

Bifurcação de Pontos Axiais e Ciclos Axiais de Superfícies Imersas em \mathbb{R}^4

Flausino Lucas Neves Spindola
Orientador: Jorge Sotomayor
Co-Orientador: Ronaldo Garcia

Universidade de São Paulo / Universidade Presbiteriana Mackenzie

January 29, 2015

Índice

- 1 **Comentários Iniciais**
- 2 **Equação Diferencial das Linhas Axiais**
- 3 **Configurações Axiais**
- 4 **Equação em uma Carta de Monge**
- 5 **Configurações Axiais ao Redor de um Ponto Axiumbílico**
- 6 **Ponto Axiumbílico E_{34}^1**
- 7 **Ponto Axiumbílico E_{45}^1**
- 8 **Ciclos Axiais**

Outline

- 1 **Comentários Iniciais**
- 2 Equação Diferencial das Linhas Axiais
- 3 Configurações Axiais
- 4 Equação em uma Carta de Monge
- 5 Configurações Axiais ao Redor de um Ponto Axiumbólico
- 6 Ponto Axiumbólico E_{34}^1
- 7 Ponto Axiumbólico E_{45}^1
- 8 Ciclos Axiais

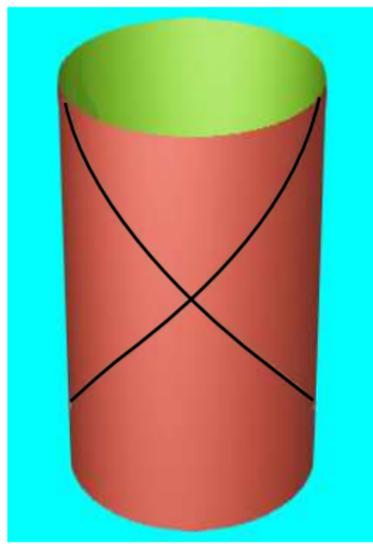
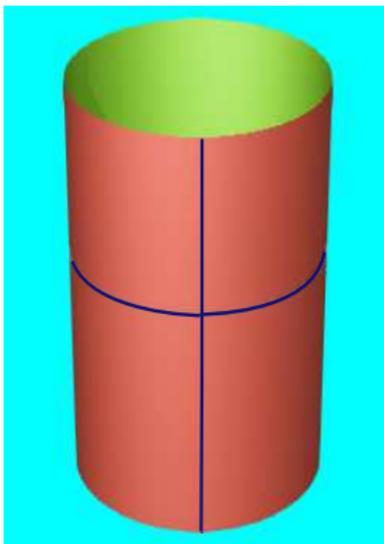
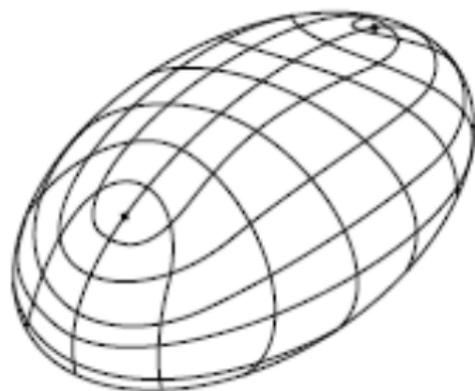
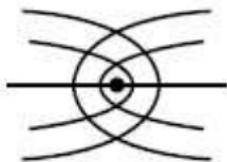
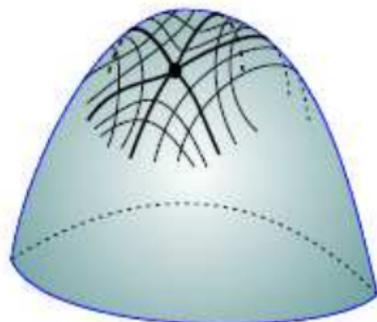
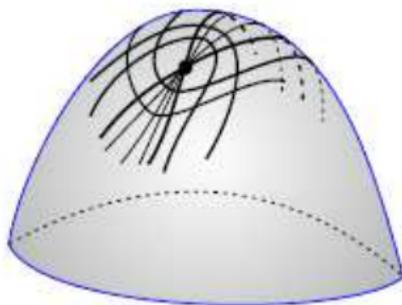
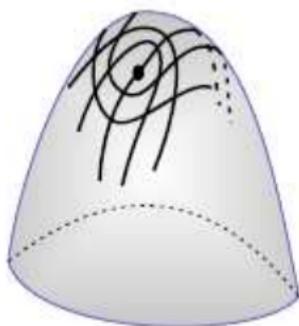
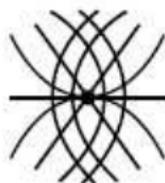
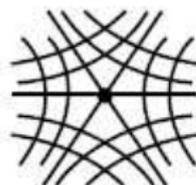


Figure: Cilindro em \mathbb{R}^3 com linhas de curvatura principal e linhas de curvatura média



 D_1  D_2  D_3

Outline

- 1 Comentários Iniciais
- 2 Equação Diferencial das Linhas Axiais**
- 3 Configurações Axiais
- 4 Equação em uma Carta de Monge
- 5 Configurações Axiais ao Redor de um Ponto Axiumbílico
- 6 Ponto Axiumbílico E_{34}^1
- 7 Ponto Axiumbílico E_{45}^1
- 8 Ciclos Axiais

Seja $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão C^r , $r \geq 4$, de uma superfície suave orientada no espaço \mathbb{R}^4 com uma orientação fixada e dotado do produto interno euclidiano.

Assuma que (x, y) seja uma carta positiva e que $\{\alpha_x, \alpha_y, N_1, N_2\}$ seja um referencial positivo onde para cada $p \in M$, $\{\alpha_x, \alpha_y\}_p$ é base do plano tangente $T_p M$ e $\{N_1, N_2\}_p$ é base do plano normal $N_p M$.

Primeira Forma Fundamental

$$I_\alpha := E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

sendo $E = \langle \alpha_x, \alpha_x \rangle$, $F = \langle \alpha_x, \alpha_y \rangle$ e $G = \langle \alpha_y, \alpha_y \rangle$

Seja $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão C^r , $r \geq 4$, de uma superfície suave orientada no espaço \mathbb{R}^4 com uma orientação fixada e dotado do produto interno euclidiano.

Assuma que (x, y) seja uma carta positiva e que $\{\alpha_x, \alpha_y, N_1, N_2\}$ seja um referencial positivo onde para cada $p \in M$, $\{\alpha_x, \alpha_y\}_p$ é base do plano tangente $T_p M$ e $\{N_1, N_2\}_p$ é base do plano normal $N_p M$.

Primeira Forma Fundamental

$$I_\alpha := E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

sendo $E = \langle \alpha_x, \alpha_x \rangle$, $F = \langle \alpha_x, \alpha_y \rangle$ e $G = \langle \alpha_y, \alpha_y \rangle$

Seja $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão C^r , $r \geq 4$, de uma superfície suave orientada no espaço \mathbb{R}^4 com uma orientação fixada e dotado do produto interno euclidiano.

Assuma que (x, y) seja uma carta positiva e que $\{\alpha_x, \alpha_y, N_1, N_2\}$ seja um referencial positivo onde para cada $p \in M$, $\{\alpha_x, \alpha_y\}_p$ é base do plano tangente $T_p M$ e $\{N_1, N_2\}_p$ é base do plano normal $N_p M$.

Primeira Forma Fundamental

$$I_\alpha := E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

sendo $E = \langle \alpha_x, \alpha_x \rangle$, $F = \langle \alpha_x, \alpha_y \rangle$ e $G = \langle \alpha_y, \alpha_y \rangle$

Segunda Forma Fundamental

$$II_{\alpha} = II_{\alpha}^1 N_1 + II_{\alpha}^2 N_2$$

onde cada $II_{\alpha}^i, i = 1, 2$ é descrito por:

$$II_{\alpha}^i := e_i dx^2 + 2f_i dx dy + g_i dy^2$$

sendo $e_i = \langle \alpha_{xx}, N_i \rangle, f_i = \langle \alpha_{xy}, N_i \rangle$ e $g_i = \langle \alpha_{yy}, N_i \rangle$.

Segunda Forma Fundamental

$$II_{\alpha} = II_{\alpha}^1 N_1 + II_{\alpha}^2 N_2$$

onde cada $II_{\alpha}^i, i = 1, 2$ é descrito por:

$$II_{\alpha}^i := e_i dx^2 + 2f_i dx dy + g_i dy^2$$

sendo $e_i = \langle \alpha_{xx}, N_i \rangle$, $f_i = \langle \alpha_{xy}, N_i \rangle$ e $g_i = \langle \alpha_{yy}, N_i \rangle$.

Vetor Curvatura Média

Para cada $p \in M$, definimos o *vetor curvatura média* $H(p)$ por:

$$H = h_1 N_1 + h_2 N_2$$

sendo

$$h_i = \frac{Eg_i - 2Ff_i + Ge_i}{2(EG - F^2)}$$

Vetor Curvatura Normal

Dado vetor não-nulo v em $T_p M$, definimos o *vetor curvatura normal* por:

$$k_n = k_n(p, v) := \frac{II_\alpha(v)}{I_\alpha(v)} = \frac{II_\alpha^1(v)}{I_\alpha(v)} N_1 + \frac{II_\alpha^2(v)}{I_\alpha(v)} N_2$$

$$\begin{aligned} k_n(p, \lambda v) &= \frac{II_\alpha(\lambda v)}{I_\alpha(\lambda v)} \\ &= \frac{II_\alpha(v)}{I_\alpha(v)} \\ &= k_n(p, v) \end{aligned}$$

Portanto, podemos falar em vetor curvatura normal na direção v , e tratar de $k_n \Big|_{S^1}$

Vetor Curvatura Normal

Dado vetor não-nulo v em $T_p M$, definimos o *vetor curvatura normal* por:

$$k_n = k_n(p, v) := \frac{II_\alpha(v)}{I_\alpha(v)} = \frac{II_\alpha^1(v)}{I_\alpha(v)} N_1 + \frac{II_\alpha^2(v)}{I_\alpha(v)} N_2$$

$$\begin{aligned} k_n(p, \lambda v) &= \frac{II_\alpha(\lambda v)}{I_\alpha(\lambda v)} \\ &= \frac{II_\alpha(v)}{I_\alpha(v)} \\ &= k_n(p, v) \end{aligned}$$

Portanto, podemos falar em vetor curvatura normal na direção v , e tratar de $k_n \Big|_{S^1}$

Vetor Curvatura Normal

Dado vetor não-nulo v em $T_p M$, definimos o *vetor curvatura normal* por:

$$k_n = k_n(p, v) := \frac{II_\alpha(v)}{I_\alpha(v)} = \frac{II_\alpha^1(v)}{I_\alpha(v)} N_1 + \frac{II_\alpha^2(v)}{I_\alpha(v)} N_2$$

$$\begin{aligned} k_n(p, \lambda v) &= \frac{II_\alpha(\lambda v)}{I_\alpha(\lambda v)} \\ &= \frac{II_\alpha(v)}{I_\alpha(v)} \\ &= k_n(p, v) \end{aligned}$$

Portanto, podemos falar em vetor curvatura normal na direção v , e tratar de $k_n \Big|_{S^1}$

- A aplicação k_n , restrita ao círculo unitário S^1_p é uma aplicação afim, cuja imagem descreve uma elipse em N_pM centrada em $H(p)$ chamada *elipse de curvatura* de α em p e denotada por $\varepsilon_\alpha(p)$
- $k_n \Big|_{S^1} = H_\alpha$ é quadrática, e portanto recobre duplamente a elipse.
- A pré-imagem de cada ponto da elipse é constituída de dois pontos diametralmente opostos em S^1 , e portanto a cada ponto de $\varepsilon_\alpha(p)$ está associada uma direção em T_pM

- A aplicação k_n , restrita ao círculo unitário S^1_p é uma aplicação afim, cuja imagem descreve uma elipse em N_pM centrada em $H(p)$ chamada *elipse de curvatura* de α em p e denotada por $\varepsilon_\alpha(p)$
- $k_n \Big|_{S^1} = II_\alpha$ é quadrática, e portanto recobre duplamente a elipse.
- A pré-imagem de cada ponto da elipse é constituída de dois pontos diametralmente opostos em S^1 , e portanto a cada ponto de $\varepsilon_\alpha(p)$ está associada uma direção em T_pM

- A aplicação k_n , restrita ao círculo unitário S^1_p é uma aplicação afim, cuja imagem descreve uma elipse em N_pM centrada em $H(p)$ chamada *elipse de curvatura* de α em p e denotada por $\varepsilon_\alpha(p)$
- $k_n \Big|_{S^1} = II_\alpha$ é quadrática, e portanto recobre duplamente a elipse.
- A pré-imagem de cada ponto da elipse é constituída de dois pontos diametralmente opostos em S^1 , e portanto a cada ponto de $\varepsilon_\alpha(p)$ está associada uma direção em T_pM

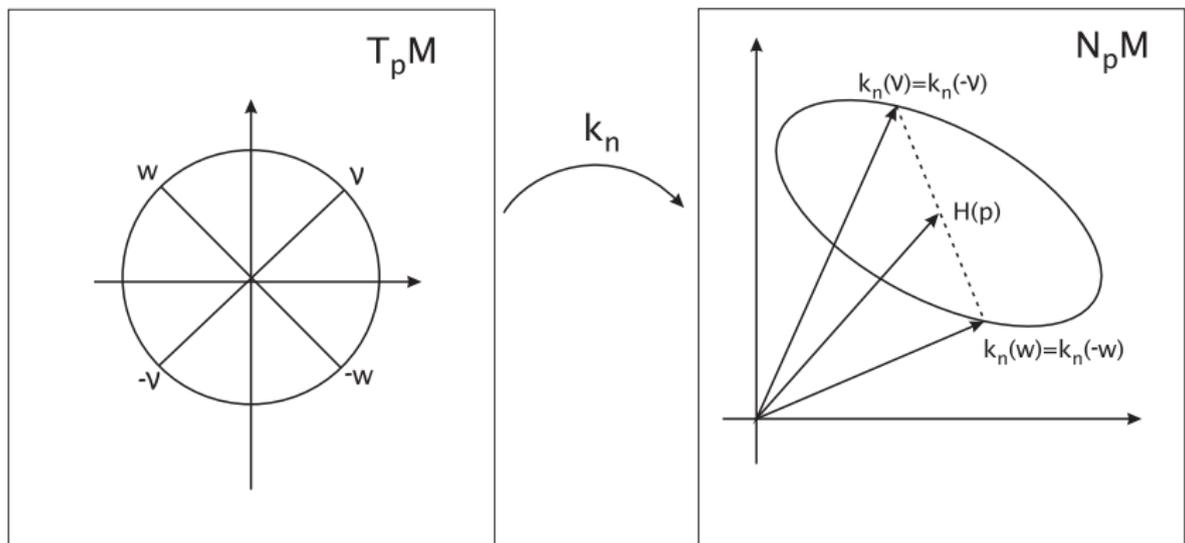


Figure: Elipse de Curvatura $\varepsilon_\alpha(p)$

- A dois pontos de $\varepsilon_\alpha(p)$, simétricos com relação a $H(p)$, estão associadas duas direções ortogonais em T_pM , formando assim uma *cruz* em T_pM

- Expressamos a área da elipse de curvatura como:

$$A(\varepsilon_\alpha(p)) = \pi \cdot \frac{(e_1 - g_1)f_2 - (e_2 - g_2)f_1}{2}$$

- A dois pontos de $\varepsilon_\alpha(p)$, simétricos com relação a $H(p)$, estão associadas duas direções ortogonais em T_pM , formando assim uma *cruz* em T_pM
- Expressamos a área da elipse de curvatura como:

$$A(\varepsilon_\alpha(p)) = \pi \cdot \frac{(e_1 - g_1)f_2 - (e_2 - g_2)f_1}{2}$$

Considere a função:

$$\|k_n - H\|^2 := \left[\frac{e_1 dx^2 + 2f_1 dx dy + g_1 dy^2}{Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2} - \frac{Eg_1 - 2Ff_1 + Ge_1}{2(EG - F^2)} \right]^2 + \left[\frac{e_2 dx^2 + 2f_2 dx dy + g_2 dy^2}{Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2} - \frac{Eg_2 - 2Ff_2 + Ge_2}{2(EG - F^2)} \right]^2$$

Para cada $p \in M$ em que $\varepsilon_\alpha(p)$ não se degenera em um ponto ou círculo, os pontos de máximo e de mínimo desta função determinam quatro pontos sobre a elipse de curvatura $\varepsilon_\alpha(p)$, a saber, aqueles que são intersecção da elipse com seus eixos maior e menor.

Considere a função:

$$\|k_n - H\|^2 := \left[\frac{e_1 dx^2 + 2f_1 dx dy + g_1 dy^2}{Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2} - \frac{Eg_1 - 2Ff_1 + Ge_1}{2(EG - F^2)} \right]^2 + \left[\frac{e_2 dx^2 + 2f_2 dx dy + g_2 dy^2}{Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2} - \frac{Eg_2 - 2Ff_2 + Ge_2}{2(EG - F^2)} \right]^2$$

Para cada $p \in M$ em que $\varepsilon_\alpha(p)$ não se degenera em um ponto ou círculo, os pontos de máximo e de mínimo desta função determinam quatro pontos sobre a elipse de curvatura $\varepsilon_\alpha(p)$, a saber, aqueles que são intersecção da elipse com seus eixos maior e menor.

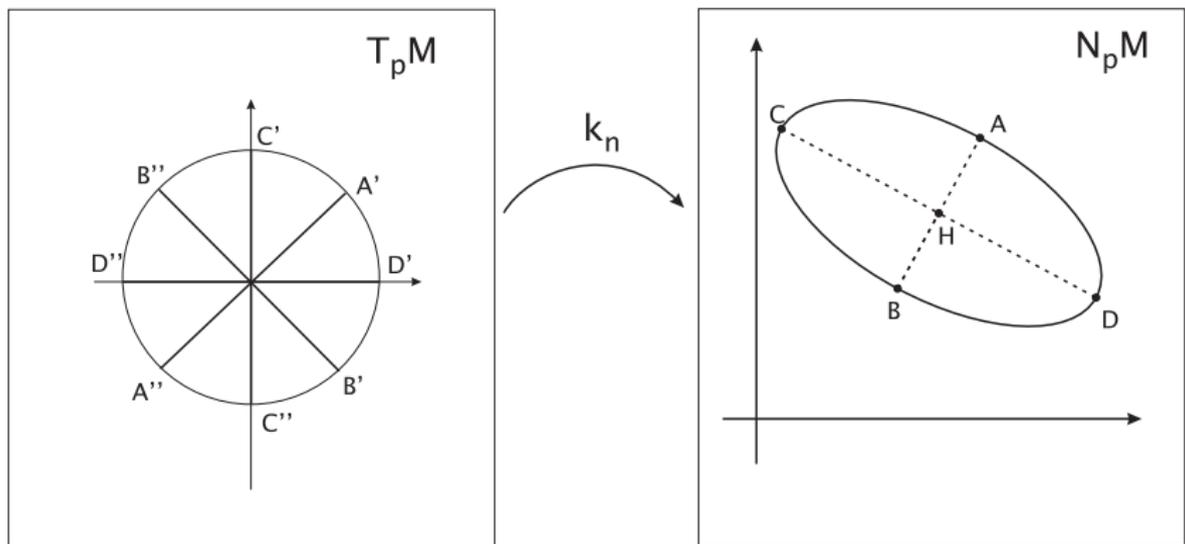


Figure: Elipse de Curvatura $\varepsilon_\alpha(p)$

- Nos pontos $p \in M$ em que a elipse se degenera em um círculo, temos que a função $\|k_n - H\|^2$ é constante, e portanto o campo de direções de curvatura axial não fica bem definido.
- Chamaremos estes de *pontos umbílicos axiais* ou *pontos axiumbílicos* da imersão α , e denotaremos o conjunto dos pontos axiumbílicos da imersão α por \mathcal{U}_α .

- Determinar as direções de curvatura axial consiste em resolver:

$$\text{Jac}(\|k_n - H\|^2, l_\alpha) = 0$$

a qual possui quatro soluções para cada p fora de \mathcal{U}_α , e fica indeterminada nos pontos $p \in \mathcal{U}_\alpha$.

- Nos pontos $p \in M$ em que a elipse se degenera em um círculo, temos que a função $\|k_n - H\|^2$ é constante, e portanto o campo de direções de curvatura axial não fica bem definido.
- Chamaremos estes de *pontos umbílicos axiais* ou *pontos axiumbílicos* da imersão α , e denotaremos o conjunto dos pontos axiumbílicos da imersão α por \mathcal{U}_α .

- Determinar as direções de curvatura axial consiste em resolver:

$$\text{Jac}(\|k_n - H\|^2, l_\alpha) = 0$$

a qual possui quatro soluções para cada p fora de \mathcal{U}_α , e fica indeterminada nos pontos $p \in \mathcal{U}_\alpha$.

- Nos pontos $p \in M$ em que a elipse se degenera em um círculo, temos que a função $\|k_n - H\|^2$ é constante, e portanto o campo de direções de curvatura axial não fica bem definido.
- Chamaremos estes de *pontos umbílicos axiais* ou *pontos axiumbílicos* da imersão α , e denotaremos o conjunto dos pontos axiumbílicos da imersão α por \mathcal{U}_α .
- Determinar as direções de curvatura axial consiste em resolver:

$$\text{Jac}(\|k_n - H\|^2, I_\alpha) = 0$$

a qual possui quatro soluções para cada p fora de \mathcal{U}_α , e fica indeterminada nos pontos $p \in \mathcal{U}_\alpha$.

Proposição (Garcia,Sotomayor)

Seja $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão C^r , $r \geq 4$, de uma superfície suave orientada. Denote a primeira forma fundamental por

$$I_\alpha = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$$

e a segunda forma fundamental por

$$II_\alpha = (e_1 dx^2 + 2f_1 dx dy + g_1 dy^2) N_1 + (e_2 dx^2 + 2f_2 dx dy + g_2 dy^2) N_2$$

onde $\{N_1, N_2\}$ é um referencial ortonormal, tal que $\{\alpha_x, \alpha_y, N_1, N_2\}$ seja um referencial positivo.

A equação diferencial das linhas axiais é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= [a_0 G(EG - 4F^2) + a_1 F(2F^2 - EG)]dy^4 \\ &+ [-8a_0 EFG + a_1 E(4F^2 - EG)]dy^3 dx \\ &+ [-6a_0 GE^2 + 3a_1 FE^2]dy^2 dx^2 \\ &+ a_1 E^3 dy dx^3 \\ &+ a_0 E^3 dx^4 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1 &= 4G(EG - 4F^2)(e_1^2 + e_2^2) \\ &+ 32EFG(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\ &+ 4E^3(g_1^2 + g_2^2) \\ &- 8E^2G(e_1 g_1 + e_2 g_2) \\ &- 16E^2G(f_1^2 + f_2^2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}a_0 &= 4F(EG - 2F^2)(e_1^2 + e_2^2) \\ &- 4E(EG - 4F^2)(e_1 f_1 + e_2 f_2) \\ &+ 4E^3(f_1 g_1 + f_2 g_2) \\ &- 4E^2F(e_1 g_1 + e_2 g_2) \\ &- 8E^2F(f_1^2 + f_2^2)\end{aligned}$$

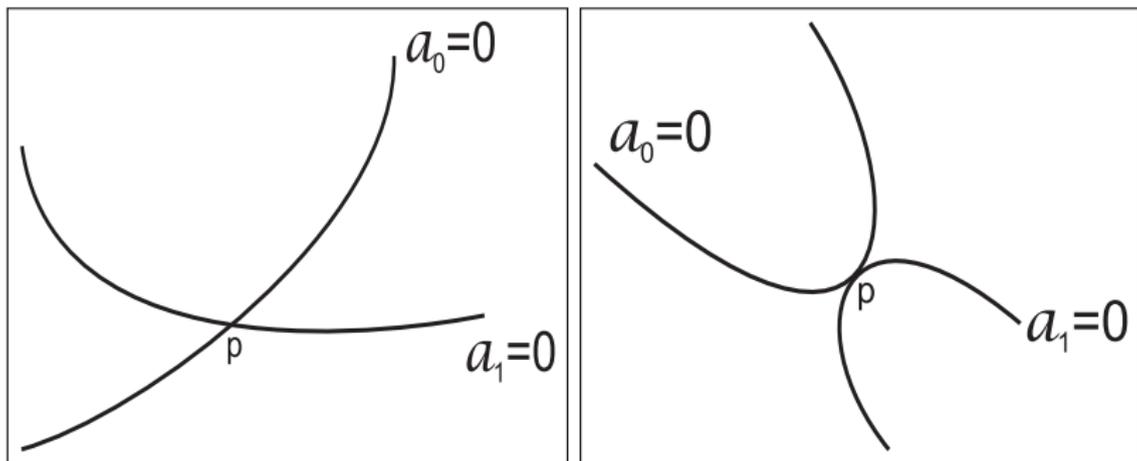


Figure: Transversalidade e Contato Quadrático das Curvas $a_0 = 0$ e $a_1 = 0$ em p

No caso de coordenadas isotérmicas, isto é, $E = G$ e $F = 0$, a equação diferencial das linhas axiais se reduz a:

$$a_0(x, y)(dx^4 - 6dx^2dy^2 + dy^4) + a_1(x, y)(dx^2 - dy^2)dxdy = 0$$

Fazendo $p = \frac{dy}{dx}$, reduzimos a

$$a_0(x, y)(p^4 - 6p^2 + 1) + a_1(x, y)p(1 - p^2) = 0$$

No caso de coordenadas isotérmicas, isto é, $E = G$ e $F = 0$, a equação diferencial das linhas axiais se reduz a:

$$a_0(x, y)(dx^4 - 6dx^2dy^2 + dy^4) + a_1(x, y)(dx^2 - dy^2)dxdy = 0$$

Fazendo $p = \frac{dy}{dx}$, reduzimos a

$$a_0(x, y)(p^4 - 6p^2 + 1) + a_1(x, y)p(1 - p^2) = 0$$

Proposição

Suponha que M está contido em \mathbb{R}^3 com $e_2 = f_2 = g_2 = 0$. Então a equação diferencial das linhas axiais é o produto entre a equação diferencial das linhas principais e a equação diferencial das linhas médias, ou seja, a equação diferencial quártica é dada por:

$$\text{Jac}(II_\alpha, I_\alpha) \cdot \text{Jac}(\text{Jac}(II_\alpha, I_\alpha), I_\alpha) = 0$$

Outline

- 1 Comentários Iniciais
- 2 Equação Diferencial das Linhas Axiais
- 3 Configurações Axiais**
- 4 Equação em uma Carta de Monge
- 5 Configurações Axiais ao Redor de um Ponto Axiumbólico
- 6 Ponto Axiumbólico E_{34}^1
- 7 Ponto Axiumbólico E_{45}^1
- 8 Ciclos Axiais

Denote por $\mathcal{I}^r = \mathcal{I}^r(M, \mathbb{R}^4)$ o conjunto das imersões \mathcal{C}^r de M em \mathbb{R}^4 .

Para cada $\alpha \in \mathcal{I}^r$, fica bem definida a equação diferencial das linhas axiais:

$$\mathcal{G}(x, y, dx, dy) = a_4 dy^4 + a_3 dy^3 dx + a_2 dy^2 dx^2 + a_1 dy dx^3 + a_0 dx^4 = 0$$

a qual está definida no fibrado projetivo PM da superfície M

Definição

Para cada $\alpha \in \mathcal{I}^r$, definimos a *Superfície de Lie-Cartan* da imersão α por $\mathcal{L}_\alpha := \mathcal{G}_\alpha^{-1}(0)$.

Denote por $\mathcal{I}^r = \mathcal{I}^r(M, \mathbb{R}^4)$ o conjunto das imersões \mathcal{C}^r de M em \mathbb{R}^4 .

Para cada $\alpha \in \mathcal{I}^r$, fica bem definida a equação diferencial das linhas axiais:

$$\mathcal{G}(x, y, dx, dy) = a_4 dy^4 + a_3 dy^3 dx + a_2 dy^2 dx^2 + a_1 dy dx^3 + a_0 dx^4 = 0$$

a qual está definida no fibrado projetivo PM da superfície M

Definição

Para cada $\alpha \in \mathcal{I}^r$, definimos a *Superfície de Lie-Cartan* da imersão α por $\mathcal{L}_\alpha := \mathcal{G}_\alpha^{-1}(0)$.

Denote por $\mathcal{I}^r = \mathcal{I}^r(M, \mathbb{R}^4)$ o conjunto das imersões \mathcal{C}^r de M em \mathbb{R}^4 .

Para cada $\alpha \in \mathcal{I}^r$, fica bem definida a equação diferencial das linhas axiais:

$$\mathcal{G}(x, y, dx, dy) = a_4 dy^4 + a_3 dy^3 dx + a_2 dy^2 dx^2 + a_1 dy dx^3 + a_0 dx^4 = 0$$

a qual está definida no fibrado projetivo PM da superfície M

Definição

Para cada $\alpha \in \mathcal{I}^r$, definimos a *Superfície de Lie-Cartan* da imersão α por $\mathcal{L}_\alpha := \mathcal{G}_\alpha^{-1}(0)$.

Na carta (x, y, p) , com $p = \frac{dy}{dx}$, temos:

$$\mathcal{G}(x, y, p) = a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

consideremos o campo X_α , de classe \mathcal{C}^{r-3} , conhecido como *Campo de Lie-Cartan*:

$$X_\alpha := \mathcal{G}_p \frac{\partial}{\partial x} + p \mathcal{G}_p \frac{\partial}{\partial y} - (\mathcal{G}_x + p \mathcal{G}_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

Este campo é tangente à superfície de Lie-Cartan.

Na carta (x, y, p) , com $p = \frac{dy}{dx}$, temos:

$$\mathcal{G}(x, y, p) = a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

consideremos o campo X_α , de classe \mathcal{C}^{r-3} , conhecido como *Campo de Lie-Cartan*:

$$X_\alpha := \mathcal{G}_p \frac{\partial}{\partial x} + p \mathcal{G}_p \frac{\partial}{\partial y} - (\mathcal{G}_x + p \mathcal{G}_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

Este campo é tangente à superfície de Lie-Cartan.

Na carta (x, y, p) , com $p = \frac{dy}{dx}$, temos:

$$\mathcal{G}(x, y, p) = a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

consideremos o campo X_α , de classe \mathcal{C}^{r-3} , conhecido como *Campo de Lie-Cartan*:

$$X_\alpha := \mathcal{G}_p \frac{\partial}{\partial x} + p \mathcal{G}_p \frac{\partial}{\partial y} - (\mathcal{G}_x + p \mathcal{G}_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

Este campo é tangente à superfície de Lie-Cartan.

Definimos as *Linhas de Curvatura Axial* como a projeção, por $\pi : PM \rightarrow M$, das linhas integrais \mathcal{L}_α do campo de Lie-Cartan X_α .

Sobre $p \in (M - \mathcal{U}_\alpha)$ temos 4 direções bem definidas, que são soluções da equação (27). Duas delas estão associadas ao eixo maior e duas ao eixo menor da elipse de curvatura $\varepsilon_\alpha(p)$.

A projeção nos dá então dois campos de pares de linhas tangentes ortogonais, cada par chamado de uma *rede integral*, sendo uma rede associada ao eixo menor e outra ao eixo maior.

Definimos as *Linhas de Curvatura Axial* como a projeção, por $\pi : PM \rightarrow M$, das linhas integrais \mathcal{L}_α do campo de Lie-Cartan X_α .

Sobre $p \in (M - \mathcal{U}_\alpha)$ temos 4 direções bem definidas, que são soluções da equação (27). Duas delas estão associadas ao eixo maior e duas ao eixo menor da elipse de curvatura $\varepsilon_\alpha(p)$.

A projeção nos dá então dois campos de pares de linhas tangentes ortogonais, cada par chamado de uma *rede integral*, sendo uma rede associada ao eixo menor e outra ao eixo maior.

Definimos as *Linhas de Curvatura Axial* como a projeção, por $\pi : PM \rightarrow M$, das linhas integrais \mathcal{L}_α do campo de Lie-Cartan X_α .

Sobre $p \in (M - \mathcal{U}_\alpha)$ temos 4 direções bem definidas, que são soluções da equação (27). Duas delas estão associadas ao eixo maior e duas ao eixo menor da elipse de curvatura $\varepsilon_\alpha(p)$.

A projeção nos dá então dois campos de pares de linhas tangentes ortogonais, cada par chamado de uma *rede integral*, sendo uma rede associada ao eixo menor e outra ao eixo maior.

À rede associada ao eixo maior daremos o nome de *Linhas de Curvatura Axial Principal* e à rede associada ao eixo menor daremos o nome de *Linhas de Curvatura Axial Média*.

Duas *Configurações Axiais*: a *Configuração Axial Principal* $\mathcal{P}_\alpha = \{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha\}$ definida pelos pontos axiumbílicos \mathcal{U}_α e pela rede integral \mathcal{X}_α , em $(M - \mathcal{U}_\alpha)$, na qual a imersão é curvada ao longo dos extremos do eixo maior da elipse de curvatura, e a *Configuração Axial Média* $\mathcal{Q}_\alpha = \{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha\}$ definida pelos pontos axiumbílicos \mathcal{U}_α e a rede integral \mathcal{Y}_α , em $(M - \mathcal{U}_\alpha)$, na qual a imersão é curvada ao longo dos extremos do eixo menor da elipse de curvatura.

À rede associada ao eixo maior daremos o nome de *Linhas de Curvatura Axial Principal* e à rede associada ao eixo menor daremos o nome de *Linhas de Curvatura Axial Média*.

Duas *Configurações Axiais*: a *Configuração Axial Principal* $\mathcal{P}_\alpha = \{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha\}$ definida pelos pontos axiumbólicos \mathcal{U}_α e pela rede integral \mathcal{X}_α , em $(M - \mathcal{U}_\alpha)$, na qual a imersão é curvada ao longo dos extremos do eixo maior da elipse de curvatura, e a *Configuração Axial Média* $\mathcal{Q}_\alpha = \{\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha\}$ definida pelos pontos axiumbólicos \mathcal{U}_α e a rede integral \mathcal{Y}_α , em $(M - \mathcal{U}_\alpha)$, na qual a imersão é curvada ao longo dos extremos do eixo menor da elipse de curvatura.

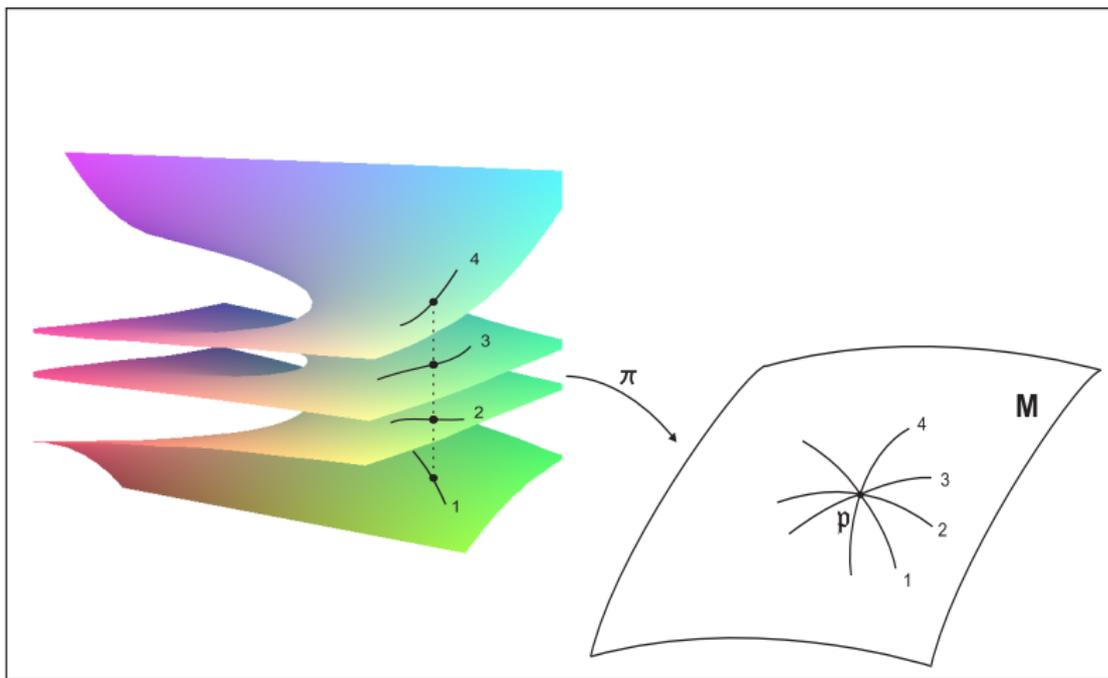


Figure: Ilustração da projeção em M das linhas \mathcal{L}_α do campo de Lie-Cartan na vizinhança de um ponto $p \in (M - \mathcal{U}_\alpha)$. Os números ilustram a projeção de cada linha, temos portanto as cruzes determinadas por 1 – 3 e 2 – 4

Outline

- 1 Comentários Iniciais
- 2 Equação Diferencial das Linhas Axiais
- 3 Configurações Axiais
- 4 Equação em uma Carta de Monge**
- 5 Configurações Axiais ao Redor de um Ponto Axiumbílico
- 6 Ponto Axiumbílico E_{34}^1
- 7 Ponto Axiumbílico E_{45}^1
- 8 Ciclos Axiais

$$\begin{cases} z = R(x, y) \\ w = S(x, y) \end{cases}$$

$$R(x, y) = \frac{r_{20}}{2}x^2 + r_{11}xy + \frac{r_{02}}{2}y^2 + \frac{r_{30}}{6}x^3 + \frac{r_{21}}{2}x^2y + \frac{r_{12}}{2}xy^2 + \frac{r_{03}}{6}y^3 \\ + \frac{r_{40}}{24}x^4 + \frac{r_{31}}{6}x^3y + \frac{r_{22}}{4}x^2y^2 + \frac{r_{13}}{6}xy^3 + \frac{r_{04}}{24}y^4 + h.o.t.$$

$$S(x, y) = \frac{s_{20}}{2}x^2 + s_{11}xy + \frac{s_{02}}{2}y^2 + \frac{s_{30}}{6}x^3 + \frac{s_{21}}{2}x^2y + \frac{s_{12}}{2}xy^2 \\ + \frac{s_{03}}{6}y^3 + \frac{s_{40}}{24}x^4 + \frac{s_{31}}{6}x^3y + \frac{s_{22}}{4}x^2y^2 + \frac{s_{13}}{6}xy^3 + \frac{s_{04}}{24}y^4 \\ + h.o.t.$$

No ponto $(x, y, R(x, y), S(x, y))$, o plano tangente à superfície neste ponto é gerado por $\{t_1, t_2\}$, onde $t_1 = (1, 0, R_x, S_x)$ e $t_2 = (0, 1, R_y, S_y)$.

O plano normal é então gerado pelos vetores $\{N_1, N_2\}$, onde $N_1 = \frac{\widetilde{N}_1}{|\widetilde{N}_1|}$ e $N_2 = \frac{\widetilde{N}_2}{|\widetilde{N}_2|}$ sendo $\widetilde{N}_1 = (-R_x, -R_y, 1, 0)$ e $\widetilde{N}_2 = t_1 \wedge t_2 \wedge \widetilde{N}_1$.

Aqui \wedge é o produto vetorial de três vetores em \mathbb{R}^4 , definido a partir da equação:

$$\det(t_1, t_2, \widetilde{N}_1, \bullet) = \langle \widetilde{N}_2, \bullet \rangle$$

No ponto $(x, y, R(x, y), S(x, y))$, o plano tangente à superfície neste ponto é gerado por $\{t_1, t_2\}$, onde $t_1 = (1, 0, R_x, S_x)$ e $t_2 = (0, 1, R_y, S_y)$.

O plano normal é então gerado pelos vetores $\{N_1, N_2\}$, onde $N_1 = \frac{\widetilde{N}_1}{|\widetilde{N}_1|}$ e $N_2 = \frac{\widetilde{N}_2}{|\widetilde{N}_2|}$ sendo $\widetilde{N}_1 = (-R_x, -R_y, 1, 0)$ e $\widetilde{N}_2 = t_1 \wedge t_2 \wedge \widetilde{N}_1$.

Aqui \wedge é o produto vetorial de três vetores em \mathbb{R}^4 , definido a partir da equação:

$$\det(t_1, t_2, \widetilde{N}_1, \bullet) = \langle \widetilde{N}_2, \bullet \rangle$$

No ponto $(x, y, R(x, y), S(x, y))$, o plano tangente à superfície neste ponto é gerado por $\{t_1, t_2\}$, onde $t_1 = (1, 0, R_x, S_x)$ e $t_2 = (0, 1, R_y, S_y)$.

O plano normal é então gerado pelos vetores $\{N_1, N_2\}$, onde $N_1 = \frac{\widetilde{N}_1}{|\widetilde{N}_1|}$ e $N_2 = \frac{\widetilde{N}_2}{|\widetilde{N}_2|}$ sendo $\widetilde{N}_1 = (-R_x, -R_y, 1, 0)$ e $\widetilde{N}_2 = t_1 \wedge t_2 \wedge \widetilde{N}_1$.

Aqui \wedge é o produto vetorial de três vetores em \mathbb{R}^4 , definido a partir da equação:

$$\det(t_1, t_2, \widetilde{N}_1, \bullet) = \langle \widetilde{N}_2, \bullet \rangle$$

A condição para o ponto p , expresso nessa carta de Monge por $(0, 0)$, ser axiumbílico é que:

$$\begin{cases} r_{11}(r_{20} - r_{02}) + s_{11}(s_{20} - s_{02}) = 0 \\ 4(r_{11}^2 + s_{11}^2) - (r_{20} - r_{02})^2 - (s_{20} - s_{02})^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r_{11} = (s_{02} - s_{20}) \\ 2s_{11} = -(r_{02} - r_{20}) \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 2r_{11} = -(s_{02} - s_{20}) \\ 2s_{11} = (r_{02} - r_{20}) \end{cases}$$

A condição para o ponto p , expresso nessa carta de Monge por $(0, 0)$, ser axiumbílico é que:

$$\begin{cases} r_{11}(r_{20} - r_{02}) + s_{11}(s_{20} - s_{02}) = 0 \\ 4(r_{11}^2 + s_{11}^2) - (r_{20} - r_{02})^2 - (s_{20} - s_{02})^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r_{11} = (s_{02} - s_{20}) \\ 2s_{11} = -(r_{02} - r_{20}) \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} 2r_{11} = -(s_{02} - s_{20}) \\ 2s_{11} = (r_{02} - r_{20}) \end{cases}$$

A condição para o ponto p , expresso nessa carta de Monge por $(0, 0)$, ser axiumbílico é que:

$$\begin{cases} r_{11}(r_{20} - r_{02}) + s_{11}(s_{20} - s_{02}) = 0 \\ 4(r_{11}^2 + s_{11}^2) - (r_{20} - r_{02})^2 - (s_{20} - s_{02})^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r_{11} = (s_{02} - s_{20}) \\ 2s_{11} = -(r_{02} - r_{20}) \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 2r_{11} = -(s_{02} - s_{20}) \\ 2s_{11} = (r_{02} - r_{20}) \end{cases}$$

$$\alpha_1 = s_{12} - s_{30} + 2r_{21}, \quad \alpha_2 = r_{30} - r_{12} + 2s_{21},$$
$$\alpha_3 = s_{03} - s_{21} + 2r_{12}, \quad \alpha_4 = r_{21} - r_{03} + 2s_{12}.$$

Condição de Transversalidade

$$T := \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4 \neq 0$$

$$\alpha_1 = s_{12} - s_{30} + 2r_{21}, \quad \alpha_2 = r_{30} - r_{12} + 2s_{21},$$
$$\alpha_3 = s_{03} - s_{21} + 2r_{12}, \quad \alpha_4 = r_{21} - r_{03} + 2s_{12}.$$

Condição de Transversalidade

$$T := \alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_4 \neq 0$$

Proposição

Seja p um ponto axiumbílico. Então existe uma carta de Monge e uma homotetia em \mathbb{R}^4 tal que a equação diferencial das linhas axiais é dada por

$$y(dy^4 - 6dx^2dy^2 + dx^4) + (ax + by)dxdy(dx^2 - dy^2) + H(x, y, dx, dy) = 0$$

onde H contém os termos de ordem maior ou igual a 2 em (x, y) . Além disso, o ponto axiumbílico p é transversal se, e somente se, $a \neq 0$.

Observação

Se fizermos $p = \frac{dy}{dx}$, e dividindo a equação anterior por dx^4 , obtemos a equação das linhas axiais no formato polinomial:

$$y(p^4 - 6p^2 + 1) + (ax + by)p(1 - p^2) + H(x, y, p) = 0$$

onde H contém os termos de ordem maior ou igual a 2 em (x, y) .

Outline

- 1 Comentários Iniciais
- 2 Equação Diferencial das Linhas Axiais
- 3 Configurações Axiais
- 4 Equação em uma Carta de Monge
- 5 Configurações Axiais ao Redor de um Ponto Axiumbólico**
- 6 Ponto Axiumbólico E_{34}^1
- 7 Ponto Axiumbólico E_{45}^1
- 8 Ciclos Axiais

A superfície de Lie-Cartan em PM é descrita por:

$$\mathcal{G}(x, y, p) = y(p^4 - 6p^2 + 1) + (ax + by)p(1 - p^2) + H(x, y, p) = 0$$

e restrito ao eixo p , o campo de Lie-Cartan tem expressão:

$$X = -p[(p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)] \frac{\partial}{\partial p}.$$

as singularidades ao longo do eixo p são determinadas por:

$$P(p) = pR(p) = p[(p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)] = 0.$$

A superfície de Lie-Cartan em PM é descrita por:

$$\mathcal{G}(x, y, p) = y(p^4 - 6p^2 + 1) + (ax + by)p(1 - p^2) + H(x, y, p) = 0$$

e restrito ao eixo p , o campo de Lie-Cartan tem expressão:

$$X = -p[(p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)] \frac{\partial}{\partial p}.$$

as singularidades ao longo do eixo p são determinadas por:

$$P(p) = pR(p) = p[(p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)] = 0.$$

A superfície de Lie-Cartan em PM é descrita por:

$$\mathcal{G}(x, y, p) = y(p^4 - 6p^2 + 1) + (ax + by)p(1 - p^2) + H(x, y, p) = 0$$

e restrito ao eixo p , o campo de Lie-Cartan tem expressão:

$$X = -p[(p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)] \frac{\partial}{\partial p}.$$

as singularidades ao longo do eixo p são determinadas por:

$$P(p) = pR(p) = p[(p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)] = 0.$$

$R(p) = (p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)$ tem discriminante:

$$\Delta(a, b) = 16a^5 + 4(b^2 + 68)a^4 + 16(b^2 + 144)a^3 \\ - 8(b^2 - 80)(16 + b^2)a^2 + 96(16 + b^2)^2a + 4(16 + b^2)^3$$

e a derivada de X ao longo do eixo:

$$DX(0, 0, p) = \begin{bmatrix} a(1 - 3p^2) & 4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p & 0 \\ a(1 - 3p^2)p & p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p] & 0 \\ 0 & 0 & -P'(p) \end{bmatrix}$$

$R(p) = (p^4 - 6p^2 + 1) + (1 - p^2)(a + bp)$ tem discriminante:

$$\Delta(a, b) = 16a^5 + 4(b^2 + 68)a^4 + 16(b^2 + 144)a^3 - 8(b^2 - 80)(16 + b^2)a^2 + 96(16 + b^2)^2a + 4(16 + b^2)^3$$

e a derivada de X ao longo do eixo:

$$DX(0, 0, p) = \begin{bmatrix} a(1 - 3p^2) & 4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p & 0 \\ a(1 - 3p^2)p & p[4p^3 + b(1 - 3p^2) - 12p] & 0 \\ 0 & 0 & -P'(p) \end{bmatrix}$$

Os autovalores de DX nos pontos singulares $(0, 0, p_0) = (0, 0, 0)$ e $(0, 0, p_i), p_i \neq 0$ são:

$$p_0 = 0 : \begin{cases} \lambda_1 = a, \\ \lambda_2 = -(a + 1), \end{cases}$$

$$p_i \neq 0 : \begin{cases} \lambda_1 = \frac{(p_i^2 + 1)^3}{(p_i^2 - 1)}, \\ \lambda_2 = -p_i R'(p_i). \end{cases}$$

O autoespaço associado a λ_1 é transversal ao eixo p e o autovalor λ_2 tem por autoespaço o eixo projetivo.

Os autovalores de DX nos pontos singulares $(0, 0, p_0) = (0, 0, 0)$ e $(0, 0, p_i), p_i \neq 0$ são:

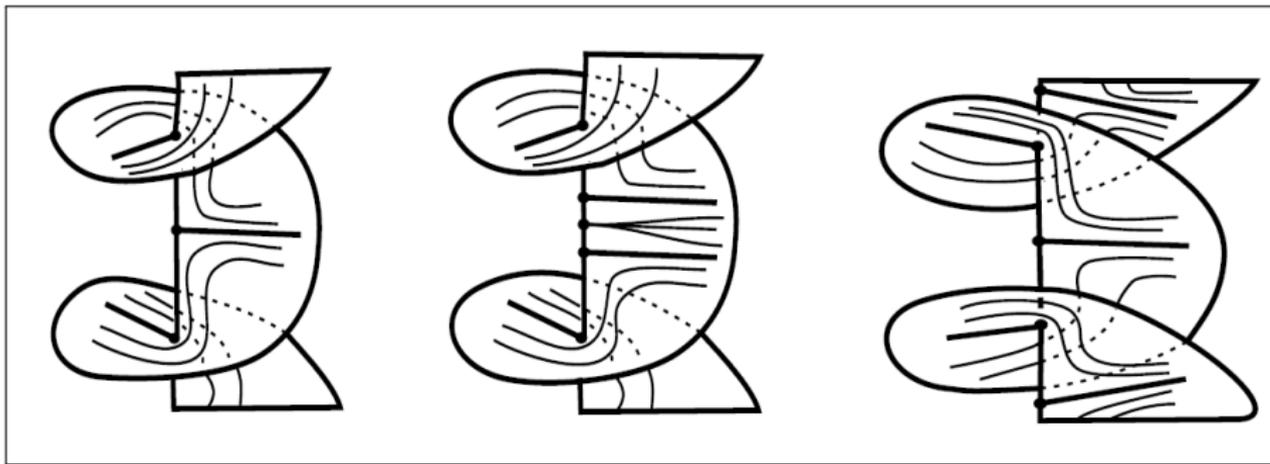
$$p_0 = 0 : \begin{cases} \lambda_1 = a, \\ \lambda_2 = -(a + 1), \end{cases}$$

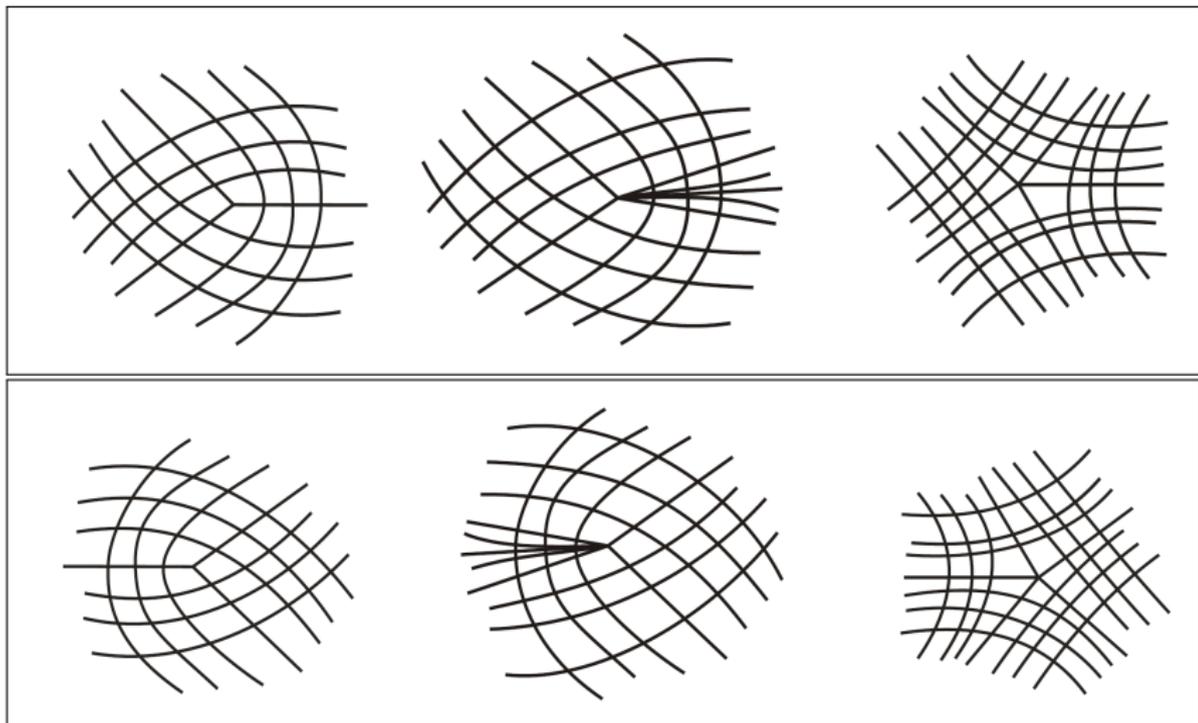
$$p_i \neq 0 : \begin{cases} \lambda_1 = \frac{(p_i^2 + 1)^3}{(p_i^2 - 1)}, \\ \lambda_2 = -p_i R'(p_i). \end{cases}$$

O autoespaço associado a λ_1 é transversal ao eixo p e o autovalor λ_2 tem por autoespaço o eixo projetivo.

Três casos iniciais analisados por Garcia & Sotomayor:

- $\Delta(a, b) < 0$,
- $\Delta(a, b) > 0$, $a < 0$, $a \neq -1$,
- $\Delta(a, b) > 0$, $a > 0$.





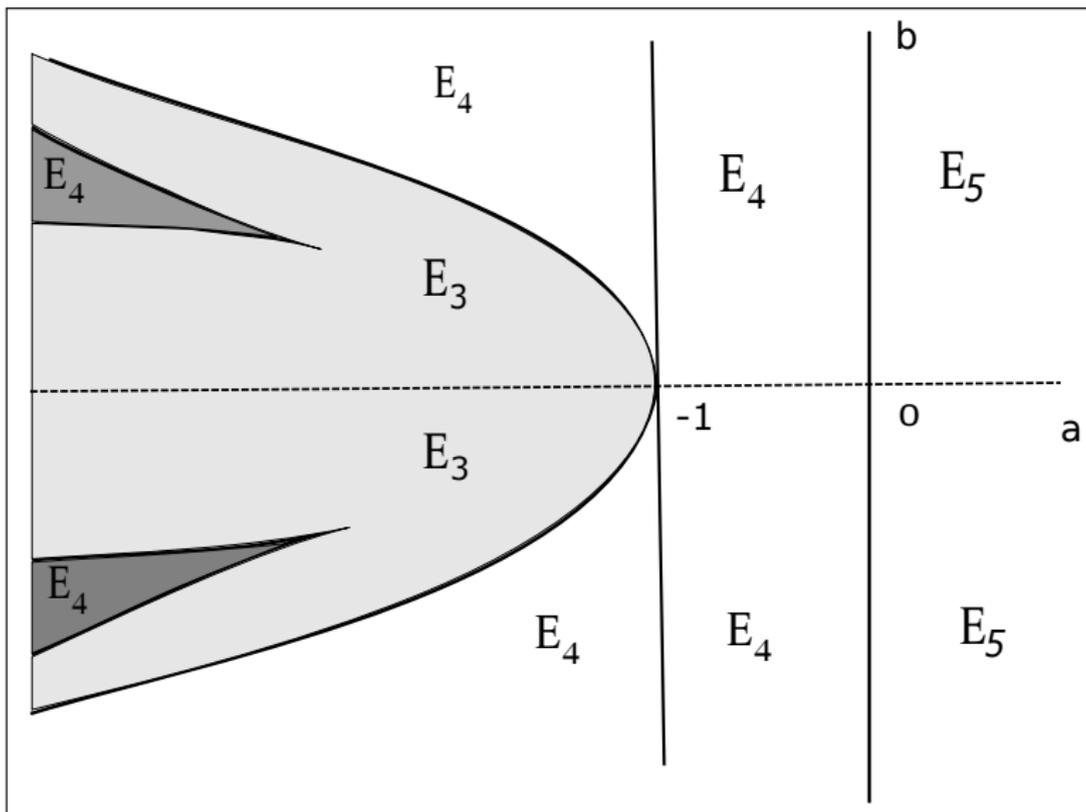


Figure: Diagram of stable axiumbilic points, E_3 , E_4 and E_5 .

Outline

- 1 Comentários Iniciais
- 2 Equação Diferencial das Linhas Axiais
- 3 Configurações Axiais
- 4 Equação em uma Carta de Monge
- 5 Configurações Axiais ao Redor de um Ponto Axiumbólico
- 6 Ponto Axiumbólico E_{34}^1**
- 7 Ponto Axiumbólico E_{45}^1
- 8 Ciclos Axiais

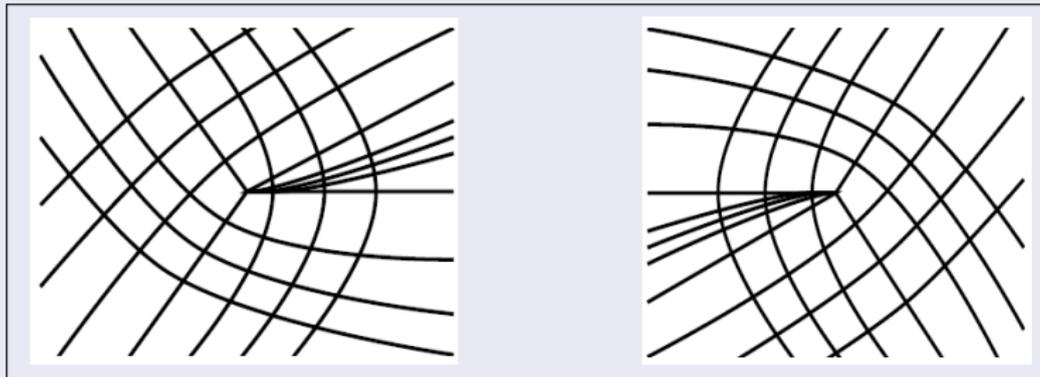
Definição

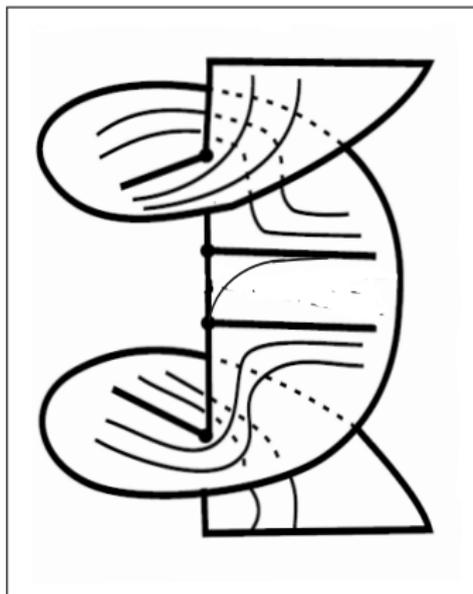
Seja $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ imersão de classe C^r , $r \geq 5$, de uma superfície suave orientada. Um ponto axiumbílico p é do tipo E_{34}^1 se $a \neq 0$ e:

- i*) $\Delta(a, b) = 0$, $(a, b) \neq (-1, 0)$ e $(a, b) \neq (-\frac{27}{2}, \pm\frac{5}{2}\sqrt{5})$, ou
- ii*) $b \neq 0$ if $a = -1$.

Proposição

Seja $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ imersão de classe C^r , $r \geq 5$ de uma superfície suave orientada com ponto axiumbílico p do tipo E_{34}^1 . Então a configuração axial, de α na vizinhança de p é como na figura abaixo:

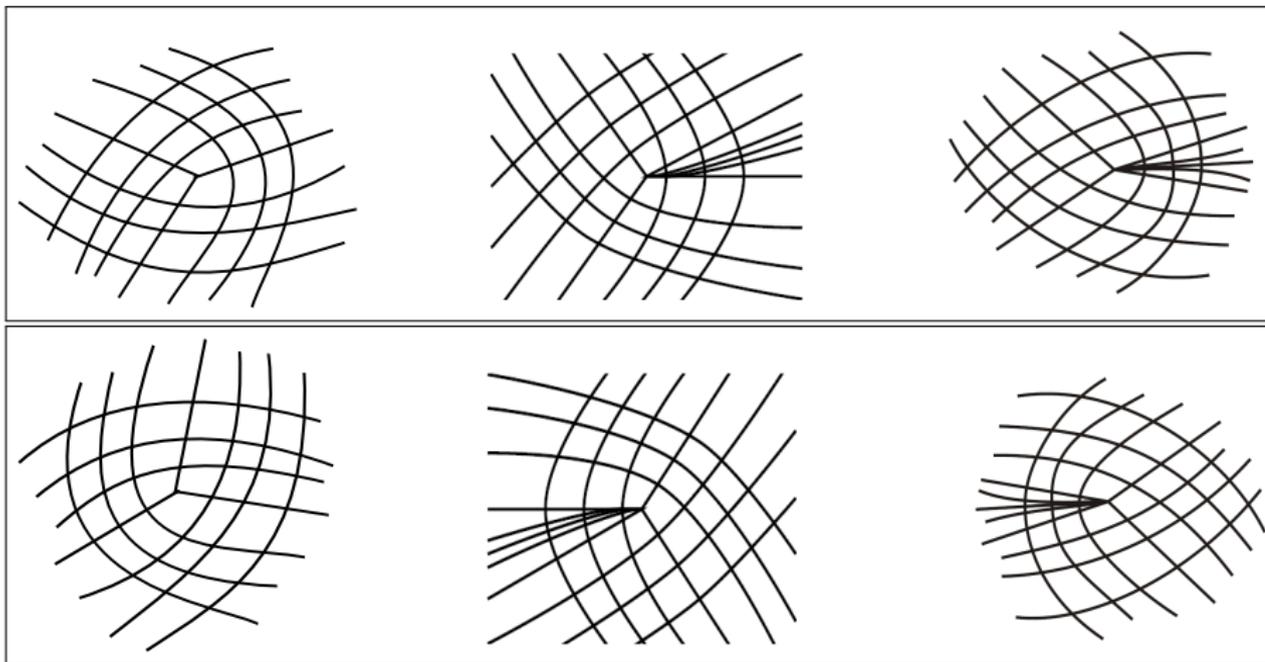


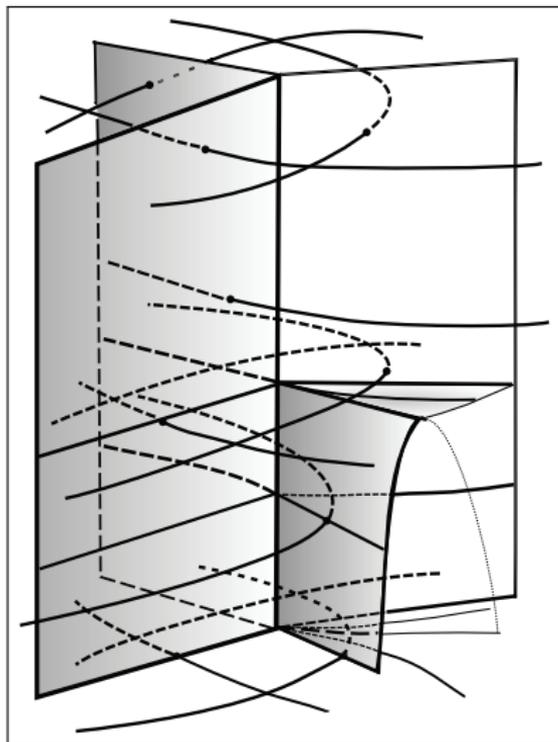


Proposição

Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r$, $r \geq 5$ imersão satisfazendo a condição de que o ponto p seja axiumbílico do tipo E_{34}^1 . Então, existe uma vizinhança V de p , uma vizinhança \mathcal{V} de α e uma função $\mathcal{F} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{r-3} de modo que cada $\mu \in \mathcal{V}$ tem um único ponto axiumbílico $p_\mu \in V$ sendo:

- i) $d\mathcal{F}_\alpha \neq 0$.
- ii) $\mathcal{F}(\mu) < 0$ se, e somente se, p_μ é axiumbílico do tipo E_3 .
- iii) $\mathcal{F}(\mu) > 0$ se, e somente se, p_μ é axiumbílico do tipo E_4 .
- iv) $\mathcal{F}(\mu) = 0$ se, e somente se, p_μ é axiumbílico do tipo E_{34}^1 .





Outline

- 1 Comentários Iniciais
- 2 Equação Diferencial das Linhas Axiais
- 3 Configurações Axiais
- 4 Equação em uma Carta de Monge
- 5 Configurações Axiais ao Redor de um Ponto Axiumbólico
- 6 Ponto Axiumbólico E_{34}^1
- 7 Ponto Axiumbólico E_{45}^1**
- 8 Ciclos Axiais

Definição

Um ponto axiumbílico é do tipo E_{45}^1 se a variedade \mathcal{L}_α tem exatamente 4 singularidades localizadas ao longo do eixo projetivo as quais são do tipo Morse.

Proposição

Considere uma carta de Monge e uma homotetia tal que a equação diferencial das linhas axiais é escrita como:

$$a_0(x, y)(dx^4 - 6dx^2dy^2 + dy^4) + a_1(x, y)dxdy(dx^2 - dy^2) + 0(3) = 0,$$

sendo

$$a_0(x, y) = y + \frac{1}{2}a_{20}x^2 + a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + h.o.t.,$$

$$a_1(x, y) = b_{01}y + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2 + h.o.t.$$

Definição

Um ponto axiumbílico é do tipo E_{45}^1 se a variedade \mathcal{L}_α tem exatamente 4 singularidades localizadas ao longo do eixo projetivo as quais são do tipo Morse.

Proposição

Considere uma carta de Monge e uma homotetia tal que a equação diferencial das linhas axiais é escrita como:

$$a_0(x, y)(dx^4 - 6dx^2dy^2 + dy^4) + a_1(x, y)dxdy(dx^2 - dy^2) + 0(3) = 0,$$

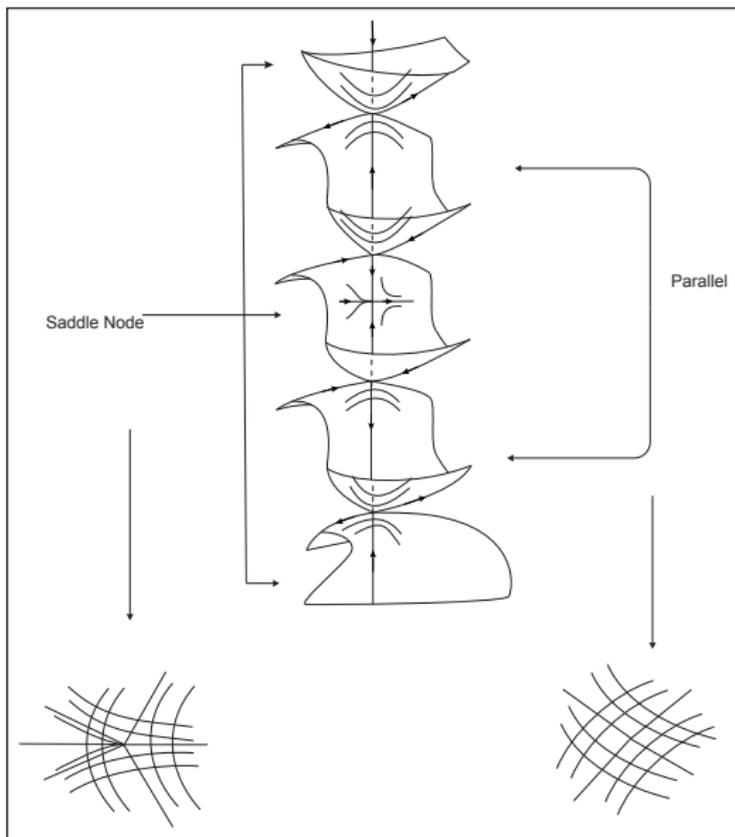
sendo

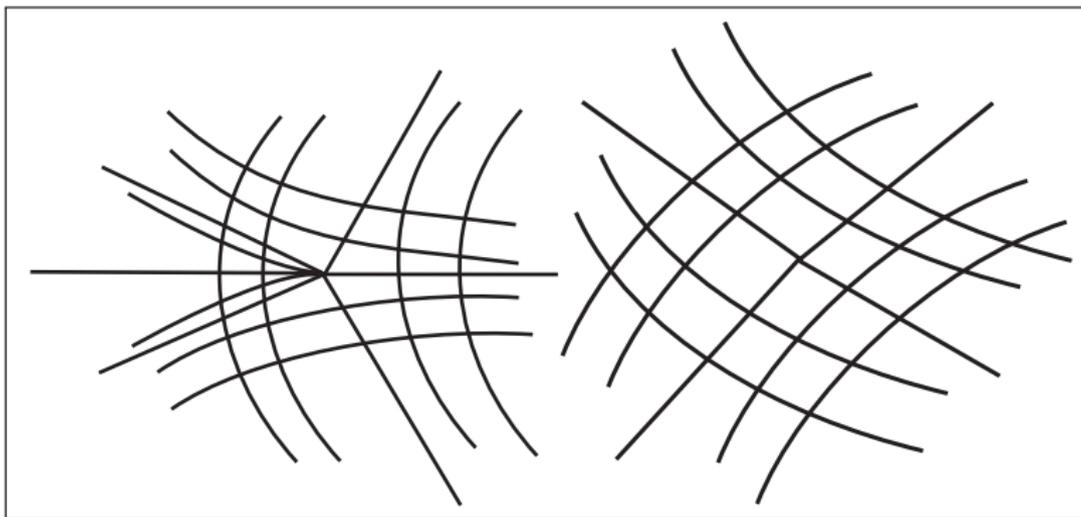
$$a_0(x, y) = y + \frac{1}{2}a_{20}x^2 + a_{11}xy + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + h.o.t.,$$

$$a_1(x, y) = b_{01}y + \frac{1}{2}b_{20}x^2 + b_{11}xy + \frac{1}{2}b_{02}y^2 + h.o.t.$$

Então, as seguintes condições são equivalentes:

- i)* as curvas $a_0 = 0$ e $a_1 = 0$ são regulares e tem contato quadrático em 0 ,
- ii)* o ponto axiumbílico 0 é do tipo $E_{4,5}^1$,
- iii)* o campo de Lie-Cartan definido em \mathcal{L}_α tem uma sela-nó quadrática no eixo p com variedade central transversal ao eixo.





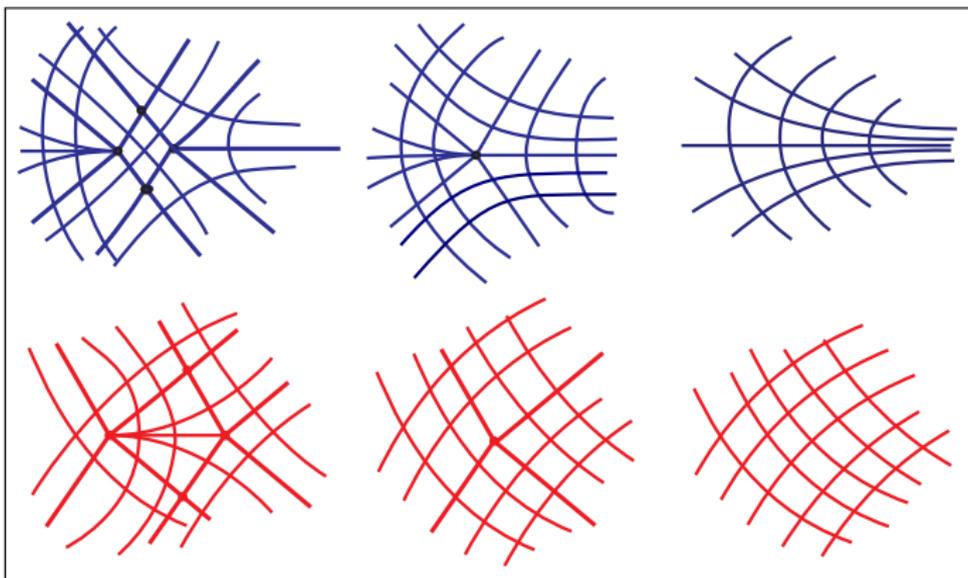
Proposição

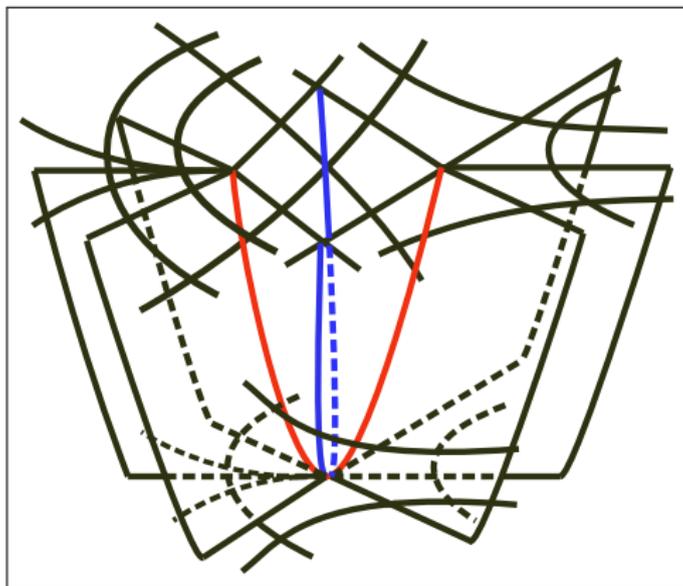
Seja $\alpha \in \mathcal{I}^r$, $r \geq 5$, imersão satisfazendo a condição $E_{4,5}^1$ em um ponto axiumbílico p . Então existe uma vizinhança V de p , uma vizinhança \mathcal{V} de α e uma função

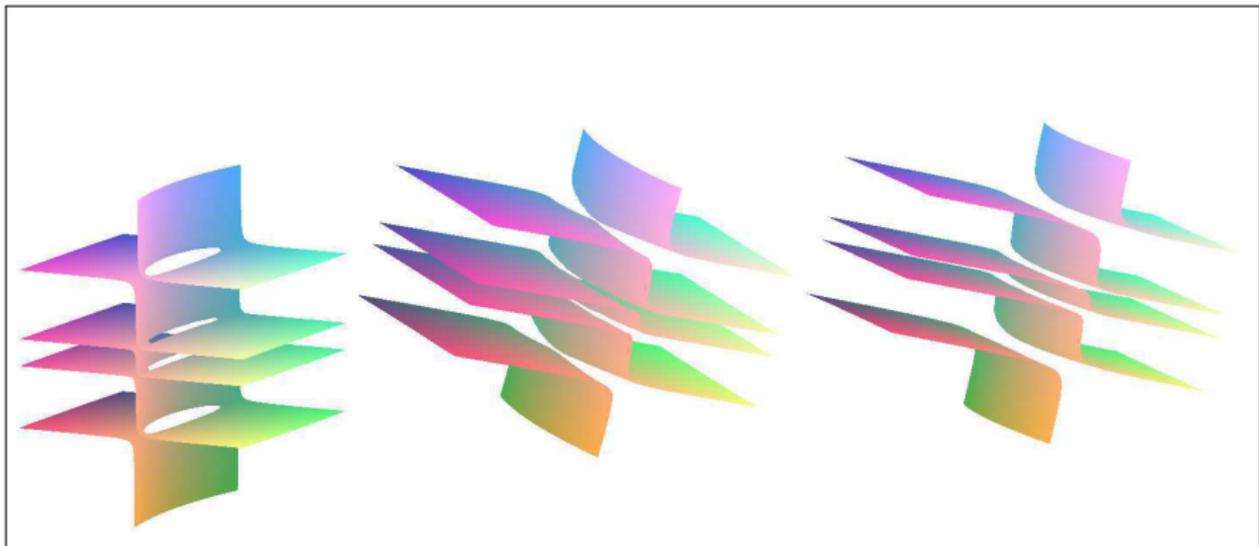
$$F : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de classe C^{r-3} tal que:

- i) $dF_\alpha \neq 0$
- ii) $F(\mu) = 0$ se, e somente se, $\mu \in \mathcal{V}$ tem um único ponto axiumbílico em V , o qual é do tipo $E_{4,5}^1$
- iii) $F(\mu) < 0$ se, e somente se, μ tem exatamente dois pontos axiumbílicos em V , sendo um do tipo E_4 e o outro do tipo E_5
- iv) $F(\mu) > 0$ se, e somente se, μ não tem pontos axiumbílicos em V .







Outline

- 1 Comentários Iniciais
- 2 Equação Diferencial das Linhas Axiais
- 3 Configurações Axiais
- 4 Equação em uma Carta de Monge
- 5 Configurações Axiais ao Redor de um Ponto Axiumbílico
- 6 Ponto Axiumbílico E_{34}^1
- 7 Ponto Axiumbílico E_{45}^1
- 8 Ciclos Axiais**

Seja $\gamma : I \rightarrow M$ ciclo axial parametrizado pelo comprimento de arco u . Então, ao longo de γ está definido um referencial ortonormal positivo de Darboux $\{T_1, T_2, N_1, N_2\}$, sendo $T_1(u) = \gamma'(u)$, $\{N_1, N_2\}$, um referencial ortonormal do plano normal associado à elipse de curvatura com $N_2 = T_1 \wedge T_2 \wedge N_1$.

Denotando $H = h_1 N_1 + h_2 N_2$ o vetor curvatura média,
 $\tau_g = \tau_{g,1} N_1 + \tau_{g,2} N_2$ o vetor torção geodésica,
 $k_n - H = k_1 N_1$, $k_1 \geq 0$ o semi-eixo principal da elipse de curvatura e $\tau_n = \langle N'_1, N_2 \rangle$ é a torsão normal do referencial $\{N_1, N_2\}$

Seja $\gamma : I \rightarrow M$ ciclo axial parametrizado pelo comprimento de arco u . Então, ao longo de γ está definido um referencial ortonormal positivo de Darboux $\{T_1, T_2, N_1, N_2\}$, sendo $T_1(u) = \gamma'(u)$, $\{N_1, N_2\}$, um referencial ortonormal do plano normal associado à elipse de curvatura com $N_2 = T_1 \wedge T_2 \wedge N_1$.

Denotando $H = h_1 N_1 + h_2 N_2$ o vetor curvatura média,
 $\tau_g = \tau_{g,1} N_1 + \tau_{g,2} N_2$ o vetor torção geodésica,
 $k_n - H = k_1 N_1$, $k_1 \geq 0$ o semi-eixo principal da elipse de curvatura e $\tau_n = \langle N'_1, N_2 \rangle$ é a torsão normal do referencial $\{N_1, N_2\}$

$$\begin{bmatrix} T'_1 \\ T'_2 \\ N'_1 \\ N'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & (h_1 + k_1) & h_2 \\ -k_g & 0 & \tau_{g,1} & \tau_{g,2} \\ -(h_1 + k_1) & -\tau_{g,1} & 0 & \tau_n \\ -h_2 & -\tau_{g,2} & -\tau_n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

Proposição

Seja γ um ciclo axial da configuração axial principal \mathcal{P}_α parametrizado pelo comprimento de arco u e comprimento L , e $\{T_1, T_2, N_1, N_2\}$ referencial positivo ortogonal de Darboux ao longo de γ . Então a expressão:

$$\begin{aligned}\alpha(u, v) &= \gamma(u) + vT_2(u) \\ &+ \left[\frac{(h_1(u) - k_1(u))}{2}v^2 + A_3(u)\frac{v^3}{6} \right. \\ &+ \left. A_4(u)\frac{v^4}{24} + A_5(u, v)\frac{v^5}{120} \right] \cdot N_1(u) \\ &+ \left[\frac{h_2(u)}{2}v^2 + B_3(u)\frac{v^3}{6} \right. \\ &+ \left. B_4(u)\frac{v^4}{24} + B_5(u, v)\frac{v^5}{120} \right] \cdot N_2(u)\end{aligned}$$

A expressão define uma parametrização local, L -periódica em u , de classe C^{r-5} em uma vizinhança de γ .

$(k_1^2 - \tau_{g,2}^2)$ é a diferença entre os quadrados dos eixos da elipse de curvatura ε_α .

A expressão define uma parametrização local, L -periódica em u , de classe C^{r-5} em uma vizinhança de γ .

$(k_1^2 - \tau_{g,2}^2)$ é a diferença entre os quadrados dos eixos da elipse de curvatura ε_α .

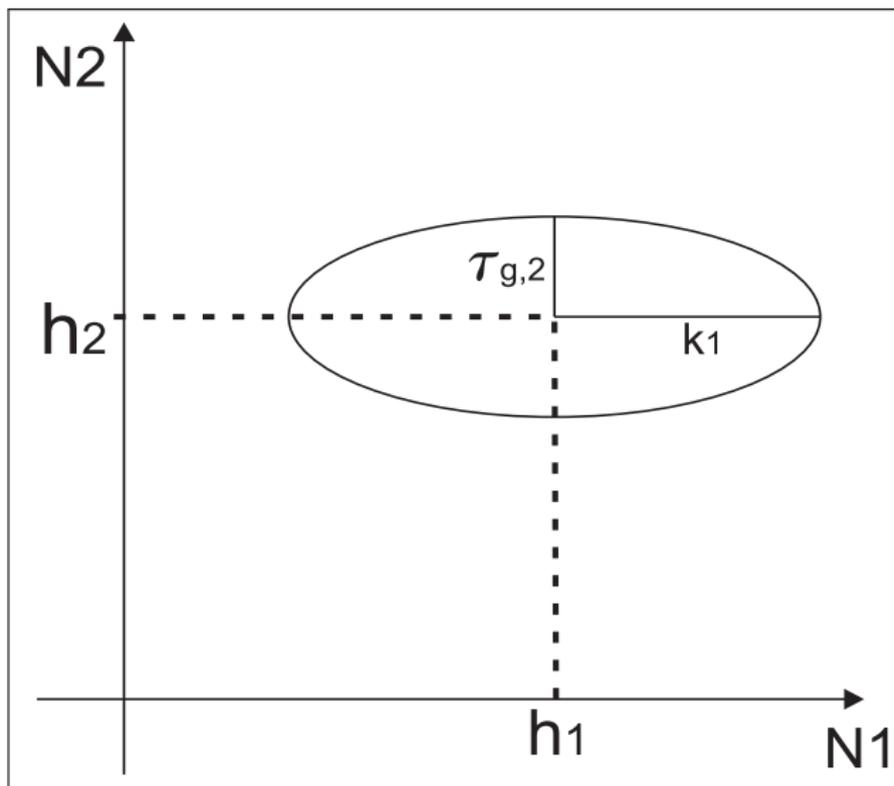


Figure: Ilustração da Elipse de Curvatura sobre o ciclo axial segundo a parametrização efetuada

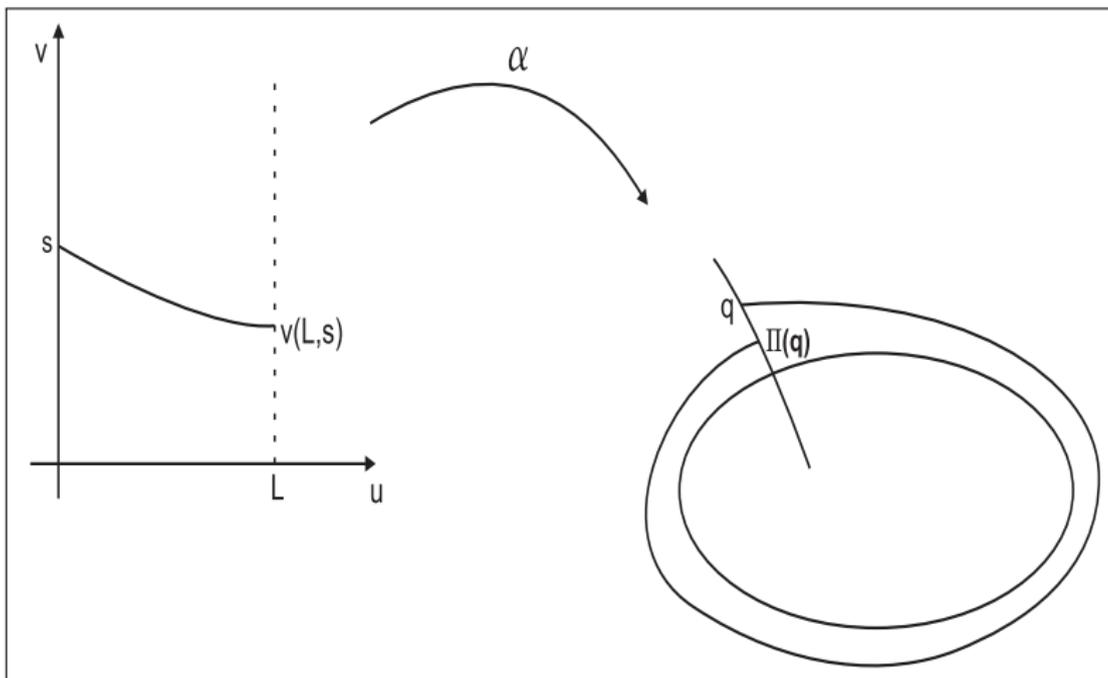


Figure: Parametrização local em torno do ciclo axial principal, ilustrando aplicação de primeiro retorno.

$$\pi'(0) = \left. \frac{\partial}{\partial s} v(L, s) \right|_{s=0}$$

$$\pi''(0) = \left. \frac{\partial^2}{\partial s^2} v(L, s) \right|_{s=0}$$

Definição

O ciclo axial γ é dito *hiperbólico* se $\pi'(0) \neq 1$, e é *semi-hiperbólico* se $\pi'(0) = 1$ e $\pi''(0) \neq 0$.

$$\pi'(0) = \left. \frac{\partial}{\partial s} v(L, s) \right|_{s=0}$$

$$\pi''(0) = \left. \frac{\partial^2}{\partial s^2} v(L, s) \right|_{s=0}$$

Definição

O ciclo axial γ é dito *hiperbólico* se $\pi'(0) \neq 1$, e é *semi-hiperbólico* se $\pi'(0) = 1$ e $\pi''(0) \neq 0$.

$$\pi'(0) = \left. \frac{\partial}{\partial s} v(L, s) \right|_{s=0}$$

$$\pi''(0) = \left. \frac{\partial^2}{\partial s^2} v(L, s) \right|_{s=0}$$

Definição

O ciclo axial γ é dito *hiperbólico* se $\pi'(0) \neq 1$, e é *semi-hiperbólico* se $\pi'(0) = 1$ e $\pi''(0) \neq 0$.

Proposição

Seja γ um ciclo axial principal da configuração principal \mathcal{P}_α , parametrizado pelo comprimento de arco u e comprimento L conforme a Proposição 12. Então a primeira derivada da aplicação de retorno π é dada por:

$$\ln \pi'(0) = -\frac{1}{4} \int_0^L \frac{1}{k_1^2 - \tau_{g,2}^2} \cdot \left[(B_3 + \tau'_{g,2}) \cdot \tau_{g,2} + 2(h_2 \tau_n - h'_1) k_1 \right] du$$

Proposição

Seja $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ imersão de classe C^r , $r \geq 6$ e γ ciclo axial principal de α , parametrizado pelo comprimento de arco u e comprimento L . Considere a carta (u, v) conforme a Proposição 12 e a perturbação:

$$\alpha_\varepsilon(u, v) = \alpha(u, v) + \varepsilon \left[\frac{\tau_{g,2}}{6} v^3 \right] \delta(v) N_2(u)$$

onde $\delta = 1$ na vizinhança de $v = 0$ com suporte compacto e assumimos $\tau_{g,2} \neq 0$. Então, γ é um ciclo axial principal de α_ε , para ε suficientemente pequeno, o qual é hiperbólico para α_ε , $\varepsilon \neq 0$.

Proposição

Seja γ um ciclo axial principal da configuração principal \mathcal{P}_α , parametrizado pelo comprimento de arco u e comprimento L , o qual é não-hiperbólico. Então a segunda derivada da aplicação de retorno π é dada por:

$$\pi''(0) = \frac{1}{4} \cdot \int_0^L \frac{\Phi}{(k_1^2 - \tau_{g,2}^2)^2} \cdot \eta(u) du$$

Sendo

$$\eta(u) = \exp \left(-\frac{1}{4} \int_0^u \frac{1}{k_1^2 - \tau_{g,2}^2} \cdot \left[(B_3 + \tau'_{g,2}) \cdot \tau_{g,2} + 2(h_2 \tau_n - h'_1) k_1 \right] dt \right)$$

Proposição

Seja $\alpha : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ imersão de classe C^r , $r \geq 6$ e γ ciclo axial principal não-hiperbólico de α , parametrizado pelo comprimento de arco u e comprimento L . Considere a carta (u, v) conforme a Proposição 12 e a perturbação:

$$\alpha_\varepsilon(u, v) = \alpha(u, v) + \varepsilon \left[\frac{\tau_{g,2}}{24} v^4 \right] \delta(v) N_2(u)$$

onde $\delta = 1$ na vizinhança de $v = 0$ com suporte compacto e assumimos $\tau_{g,2} \neq 0$. Então, γ é um ciclo axial principal de α_ε , para ε suficientemente pequeno, o qual é semi-hiperbólico para α_ε , $\varepsilon \neq 0$.

Bibliografia

- Garcia, R., Sotomayor, J. Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory. Publicações Matemáticas. IMPA. 2009.
- Garcia, R., Sotomayor, J., Spindola, F. Axiumbilic Singular Points of Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 .
Journal of Singularities, Vol. 10 (2014), 124-146.
<http://www.journalofsing.org/volume10/garcia-sotomayor-spindola.pdf>