



# UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

FUNDAÇÃO Instituída nos termos da Lei nº 5.152, de 21/10/1996 – São Luís – Maranhão

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

---

Exame de Seleção

Doutorado em Física

2º Semestre de 2020

1ª Prova – 27/01/2021

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

---

## Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

Candidato

**D1**

Candidato

D1

**Q1** - Uma partícula de massa  $m$  está sujeita à ação de uma força do tipo,  $f(x) = ax + bx^3$ , onde  $a, b$  são constantes.

- Encontre a energia potencial  $U(x)$  para essa partícula, tomando a referência  $U(0) = -U_0 < 0$  e  $dU = -f(x)dx$ . Faça o esboço gráfico de  $U(x)$  considerando  $a = -A_1 < 0$  e  $b = +B_1 > 0$ , marcando pontos de máximo e mínimo. **(1.0)**
- Seja  $K_0$  a energia cinética da partícula quando localizada em  $x=0$ . Suponha que  $K_0 = A_1^2 / 4B_1$ . Encontre a expressão para a energia mecânica e para a velocidade da partícula em função de  $U_0, A_1, B_1$  e da posição. A velocidade da partícula é bem definida para todos os valores de  $x$ ? Explique. **(1.0)**
- Localize sobre o eixo- $x$  a região onde a partícula pode ser encontrada em duas situações  $K_0 \leq A_1^2 / 4B_1$  e  $K_0 > A_1^2 / 4B_1$ . Explique suas respostas. **(1.0)**
- Considere agora  $U(0) = +U_0 > 0$ ,  $a = A_2 > 0$  e  $b = -B_2 < 0$ . Escreva o potencial  $U(x)$  e faça o seu esboço gráfico marcando pontos de máximo e mínimo, supondo que  $A_2^2 / 4B_2 > U_0$ . **(1.0)**
- Suponha que a partícula esteja localizada inicialmente em  $x = \sqrt{A_2 / B_2}$ , onde sua energia cinética vale  $K = A_2^2 / 8B_2$ . Determine a sua velocidade e localize sobre o eixo- $x$  a região onde a partícula pode ser encontrada, determinando seus limites. **(1.5)**

**Q2** - Considere uma partícula de massa  $m_1$  e posição  $\vec{r}_1$  que interage com uma outra partícula, de massa  $m_2$  e posição  $\vec{r}_2$ , por meio de uma força central,  $\vec{F} = -\frac{K}{r^N} \hat{r}$ , onde  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  é a coordenada relativa,  $N$  é um inteiro positivo,  $K > 0$ . Tais partículas se movem num plano.

- Faça um diagrama deste sistema, localizando a força e o centro de massa do sistema em seu esquema. **(1.0)**
- Escreva as coordenadas das partículas no referencial do CM,  $\vec{r}'_1$  e  $\vec{r}'_2$  em termos da coordenada relativa. Escreva os momentos lineares das partículas no CM,  $\vec{p}'_1$  e  $\vec{p}'_2$ . Determine o momento total,  $\vec{P}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$ . Comente sobre o resultado. **(1.5)**
- Escreva a lagrangeana sistema no referencial do CM, em termos da massa reduzida e da coordenada relativa. Quantas partículas estão descritas nessa lagrangeana? Explique sua resposta conectando-a com o significado de massa reduzida, que precisa também ser esclarecido. **(1.5)**
- Partindo da lagrangeana do item (a), encontre a equação ou as equações de movimento devidas usando a equação de Euler-Lagrange. O que tais equações ou equação fornecem? **(1.0)**

**Q3** - Considere um experimento de Stern-Gerlach de partículas com spin. O aparato é construído de modo a permitir que a orientação do spin esteja em uma direção genérica,  $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ , com ângulos arbitrários  $\theta$  e  $\phi$ .

- a) Construa o operador matriz de spin  $\hat{S} \cdot \hat{n}$  e obtenha seus respectivos autovetores,  $|+, \hat{n}\rangle$  e  $|-, \hat{n}\rangle$ . **(1.0)**

Para o estado com projeção de spin  $+\hbar/2$  na direção  $\hat{n}$ , determine:

- b) os valores de  $\theta$  e  $\phi$  de modo que seja 1/4 a probabilidade de que uma medida da componente-z do spin dê  $+\hbar/2$ ; escreva o estado da partícula após a medida. **(2.0)**
- c) o ângulo  $\phi$  que maximiza a probabilidade  $P(y, +)$  de encontrar a componente -y do spin no estado  $+\hbar/2$ . OBS.: Para responder essa questão, determine primeiramente os autovetores de  $S_y$ . **(2.0)**

**Q4** - Um átomo de hidrogênio em seu estado fundamental tem função de onda  $\psi_0(r) = A e^{-\frac{r}{r_0}}$ . O elétron está sujeito a um potencial coulombiano radialmente simétrico, dado por  $V(r) = -e^2/4\pi\epsilon_0 r$ .

- a) Encontre a constante de normalização  $A$ . **(1.0)**

- b) Encontre o valor esperado da energia,  $\langle E_0 \rangle$ . **(1.5)**

c) Realize a minimização de  $\langle E_0 \rangle$ . Qual é a expressão e o valor de  $r_0$  que minimiza a energia média? O que ele representa fisicamente? **(1.0)**

d) No ponto de minimização vale  $\langle E_{cinética} \rangle = -\langle E_{potencial} \rangle/2$ ? Comente sobre esse resultado. Está previsto em algum teorema? **(1.5)**

Use:  $m = 9,11 \times 10^{-31} kg$ ;  $h = 6,63 \times 10^{-34} J \cdot s$ ;  $e = 1.60 \times 10^{-19} C$ ;  
 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2/(N \cdot m^2)$ .

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2020.2

<b>Candidato</b>	<b>D1</b>	<b>Questão</b>	<b>Q1</b>
------------------	-----------	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2020.2

<b>Candidato</b>	<b>D1</b>	<b>Questão</b>	<b>Q2</b>
------------------	-----------	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2020.2

<b>Candidato</b>	<b>D1</b>	<b>Questão</b>	<b>Q3</b>
------------------	-----------	----------------	-----------

Exame de Seleção – Programa de Pós-Graduação em Física – 2020.2

<b>Candidato</b>	<b>D1</b>	<b>Questão</b>	<b>Q4</b>
------------------	-----------	----------------	-----------