UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

FUNDAÇÃO Instituída nos termos da Lei nº 5.152, de 21/10/1996 – São Luís – Maranhão

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Exame de Seleção

Doutorado em Física

1º Semestre de 2023

1ª Prova – 27/02/2023

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

Instruções

- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

Candidato **D1**

Av. dos Portugueses, 1966 – Campus Universitário do Bacanga – São Luís – MA – 65.080-805

Fone: (098) 3272-8204

Candidato	D1

Q1 **-** Considere uma partícula de massa m cuja energia potencial é dada por $V(x) = V_0\left(\frac{2x^2}{x_0^2} - \frac{x^4}{x_0^4}\right)$, onde $V_0 > 0$ e $x_0 > 0$ representam constantes reais positivas. Responda os itens a seguir:

a) Encontre a força sob a qual a partícula está sujeita. Discuta o regime de aproximação no qual este resultado representa uma força restauradora.
b) Determine os pontos de equilíbrio estável e instável no movimento da partícula.

c) Determine a frequência angular ω de oscilação da partícula no regime de pequenos deslocamentos em torno do ponto de equilíbrio estável.

d) Considerando a partícula na posição x=0 no instante t=0, qual a velocidade mínima v_{min} a partir da qual a partícula exibe movimento ilimitado?

Q2 - A Fig. 1 mostra uma partícula de massa m que se move na superfície de um cilindro circular reto de raio R. A partícula está sujeita a ação da força radial $\vec{F} = -k\vec{r}$, onde $k > 0$ é uma constante real positiva, e $\vec{r}$ é o vetor tridimensional de coordenadas da partícula com origem no centro do cilindro (veja Fig. 1). Neste problema, ignore qualquer contribuição gravitacional. Responda os itens a seguir:

a) Escreva a Lagrangiana do sistema em termos de coordenadas cilíndricas e obtenha as equações de movimento.
b) Encontre os momentos conjugados associados às coordenadas do sistema. Existe alguma coordenada cíclica ou ignorável? Existe alguma quantidade conservada? Justifique sua resposta.
c) Escreva a Hamiltoniana do sistema e obtenha as equações canônicas de Hamilton.
d) Determine a frequência ω de oscilação da partícula. Discuta este resultado fisicamente.

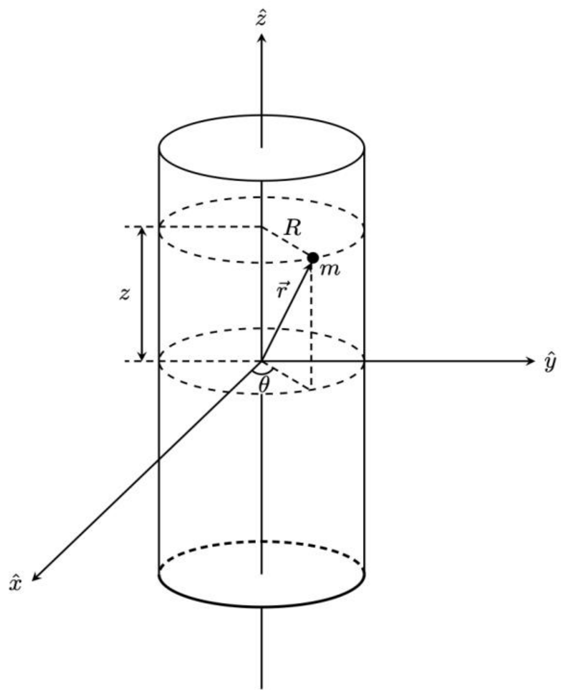

Fig. 1

Q3 -Considere a base de autofunções (ortonormais) $\phi_j(x)$ do operador B, satisfazendo as seguintes relações de autovalores: $B\phi_j^i = b_j \phi_j^i$, sendo i um índice de degenerescência. Uma função arbitrária, $\Theta(x)$, é escrita nesta base de funções como: $\Theta(x) = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{g_j} c_j^i \phi_j^i(x)$, onde c_j^i são coeficientes da expansão.

a) É correto afirmar que $\int \phi_a^{i*}(x)\phi_b^i(x)dx = \delta_{ab}$? Considere $a,b = 1,2,3,4$ e $\delta_{ab} = 0,1$ é o delta de Kronecker. Justifique sua resposta.

b) Escreva $\Theta(x)$ desenvolvendo o primeiro somatório em j. Suponha agora que $g_1 = 2,\ g_2 = 1,\ g_3 = 3,\ g_4 = 2$. Escreva então $\Theta(x)$ desenvolvendo os dois somatórios.

c) Qual o significado do fator g_j? O que designa? Qual das funções $\phi_j(x)$ são degeneradas e quais são não degeneradas?

d) Ao se fazer a medida do operador B sobre a função $\Theta(x)$, que resultados podem ser obtidos e com qual probabilidade?

e) Ao se medir o operador B sobre a função $\Theta(x)$, obtém-se o autovalor b_3. Qual o estado do sistema após esta medida? Ao se medir novamente o operador B sobre o estado decorrente da 1ª medida, o que se obtém? Explique.

Q4 - Sejam autofunções ψ_{lm} que satisfazem relações de autovalores sob ação dos operadores de momento angular, tais como: $L^2\psi_{lm} = l(l+1)\psi_{lm},\ L_z\psi_{lm} = m\psi_{lm}$. Considere um sistema descrito pelo seguinte Hamiltoniano,

$$H = \frac{1}{2I_1}\left(L_x^2 + L_y^2\right) + \frac{1}{2I_3}L_z^2,$$

onde L_x, L_y, L_z são componentes do momento angular.

a) É possível afirmar se as componentes L_x e L_z são constantes de movimento, de acordo com a equação de Heisenberg?? Explique.
Dica: $[L_x, L_y] = i\hbar L_z,\ [L_x, L_z] = -i\hbar L_y,\ [L_y, L_z] = i\hbar L_x$.

b) As funções ψ_{lm} representam autoestados de energia? Em caso positivo, determine os autovalores de energia.

c) Tais autoenergias são degeneradas? Explique a degenerescência, se houver.

d) Suponha que tal Hamiltoniano represente o movimento de rotação de uma molécula. Nesse caso, podem existir autoenergias negativas? Explique. Qual a interpretação física das grandezas I_1 e I_3 neste caso? Explique.

Candidato	**D1**	**Questão**	**Q1**

Candidato	**D1**	**Questão**	**Q2**

Candidato	**D1**	**Questão**	**Q3**

Candidato	**D1**	**Questão**	**Q4**