6

Mudanças epistêmicas em sistemas multiagentes ao longo do tempo

Marcio Kléos Freire Pereira

1. Introdução

A análise lógica de sistemas multiagentes abstratos tem sido um recurso importante para o desenvolvimento de teorias aplicáveis a contextos de agentes reais, sejam processadores de dados trocando informações em rede, negociadores movidos por interesses financeiros, etc. (Fagin *et al*. 1992; 1995). As chamadas lógicas (modais) epistêmicas têm se beneficiado bastante dessa atenção, e avançado para aplicações cada vez mais complexas.

Considere-se, por exemplo, o caso de operadores lógicos representando estados epistêmicos *coletivos*. Questões como o acesso de cada agente em um grupo ao estado epistêmico (conjunto de informações) disponível aos demais agentes têm sido tão importantes quanto o acesso do grupo como um todo às informações dispersas pelo grupo e desconhecidas por seus agentes individuais (conhecimento distribuído).

As combinações de operadores modais com linguagens de primeira ordem produzem, além disso, resultados diferentes quando são interpretadas em modelos com domínio constante e modelos com domínios variáveis (ver, por exemplo, Fitting e Mendelsohn, 1996). A validade de esquemas como a famosa *Fórmula de Barcan* e sua inversa é diretamente afetada por essa escolha semântica. Quando se leva em conta que, em situações cotidianas, agentes epistêmicos nem sempre estão cientes de todos os objetos relevantes (e suas respectivas relações) em um contexto de troca de informações, o desenvolvimento de uma lógica que capture essa limitação é bastante desejável. Por exemplo, em uma negociação de caráter financeiro (na vida real),

Mortari, C. A. (org.) *Tópicos de lógicas não clássicas*.
Florianópolis: NEL/UFSC, 2014, pp. 138–159.

diferentes estratégias são requeridas, dependendo de quais informações estão disponíveis para cada negociador e, mais ainda, dependendo do quanto cada negociador sabe acerca do estado epistêmico dos demais.

Adicione-se a isso tudo o fato de que estados epistêmicos, sejam individuais ou coletivos, normalmente variam durante uma troca de informações. Por isso, torna-se também desejável um formalismo que capture esse dinamismo epistêmico — por exemplo, com operadores temporais (Fagin *et al.*, 1995).

O objetivo de nossa apresentação é explorar um tratamento sintático para a lógica epistêmica de primeira ordem acrescida de operadores temporais, considerando modelos com domínios variáveis, e comparar duas estratégias semânticas para se interpretar essa sintaxe: os sistemas interpretados quantificados e as estruturas de estilo kripkeano — o *mainstream* semântico para as lógicas modais. Essa comparação não é gratuita, nem mera curiosidade formal. Ela permite obter a completude da axiomatização apresentada para esse tratamento. Para alcançar nosso objetivo, aproveitaremos bastante do formalismo desenvolvido por Belardinelli e Lomuscio (2007; 2008), adaptando livremente o que for necessário para o trato com domínios variáveis.

2. Uma linguagem de primeira ordem para o cálculo epistêmico-temporal

Seja $A = \{i_1, \ldots, i_n\}$ um conjunto finito não vazio com n agentes epistêmicos (para $n \in \mathbb{N}$). Assim, a linguagem multimodal de primeira ordem $\mathcal{L}_n$ conterá as seguintes listas de símbolos:

(i) variáveis individuais globais $x_1, x_2, \ldots$;

(ii) variáveis individuais locais $y_1, y_2, \ldots$;

(iii) constantes individuais globais $c_1, c_2, \ldots$;

(iv) constantes individuais locais $b_1, b_2, \ldots$;

(v) funções n-árias $f_1^n, f_2^n, \ldots$;

(vi) predicados n-ários $P_1^n, P_2^n, \ldots$;

(vii) o predicado de identidade $=$;

(viii) o predicado Adm_i (para $i \in A$);

(ix) conectivos proposicionais clássicos $\neg$ e $\rightarrow$;

(x) quantificador universal $\forall$;

(xi) operadores modais epistêmicos K_i (para $i \in A$) e D_G (para $G \subseteq A$);

(xii) operadores modais temporais fortes $[F]$ (futuro) e $[P]$ (passado).

Por simplicidade, quando desejável, será usada a notação $z_1, z_2, \ldots$ para listar variáveis individuais, independentemente de serem globais ou locais. Além disso, como de praxe, serão omitidos subscritos e índices de aridade nos símbolos listados, quando forem irrelevantes ou evidentes a partir do contexto — por exemplo, a expressão: $\forall x P(x, c) \rightarrow P(f(x), c)$ permite abreviar, se desejado, $\forall x_1 P_1^2(x_1, c_1) \rightarrow P_1^2(f_1^1(x_1), c_1)$.

Definição 2.1 (Termos e fórmulas)**.** Os termos e fórmulas de $\mathcal{L}_n$ são assim definidos (em notação Backus-Naur):

$$
\begin{aligned}
t &:: x \mid y \mid c \mid b \mid f^k(\vec{t}) \\
\varphi &:: P^k(\vec{t}) \mid Adm_i(t) \mid t = t' \mid \neg\varphi \mid \varphi \rightarrow \psi \mid K_i\varphi \mid D_G\varphi \mid \\
&\qquad\qquad [F]\varphi \mid [P]\varphi \mid \forall x\varphi \mid \forall y\varphi
\end{aligned}
$$

Os demais operadores, quantificadores, etc. são definidos da maneira usual:$\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\langle F\rangle$, $\langle P\rangle$. As definições de ocorrências livres ou ligadas (de variáveis) também são as usuais. Variáveis individuais locais somente poderão ser substituídas por termos locais, e variáveis individuais globais por termos globais. Propositalmente, foram incluídas listas de constantes individuais locais e globais; porém, como veremos depois, símbolos de funções 0-árias poderiam desempenhar esses papéis.

Por definição, considere-se também as expressões $\forall_i z\ \varphi$ e $\exists_i z\ \varphi$ como abreviando, respectivamente, $\forall z(Adm_i(z) \rightarrow \varphi)$ e $\exists z(Adm_i(z) \wedge \varphi)$. Intuitivamente, o símbolo de predicado Adm_i seleciona, do ponto de vista semântico, os indivíduos admissíveis para o agente i em cada estado global (mundo possível) e os quantificadores indexados por agente têm seu domínio de quantificação restritos ao domínio disponível para o agente em questão.

Enfim, nas expressões $t[\vec{z}]$ e $\varphi[\vec{z}]$, $\vec{z} = z_1, \ldots, z_n$ são todas as variáveis individuais que ocorrem livres em t e φ, respectivamente. Desse modo, $t[\vec{z}/\vec{t}]$ e $\varphi[\vec{z}/\vec{t}]$ referem-se, respectivamente, ao termo e à fórmula que resultam da substituição simultânea das ocorrências livres de $\vec{z}$ por $\vec{t} = t_1, \ldots, t_n$,

renomeando-se, caso necessário, as variáveis de cada t_j em $\vec{t}$ que se tornariam ligadas após essa substituição.

3. Sistemas Interpretados Quantificados

Para cada agente epistêmico $i \in A$ em um sistema multiagente (SMA), seja $L_i = \{l_i, l'_i, \ldots\}$ o conjunto dos estados (epistêmicos) locais de i, e seja $Act_i = \{\alpha_i, \alpha'_i, \ldots\}$ o conjunto das ações individuais de i. Considere-se também $L_a = \{l_a, l'_a, \ldots\}$ e $Act_a = \{\alpha_a, \alpha'_a, \ldots\}$ os conjuntos, respectivamente, dos estados e das ações do ambiente (para mais detalhes, ver Fagin *et al*. 1995).

Sendo assim, o conjunto S dos estados globais possíveis do SMA é definido como $S \subseteq L_a \times L_1 \times \ldots \times L_n$ e o conjunto das ações conjuntas possíveis do SMA é definido como $Act \subseteq Act_a \times Act_1 \times \ldots \times Act_n$. Observe-se que se tratam de estados globais possíveis e ações conjuntas possíveis, que podem nunca vir a ser o caso (os estados) ou realizadas (as ações).

Defina-se a função de transição $\tau : Act \longrightarrow (S \longrightarrow S)$; ou seja, $\tau(\alpha)(s) = s'$. Essa função τ define, por assim dizer, as "evoluções admissíveis" do SMA. Além disso, considere-se $s \prec s'$ (leia-se "s' é alcançável em um passo a partir de s") sse, para algum $\alpha \in Act$, $\tau(\alpha)(s) = s'$. E seja também $s \prec^+ s'$ o fecho transitivo de $\prec$ (ou seja, se $s \prec s'$ e $s' \prec s''$, então $s \prec s''$).

Para descrever as evoluções do SMA ao longo do tempo, pressuponha-se $\mathcal{T} = \langle T, < \rangle$ como sendo uma ordem parcial estrita e fracamente conectada. Assim, T é um conjunto não vazio (intuitivamente, de instantes no tempo) ordenados pela relação de precedência $<$, caracterizada pelas seguintes propriedades (para $m, m', m'' \in T$):

(i) $m \not< m$ (irreflexividade)

(ii) $(m < m' \wedge m' < m'') \rightarrow (m < m'')$ (transitividade)

(iii) $(m < m' \wedge m < m'') \rightarrow (m' < m'' \vee m'' < m' \vee m' = m'')$
(conectividade fraca para momentos posteriores)

(iv) $(m' < m \wedge m'' < m) \rightarrow (m'' < m' \vee m' < m'' \vee m' = m'')$
(conectividade fraca para momentos precedentes)

A maneira como $\mathcal{T}$ está definida pode ser modificada para que, dependendo do tipo de lógica temporal a ser considerada, se escolha seu domínio de elementos e o ordenamento temporal desejado (discreto, denso, com

ponto inicial, etc.). Aqui, adotaremos $T \subseteq \mathbb{Z}$ com a ordem acima definida. Como de praxe, defina-se $m' > m$ como $m < m'$, e $m \leq m'$ como $m < m' \vee m = m'$.

Uma execução r ("*run*") sobre $\langle S, Act, \tau, \mathcal{T} \rangle$ é uma função $r : T \longrightarrow S$ tal que $m < m'$ implica $r(m) <^{+} r(m')$. Ou seja, é a função τ que define, para cada ação conjunta (a combinação das ações de todos os agentes e do ambiente) em um estado global específico s (determinado por $r(m)$), qual o estado global s' (ou $r(m')$) resultante dessa ação. Intuitivamente, cada execução r descreve uma evolução possível do SMA ao longo do fluxo temporal $\mathcal{T}$.

Definição 3.1 (Sistema de Estados Globais Variáveis)**.** Seja um sistema multi-agente qualquer, provido com um conjunto A de agentes epistêmicos, e sejam S, Act, τ e $\mathcal{T}$ conforme descritos acima. Um *sistema de estados globais variáveis* (*SEGV*) sobre $\langle S, Act, \tau, \mathcal{T} \rangle$ consiste em uma 7-upla $\mathcal{P} = \langle R, D, \{D_s\}_{s \in S}, \{D_{i,s}\}_{i \in A, s \in S}, F, F^c, \{F_i\}_{i \in A} \rangle$, tal que:

(i) R é um conjunto não vazio de execuções sobre $\langle S, Act, \tau, \mathcal{T} \rangle$;

(ii) D é um conjunto não vazio de indivíduos;

(iii) D_s e $D_{i,s}$ são conjuntos não vazios de indivíduos;

(iv) F é um conjunto não vazio de funções de S em D;

(v) F^c e F_i são subconjuntos não vazios de F;

(vi) $F^c = \{g \mid g \in F \text{ e } g(s) = g(s') \text{ para quaisquer } s, s' \in S\}$;

(vii) $D_s = \{d \mid d \in D \text{ e } g(s) = d \text{ para alguma } g \in F\}$;

(viii) $D_{i,s} = \{d \mid d \in D \text{ e } g(s) = d \text{ para alguma } g \in F_i\}$.

A classe de todos os *SEGV* será denotada por $\mathcal{SEGV}$.

Seguindo a notação usual (Fagin *et al.* 1995), denomine-se o par (r, m) um *ponto* em $\mathcal{P}$ — ou seja, o ponto (r, m) determina o estado global s em um momento m de uma "linha temporal" (execução) r. Defina-se ainda: se $r(m)$ denota o estado global $s = \langle l_a, l_1, \ldots, l_n \rangle$ no ponto (r, m), então $r_a(m) = l_a$ e $r_i(m) = l_i$ denotarão os estados locais do ambiente e de cada i, respectivamente, no ponto (r, m).

Definição 3.2 (Sistema Interpretado Quantificado)**.** Seja um sistema de estados globais variáveis qualquer $\mathcal{P}$. Um *sistema interpretado quantificado* (*SIQ*) é um par $\mathcal{Q} = \langle \mathcal{P}, I \rangle$ tal que, para $s \in S$, $r \in R$, $m \in T$, $r(m) = s$:

- $I(c, r, m) = I(c)$ e $I(c) \in F^c$;
- $I(b, r, m) = I(b)$ e $I(b) \in F$;
- $I(f^0, r, m) = I(f^0)$ e $I(f^0) \in F$;
- $I(f^k, r, m) = I(f^k)$ e $I(f^k) : F^k \longrightarrow F$;
- $I(P^k, r, m) \subseteq D^k$;
- $I(=, r, m)$ é a relação de igualdade entre elementos de D.

A classe de todos os *SIQ* será denotada por $\mathcal{SIQ}$.

Observe-se que somente os símbolos de constantes globais determinam indivíduos rigidamente, porque denotam funções constantes. Os demais símbolos individuais podem indicar indivíduos diferentes, na medida em que as funções que aqueles símbolos denotam determinem valores diferentes, dependendo do ponto considerado. De todo modo, I sempre faz um termo de $\mathcal{L}_n$ designar uma intensão individual (cuja extensão será algum indivíduo em D) em um ponto (r, m).

Acrescente-se ainda a condição (opcional) $A \subseteq D$, estabelecendo assim que os agentes podem raciocinar acerca uns dos outros, desde que aqueles agentes sobre os quais um agente i raciocina pertençam ao seu próprio domínio $D_{i,s}$.

Definição 3.3 (Denotação de um termo em um *SIQ*)**.** Seja σ uma atribuição de elementos de F^c para a lista de variáveis individuais globais $x_1, x_2, \ldots$ e de elementos de F para a lista de variáveis individuais locais $y_1, y_2, \ldots$. Assim:

(i) $I^\sigma(x, r, m) = I^\sigma(x)(r, m) = \sigma(x)(r, m) = \sigma(x)$,

(ii) $I^\sigma(y, r, m) = I^\sigma(y)(r, m) = \sigma(y)(r, m)$,

(iii) $I^\sigma(c, r, m) = I^\sigma(c)(r, m) = I(c)(r, m) = I(c)$,

(iv) $I^\sigma(b, r, m) = I^\sigma(b)(r, m) = I(b)(r, m)$,

(v) $$\begin{aligned} I^\sigma(f^k(t_1, \ldots, t_k), r, m) &= I(f^k)(I^\sigma(t_1, r, m), \ldots, I^\sigma(t_k, r, m)) \\ &= I(f^k)(I^\sigma(t_1), \ldots, I^\sigma(t_k))(r, m). \end{aligned}$$

A cláusula para a interpretação de termos construídos a partir de símbolos de funções garante recursivamente uma comutação nos parâmetros da interpretação. Em especial, para o caso de algum t em $f^k(\vec{t})$, ser, ele próprio, da forma $h^j(\vec{u})$, pode ser mostrado que:

$$
\begin{aligned}
I^\sigma(f^k(t_1,\ldots,h^j(\vec{u}),\ldots,t_k),r,m) &= \\
&= I(f^k)(I^\sigma(t_1,r,m),\ldots,I^\sigma(h^j(\vec{u}),r,m),\ldots,I^\sigma(t_k,r,m)) \\
&= I(f^k)(I^\sigma(t_1),\ldots,I^\sigma(h^j)(I^\sigma(u_1),\ldots,I^\sigma(u_j)),\ldots,I^\sigma(t_k))(r,m).
\end{aligned}
$$

Como de praxe em teorias de primeira ordem, uma variante-z de σ é uma atribuição de elementos de F^c (ou F, conforme o caso) idêntica a σ, exceto no máximo pelo elemento atribuído a z. Será usada a notação $\sigma\binom{z}{g}$ para a atribuição que coincide com σ em todos os lugares, exceto para a variável z, que será associada a uma função g, sendo que $g \in F^c$ ou $g \in F$, conforme o caso (ou seja, dependendo de z ser uma variável global x ou uma variável local y, respectivamente).

Definição 3.4 (Satisfabilidade de fórmulas em um *SIQ*)**.** Seja uma atribuição σ e um ponto (r,m) em um sistema intepretado quantificado Q. Assim:

(i) $(Q^\sigma,r,m) \models P^k(\vec{t})$ sse $\langle I^\sigma(t_1,r,m),\ldots,I^\sigma(t_k,r,m)\rangle \in I(P^k,r,m)$;

(ii) $(Q^\sigma,r,m) \models Adm_i(t)$ sse para $r(m)=s$, $I^\sigma(t,r,m) \in D_{i,s}$;

(iii) $(Q^\sigma,r,m) \models t=t'$ sse $I^\sigma(t,r,m)=I^\sigma(t',r,m)$;

(iv) $(Q^\sigma,r,m) \models \neg\psi$ sse $(Q^\sigma,r,m) \not\models \psi$;

(v) $(Q^\sigma,r,m) \models \psi \to \theta$ sse $(Q^\sigma,r,m) \not\models \psi$ ou $(Q^\sigma,r,m) \models \theta$;

(vi) $(Q^\sigma,r,m) \models K_i\psi$ sse $r_i(m)=r'_i(m') \Rightarrow (Q^\sigma,r',m') \models \psi$;

(vii) $(Q^\sigma,r,m) \models D_G\psi$ sse, para todo $i \in G$, $r_i(m)=r'_i(m') \Rightarrow$
$(Q^\sigma,r',m') \models \psi$;

(viii) $(Q^\sigma,r,m) \models [F]\psi$ sse $m<m' \Rightarrow (Q^\sigma,r,m') \models \psi$;

(ix) $(Q^\sigma,r,m) \models [P]\psi$ sse $m'<m \Rightarrow (Q^\sigma,r,m') \models \psi$;

(x) $(Q^\sigma,r,m) \models \forall x\,\psi$ sse, para $r(m)=s$ e para todo $g \in F^c$,
$(Q^{\sigma\binom{x}{g}},r,m) \models \psi$;

(xi) $(Q^\sigma,r,m) \models \forall y\,\psi$ sse, para $r(m)=s$ e para toda $g \in F$,
$(Q^{\sigma\binom{y}{g}},r,m) \models \psi$.

As seguintes cláusulas de satisfabilidade podem ser obtidas facilmente e se mostrar úteis em demonstrações:

$(Q^\sigma,r,m) \models \forall_i x\,\psi$ sse, para $r(m)=s$ e toda $g \in F_i \cap F^c$,
$(Q^{\sigma\binom{x}{g}},r,m) \models \psi$.

$(Q^{\sigma}, r, m) \models \forall_i y\, \psi$ sse, para $r(m) = s$ e toda $g \in F_i$, $(Q^{\sigma\binom{y}{g}}, r, m) \models \psi$;

Uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_n$ será denominada *verdadeira em um ponto* (r, m) sse φ for satisfeita em (r, m) para toda atribuição σ. Além disso, φ será *válida em um SIQ* Q sse φ for verdadeira em todo ponto de Q. Finalmente, φ será *válida em uma classe C de SIQ* sse φ for válida em todo $SIQ \in C$.

3.1. Alguns resultados interessantes

Dadas as condições acima, vale a pena examinar a validade de algumas fórmulas de $\mathcal{L}_n$. Por exemplo, as diversas variações da Fórmula de Barcan (BF) e de sua inversa (CBF) têm motivado muita discussão, tanto formal quanto filosófica (ver, por exemplo, Fitting e Mendelsohn, 1996). Alguns resultados importantes nas estruturas descritas até aqui são as seguintes *invalidades*:

$\mathcal{SIQ} \not\models \forall z K_i \varphi \to K_i \forall z \varphi$ (BF); $\mathcal{SIQ} \not\models K_i \forall z \varphi \to \forall z K_i \varphi$ (CBF);
$\mathcal{SIQ} \not\models \forall z D_G \varphi \to D_G \forall z \varphi$ (BF); $\mathcal{SIQ} \not\models D_G \forall z \varphi \to \forall z D_G \varphi$ (CBF);
$\mathcal{SIQ} \not\models \forall z [F] \varphi \to [F] \forall z \varphi$ (BF); $\mathcal{SIQ} \not\models [F] \forall z \varphi \to \forall z [F] \varphi$ (CBF);
$\mathcal{SIQ} \not\models \forall z [P] \varphi \to [P] \forall z \varphi$ (BF); $\mathcal{SIQ} \not\models [P] \forall z \varphi \to \forall z [P] \varphi$ (CBF).

Em se tratando de algumas teses envolvendo a relação de igualdade entre termos, bem como sua interação com os operadores modais e o predicado Adm_i, é possível checar que *não valem* os seguintes esquemas:

$\mathcal{SIQ} \not\models t = t' \to K_i(t = t')$; $\mathcal{SIQ} \not\models t = t' \to D_G(t = t')$;
$\mathcal{SIQ} \not\models t = t' \to [F](t = t')$; $\mathcal{SIQ} \not\models t = t' \to [P](t = t')$;
$\mathcal{SIQ} \not\models t \neq t' \to K_i(t \neq t')$; $\mathcal{SIQ} \not\models t \neq t' \to D_G(t \neq t')$;
$\mathcal{SIQ} \not\models t \neq t' \to [F](t \neq t')$; $\mathcal{SIQ} \not\models t \neq t' \to [P](t \neq t')$;
$\mathcal{SIQ} \not\models t = t' \to (Adm_i(t) \to Adm_i(t'))$.

A justificativa intuitiva é mais ou menos óbvia. Na medida em que se está lidando com termos flexíveis, não se pode ter a garantia de que dois termos que determinem o mesmo indivíduo em uma ocasião permaneçam determinando o mesmo indivíduo em outras circunstâncias. Por outro lado, como veremos, se os termos em questão são globais, essa identidade é garantida.

A exigência de que F^c seja não vazio atende às características de expressividade da linguagem, mas poderiam ser relaxadas caso se dispensassem termos globais. Curiosamente, o indivíduo determinado por cada $g \in F^c$ estará presente em cada D_s:

$$\{d \mid d \in D \text{ e } g(s) = d \text{ para } g \in F^c\} \quad \subseteq \quad \bigcap_{s \in S} D_s.$$

Por isso, para quaisquer termos globais v e v' (símbolos de constantes globais ou variáveis globais):

$\mathcal{SIQ} \models v = v' \rightarrow K_i(v = v')$; $\mathcal{SIQ} \models v = v' \rightarrow D_G(v = v')$;
$\mathcal{SIQ} \models v = v' \rightarrow [F](v = v')$; $\mathcal{SIQ} \models v = v' \rightarrow [P](v = v')$;
$\mathcal{SIQ} \models v \neq v' \rightarrow K_i(v \neq v')$; $\mathcal{SIQ} \models v \neq v' \rightarrow D_G(v \neq v')$;
$\mathcal{SIQ} \models v \neq v' \rightarrow [F](v \neq v')$; $\mathcal{SIQ} \models v \neq v' \rightarrow [P](v \neq v')$;

Além disso, se houver alguma função constante em F_a ($a \in A$), o indivíduo determinado por essa função também estará presente em cada $D_{a,s}$; ou seja:

$$\{d \mid d \in D \text{ e } g(s) = d \text{ para } g \in F_a \cap F^c\} \quad \subseteq \quad \bigcap_{a \in A, s \in S} D_{a,s}.$$

Por isso, também vale:

$$\mathcal{SIQ} \models v = v' \rightarrow (Adm_i(v) \rightarrow Adm_i(v')).$$

Por razões similares, tanto as instâncias de BF como de CBF valerão em todos os $\mathcal{SIQ}$ quando envolverem somente variáveis globais, da seguinte maneira:

$\mathcal{SIQ} \models \forall x K_i \varphi \leftrightarrow K_i \forall x \varphi$; $\mathcal{SIQ} \not\models \forall x D_G \varphi \leftrightarrow D_G \forall x \varphi$;
$\mathcal{SIQ} \not\models \forall x [F] \varphi \leftrightarrow [F] \forall x \varphi$; $\mathcal{SIQ} \not\models \forall x [P] \varphi \leftrightarrow [P] \forall x \varphi$.

4. O sistema QK4.S5$_n$

Antes de apresentar nossa lista de axiomas, seguem algumas noções usuais.

Seja $\varphi \in \mathcal{L}_n$. Uma variável z em $\varphi[z]$ é substituível por uma variável livre z' se nenhuma ocorrência livre de z em $\varphi[z]$ ocorre no escopo de algum $\forall z'$ em φ. A expressão $\vdash \varphi$ significa que φ é teorema de QK4.S5. Uma fórmula φ é derivável em QK4.S5$_n$ de um conjunto Δ de fórmulas de $\mathcal{L}_n$ — ou simplesmente: $\Delta \vdash \varphi$ — sse, para alguns $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$, é o caso que $\vdash \delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_n \rightarrow \varphi$.

Nos esquemas de axiomas a seguir, seja $\Rightarrow$ a relação de inferência entre fórmulas, e $\blacksquare$ uma ocorrência de alguma das quatro modalidades primitivas de $\mathcal{L}_n$ (a mesma modalidade em cada esquema). Novamente, os símbolos v e

v' representarão termos globais (símbolos de constantes globais ou variáveis globais).

Tautologia	*(todas as instâncias de tautologias clássicas)*
MP	$\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi$
K	$\blacksquare(\varphi \to \psi) \to (\blacksquare\varphi \to \blacksquare\psi)$
4	$\blacksquare\varphi \to \blacksquare\blacksquare\varphi$
Nec	$\varphi \Rightarrow \blacksquare\varphi$
T	$K_i\varphi \to \varphi$ $\qquad$ $D_G\varphi \to \varphi$
5	$\neg K_i\varphi \to K_i\neg K_i\varphi$ $\qquad$ $\neg D_G\varphi \to D_G\neg D_G\varphi$
*D*1	$D_{\{i\}}\varphi \leftrightarrow K_i\varphi$
*D*2	$D_G\varphi \to D_{G'}\varphi$ (para $G \subseteq G'$)
F P	$\varphi \to [F]\langle P\rangle\, \varphi$
P F	$\varphi \to [P]\langle F\rangle\, \varphi$
ConFracaF	$\langle P\rangle\langle F\rangle\, \varphi \to (\langle P\rangle\, \varphi \vee \varphi \vee \langle F\rangle\, \varphi)$
ConFracaP	$\langle F\rangle\langle P\rangle\, \varphi \to (\langle P\rangle\, \varphi \vee \varphi \vee \langle F\rangle\, \varphi)$
VacQuant	$\forall z\, \varphi \leftrightarrow \varphi$ (onde z não ocorre livre em φ)
UnivDistr	$\forall z\, (\varphi \to \psi) \to (\forall z\, \varphi \to \forall z\, \psi)$
Perm	$\forall z\, \forall z'\, \varphi \leftrightarrow \forall z'\, \forall z\, \varphi$
UnivInst	$\forall z'\, (\forall z\, \varphi[z] \to \varphi[z/z'])$ (se z for substituível por z' em φ)
Gen	$\varphi \Rightarrow \forall z\, \varphi$
Ident	$t = t$
SubstTer	$t = t' \to (t''[z/t] = t''[z/t'])$
SubsFor	$t = t' \to (\varphi[z/t] \to \varphi[z/t'])$ (para φ atômica)
NecId	$v = v' \to \blacksquare(v = v')$
NecDif	$v \neq v' \to \blacksquare(v \neq v')$

Acerca da axiomatização acima, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 4.1 (Correção de QK4.S5$_n$ com respeito a $\mathcal{SEGV}$)**.** O sistema QK4.S5$_n$ é correto com respeito à classe de todos os sistemas interpretados quantificados $\mathcal{SIQ}$ (e, portanto, com respeito à classe de todos os sistemas de estados globais variáveis $\mathcal{SEGV}$).

A prova, embora demorada e tediosa, é rotineira e consiste na verificação da validade de todos os axiomas de QK4.S5$_n$ com respeito às cláusulas

de satisfatibilidade para *SIQ* e de que suas regras de inferência (*MP, Nec* e *Gen*) preservam a validade das fórmulas consideradas. Será omitida aqui por economia de espaço.

Para se mostrar a completude desse sistema, será feito um "desvio" por um mapeamento dos *SEGV* em estruturas de Kripke especiais, como se verá a seguir.

5. Estruturas variáveis de Kripke

Seguiremos a estratégia de Belardinelli e Lomuscio (2008), fazendo uma tradução dos sistemas de estados globais variáveis para o conhecido aparato das estruturas de Kripke. Naturalmente, diversas adaptações foram necessárias para o trato com domínios variáveis.

Definição 5.1 (Estrutura Variável de Kripke)**.** Uma estrutura variável de Kripke V é uma 9-upla $\langle W, \{\sim_i\}_{i\in A}, <, D, \{D_w\}_{w\in W}, \{D_{i,w}\}_{i\in A, w\in W}, F, F^c\{F_i\}_{i\in A}\rangle$, onde:

(i) W é um conjunto não vazio (de "mundos");

(ii) $\sim_i$ é uma relação de equivalência sobre W;

(iii) $<$ é uma ordem parcial estrita e fracamente conectada sobre W;

(iv) D é um conjunto não vazio de indivíduos;

(v) D_w e $D_{i,w}$ são subconjuntos não vazios de D;

(vi) F é um conjunto não vazio de funções de W em D;

(vii) F^c e F_i são subconjuntos não vazios de F;

(viii) $F^c = \{g \mid g \in F \textit{ e } g(w) = g(w') \textit{ para quaisquer } w, w' \in W\}$;

(ix) $D_w = \{d \mid d \in D \textit{ e } g(w) = d \textit{ para alguma } g \in F\}$;

(x) $D_{i,w} = \{d \mid d \in D \textit{ e } g(w) = d \textit{ para alguma } g \in F_i\}$.

A classe de todas as estruturas variáveis de Kripke é denotada por $\mathcal{V}$.

A comparação com os SEGV dispensa maiores comentários por enquanto. As novidades óbvias são a consideração de um conjunto W (de *mundos possíveis*) e da relação $\sim_i$ de *acessibilidade epistêmica* entre mundos, indexada por agente epistêmico. A relação é assumida como sendo de equivalência; portanto, no que tange a acessibilidade epistêmica, $\mathcal{V}$ são estrutu-

ras de Kripke do tipo S5. Por sua vez, a relação $<$, como anteriormente, é uma ordem irreflexiva, transitiva e fracamente conectada, correspondendo a uma relação (fracamente) linear de acessibilidade temporal (entre mundos).

Definição 5.2 (Modelo variável de Kripke)**.** Um modelo variável de Kripke é um par $M = \langle V, I \rangle$ onde V é uma estrutura variável de Kripke e I é uma função-interpretação para $\mathcal{L}_n$ tal que:

(i) $I(c, w) = I(c)$ e $I(c) \in F^c$;

(ii) $I(b, w) = I(b)$ e $I(b) \in F$;

(iii) $I(f^0, w) = I(f^0)$ e $I(f^0) \in F$;

(iv) $I(f^k, w) = I(f^k)$ e $I(f^k) : F^k \longrightarrow F$;

(v) $I(P^k, w) \subseteq D^k$;

(vi) $I(=, w)$ é a relação de igualdade entre elementos de D.

A classe de todos os modelos variáveis de Kripke em uma estrutura variável V é denotada por $\mathcal{M}$.

As definições para se encontrar a denotação de um termo e para satisfação de fórmulas em M são análogas, respectivamente, às definições 3.3 e 3.4.

Definição 5.3 (Denotação de um termo em M)**.** Seja σ uma atribuição de elementos de F^c para a lista de variáveis individuais globais $x_1, x_2, \ldots$ e de elementos de F para a lista de variáveis individuais locais $y_1, y_2, \ldots$. Assim:

(i) $I^\sigma(x, w) = I^\sigma(x)(w) = \sigma(x)(w) = \sigma(x)$,

(ii) $I^\sigma(y, w) = I^\sigma(y)(w) = \sigma(y)(w)$,

(iii) $I^\sigma(c, w) = I^\sigma(c)(w) = I(c)(w) = I(c)$,

(iv) $I^\sigma(b, w) = I^\sigma(b)(w) = I(b)(w)$,

(v) $$\begin{aligned} I^\sigma(f^k(t_1, \ldots, t_k), w) &= I(f^k)(I^\sigma(t_1, w), \ldots, I^\sigma(t_k, w)) \\ &= I(f^k)(I^\sigma(t_1), \ldots, I^\sigma(t_k))(w). \end{aligned}$$

Similarmente à Definição 3.3, a última condição para a interpretação de termos construídos a partir de símbolos de funções garante que, para o caso de algum t em $f^k(\vec{t})$, ser, ele próprio, da forma $h^j(\vec{u})$, possa ser mostrado que:

$$
\begin{aligned}
I^{\sigma}(f^k(t_1,\ldots,h^j(\vec{u}),\ldots,t_k),w) &= \\
&= I(f^k)(I^{\sigma}(t_1,w),\ldots,I^{\sigma}(h^j(\vec{u}),w)\ldots,I^{\sigma}(t_k,w)) \\
&= I(f^k)(I^{\sigma}(t_1),\ldots,I^{\sigma}(h^j)(I^{\sigma}(u_1),\ldots,I^{\sigma}(u_j)),\ldots,I^{\sigma}(t_k))(w).
\end{aligned}
$$

A definição de uma variante-z para cada atribuição σ é facilmente obtida de modo análogo ao de um *SIQ* e será omitida aqui.

Definição 5.4 (Satisfabilidade de fórmulas em M)**.** Seja uma atribuição σ e um $w \in W$ em um modelo variável de Kripke M. Assim:

(i) $(M^{\sigma}, w) \models P^k(\vec{t})$ sse $\langle I^{\sigma}(t_1,w),\ldots,I^{\sigma}(t_k,w)\rangle \in I(P^k,w)$;

(ii) $(M^{\sigma}, w) \models Adm_i(t)$ sse $I^{\sigma}(t,w) \in D_{i,w}$;

(iii) $(M^{\sigma}, w) \models t = t'$ sse $I^{\sigma}(t,w) = I^{\sigma}(t',w)$;

(iv) $(M^{\sigma}, w) \models \neg\psi$ sse $(M^{\sigma}, w) \not\models \psi$;

(v) $(M^{\sigma}, w) \models \psi \rightarrow \theta$ sse $(M^{\sigma}, w) \not\models \psi$ ou $(M^{\sigma}, w) \models \theta$;

(vi) $(M^{\sigma}, w) \models K_i\psi$ sse $w \sim_i w' \Rightarrow (M^{\sigma}, w') \models \psi$;

(vii) $(M^{\sigma}, w) \models D_G\psi$ sse $(w, w') \in \bigcap_{i\in G} \sim_i \Rightarrow (M^{\sigma}, w') \models \psi$;

(viii) $(M^{\sigma}, w) \models [F]\psi$ sse $w < w' \Rightarrow (M^{\sigma}, w') \models \psi$;

(ix) $(M^{\sigma}, w) \models [P]\psi$ sse $w' < w \Rightarrow (M^{\sigma}, w') \models \psi$;

(x) $(M^{\sigma}, w) \models \forall x\, \psi$ sse, para todo $b \in F^c$, $(M^{\sigma\binom{x}{g}}, w) \models \psi$;

(xi) $(M^{\sigma}, w) \models \forall y\, \psi$ sse, para toda $g \in F$, $(M^{\sigma\binom{y}{g}}, w) \models \psi$.

A similaridade com as definições correspondentes para *SIQ* dispensa maiores comentários. As cláusulas derivadas também podem ser facilmente inferidas por analogia e serão omitidas por economia de espaço. Além disso, as definições de validade em um modelo (ou em uma estrutura) para uma fórmula φ seguem o padrão usual:

Uma fórmula φ de $\mathcal{L}_n$ será denominada *verdadeira em um mundo* $w \in W$ sse φ for satisfeita em w para toda atribuição σ. Além disso, φ será *válida em um modelo* M sse φ for verdadeira em todo mundo de M. E, finalmente, φ será *válida em uma classe* C *de modelos* sse φ for válida em todo $M \in C$.

Definição 5.5. Sejam $V = \langle\, W, \{\sim_i\}_{i\in A}, <, D, \{D_w\}_{w\in W}, \{D_{i,w}\}_{i\in A, w\in W}, F, F^c, \{F_i\}_{i\in A}\rangle$ (uma estrutura variável de Kripke) e $M = \langle V, I\rangle$ (um modelo variável

de Kripke). Sejam, para cada $i \in A$, as classes de equivalência $[w]_{\sim_i} = \{w' | w \sim_i w'\}$, e para A com n agentes, seja S um conjunto contendo todas as $n+1$-uplas $\langle w, [w]_{\sim_{i_1}}, \ldots, [w]_{\sim_{i_n}} \rangle$. Enfim, seja $\langle W, < \rangle$ uma ordem parcial estrita e fracamente conectada $<$ sobre W. A função $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{SIQ}$ é tal que:

$$\mu(M) = \langle R, D, \{D'_w\}_{w \in W}, \{D'_{i,w}\}_{i \in A, w \in W}, F', F'^c, \{F'_i\}_{i \in A}, I' \rangle,$$

onde:

(i) R contém a execução r tal que $r(w) = \langle w, [w]_{\sim_1}, \ldots, [w]_{\sim_n} \rangle$, para $w \in W$; e, em consequência, $r_i(w) = [w]_{\sim_i}$;

(ii) D é a mesma que em V, D'_w e $D'_{i,w}$ são subconjuntos de D;

(iii) F' contém as funções g' tais que $g'(\langle w, [w]_{\sim_{i_1}}, \ldots, [w]_{\sim_{i_n}} \rangle) = g(w)$ (para $g \in F$);

(iv) F'^c e F'_i são subconjuntos de F';

(v) $F'^c = \{g' \in F' \mid g'(s) = g'(s')$ para quaisquer $s, s' \in S\}$;

(vi) $D'_w = \{d \in D \mid g'(\langle w, [w]_{\sim_{i_1}}, \ldots, [w]_{\sim_{i_n}} \rangle) = d$ para alguma $g' \in F'\}$;

(vii) $D'_{i,w} = \{d \in D \mid g((\langle w, [w]_{\sim_{i_1}}, \ldots, [w]_{\sim_{i_n}} \rangle)) = d$ para alguma $g' \in F'_i\}$;

(viii) $I'(P^k, r, w) = I(P^k, w)$, $I'(f^k, r, w) = I(f^k, w)$, $I'(=, r, w) = I(=, w)$, e $I' = I$ nos demais casos.

Com as definições acima, o seguinte lema pode ser provado:

Lema 5.1. Para $\varphi \in \mathcal{L}_n$ e $w \in W$:

$$(M^\sigma, w) \models \varphi \text{ sse } (\mu(M)^\sigma, r, w) \models \varphi$$

onde r é a única execução em $\mu(M)$.

A prova desse lema é relativamente simples, embora tediosa, e sai por indução sobre o comprimento de φ.

Claramente $\mu(M)$ é um *SIQ*. Alguns destaques: W é o conjunto dos estados locais do ambiente (cada w é um l_a); cada classe $[w]_{\sim_i}$ é o estado local do agente i, o qual queremos que seja idêntico em todos os mundos acessíveis a i; cada estado global descreve uma combinação de estados locais do ambiente e de cada agente: $(\langle w, [w]_{\sim_{i_1}}, \ldots, [w]_{\sim_{i_n}} \rangle)$; R é não vazio (contém a execução r).

Temos, agora, mais um resultado de correção:

Teorema 5.1 (Correção de QK4.S5$_n$ com respeito a $\mathcal{V}$)**.** O sistema QK4.S5$_n$ é correto com respeito à classe de todos os modelos variáveis de Kripke $\mathcal{M}$ (e, portanto, com respeito à classe de todas as estruturas variáveis de Kripke $\mathcal{V}$).

Há pelo menos duas maneiras distintas para se provar o resultado acima. A primeira é a usual, já descrita antes, e a segunda, embora indireta, é imediata a partir do lema anterior.

6. Completude de QK4.S5$_n$

A estratégia de demonstração (no estilo Henkin, via modelos canônicos) da completude de QK4.S5$_n$ com relação a $\mathcal{SIQ}$, é baseada em Belardinelli e Lomuscio (2008), os quais, por sua vez, adaptaram os resultados de Fagin, Halpern e Vardi (1992) para o sistema proposicional epistêmico $S5_n^D$ e de Gabbay, Hodkinson e Reynolds (1993) para uma lógica temporal de primeira ordem. A prova que se segue está adaptada para as estruturas com domínios variáveis.

Definição 6.1. Seja Γ um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_n$. Dizemos que:

(i) Γ é consistente sse $\Gamma \nvdash \bot$;

(ii) Γ é maximal sse, para toda $\varphi \in \mathcal{L}_n$, ou $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$;

(iii) Γ é maximal consistente sse Γ é maximal e consistente;

(iv) Γ é enriquecido sse $\exists x\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi[x/c] \in \Gamma$ (para algum $c \in \mathcal{L}_n$) e $\exists y\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi[y/b] \in \Gamma$ (para algum $b \in \mathcal{L}_n$);

(v) Γ é saturado sse Γ é maximal consistente e enriquecido.

É importante lembrar que x, y, c e b representam, respectivamente, uma variável global, uma variável local, um símbolo de constante global e um símbolo de constante local. A prova do lema abaixo é adaptada de Chang e Keisler (2012).

Lema 6.1 (Saturação)**.** Se Γ é um conjunto consistente de fórmulas de $\mathcal{L}_n$, então Γ pode ser estendido a um conjunto saturado Γ' em uma linguagem expandida $\mathcal{L}_n^+$ obtida a partir de $\mathcal{L}_n$ mediante o acréscimo de dois conjuntos enumeráveis de novos símbolos de constantes.

Demonstração. Assuma que Γ é consistente. Obtenha-se uma expansão simples $\mathcal{L}_n^+$ a partir de $\mathcal{L}_n$ pelo acréscimo dos conjuntos enumeráveis C e B, onde $C = \{c'_0, c'_1, \ldots\}$ é um conjunto de novos símbolos de constantes globais e $B = \{b'_0, b'_1, \ldots\}$ é um conjunto de novos símbolos de constantes locais. Podemos supor que todas as fórmulas de $\mathcal{L}_n^+$ estão dispostas em uma certa ordem $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\xi, \ldots$ ($\xi < \omega$). Começando por Γ, construímos uma cadeia de extensões:

$$\Gamma = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \ldots \subset \Gamma_\xi \subset \ldots (\xi < \omega).$$

tal que, se $\xi = \zeta + 1$, então:

(i) caso $\Gamma_\zeta \cup \{\varphi_\zeta\}$ seja inconsistente, então $\Gamma_\xi = \Gamma_\zeta$;

(ii) caso $\Gamma_\zeta \cup \{\varphi_\zeta\}$ seja consistente, então $\Gamma_\xi = \Gamma_\zeta \cup \{\varphi_\zeta\} \cup \{\exists x_\zeta \varphi_\zeta \to \varphi_\zeta[x_\zeta/c'_\zeta]\} \cup \{\exists y_\zeta \varphi_\zeta \to \varphi_\zeta[y_\zeta/b'_\zeta]\}$;

onde x_ζ é a única variável global livre em φ_ζ se φ_ζ tiver alguma, e y_ζ é a única variável local livre em φ_ζ se φ_ζ tiver alguma — caso φ_ζ não tenha variáveis livres, arbitre-se x_0 ou y_0 nos lugares, respectivamente, de x_ζ e y_ζ, nos esquemas de fórmulas acima.

Por meio das estratégias usuais de teoria de modelos, é possível mostrar que cada cada Γ_ξ e que $\Gamma' = \bigcup_{\xi<\omega} \Gamma_\xi$ são consistentes. Também pode-se provar que Γ' é saturado. □

Precisaremos agora de algumas definições antes de descrever o modelo canônico que nos interessa.

Definição 6.2. Considerar o seguinte:

(i) Para constantes individuais globais c, c', defina-se $c \approx_w c'$ sse $(c = c') \in w$.

(ii) Como $\approx_w$ é uma relação de equivalência, defina-se $[c]_w = \{c' \mid c \approx_w c'\}$.

(iii) Como $[c]_w = [c]_{w'}$ (para quaisquer $w, w' \in W$), seja $[c]_w = [c]$.

(iv) Para todo termo individual fechado r (ou seja, símbolos de constantes individuais ou termos construídos a partir de símbolos de funções e que não contenham quaisquer variáveis), defina-se uma função π_r tal que:

$$\pi_r(w) = \begin{cases} [c] & \text{se houver um c tal que } (r = c) \in w; \\ \{b \mid (r = b) \in w\} & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

(v) Para o conjunto A de agentes, seja $\mathcal{P}^+(A) = \{A' \mid A' \neq \emptyset \text{ e } A' \subseteq A\}$.

Definição 6.3 (Modelo canônico)**.** O modelo canônico $M^{QK4.S5_n}$ (ou simplesmente: M) para QK4.S5$_n$ na linguagem $\mathcal{L}_n$ com uma expansão simples $\mathcal{L}_n^+$ é uma 10-upla $\langle W, \{R_j\}_{j \in A \cup \mathcal{P}^+(A)}, <, D, \{D_w\}_{w \in W}, \{D_{i,w}\}_{i \in A}, F, F^c, \{F_i\}_{i \in A}, I\rangle$ tal que:

(i) W é o conjunto dos conjuntos saturados de fórmulas em $\mathcal{L}_n^+$;

(ii) para $i \in A$, $w, w' \in W$, wR_iw' sse $\{\varphi \mid K_i\varphi \in w\} \subseteq w'$;

(iii) para $G \subseteq A$, $w, w' \in W$, wR_Gw' sse $\{\varphi \mid D_G\varphi \in w\} \subseteq w'$;

(iv) para $w, w' \in W$, $w < w'$ sse $\{\varphi \mid [F]\varphi \in w\} \subseteq w'$;

(v) $F = \{\pi_r \mid r \in \mathcal{L}_n^+\}$;

(vi) $F^c = \{\pi_r \mid \pi_r(w) = \pi_r(w')$, para $\pi_r \in F$ e quaisquer $w, w' \in W\}$;

(vii) cada $F_i = \{\pi_r \mid Adm_i(r) \in w$, para $r \in \mathcal{L}_n^+$ e cada $w \in W\}$;

(viii) $D_w = \{\pi_r(w) \mid r \in \mathcal{L}_n^+$, para $w \in W\}$;

(ix) $D = \bigcup_{w \in W} D_w$;

(x) $D_{i,w} = \{\pi_r(w) \mid Adm_i(r) \in w$, para $r \in \mathcal{L}_n^+$ e $w \in W\}$;

(xi) I é uma interpretação tal que:

$I(c) = \pi_c$; $I(b) = \pi_b$;

para $e_1, \ldots, e_k \in F$, $I(f^k)(\vec{e})(w) = \pi_{f^k(\vec{r})}(w)$ para $e_i = \pi_{r_i}$;

para $a_1, \ldots, a_k \in D$, $\langle \vec{a} \rangle \in I(P^k, w)$ sse $P^k(\vec{r}) \in w$ (para $a_i = \pi_{r_i}$).

Um exame do modelo canônico M acima mostraria que ele satisfaz as exigências para ser um modelo variável de Kripke. Em particular, se $\nvdash \varphi$, então pelo lema de saturação, há um conjunto saturado que contém $\{\neg\varphi\}$; logo W é não vazio. Em decorrência dos axiomas de QK4.S5$_n$, as várias R_i e R_G acima definidas são relações de equivalência, $R_{\{i\}} = R_i$ e cada $R_G \subseteq \bigcap_{i \in G} R_i$, a relação $<$ é transitiva e fracamente conectada, a relação $w > w'$ pode ser derivada como ocorrendo sse $\{\varphi \mid [P]\varphi \in w\} \subseteq w'$ — a inversa de $<$. Contudo, temos dois problemas: em geral, $R_G \neq \bigcap_{i \in G} R_i$ (Fagin, Halpern e Vardi, 1992) e $<$ pode não ser irreflexiva (Gabbay, Hodkinson e Reynolds,

1993). Para concluir a demonstração, precisaremos de definições e lemas adicionais.

Seja a relação de pseudossatisfação $\models^p$ definida para o modelo canônico M como idêntica a $\models$, exceto pela seguinte condição para o operador D_G:

$$(M^\sigma, w) \models^p D_G\varphi \quad \text{sse} \quad wR_Gw' \text{ acarreta } (M^\sigma, w') \models^p \varphi.$$

Lema 6.2. Seja M o modelo canônico descrito acima e σ uma atribuição para as variáveis (globais e locais). Para $w \in W$ e cada termo fechado e_i, $I^\sigma(t[\vec{z}], w) = I(t[\vec{z}/\vec{e}])(w)$, sempre que $\sigma(z_i) = I(e_i)$.

A prova é imediata a partir da definição 5.3.

Lema 6.3 (Lema da verdade)**.** Seja M o modelo canônico descrito acima. Para $w \in W$, $\varphi \in \mathcal{L}_n^+$, e $\sigma(z_i) = I(e_i)$:

$$(M^\sigma, w) \models^p \varphi[\vec{z}] \quad \text{sse} \quad \varphi[\vec{z}/\vec{e}] \in w.$$

A prova sai por indução sobre o comprimento de φ (ver Fagin, Halpern e Vardi 1992).

Para compensar o fato, indicado acima, de que R_G pode não coincidir com $\bigcap_{i\in G} R_i$, usaremos o modelo canônico M para construir um modelo variável de Kripke M' no qual $R_G = \bigcap_{i\in G} R_i$ e as mesmas fórmulas valham.

Lema 6.4. Seja M o modelo canônico descrito acima. Há um modelo variável de Kripke M' tal que, para toda $\varphi \in \mathcal{L}_n^+$,

$$M' \models \varphi \quad \text{sse} \quad M \models^p \varphi.$$

Demonstração. Suponha $M \models^p \varphi$. Construiremos um modelo especial M^* tal que $M^* \models^p \varphi$ e, a partir do qual obteremos o modelo M' satisfazendo o lema.

Sejam $w, w' \in W$, um *caminho de w até w'* é uma sequência $\langle w_1, l_1, w_2, l_2, \ldots, l_{k-1}, w_k\rangle$ tal que: (1) $w = w_1$ e $w' = w_k$; (2) cada w_j na sequência pertence a W; (3) cada l_j é ou um agente ou um grupo de agentes; (4) $\langle w_j, w_{j+1}\rangle \in R_{l_j}$. A *redução* de um caminho $\langle w_1, l_1, w_2, l_2, \ldots, l_{k-1}, w_k\rangle$ é obtida ao se substituir cada subsequência maximal consecutiva $\langle w_q, l_q, w_{q+1}, l_{q+1}, \ldots, l_{r-1}, w_r\rangle$ na qual $l_q = l_{q+1} = \ldots = l_{r-1}$, por $\langle w_q, l_q, w_r\rangle$. Um caminho é chamado *reduzido* sse for idêntico à sua redução.

A partir do modelo canônico M, defina-se

$$M^* = \langle W^*, \{R^*_j\}_{j\in A\cup\mathcal{P}^+(A)}, <^*, D, \{D^*_w\}_{w\in W}, \{D^*_{i,w}\}_{i\in A}, F^*, F^{c*}, \{F^*_i\}_{i\in A}, I^*\rangle$$

e uma função sobrejetiva $h : W^* \longrightarrow W$ tal que: (1) para $w, w' \in W^*$, há no máximo um caminho reduzido de w até w'; (2) $wR^*_i w'$ acarreta que $h(w)R_i h(w')$; 3. $wR^*_G w'$ acarreta que $h(w)R_G h(w')$; (4) $w <^* w'$ acarreta que $h(w) < h(w')$; (5) $\langle\vec{a}\rangle \in I^*(P^k, w)$ sse $\langle\vec{a}\rangle \in I(P^k, h(w))$.

Construímos W^* por indução, onde $W^*_1 = W$ e W^*_{k+1} é o conjunto dos mundos $v_{w,l,w'}$ tais que $w \in W^*_k$, $w' \in W$ e cada l é um agente ou grupo de agentes. Seja $W^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W^*_k$ e defina-se:

$h(w) = w$ para $w \in W^*_1$,

$h(v_{w,l,w'}) = w'$ para $v_{w,l,w'} \in W^*_k$ $(k > 1)$.

Se $w' = v_{w,l,w''}$ para algum $w'' \in W$ e $h(w)R_l h(w')$, então cada R^*_l é o fecho reflexivo, transitivo e simétrico da relação definida para $w, w' \in W^*$. Além disso, se $h(w) < h(w')$, então $<^*$ é a relação definida para $w, w' \in W^*$. Também: $I^*(P^k, w) = I(P^k, h(w))$. É possível verificar que M^* e h, assim construídos, satisfazem as condições 1-5 acima, e, em especial, para $w \in W^*$ e $\varphi \in \mathcal{L}^+_n$ que:

$$(M^{*\sigma}, w) \models^p \varphi \quad \text{sse} \quad (M^\sigma, h(w)) \models^p \varphi.$$

Finalmente, defina-se, a partir de M^* um modelo de Kripke $M' = \langle W', \{R'_i\}_{i\in A}, <', D', \{D'_w\}_{w\in W'}, \{D'_{i,w}\}_{i\in A, w\in W'}, F', F'^c, \{F'_i\}_{i\in A}, I'\rangle$ tal que $W' = W^*$, $<' = <^*$, $D' = D^*$, $I' = I^*$, etc., porém R'_i seja o fecho transitivo de $R^*_i \cup \bigcup_{i\in G} R^*_G$. Como as várias R^*_i e R^*_G são relações de equivalência, cada R'_i também o é. Daí:

$$(M'^\sigma, w) \models \varphi \quad \text{sse} \quad (M^{*\sigma}, w) \models^p \varphi.$$

Ou seja, $M \models^p \varphi$ sse $M^* \models^p \varphi$ sse $M' \models \varphi$. □

O último desafio antes de se conseguir a completude está em mostrar que, apesar da relação $<'$ no modelo de Kripke M' não ter sua irreflexividade garantida (como requer um ordenamento temporal típico), é possível construir um modelo irreflexivo M^+ a partir de M' que valide as mesmas fórmulas (Gabbay, Hodkinson e Reynolds, 1993; Belardinelli e Lomuscio, 2008).

Lema 6.5. Seja o modelo de Kripke M' descrito acima. Há um modelo irreflexivo M^+ tal que, para toda $\varphi \in \mathcal{L}_n^+$:

$$M^+ \models \varphi \quad \text{sse} \quad M' \models \varphi.$$

Demonstração. Considere-se o modelo de Kripke M' como definido acima. Sejam $W^{ir} = \{w \mid w \in W' \text{ e } w \not<' w\}$ e $W^r = \{w \mid w \in W' \text{ e } w <' w\}$, respectivamente, o conjunto dos mundos irreflexivos e dos mundos reflexivos de M'. Defina-se a relação de equivalência $\approx$ sobre W^r tal que $w_1 \approx w_2$ sse $w_1 <' w_2$ e $w_2 <' w_1$. Para toda classe a (onde a é alguma classe de equivalência $[w]_\approx$), defina-se uma função sobrejetiva $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow a$ tal que, para todo $w \in a$ e $n \in \mathbb{R}$, haja $m, p \in \mathbb{R}$ e:

$$m < n < p$$
$$\delta(a, m) = w = \delta(a, p).$$

Isso pode ser feito, pois cada classe $[w]_\approx$ tem no máximo $2^{\aleph_0}$ conjuntos saturados de fórmulas. Além disso, para cada $w \in W^{ir}$, seja $\delta(\{w\}, 0) = w$. Defina-se, agora, o modelo de Kripke M^+ tal que seu conjunto W^+ de mundos possíveis consiste em $\{(\{w\}, 0) \mid w \in W^{ir}\} \cup \{(a, p) \mid a \text{ é uma classe de equivalência do tipo } [w]_\approx \text{ e } p \in \mathbb{R}\}$. A ordem $<^+$ definida sobre W^+ é tal que

$$(a, p) <^+ (b, q) \text{ sse } \begin{cases} a \neq b & \text{e houver } w_a \in a \text{ e } w_b \in b \text{ tal que } w_a <' w_b; \\ a = b & \text{e } p < q. \end{cases}$$

Como se pode perceber, a relação $<^+$ é uma ordem parcial estrita e fracamente conectada sobre W^+; portanto, irreflexiva. Além disso, cada relação R_i^+ sobre W^+ é tal que $(a, p)R_i^+(b, q)$ ocorre sse $\delta(a, p)R_i'\delta(b, q)$ for uma relação de equivalência (como de fato é). Quanto ao restante de M^+, seu domínio $D^+ = D'$ e, para $u_1, \ldots, u_k \in D^+$, $\langle \vec{u} \rangle \in I^+(P^k, (a, p))$ sse $\langle \vec{u} \rangle \in I'(P^k, \delta(a, p))$. Adaptações similares devem ser feitas para o comportamento dos demais parâmetros do modelo — $\{D_w^+\}_{w \in W^+}, \{D_{i,w}^+\}_{i \in A, w \in W^+}, F^+, F^{+c}, \{F_i^+\}_{i \in A}$ — sempre levando em conta essa alteração na descrição dos elementos de W^+ (pares no formato (a, p)). Disso se segue que $(M^{+\sigma}, (a, p)) \models \varphi$ sse $(M'^{\sigma}, \delta(a, p)) \models \varphi$. E, finalmente, temos que $M^+ \models \varphi$ sse $M' \models \varphi$, satisfazendo o lema. □

Os seguintes teoremas de completude (fraca) encerram nossa exposição e são provados sem maiores dificuldades a partir dos lemas anteriores.

Teorema 6.1 (Completude de QK4.S5$_n$ com respeito a $\mathcal{M}$)**.** O sistema QK4.S5$_n$ é completo com respeito à classe de todos os modelos variáveis de Kripke $\mathcal{M}$. Ou seja: para $\varphi \in \mathcal{L}_n$, $\mathcal{M} \models \varphi$ acarreta $\vdash \varphi$.

Teorema 6.2 (Completude de QK4.S5$_n$ com respeito a $\mathcal{SIQ}$)**.** O sistema QK4.S5$_n$ é completo com respeito à classe de todos os sistemas interpretados quantificados $\mathcal{SIQ}$. Ou seja: para $\varphi \in \mathcal{L}_n$, $\mathcal{SIQ} \models \varphi$ acarreta $\vdash \varphi$.

7. Considerações finais

Em se tratando do sistema apresentado nesta exposição, apesar da expressividade alcançada, algumas limitações devem ser destacadas:

(1) A falta de axiomas determinando a interação entre modalidades de "natureza" diferente (epistêmicos com temporais) e seu consequente tratamento semântico. Por exemplo: $K_i\varphi \to [F]K_i\varphi$ ou $\langle P\rangle K_i\varphi \to K_i\varphi$.

(2) Aparentemente, não está garantido que cada agente epistêmico esteja ciente de todos os indivíduos em seu próprio domínio epistêmico. Algum postulado precisa ser acrescido, e o correspondente ajuste na semântica precisa ser investigado. Talvez: $Adm_i(t) \to K_iAdm_i(t)$.

Essas e outras limitações mostram que ainda há bastante trabalho a ser feito.

Apoio

Este trabalho foi realizado com apoio financeiro da FAPEMA (Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão).

Referências

Belardinelli, F.; Lomuscio, A. 2007. Quantified Epistemic Logic with Flexible Terms. *A Meeting of the Minds: Proceedings of the Workshop on Logic, Rationality and Interaction LORI07*. London: College Publications.

———. 2008. A Complete First-Order Logic of Knowledge and Time. *Proceedings, Eleventh International Conference on Principles of Knowledge, Representation and Reasoning*. Palo Alto, CA: AAAI Press.

Chang, C. C.; Keisler, H. J. 2012. *Model Theory*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc.

Fagin, R.; Halpern, J. Y.; Vardi, M. Y. 1992. What can machines know? On the properties of knowledge in distributed systems. *Journal of the ACM* **39**(2): 328–76. New York: ACM.

Fagin, R.; Halpern, J. Y.; Moses, Y.; Vardi, M. Y. 1995. *Reasoning about Knowledge*. Cambridge: MIT Press.

Fitting, M.; Mendelsohn, R. L. 1996. *First-Order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Gabbay, D. M.; Hodkinson, I. M.; Reynolds, M. A. 1993. *Temporal Logic, Mathematical Foundations and Computational Aspects* (Volume I). Oxford: Oxford University Press.