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.
- (d) Dado um segmento orientado \overrightarrow{AB} e um ponto C existe um, e somente um, segmento orientado \overrightarrow{CD} equipolente ao segmento \overrightarrow{AB} com origem no ponto C .

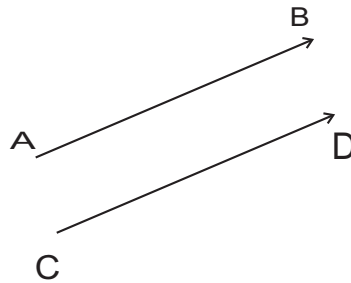


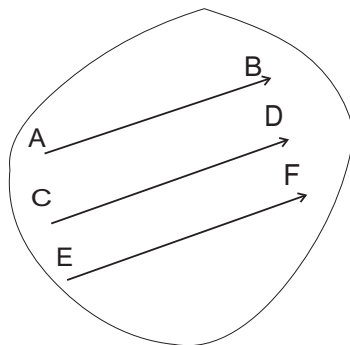
Figura A.2: Segmento CD equipolente ao segmento AB

2 Classe de Equivalência

Dado um segmento orientado \overrightarrow{AB} , é possível construir infinitos segmentos equipolentes a \overrightarrow{AB} . Todos estes infinitos segmentos orientados equipolentes ao segmento \overrightarrow{AB} e o próprio segmento \overrightarrow{AB} constituem um conjunto de segmentos equipolentes entre si. A este conjunto damos o nome de **Classe de Equivalência** do segmento orientado \overrightarrow{AB} .

3 Vetor

Representamos uma **Classe de Equivalência** formada por segmentos orientados equipolentes entre si por um ente geométrico chamado **Vetor**.

Figura A.3: Classe de Equivalência do segmento AB

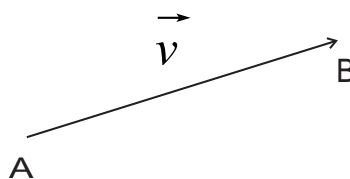
Notação : \vec{v} ou $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Daí

$$A + \vec{v} = B \implies \vec{v} = B - A$$

e

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A.$$

Figura A.4: Vetor $\vec{v} = AB$

3.1 Operações com Vetores

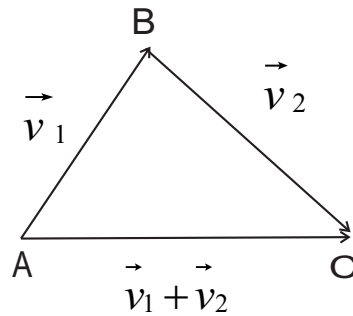
Adição de Vetores: Dados os vetores

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{BC} = C - B$$

então

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = C - A = \overrightarrow{AC}$$

Figura A.5: Vetor soma $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

3.2 Propriedades da Adição

- (a) **Comutativa:** $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$
- (b) **Associativa:** $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$
- (c) **Elemento Neutro:** $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v}$
- (d) **Elemento Simétrico:** $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

4 Produto Escalar

O **Produto Escalar** de dois vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , que indicaremos por $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, é o número real dado por

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos \theta$$

onde

$$\theta = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right), \quad \vec{u} \neq 0 \text{ e } \vec{v} \neq 0,$$

é o ângulo entre \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .

Observação 4.1. *Temos*

- (a) Se $\theta = 0$, os dois vetores têm o mesmo sentido
- (b) Se $\theta = \pi$, eles têm sentidos opostos
- (c) Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, são ortogonais.

4.1 Propriedades do Produto Escalar

- (a) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow$ um dos vetores for nulo ou se forem ortogonais.
- (b) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$
- (c) $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$
- (d) $(a\vec{v}_1) \cdot (b\vec{v}_2) = (ab)\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, a e b escalares
- (e) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$

Consequências:

- (a) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \|\vec{v}_1\|^2 + 2 \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \|\vec{v}_2\|^2$
- (b) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \|\vec{v}_1\|^2 - \|\vec{v}_2\|^2$

4.2 Expressão Cartesiana do Produto Escalar

Dados $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em relação a um sistema de base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ¹, temos

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\ &= x_1x_2\vec{i} \cdot \vec{i} + x_1y_2\vec{i} \cdot \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \cdot \vec{k} + x_2y_1\vec{j} \cdot \vec{i} + y_1y_2\vec{j} \cdot \vec{j} \\ &\quad + y_1z_2\vec{j} \cdot \vec{k} + x_2z_1\vec{i} \cdot \vec{k} + y_2z_1\vec{j} \cdot \vec{k} + z_1z_2\vec{k} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

mas

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{i}\| \cos(\vec{i}, \vec{i}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1$$

analogamente

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

e

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0,$$

pois são ortogonais. Então

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

¹Em geral, usaremos $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, chamados vetores canônicos do \mathbb{R}^3

5 Produto de um Vetor por um Escalar

Dado $m \neq 0$ real e o vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, o produto do vetor \vec{v} pelo escalar m é um vetor, denotado por $m \cdot \vec{v}$, tal que:

- (a) **Módulo(Norma):** $\|m \cdot \vec{v}\| = |m| \cdot \|\vec{v}\|$, onde $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
- (b) **Direção de $m \cdot \vec{v}$:** é a mesma de \vec{v}
- (c) **Sentido de $m \cdot \vec{v}$:** mesmo de \vec{v} , se $m > 0$ e contrário de \vec{v} , se $m < 0$.

Observação 5.1.

Se $m = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou ambos nulos, o vetor produto é $m \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Se $m = -1$ e $\vec{v} \neq \vec{0} \implies m \cdot \vec{v} = -\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$, ou seja, um vetor cujo módulo é o de \vec{v} , mas de sentido oposto.

Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $m = 1/\|\vec{v}\|$, então obtemos um vetor unitário $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$ cuja norma(módulo) é $\|\vec{u}\| = 1$ e cuja direção e sentido são os mesmos de \vec{v} .

5.1 Propriedades do Produto de um Vetor por um Escalar

- (a) **Comutativa :** $m \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot m$
- (b) **Distributiva :**
 - 2.1 . $(m + n) \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{v} + n \cdot \vec{v}$ (em relação à adição de escalares)
 - 2.2 . $m \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = m \cdot \vec{v}_1 + m \cdot \vec{v}_2$ (em relação à adição de vetores)
- (c) **Associativa :** $m \cdot (n \cdot \vec{v}) = (mn) \cdot \vec{v}$.

6 Produto Vetorial

O **Produto Vetorial** de dois vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , que denotaremos por $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, é um vetor \vec{v} tal que

- (a) $\|\vec{v}\| = \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \sin \theta$, onde $\theta = \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.
- (b) A direção de \vec{v} é normal ao plano determinado por \vec{v}_1 e \vec{v}_2 .
- (c) O sentido de \vec{v} é aquele em que o triedro formado pelos vetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 e $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ é orientado positivamente.

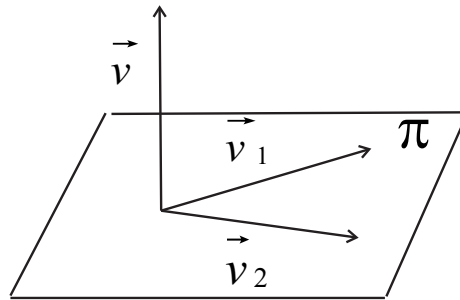


Figura A.6: Vetor $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

6.1 Propriedades do Produto Vetorial

- (a) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow$ um dos vetores for nulo ou quando eles possuem a mesma direção.
- (b) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$
- (c) $(a\vec{v}_1) \times (b\vec{v}_2) = (ab)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$
- (d) $(\vec{v}_2 + \vec{v}_3) \times \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \times \vec{v}_1 + \vec{v}_3 \times \vec{v}_1$

Observação 6.1. Tem-se que $\vec{v} \times \vec{v} = 0$

6.2 Expressão Cartesiana do Produto Vetorial

Sejam $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em relação ao sistema ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Então

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$$

mas

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$$

$$-\vec{i} \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}$$

dai

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

6.3 Interpretação Geométrica do módulo do Produto Vetorial

Sejam os vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 . Consideremos a norma do produto vetorial entre eles

$$\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \text{sen } \theta.$$

Consideremos também, o paralelogramo construído sobre os dois vetores. Sua área A é dada por

$$A = \|\vec{v}_1\| \cdot h;$$

mas $h = \|\vec{v}_2\| \text{sen } \theta$, então

$$A = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \text{sen } \theta \implies A = \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|.$$

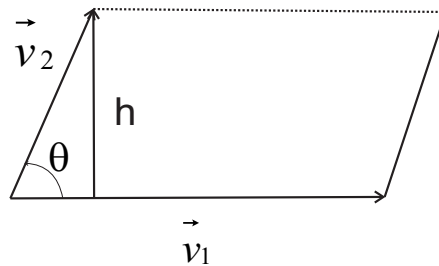


Figura A.7: Paralelogramo de lados \vec{v}_1 e \vec{v}_2

7 Produto Misto

Dados três vetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , chama-se **Produto Misto** ao número real resultado do produto $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$, portanto é o produto escalar do vetor \vec{v}_1 pelo vetor $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$

Notação : $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$

7.1 Expressão Cartesiana do Produto Misto

Sejam $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ em relação à base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Então

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

7.2 Interpretação Geométrica do Produto Misto

O produto $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ é um vetor cuja norma é, numericamente igual a área do paralelogramo construído sobre \vec{v}_2 e \vec{v}_3 . O produto de \vec{v}_1 escalar $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$, por definição, é

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) &= \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\| \cdot \cos \theta \\ &= \|\vec{v}_2 \times \vec{v}_3\| \cdot \|\vec{v}_1\| \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Logo

$$|\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)| = \text{volume}.$$

O módulo do produto misto $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$ é igual, numericamente, ao volume do paralelepípedo de arestas \vec{v}_1, \vec{v}_2 e \vec{v}_3 . O volume do tetraedro $OABC$ é a 6ª parte do volume do paralelepípedo, portanto

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} |[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]|$$

Observação 7.1. : No volume consideramos módulo porque o produto misto pode ser negativo, quando $\theta > \pi/2$.

8 Exercícios

- (a) Calcule $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ com $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v}_2 = \vec{i} + 4\vec{k}$.
- (b) Determine os vetores unitários ortogonais aos vetores $\vec{v}_1 = (-4, 4, 2)$ e $\vec{v}_2 = (2, 2, -1)$.
- (c) Determine o vetor \vec{v} que satisfaça as condições:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot (3\vec{i} + 2\vec{j}) &= 6 \\ \vec{v} \times (2\vec{j} + 3\vec{k}) &= 2\vec{i}\end{aligned}$$

- (d) Determine a área do triângulo de vértices $A(2, 3, 1)$, $B(2, -2, 0)$ e $C(1, 2, -3)$.
- (e) Dois vetores \vec{a} e \vec{b} têm módulos iguais a 5 e 6, respectivamente, e formam o ângulo de 60° graus. calcule $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ e $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.
- (f) Dados $\vec{v}_1 = (2, -3, -6)$ e $\vec{v}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$, determine:
- A projeção de \vec{v}_2 sobre \vec{v}_1
 - O vetor projeção de \vec{v}_2 sobre \vec{v}_1
- (g) Tem-se os vetores $\vec{u} = (x, -4, 3)$ e $\vec{v} = (x, 2x, 5)$. Determine os valores de x para que o vetor \vec{u} seja ortogonal a \vec{v} .
- (h) (**Lei dos Cossenos**): Se três lados de um triângulo medem $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ e $\|\vec{w}\|$ e se o ângulo oposto ao lado de comprimento $\|\vec{w}\|$ é θ , então

$$\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

- (i) (**Cauchy-Schwarz**): Demonstre a seguinte desigualdade

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|, \quad \forall \vec{u}, \vec{v}$$

(Sugestão: Desenvolva $\|m\vec{u} + \vec{v}\|^2$.)

- (j) Demostre vetorialmente o Teorema de Pitágoras
- (k) Demonstre vetorialmente que todo ângulo inscrito num semi-circulo é reto
- (l) Seja ABC um triângulo isósceles, retângulo em A . Sejam BM e CP as medians relativas a AC e AB , respectivamente. Calcule o ângulo dos vetores \vec{BM} e \vec{CP}
- (m) Dados $\vec{u} = (3, -1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 3, 0)$, determine \vec{w} tal que

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = -2$$

$$\vec{w} \times \vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

- (n) Prove que se \vec{u} e \vec{v} são não colineares então $x\vec{u} + y\vec{v} = 0$ implica $x = y = 0$.

- (o) Se $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{z} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, ache escalares a, b, c tais que $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
- (p) Mostre que $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} \cdot \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$.
- (q) Mostre que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.
- (r) Mostre que $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.
- (s) (**Identidade de Lagrange**): Se \vec{u} e \vec{v} são vetores arbitrários então,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

- (t) Mostre que
- i. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w}(\vec{u} \cdot \vec{v})$
 - ii. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{w})$
- (u) (**Identidade de Jacobi**): Mostre que

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = 0.$$

Referências Bibliográficas

- [1] CARMO, do Manfredo Perdigão ; **Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro, Impa, 1998.
- [2] TENENBLAT, K.; **Introdução à Geometria Diferencial**. 2^a. ed. Brasília: Editora da UnB, 1988
- [3] GRAY, A.; **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces**. 2^a. ed. Flórida, 1997
- [4] PINTO, D; MORGADO, M. C. F.; **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. Editora UFRJ. Rio de Janeiro, 2001.
- [5] GUIDORIZZI, H. L.; **Um Curso de Cálculo**. LTC Editora, quinta edição, vol. 2, Rio de Janeiro, 2002.
- [6] GUIDORIZZI, H. L.; **Um Curso de Cálculo**. LTC Editora, quinta edição, vol. 3, Rio de Janeiro, 2002.
- [7] APOSTOL, T. M.; **Calculus**. Vol II. 2. ed. John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [8] HSU, H. P.; **Análise Vetorial**. LTC Editora, Rio de Janeiro, 1972.
- [9] SANTOS, dos Nathan Moreira; **Vetores e matrizes: Uma Introdução à álgebra Linear**. . 4^a ed. São Paulo, 2007.

Índice Remissivo

- área, 100, 117–119, 121, 125, 148, 150, 159, 161
- ângulo, 29, 35, 41–43, 155, 161
- aberto, 45, 97
- astróide, 29
- base ortonormal, 156
- bola aberta, 44
- bola fechada, 44
- bordo, 128, 130, 133, 136
- campo gradiente, 95
- campo conservativo, 58, 95, 96, 103, 108
- campo de força, 92
- campo escalar, 49, 58, 81, 91
- campo gradiente, 136, 149
- campo vetorial, 53, 80, 81, 89, 91, 92, 94, 102, 125, 127, 131, 135, 139, 144
- campos conservativos, 102
- catenária, 29
- Cauchy-Schwartz, 161
- ciclóide, 29
- cilindro, 41, 43, 115, 123, 126, 134, 140, 142, 149, 150
- circunferência, 17, 27, 30, 92, 108, 110, 131, 149
- Cissóide de Diocles, 29
- compacto, 47
- componete tangencial, 101
- comprimento, 7, 22
- comprimento de arco, 21, 23, 27, 29, 30, 33–36, 41
- cone, 41, 118, 149
- conjunto aberto, 47
- conservativo, 58, 94, 104
- contínua, 11, 14, 15, 22, 23, 84, 85, 87, 93, 108, 122
- coordenadas cartesianas, 29, 63, 71
- coordenadas cilíndricas, 62, 66, 79, 82
- coordenadas curvilíneas, 61, 62, 65, 70, 71, 73, 82
- coordenadas esféricas, 62, 64, 65, 72, 77, 82, 143
- coordenadas polares, 29, 110, 143
- curva, 17, 28, 89, 90, 94–96, 102, 108, 112, 135
- curva de nível, 65
- curva de Viviani, 43
- curva diferenciável, 17
- curva parametrizada, 19, 28
- curva poligonal, 21
- curva regular, 20, 28–30, 41, 42
- curvas coordenadas, 61
- curvas parametrizadas, 17
- curvatura, 26, 28–30, 34, 35, 41, 42
- derivada de função vetorial, 11
- diferencial exata, 108
- distância euclidiana, 44
- divergência, 101
- divergente, 57, 58, 71, 80
- eixos coordenados, 112
- elemento de área, 117
- elemento vetorial de área, 125
- elipse, 109, 149
- equipolentes, 152, 153
- esfera, 35, 41, 50, 117, 124, 128, 130, 135, 148
- espiral logarítmica, 25, 29
- evoluta, 42
- fechado, 46
- fluxo, 127, 147, 150
- forma normal, 101
- forma tangencial, 101
- fronteira, 46, 48, 97, 98, 100, 101, 110, 128, 133, 137, 139, 140, 144, 146, 151
- função comprimento de arco, 23–25

- função de uma variável real, 23
função escalar, 7, 9, 85, 125
função potencial, 58, 94–96, 103, 104, 137
função vetorial, 6, 8, 14–16, 48, 50, 52
função vetorial de uma variável, 6, 15
funções componentes, 6, 12, 15
funções coordenadas, 17, 48, 111
- Gauss, 137, 142–144, 149
gradiente, 54, 66, 71, 72
Green, 96, 98, 100, 101, 104, 109, 110, 133, 134
- hélice, 34–37, 42
harmônica, 150
- integral de linha, 84–86, 89, 91, 94, 96, 101, 131
integral de superfície, 122, 123, 125
integral dupla, 96, 128, 134, 143
irrotacional, 57, 58, 80
- laplaciano, 58, 77, 80, 101
limitada, 46, 104
limite, 11, 50
limite de função vetorial, 8
linha poligonal, 21
- mudança de parâmetro, 20, 120
- operador diferencial, 56
orientação, 87, 91, 92, 125
ortogonal, 25, 26, 29, 34, 41, 65, 71, 113, 156, 161
- parábola, 108
parabolóide, 127, 150
paralelepípedo, 49, 160
paralelogramo, 159, 160
parametrização, 23, 87, 89, 92, 117, 121, 122, 124, 126, 130, 133
parametrizações equivalentes, 120
partição, 85, 118
Pitágoras, 161
plano normal, 31
plano osculador, 31
plano retificante, 32
plano tangente, 112
ponto de acumulação, 46, 47
ponto interior, 45
ponto isolado, 47
potencial, 95, 102
potencial vetorial, 59, 60, 144
produto escalar, 155, 160
produto misto, 160
produto vetorial, 157, 159
- raio, 17, 42
referencial de Frenet, 25, 27, 28, 30
referencial ortonormal, 30
região simples, 97, 98, 139, 140
regra da cadeia, 71
regular, 113
reparametrização, 24, 25, 27, 41, 91
reparametrização de curva, 20
reta, 17, 29
reta tangente, 28
rotacional, 56–58, 71, 77, 79, 80, 82
- sólido, 123
sólido esférico, 146
segmento orientado, 153
simplesmente conexo, 102, 104, 110, 144
sistema ortonormal, 158
solenoidal, 58, 60, 144
Stokes, 130, 131, 134–136, 148, 150, 151
suave, 88
superfície cônica, 148
superfície de revolução, 150
superfície de nível, 65
superfície de revolução, 114–116, 121, 148
superfície esférica, 135, 147
superfície fechada, 144, 150
superfície parametrizada, 111, 122
superfícies coordenadas, 66
- Teorema da Função Inversa, 61
Teorema do Valor Médio, 21
tetraedro, 160

torção, 33, 34, 41, 43
toro, 116, 121
traço, 18, 28, 29, 41, 113
traço de curva, 17
trabalho, 92

vetor binormal, 30, 42, 43
vetor normal, 28, 30, 35, 126, 127
vetor tangente, 19, 20, 25, 29, 35, 40,
63, 112
vetor unitário, 34
vetores, 132, 152, 154, 155, 157, 158,
160, 161
vetores básicos, 65, 82
vetores canônicos, 156
vetores constantes, 15, 16
vetores normais, 134, 141
vetores ortogonais, 79
vetores ortonormais, 30