UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
FUNDAÇÃO Instituída nos termos da Lei nº 5.152, de 21/10/1996 – São Luís – Maranhão
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Exame de Seleção

Doutorado em Física

2º Semestre de 2023

1ª Prova – 08/08/2023

Mecânica Clássica e Mecânica Quântica

Instruções

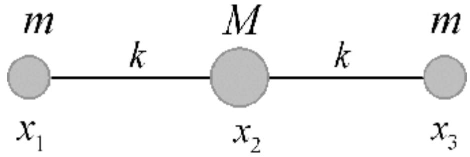
- Cada prova tem duração de 4 horas.
- Não se identifique no caderno de respostas.
- Não é permitido consulta a materiais bibliográficos que não o formulário entregue junto com a prova, o qual deve ser devolvido no final da prova.
- Não é permitida a utilização de equipamentos eletrônicos tais como celulares, calculadoras e outros.
- Responda a questão na folha indicada para cada questão.
- Caso seja necessário utilizar mais de uma página, solicite uma folha extra, registrando seu código e questão nos campos indicados.
- Para borrão, utilize as folhas indicadas como borrão no final de cada caderno de prova. É importante salientar que as respostas contidas nessas folhas não serão consideradas.

Candidato **D2**

Av. dos Portugueses, 1966 – Campus Universitário do Bacanga – São Luís – MA – 65.080-805
Fone: (098) 3272-8204

Candidato	**D2**

Q1 - Estamos interessados nos modos normais das vibrações longitudinais de uma molécula triatômica linear e simétrica. Considere um modelo simples com passas puntiformes descritas na ordem m M m, cujas forças atrativas são representadas por molas idênticas de constante k. Use a coordenada generalizada x_i para representar o deslocamento da massa i com relação a sua posição de equilíbrio, como ilustrado na figura abaixo:



A Lagrangiana do sistema é dada por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x_2}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x_3}^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$$

a) Escreva as equações de Euler-Lagrange para os deslocamentos das três massas. Use $\Omega^2 = k/m$ e $r = M/m$. **(1.0)**

b) Encontre as frequências angulares próprias. Defina $\lambda = \omega/\Omega$. **(1.0)**

c) Encontre os correspondentes modos normais. **(1.0)**

d) Um modo próprio tem frequência nula. Explique o movimento correspondente. Este modo corresponde a uma grandeza conservada. Explique qual e porquê é conservada. **(1.0)**

e) Forneça uma interpretação simples para os outros dois modos, baseada nos resultados obtidos. **(1.0)**

Q2 - Uma partícula de massa m move-se sob a ação de uma força central descrita pela energia potencial $V(r) = -V_0 e^{(-\lambda^2 r^2)}$, com $V_0 > 0$.

a) Obtenha a Lagrangiana L para a partícula e as equações de movimento para $r(t)$ e $\theta(t)$ para a partícula. A partir da equação para $\theta(t)$ obtenha a conservação do momento angular L. Mostre que o conceito de potencial efetivo emerge naturalmente da equação de movimento para $r(t)$. **(1.25)**

b) Considerando a expressão para a energia potencial centrífuga $V_{cf}(r) = \frac{L^2}{2mr^2}$, represente em um esboço os potenciais $V(r), V_{cf}(r)$ e energia potencial efetiva $V_{ef}(r) = V(r) + V_{cf}(r)$, identificando no gráfico a região/ponto em que uma órbita circular estável é possível. Justifique seu esboço pelos limites obtidos dos potenciais $V(r), V_{cf}(r)$ para $r \to 0$ e $r \to \infty$. **(1.25)**

c) Considerando a expressão para a energia potencial efetiva $V_{ef}(r)$, mostre que a condição para a existência de uma órbita circular resulta em uma equação implícita para r. **(1.25)**

d) A equação implícita obtida no item anterior só tem solução se o momento angular é menor do que um valor máximo L_{max}. Impondo a condição de máximo para L na equação implícita do item b), encontre o correspondente valor do raio da órbita circular r_0. Substituindo r_0 na equação implícita, obtenha L_{max}. **(1.25)**

Q3 - Um elétron está inicialmente em repouso em um campo magnético oscilante na direção z

$$\vec{B} = B_0 cos(\omega t)\hat{k},$$

onde B_0 e ω são constantes. O operador hamiltoniano do sistema é $H = -\gamma \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S}$.

a) Monte a matriz Hamiltoniana. **(1.25)**

b) O elétron encontra-se inicialmente (em $t = 0$) no estado de spin para cima em relação ao eixo x (isto é: $\chi(0) = \chi_+^{(x)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\binom{1}{1}$). Seja $\chi(t) = \binom{a(t)}{b(t)}$ a função espinorial em qualquer tempo posterior. Partindo da equação de Schrödinger dependente do tempo para $\chi(t)$, obtenha as equações para $a(t)$ e $b(t)$. **(1.25)**

c) Resolva as equações para $a(t)$ e $b(t)$ e encontre a função espinorial $\chi(t)$ **(1.25)**

d) Calcule a probabilidade de se obter $-\hbar/2$ ao medir S_x. **(1.25)**

Q4 - Dependência temporal dos valores esperados:

a) Considere o valor esperado do operador A,

$$\langle A \rangle = \int d^3x\, \psi^* A \psi.$$

Utilizando a equação de Schrödinger dependente do tempo, prove que a derivada temporal de um valor esperado é dada por (2,0 pts)

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H] \rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle.$$

b) Seja um oscilador harmônico unidimensional, com Hamiltoniana dada por (2,0 pts)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

encontre as derivadas temporais $\frac{d}{dt}\langle x \rangle$ e $\frac{d}{dt}\langle p \rangle$.

c) Considere o resultado do item anterior. Se, no instante $t = 0$, tivermos $\langle x \rangle_0 \equiv x_0$ e $\langle p \rangle_0 \equiv p_0$, obtenha o valor esperado da posição e do momento no instante t. (1,0 pt)

Candidato	**D2**	**Questão**	**Q1**

Candidato	D2	Questão	Q2

Candidato	**D2**	**Questão**	**Q3**

Candidato	**D2**	**Questão**	**Q4**